سیستم‌های فازی و کاربردها

سال دوم، شماره دوم (پاییز و زمستان ۱۳۹۸) صص. ۳۳ تا ۶۸

DOR: 20.1001.1.27174409.1397.2.2.2.2

مروری بر اتوماتای فازی ۲ (اتوماتای فازی عمومی)

مرضیه شمسی‌زاده، محمد مهدی زاهدی، خدیجه ابول‌پور

بخش ریاضی، دانشگاه صنعتی خاتم الانبیاء بهبهان، بهبهان، ایران

بخش ریاضی، دانشگاه تحصیلات تکمیلی صنعتی و فناوری پیشرفته کرمان، کرمان، ایران

گروه ریاضی، واحد شیراز، دانشگاه آزاد اسلامی، شیراز، ایران

چکیده

در این مقاله، با توجه به اهمیت مطالعه در زمینه‌ی اتوماتا، مفهوم اتوماتای فازی عمومی در حالت‌های مختلف مورد بررسی قرار می‌گیرد. در ابتدا، مفهوم اتوماتای فازی عمومی و سپس، با توجه به مفهوم مجموعه فازی شهودی، اتوماتای فازی شهودی عمومی ارایه می‌شود. در ادامه، با توجه به مفهوم جبر پایه‌ای که اولین بار توسط هایک ارایه شد، تعریف اتوماتای فازی عمومی BL بیان می‌شود. علاوه بر این، مثال‌هایی برای روشن‌تر شدن بهتر مفاهیم ارایه می‌شود.

۱ سرآغاز

مجموعه‌ی فازی اولین بار توسط پروفسور لطفی عسکرزاده[1] در سال ۱۹۶۵ ارایه گردید [۲۲]. آتاناسوف[2] [۲] با اضافه کردن مقدار عدم‌عضویت، مفهوم مجموعه‌ی فازی را گسترش

[1] Zadeh

[2] Atanassov

Mathematics Subject Classification (2010): 68Q70, 18B20, 03E72, 06D72, **Email:** abolpor_kh@yahoo.com.

عبارات و کلمات کلیدی: اتوماتا، اتوماتای فازی، اتوماتای فازی شهودی، اتوماتای عمومی

داد و مفهوم مجموعه‌ی فازی شهودی[۳] را که انعطاف بیشتری نسبت به مجموعه‌ی فازی دارد، ارایه داد. مجموعه‌ی فازی شهودی از لحاظ نظری و کاربردی تاریخچه‌ای غنی دارد [۱۸، ۱۷، ۱۶، ۱۵، ۱۳، ۱۸، ۱۰، ۸]. آتاناسوف و استوا[۴] مفهوم مجموعه‌ی فازی شهودی را به مجموعه‌ی L –فازی شهودی گسترش دادند [۳] که در آن، L یک مشبکه می‌باشد. وی[۵] [۲۰] در سال ۱۹۶۷ و سانتوس[۶] [۱۲] در سال ۱۹۶۸ ایده‌ای از اتوماتای فازی را ارایه دادند. آتاناسوف و استوا[۷] مفهوم مجموعه‌ی فازی شهودی را به مجموعه‌ی L –فازی شهودی گسترش دادند [۳] که در آن، L یک مشبکه می‌باشد. تپاسویچ[۸] و جرس تنکورن[۹] تعریف جدیدی از مجموعه‌ی فازی شهودی مشبکه مقداری ارایه دادند [۸]. با توجه به مفهوم مجموعه‌ی فازی شهودی، جون[۱۰] [۱] مفهوم ماشین‌های حالت متناهی فازی شهودی را به عنوان تعمیمی از ماشین‌های حالت متناهی فازی ارایه نمود. دوست‌فاطمه و کرمر[۱۱] [۶] در سال ۲۰۰۵ مفهوم اتوماتای فازی را گسترش داده و مفهوم اتوماتای فازی عمومی را بیان کرد. منطق پایه‌ای[۱۲] اولین بار توسط هاجک[۱۳] [۹] بیان شد. در سال ۲۰۱۲، ابول‌پور[۱۴] و زاهدی[۱۵] مفهوم اتوماتای فازی عمومی را تعمیم داده و مفهوم اتوماتای فازی عمومی BL را ارایه دادند.

در [۱] به معرفی ساختارهای اتوماتا و اتوماتای فازی پرداخته شد. حال با توجه به کاربردهای اتوماتای فازی و اهمیت مطالعه در این زمینه به معرفی اتوماتای فازی عمومی می‌پردازیم.

---

[3] Intuitionistic fuzzy set
[4] Stoeva
[5] Wee
[6] Santos
[7] Stoeva
[8] Tepavcevic
[9] Gerstenkorn
[10] Jun
[11] Doostfatemeh and Kremer
[12] Basic logic
[13] Hajek
[14] Abolpour
[15] Zahedi

۲ تعاریف و مفاهیم مقدماتی

تعریف ۱.۲. [۳] فرض کنید E یک مجموعه‌ی مرجع و A زیرمجموعه‌ای از E باشد. مجموعه‌ی فازی شهودی[۱۶] A^+ در E به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$A^+ = \{\langle x, \mu_A(x), \nu_A(x)\rangle \big| x \in E\},$$

که در آن، $\mu_A : E \to [0,1]$ و $\nu_A : E \to [0,1]$ به ترتیب مقادیر عضویت و عدم‌عضویت و برای هر عنصر $x \in E$ شرط $0 \leq \mu_A(x) + \nu_A(x) \leq 1$ را داریم.

تعریف ۲.۲. [۴] یک مجموعه‌ی به طور جزیی مرتب، مجموعه‌ای است که در آن رابطه‌ی دوتایی $\leq$ تعریف شده باشد و برای هر x, y, z شرایط زیر برقرار باشند:

۱. انعکاسی باشد یعنی، $x \leq x$.

۲. پادتقارنی باشد یعنی اگر $x \leq y$ و $y \leq x$، آنگاه $x = y$.

۳. متعدی باشد یعنی اگر $x \leq y$ و $y \leq z$ باشد، آنگاه $x \leq z$.

تعریف ۳.۲. [۴] مجموعه‌ی به طور جزیی مرتب L یک مشبکه نامیده می‌شود هرگاه برای هر دو موالفه‌ی موجود در آن کوچکترین کران بالا و بزرگترین کران پایین موجود باشند. یک مشبکه کامل است اگر هر زیرمجموعه‌ی آن دارای کوچکترین کران بالا و بزرگترین کران پایین باشد.

فرض کنید $L = (L, \leq_L, 0, 1)$ یک مشبکه[۱۷] (کامل) کراندار باشد. یک مجموعه‌ی L-فازی A در E تابعی به صورت $A : E \to L$ است.

تعریف ۴.۲. [۲۱] فرض کنید $L = (L, \leq_L, 0, 1)$ یک مشبکه‌ی کراندار باشد. عمل دوتایی $T : L \times L \to L$ یک Lt-نرم[۱۸] نامیده می‌شود اگر در شرایط زیر صدق کند:

[16] Intuitionistic fuzzy set
[17] Lattice
[18] Lt-norm

۱. $T(1, x) = x$،

۲. $T(x, y) = T(y, x)$،

۳. $T(x, T(y, z)) = T(T(x, y), z)$،

۴. اگر $x \leq w$ و $y \leq z$، آنگاه $T(w, y) \leq T(x, z)$.

اگر L را برابر $[0, 1]$ در نظر بگیریم، تابع T را یک t-نرم می‌نامیم.

تعریف ۵.۲. [۲۱] فرض کنید $L = (L, \leq_L, 0, 1)$ یک مشبکه‌ی کراندار باشد. عمل دوتایی $S : L \times L \to L$ یک Ls-نرم[19] نامیده می‌شود اگر در شرایط زیر صدق کند:

۱. $S(0, x) = x$،

۲. $S(x, y) = S(y, x)$،

۳. $S(x, S(y, z)) = S(S(x, y), z)$،

۴. اگر $x \leq w$ و $y \leq z$، آنگاه $S(w, y) \leq S(x, z)$.

اگر L را برابر $[0, 1]$ در نظر بگیریم، تابع S را یک s-نرم می‌نامیم.

تعریف ۶.۲. [۳] فرض کنید E یک مجموعه‌ی غیرتهی و L یک مشبکه‌ی کراندار باشد. فرض کنید $N : L \to L$ یک عمل ۱-تایی نقیض قوی[20] باشد. یک مجموعه‌ی L-فازی شهودی به صورت $A = \{(x, \mu(x), \nu(x)) | x \in E\}$ تعریف می‌شود که μ و ν تابع‌هایی به صورت $\mu : E \to L$، $\nu : E \to L$ هستند و برای هر $x \in E$، $\mu(x) \leq N(\nu(x))$.

[19] Ls-norm

[20] Strong negation

۳ اتوماتای فازی عمومی

در علوم رایانه، نظریه اتوماتا (ماشین‌ها) عبارت است از مطالعه ماشین‌های محاسبه‌گر و بررسی توانایی آنها برای حل مساله.

تعریف ۱.۳. یک اتوماتای حالت متناهی غیرقطعی [۲۱]، یک پنج‌تایی به صورت

$$\mathcal{A} = (Q, X, \delta, q_\circ, F),$$

است که در آن،

۱. Q مجموعه‌ای متناهی از حالت‌هاست،

۲. X مجموعه‌ای ناتهی از الفبای ورودی است،

۳. $\delta : Q \times X \to P(Q)$ تابع انتقال حالت نامیده می‌شود که در آن $P(Q)$ مجموعه توانی Q است،

۴. $q_\circ \in Q$ حالت آغازین است،

۵. $F \subseteq Q$ مجموعه حالت‌های نهایی یا پذیرشی است.

تعریف ۲.۳. [۲۳] یک اتوماتای حالت متناهی فازی[۲۲] یک ماشین شش‌تایی به صورت

$$\tilde{F} = (Q, X, R, Z, \delta, \omega),$$

است که در آن،

۱. Q یک مجموعه‌ی متناهی از حالت‌ها، $Q = \{q_۱, q_۲, ..., q_n\}$،

۲. X یک مجموعه‌ی متناهی از الفبای ورودی، $X = \{a_۱, a_۲, ..., a_m\}$،

[21] Nondeterministic finite automaton

[22] Fuzzy finite state automata

۳. R حالت‌های آغازین اتوماتا،

۴. Z یک مجموعه‌ی متناهی از الفبای خروجی، $Z = \{b_۱, b_۲, ..., b_k\}$،

۵. $\delta : Q \times X \times Q \to [۰, ۱]$ تابع انتقال فازی،

۶. $\omega : Q \to Z$ تابع خروجی است.

در اتوماتای حالت متناهی فازی به هر انتقال مقدار عضویتی در بازه‌ی $[۰, ۱]$ تعلق می‌گیرد. این مقدار عضویت را مقدار انتقال می‌نامیم.

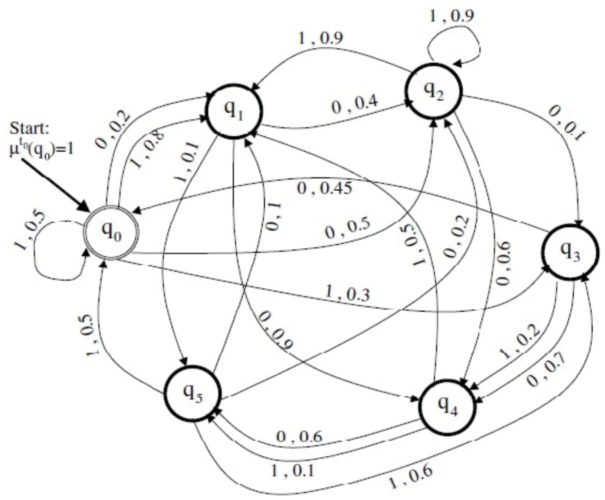
اهمیت مطالعه‌ی اتوماتای فازی عمومی

مثال ۳.۳. اتوماتای حالت متناهی فازی $\tilde{F}$ را به صورت زیر در نظر بگیرید $\tilde{F} = (Q, X, R, Z, \delta, \omega)$، که در آن

- $Q = \{q_۰, q_۱, ..., q_۵\}$ مجموعه‌ی حالت‌ها،
- $X = \{۰, ۱\}$ مجموعه‌ی الفبای ورودی،
- $R = \{q_۰\}, \mu^{t_۰}(q_۰) = ۱$ حالت آغازین،
- $Z = \{\text{پذیرش}\}$ مجموعه عناوین خروجی،
- $\delta : Q \times X \times Q \to (۰, ۱]$, تابع انتقال فازی،
- $\omega : Q \to Z$ نگاشت خروجی است.

در اینجا تنها یک عنوان خروجی وجود دارد که می‌تواند هر چیزی نامیده شود اما، استفاده از ''پذیرش'' منطقی‌تر است که سازگار با اصطلاحات متعارف اتوماتا انتخاب شده است.

یک انتقال از حالت فعلی به حالت بعدی توسط یک پیکان نشان داده می‌شود و اعداد روی هر پیکان به ترتیب نماد ورودی و ارزش انتقال را نشان می‌دهد که توسط ویرگول جدا شده‌اند.



شکل ۱: اتوماتای حالت متناهی فازی مثال ۳.۳

	next state					
	q_0	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5
q_0	1 , 0.5	0 , 0.2 1 , 0.8	0 , 0.5	1 , 0.3		
q_1			0 , 0.4		0,0.9	1 , 0.1
q_2		1 , 0.9	1 , 0.9	0 , 0.1	0 , 0.6	
q_3	0 , 0.45				0 , 0.7 1 , 0.2	
q_4		1 , 0.5				0 , 0.6 1 , 0.1
q_5	1 , 0.5	0 , 1.0	0, 0.2	1 , 0.6		

time	t_1	t_2	t_3	t_4
input	0	1	1	0
t	$\delta(q_0, 0, q_1) = 0.2$	$\delta(q_1, 1, q_5) = 0.1$	$\delta(q_5, 1, q_0) = 0.5$	$\delta(q_0, 0, q_1) = 0.2$
r				$\delta(q_0, 0, q_2) = 0.5$
a			$\delta(q_5, 1, q_3) = 0.6$	$\delta(q_3, 0, q_0) = 0.45$
n				$\delta(q_3, 0, q_4) = 0.7$
s	$\delta(q_0, 0, q_2) = 0.5$	$\delta(q_2, 1, q_1) = 0.9$	$\delta(q_1, 1, q_5) = 0.1$	$\delta(q_5, 0, q_1) = 1.0$
i				$\delta(q_5, 0, q_2) = 0.2$
t		$\delta(q_2, 1, q_2) = 0.9$	$\delta(q_2, 1, q_1) = 0.9$	$\delta(q_1, 0, q_2) = 0.4$
i				$\delta(q_1, 0, q_4) = 0.9$
o			$\delta(q_2, 1, q_2) = 0.9$	$\delta(q_2, 0, q_3) = 0.1$
n				$\delta(q_2, 0, q_4) = 0.6$

حال عمل $\tilde{F}$ تحت رشته "۰۱۱۰" را بررسی می‌کنیم و انتقال‌های آن به صورت زیر می‌باشد. با توجه به اتوماتای حالت متناهی فازی مثال ۳.۳ و بررسی رشته "۰۱۱۰" به وضوح دیده می‌شود که بعد از چهارمین حرف "۰" چند حالت با انتقال‌های هم‌پوشانی وجود دارند. به عنوان مثال $q_۱$ دارای ارزش ۰/۲ با انتقال $\delta(q_۰, ۰, q_۱) = ۰/۲$، و دارای ارزش ۱ با انتقال $\delta(q_۵, ۰, q_۱) = ۱$ می‌باشد، به عبارت دیگر $\mu_{q_۱}^{t_۴} = \{۰/۲, ۱\}$. همچنین، $q_۲$ در زمان $t_۴$ دارای ارزش‌های زیر می‌باشد $\mu_{q_۲}^{t_۴} = \{۰/۲, ۰/۴, ۰/۵\}$. به طور مشابه، $\mu_{q_۴}^{t_۴} = \{۰/۶, ۰/۷, ۰/۹\}$.

در موقعیت‌های زیادی، ما نیاز داریم یک مقدار به هر حالت نسبت دهیم. در سال ۲۰۰۵ دوست فاطمه و کرمر [۶] برای حل این مشکل اتوماتای فازی عمومی را معرفی کردند.

تعریف ۴.۳. [۶] اتوماتای فازی عمومی،[23] یک ماشین هشت‌تایی به صورت

$$\tilde{F} = (Q, X, \tilde{R}, Z, \tilde{\delta}, \omega, F_۱, F_۲)$$

است که در آن،

۱. Q یک مجموعه‌ی متناهی از حالت‌ها، $Q = \{q_۱, q_۲, ..., q_n\}$،

۲. X یک مجموعه‌ی متناهی از الفبای ورودی، $X = \{a_۱, a_۲, ..., a_m\}$،

[23] General fuzzy automata

۳. $\tilde{R}$ مجموعه‌ای از حالت‌های آغازین فازی، $\tilde{R} \subseteq \tilde{P}(Q)$،

۴. Z مجموعه‌ای از الفبای خروجی، $Z = \{b_۱, b_۲, ..., b_k\}$،

۵. $\tilde{\delta} : (Q \times [۰,۱]) \times X \times Q \to [۰,۱]$ تابع انتقال تقویت شده،

۶. $\omega : Q \to Z$ تابع غیرفازی خروجی،

۷. $F_۱ : [۰,۱] \times [۰,۱] \to [۰,۱]$ تابع تعیین عضویت نامیده می‌شود که برای تعیین عضویت حالت‌های فعال به کار می‌رود. مقدار تابع، $F_۱(\mu, \delta)$، توسط دو پارامتر μ و δ بدست می‌آید که در آن، μ مقدار عضویت ماقبل بلافصل و δ مقدار انتقال است. روندی که توسط انتقال از حالت q_i به حالت q_j روی مقدار a_k اتفاق می‌افتد به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mu^{t+۱}(q_j) = \tilde{\delta}((q_i, \mu^t(q_i)), a_k, q_j) = F_۱(\mu^t(q_i), \delta(q_i, a_k, q_j)),$$

که مقدار عضویت حالت q_j در زمان $t+۱$ توسط تابع $F_۱$ با استفاده از مقدار عضویت q_i در زمان t و ارزش انتقال محاسبه می‌شود. انتخاب‌های متفاوتی برای تابع $F_۱$ وجود دارد که مهمترین انتخاب به کاربرد مورد نظر بستگی دارد. تابع $F_۱$ را می‌توان به صورت هر تابع ریاضی که در دو اصل زیر صدق کنند در نظر گرفت.

(آ) $۰ \leq F_۱(\mu, \delta) \leq ۱$،

(ب) $F_۱(۱,۱) = ۱, F_۱(۰,۰) = ۰$.

۸. $F_۲ : [۰,۱]^* \to [۰,۱]$ تابع رفع چندعضویتی است که چندعضویتی حالت‌های فعال را برطرف می‌کند. در نتیجه، ترکیب عمل توابع $F_۱$ و $F_۲$ روی حالت چندعضویتی q_j، الگوریتم رفع چندعضویتی را معرفی خواهد کرد.

الگوریتم روش رفع چندعضویتی: [۶] اگر به طور همزمان چندین انتقال برای حالت فعال q_j در زمان $t+۱$ موجود باشد الگوریتم یک مقدار عضویت یکتا را برای آن تعیین خواهد کرد.

۱. توسط تابع تعیین عضویت $F_۱$ با در نظر گرفتن ارزش انتقال $\delta(q_i, a_k, q_j)$ همراه با مقدار عضویت ماقبل بلافصل متناظر $\mu^t(q_i)$ مقدار عضویتی تولید خواهد شد که ν_i نامیده می‌شود.

$$\nu_i = \tilde{\delta}((q_i, \mu^t(q_i)), a_k, q_j) = F_۱(\mu^t(q_i), \delta(q_i, a_k, q_j)),$$

۲. این مقدار عضویت‌ها لزوماً برابر نیستند. بنابراین، برای رفع این مشکل نیازمند به تابع $F_۲$ است که تابع رفع چندعضویتی نامیده می‌شود. نتیجه‌ی بدست آمده توسط $F_۲$ به صورت مقدار عضویت حالت فعال q_j تعیین خواهد شد. نحوه‌ی تعیین مقدار عضویت حالت فعال توسط رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$\mu^{t+۱}(q_j) = \{F_۲\}_{i=۱}^{n}[\upsilon_j] = \{F_۲\}_{i=۱}^{n}[F_۱(\mu^t(q_i), \delta(q_i, a_k, q_j))],$$

که در آن،

(آ) n تعداد انتقال‌های همزمان در حالت فعال q_j در زمان $t+۱$ است،

(ب) $\delta(q_i, a_k, q_j)$ مقدار عضویت انتقال از q_i به q_j تحت الفبای a_k است،

(ج) $\mu^t(q_i)$ مقدار عضویت q_i در زمان t است.

مجموعه‌ی همه‌ی انتقال‌های اتوماتای $\tilde{F}$ را با Δ نمایش می‌دهیم. فرض کنید $Q_{act}(t_i)$ مجموعه‌ی همه‌ی حالت‌های فعال در زمان t_i، $i \geq ۰$ باشد. آنگاه $Q_{act}(t_۰) = \tilde{R}$ و برای هر $i \geq ۱$، $Q_{act}(t_i)$ را به صورت زیر داریم:

$$Q_{act}(t_i) = \{(q, \mu^{t_i}(q)) \big| \exists q' \in Q_{act}(t_{i-۱}), \exists a \in X, \delta(q', a, q) \in \Delta\}.$$

با توجه به تعریف ارایه شده به راحتی دیده می‌شود که $Q_{act}(t_i)$ یک مجموعه‌ی فازی است، علاوه براین، به راحتی دیده می‌شود که اگر حالتی وجود نداشته باشد که در شرط مجموعه‌ی فوق

صدق کند آن‌گاه گوییم $Q_{act}(t_i)$ برابر تهی است.

تعریف ۵.۳. [۲۳] فرض کنید $\tilde{F} = (Q, X, \tilde{R}, Z, \tilde{\delta}, \omega, F_۱, F_۲)$ یک اتوماتای فازی عمومی باشد. اتوماتای فازی عمومی max-min [۲۴] به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$\tilde{F}^* = (Q, X, \tilde{R}, Z, \tilde{\delta}^*, \omega, F_۱, F_۲),$$

که در آن، $\tilde{\delta}^* : Q_{act} \times X^* \times Q \to [۰, ۱]$، $Q_{act} = Q_{act}(t_۰) \cup Q_{act}(t_۱) \cup \dots$ و برای $i = ۰$ مقدار $\tilde{\delta}^*$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\tilde{\delta}^*((q, \mu^{t_i}(q)), \Lambda, p) = \begin{cases} ۱ & \text{p=q اگر} \\ ۰ & \text{در غیر این صورت} \end{cases}, \qquad (۱)$$

و برای هر $i \geq ۱$ و $u_i \in X$ مقدار $\tilde{\delta}^*$ به صورت بازگشتی محاسبه می‌شود.

$$\begin{aligned} &\tilde{\delta}^*((q, \mu^{t_۰}(q)), u_۱u_۲...u_n, p) \\ &\quad = \vee\{\tilde{\delta}((q, \mu^{t_۰}(q)), u_۱, p_۱) \wedge \tilde{\delta}((p_۱, \mu^{t_۱}(p_۱)), u_۲, p_۲) \wedge \dots \\ &\quad \wedge \tilde{\delta}((p_{n-۱}, \mu^{t_{n-۱}}(p_{n-۱})), u_n, p) \big| \\ &\quad p_۱ \in Q_{act}(t_۱), p_۲ \in Q_{act}(t_۲), ..., p_{n-۱} \in Q_{act}(t_{n-۱})\}. \end{aligned}$$

۴ اتوماتای فازی عمومی شهودی

در ابتدا، با توجه به تعریف اتوماتای فازی عمومی شهودی و تعریف مشبکه‌ی کراندار، تعریف اتوماتای فازی عمومی شهودی را در فضای مشبکه بیان کردیم. در این بخش،

$$L = (L, \leq_L, T, S, ۰, ۱),$$

[24] Max-Min general fuzzy automata

به عنوان یک مشبکه‌ی کراندار در نظر گرفته شده است که در آن، T یک Lt –نرم، S یک Ls –نرم می‌باشد. مفاهیم این بخش از [۱۶، ۱۸، ۱۷، ۱۳] استخراج شده‌اند.

ملاحظه ۱.۴. فرض کنید $A, B \in L$. قرارداد می‌کنیم $A <_L B$ اگر و فقط اگر $A \leq_L B$ و $A \neq B$. همچنین، فرض کنید $A \geq_L B$ اگر و فقط اگر $B \leq_L A$. در این مقاله، برای سهولت به جای نمادهای $<_L$، $\leq_L$ و $\geq_L$ به ترتیب از نمادهای $<$، $\leq$ و $\geq$ استفاده می‌کنیم.

تعریف ۲.۴. [۱۶] یک اتوماتای L –فازی عمومی شهودی[۲۵] $\tilde{F}$، یک ماشین ده‌تایی است که به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود: $\tilde{F} = (Q, X, \tilde{R}, Z, \tilde{\delta}, \tilde{\omega}, F_1, F_2, F_3, F_4)$ که در آن،

۱. Q یک مجموعه‌ی متناهی از حالت‌ها،

۲. X یک مجموعه‌ی متناهی از الفبای ورودی، $X = \{a_1, a_2, ..., a_m\}$،

۳. $\tilde{R}$ مجموعه‌ی L –فازی شهودی از حالت‌های آغازین،

$$\tilde{R} = \{(q, \mu^{t_0}(q), \nu^{t_0}(q)) \big| q \in R\},$$

که در آن، R یک زیرمجموعه‌ی متناهی از Q است،

۴. Z یک مجموعه‌ی متناهی از الفبای خروجی، $Z = \{b_1, b_2, ..., b_l\}$،

۵. $\tilde{\delta} : (Q \times L \times L) \times X \times Q \to L \times L$ تابع انتقال تقویت شده L –فازی شهودی،

۶. $\tilde{\omega} : (Q \times L \times L) \times Z \to L \times L$ تابع خروجی L –فازی شهودی،

۷. $F_1 = (F_1^T, F_1^S)$، که در آن، $F_1^T : L \times L \to L$ یک Lt– نرم است و تابع تعیین عضویت نامیده می‌شود. همچنین، $F_1^S : L \times L \to L$ یک Ls –نرم است که دوتایی F_1^T نسبت به نقیض قوی است و تابع عدم‌عضویت نامیده می‌شود.

[25] General intuitionistic L-fuzzy automaton

۸. $F_{۲} = (F_{۲}^{T}, F_{۲}^{S})$، که $F_{۲}^{T} : L \times L \to L$ یک Lt –نرم است و تابع خروجی تعیین عضویت نامیده می‌شود و تابع $F_{۲}^{S} : L \times L \to L$ یک Ls –نرم است و دوتایی $F_{۲}^{T}$ نسبت به نقیض قوی است و تابع خروجی عدم‌عضویت نامیده می‌شود.

۹. $F_{۳} = (F_{۳}^{TS}, F_{۳}^{ST})$، که $F_{۳}^{ST} : L^{*} \to L$ یک Lt –نرم است و تابع رفع چند عدم‌عضویتی نامیده می‌شود. علاوه براین، $F_{۳}^{TS} : L^{*} \to L$ یک Ls –نرم است و تابع دوتایی $F_{۳}^{ST}$ نسبت به نقیض قوی است و تابع رفع چندعضویتی نامیده می‌شود.

۱۰. $F_{۴} = (F_{۴}^{TS}, F_{۴}^{ST})$، که $F_{۴}^{ST} : L^{*} \to L$ یک Lt –نرم است و تابع رفع چند عدم‌عضویتی خروجی نامیده می‌شود. همچنین، $F_{۴}^{TS} : L^{*} \to L$، یک Ls –نرم است که تابع دوتایی $F_{۴}^{ST}$ نسبت به نقیض قوی است و تابع رفع چندعضویتی خروجی نامیده می شود.

ملاحظه ۳.۴. برای هر $q \in Q$ به قسمی‌که $q \notin \tilde{R}$، قرارداد می‌کنیم $\mu^{t_{۰}}(q) = ۰$، $\nu^{t_{۰}}(q) = ۱$ و برای هر $q \in \tilde{R}$ فرض می‌کنیم $\mu^{t_{۰}}(q) > ۰$.

تعریف ۴.۴. فرض کنید $\tilde{F} = (Q, X, \tilde{R}, Z, \tilde{\delta}, \tilde{\omega}, F_{۱}, F_{۲}, F_{۳}, F_{۴})$ یک اتوماتای L –فازی عمومی شهودی باشد. اتوماتای L –فازی عمومی شهودی $\max - \min$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم: $\tilde{F}^{*} = (Q,\ X,\ \tilde{R},\ Z,\ \tilde{\delta}^{*},\ \tilde{\omega},\ F_{۱},\ F_{۲},\ F_{۳},\ F_{۴})$ به قسمی‌که $\tilde{\delta}^{*} : Q_{act} \times X^{*} \times Q \to L \times L$ که در آن، $Q_{act} = Q_{act}(t_{۰}) \cup Q_{act}(t_{۱}) \cup Q_{act}(t_{۲}) \cup \ldots$ و برای هر $i \geq ۰$، تابع انتقال به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$\tilde{\delta}_{۱}^{*}((q, \mu^{t_i}(q), \nu^{t_i}(q)), \Lambda, p) = \begin{cases} ۱ & \text{اگر } p=q \\ ۰ & \text{در غیر اینصورت} \end{cases}, \qquad (۲)$$

و

$$\tilde{\delta}_{۲}^{*}((q, \mu^{t_i}(q), \nu^{t_i}(q)), \Lambda, p) = \begin{cases} ۰ & \text{اگر } p=q \\ ۱ & \text{در غیر اینصورت} \end{cases}. \qquad (۳)$$

همچنین، برای هر $i \geq ۰$، تابع انتقال روی X^+ را به صورت زیر داریم:

$$\tilde{\delta}^*_۱((q, \mu^{t_i}(q), \nu^{t_i}(q)), u_{i+۱}, p) = \tilde{\delta}_۱((q, \mu^{t_i}(q), \nu^{t_i}(q)), u_{i+۱}, p),$$

$$\tilde{\delta}^*_۲((q, \mu^{t_i}(q), \nu^{t_i}(q)), u_{i+۱}, p) = \tilde{\delta}_۲((q, \mu^{t_i}(q), \nu^{t_i}(q)), u_{i+۱}, p),$$

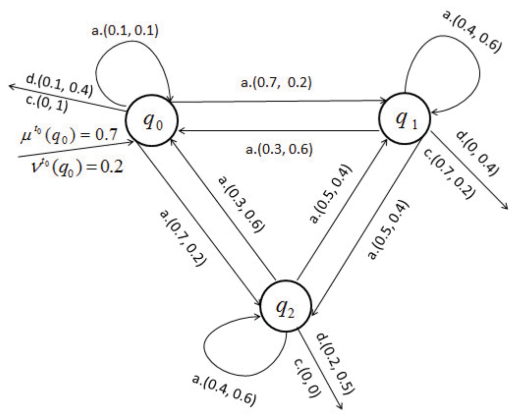
و

$$\begin{aligned}
&\tilde{\delta}^*_۱((q, \mu^{t_۰}(q), \nu^{t_۰}(q)), u_۱u_۲...u_n, p) \\
&\quad = \vee\{\tilde{\delta}_۱((q, \mu^{t_۰}(q), \nu^{t_۰}(q)), u_۱, p_۱) \wedge \tilde{\delta}_۱((p_۱, \mu^{t_۱}(p_۱), \nu^{t_۱}(p_۱)), u_۲, p_۲) \wedge ... \\
&\qquad\qquad \wedge \tilde{\delta}_۱((p_{n-۱}, \mu^{t_{n-۱}}(p_{n-۱}), \nu^{t_{n-۱}}(p_{n-۱})), u_n, p) \\
&\qquad\qquad \big| p_۱ \in Q_{act}(t_۱), ..., p_{n-۱} \in Q_{act}(t_{n-۱})\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\tilde{\delta}^*_۲((q, \mu^{t_۰}(q), \nu^{t_۰}(q)), u_۱u_۲...u_n, p) \\
&\quad = \wedge\{\tilde{\delta}_۲((q, \mu^{t_۰}(q), \nu^{t_۰}(q)), u_۱, p_۱) \vee \tilde{\delta}_۲((p_۱, \mu^{t_۱}(p_۱), \nu^{t_۱}(p_۱)), u_۲, p_۲) \vee ... \\
&\qquad\qquad \vee \tilde{\delta}_۲((p_{n-۱}, \mu^{t_{n-۱}}(p_{n-۱}), \nu^{t_{n-۱}}(p_{n-۱})), u_n, p) \\
&\qquad\qquad \big| p_۱ \in Q_{act}(t_۱), ..., p_{n-۱} \in Q_{act}(t_{n-۱})\},
\end{aligned}$$

حال برای روشن‌تر شدن مفهوم اتوماتای فازی عمومی شهودی، مثال ۵.۴ را ارایه می‌دهیم.

مثال ۵.۴. اتوماتای فازی عمومی شهودی $\tilde{F}^* = (Q, X, \tilde{R}, Z, \tilde{\delta}, \tilde{\omega}, F_۱, F_۲, F_۳, F_۴)$ ارایه شده در شکل ۲ را در نظر بگیرید که در آن، $Q = \{q_۰,\ q_۱,\ q_۲\}$، $X = \{a\}$،



شکل ۲: اتوماتای فازی عمومی شهودی مثال ۵.۴

$\tilde{R} = \{(q_۰, ۰٫۷, ۰٫۲)\}$، $Z = \{c, d\}$ و

۱. $F^T_۱(\mu, \delta_۱) = \min(\mu, \delta_۱), \quad F^S_۱(\nu, \delta_۲) = \max(\nu, \delta_۲),$

$F^T_۲(\mu, \omega_۱) = \min(\mu, \omega_۱), \quad F^S_۲(\nu, \omega_۲) = \max(\nu, \omega_۲),$

$\mu^{t+۱}(q_m) = \vee_{i=۱}^{n}(F^T_۱(\mu^t(q_i), \delta_۱(q_i, a_k, q_m))),$

$\nu^{t+۱}(q_m) = \wedge_{i=۱}^{n}(F^S_۱(\nu^t(q_i), \delta_۲(q_i, a_k, q_m))),$

$\omega^t(q) = \vee_{i=۱}^{l}(F^T_۲(\mu^t(q), \omega_۱(q, b_i))),$

$\omega^t(q) = \wedge_{i=۱}^{l}(F^S_۲(\nu^t(q), \omega_۲(q, b_i))).$

۲. $F^T_۱(\mu, \delta_۱) = \mu.\delta_۱, \quad F^S_۱(\nu, \delta_۲) = \nu + \delta_۲ - \nu.\delta_۲,$

$F^T_۲(\mu, \omega_۱) = \mu.\omega_۱, \quad F^S_۲(\nu, \omega_۲) = \nu + \omega_۲ - \nu.\omega_۲,$

$\mu^{t+۱}(q_m) = \vee_{i=۱}^{n}(F^T_۱(\mu^t(q_i), \delta_۱(q_i, a_k, q_m))),$

$\nu^{t+۱}(q_m) = \wedge_{i=۱}^{n}(F^S_۱(\nu^t(q_i), \delta_۲(q_i, a_k, q_m))),$

$\omega^t(q) = \vee_{i=۱}^{l}(F^T_۲(\mu^t(q), \omega_۱(q, b_i))),$

$\omega^t(q) = \wedge_{i=۱}^{l}(F^S_۲(\nu^t(q), \omega_۲(q, b_i))).$

که T_p یک t –ضرب و S_p یک s –ضرب می‌باشد. n تعداد انتقالهای به طور همزمان به حالت فعال q_m در زمان t و l تعداد خروجی‌های به طور همزمان به حالت فعال q_m در زمان t است. با در نظر گرفتن حالت اول روابط را به‌صورت زیر خواهیم داشت:

$$
\begin{aligned}
&\mu^{t_۱}(q_۰) = F_۱^T(\mu^{t_۰}(q_۰), \delta_۱(q_۰, a, q_۰)) = ۰/۱,\\
&\mu^{t_۱}(q_۱) = F_۱^T(\mu^{t_۰}(q_۰), \delta_۱(q_۰, a, q_۱)) = ۰/۷,\\
&\mu^{t_۱}(q_۲) = F_۱^T(\mu^{t_۰}(q_۰), \delta_۱(q_۰, a, q_۲)) = ۰/۷,\\
&\nu^{t_۱}(q_۰) = F_۱^S(\nu^{t_۰}(q_۰), \delta_۲(q_۰, a, q_۰)) \wedge F_۱^S(\nu^{t_۰}(q_۱), \delta_۲(q_۱, a, q_۰))\\
&\qquad \wedge F_۱^S(\nu^{t_۰}(q_۲), \delta_۲(q_۲, a, q_۰)) = ۰/۲ \wedge ۰/۶ \wedge ۰/۶ = ۰/۲,\\
&\nu^{t_۱}(q_۱) = F_۱^S(\nu^{t_۰}(q_۰), \delta_۲(q_۰, a, q_۱)) \wedge F_۱^S(\nu^{t_۰}(q_۱), \delta_۲(q_۱, a, q_۱))\\
&\qquad \wedge F_۱^S(\nu^{t_۰}(q_۲), \delta_۲(q_۲, a, q_۱)) = ۰/۲ \wedge ۰/۶ \wedge ۰/۴ = ۰/۲,\\
&\nu^{t_۱}(q_۲) = F_۱^S(\nu^{t_۰}(q_۰), \delta_۲(q_۰, a, q_۲)) \wedge F_۱^S(\nu^{t_۰}(q_۱), \delta_۲(q_۱, a, q_۲))\\
&\qquad \wedge F_۱^S(\nu^{t_۰}(q_۲), \delta_۲(q_۲, a, q_۲)) = ۰/۲ \wedge ۰/۴ \wedge ۰/۶ = ۰/۲,\\
&\omega_۱^{t_۰}(q_۰) = F_۲^T(\mu^{t_۰}(q_۰), \omega_۱(q_۰, d)) = ۰/۱,\\
&\omega_۱^{t_۰}(q_۱) = ۰,\\
&\omega_۱^{t_۰}(q_۲) = ۰,\\
&\omega_۱^{t_۱}(q_۰) = F_۲^T(\mu^{t_۱}(q_۰), \omega_۱(q_۰, d)) = ۰/۱,\\
&\omega_۱^{t_۱}(q_۱) = F_۲^T(\mu^{t_۱}(q_۱), \omega_۱(q_۱, c)) = ۰/۷,\\
&\omega_۱^{t_۱}(q_۲) = F_۲^T(\mu^{t_۱}(q_۲), \omega_۱(q_۲, d)) = ۰/۲,\\
&\omega_۲^{t_۰}(q_۰) = F_۲^S(\nu^{t_۰}(q_۰), \omega_۲(q_۰, d)) = ۰/۴,\\
&\omega_۲^{t_۰}(q_۱) = F_۲^S(\nu^{t_۰}(q_۱), \omega_۲(q_۱, c)) \wedge F_۲^S(\nu^{t_۰}(q_۱), \omega_۲(q_۱, d)) = ۱ \wedge ۱ = ۱,\\
&\omega_۲^{t_۰}(q_۲) = F_۲^S(\nu^{t_۰}(q_۲), \omega_۲(q_۲, c)) \wedge F_۲^S(\nu^{t_۰}(q_۲), \omega_۲(q_۲, d)) = ۱ \wedge ۱ = ۱,
\end{aligned}
$$

$$\omega_{۲}^{t_{۱}}(q_{\circ}) = F_{۲}^{S}(\nu^{t_{۱}}(q_{\circ}), \omega_{۲}(q_{\circ}, d)) = \circ/۴,$$
$$\omega_{۲}^{t_{۱}}(q_{۱}) = F_{۲}^{S}(\nu^{t_{۱}}(q_{۱}), \omega_{۲}(q_{۱}, c)) \wedge F_{۲}^{S}(\nu^{t_{۱}}(q_{۱}), \omega_{۲}(q_{۱}, d)) = \circ/۲ \wedge \circ/۴ = \circ/۲,$$
$$\omega_{۲}^{t_{۱}}(q_{۲}) = F_{۲}^{S}(\nu^{t_{۱}}(q_{۲}), \omega_{۲}(q_{۲}, c)) \wedge F_{۲}^{S}(\nu^{t_{۱}}(q_{۲}), \omega_{۲}(q_{۲}, d)) = \circ/۲ \wedge \circ/۵ = \circ/۲.$$

تعریف ۶.۴. فرض کنید $\tilde{F}^*$ یک اتوماتا باشد. لذا، تعاریف زیر را داریم:

۱. $\tilde{F}^*$ یک (α, β) -کامل[26] است اگر برای هر $q \in Q$ و $a \in X$، $p \in Q$ وجود داشته باشد به قسمی‌که $\delta_{۱}(q, a, p) > \alpha$ و $\delta_{۲}(q, a, p) < \beta$،

۲. $q \in Q$ را یک (α, β) -قابل‌دسترس [27] گویند اگر $p \in \tilde{R}$ و $x \in X^*$ وجود داشته باشد به قسمی‌که

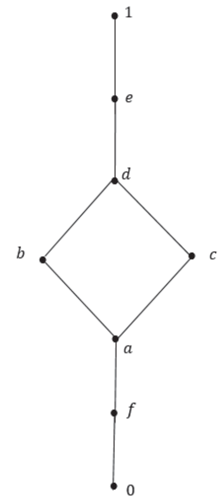
$$\tilde{\delta}_{۱}^*((p, \mu^{t_{\circ}}(p), \nu^{t_{\circ}}(p)), x, q) > \alpha, \quad \tilde{\delta}_{۲}^*((p, \mu^{t_{\circ}}(p), \nu^{t_{\circ}}(p)), x, q) < \beta,$$

۳. $\tilde{F}^*$ یک (α, β) -قابل‌دسترس است اگر برای هر $q \in Q$، q یک (α, β) -قابل‌دسترس باشد.

تعریف ۷.۴. $\tilde{F}^*$ را اتوماتای قطعی[28] می‌نامیم اگر $p_{\circ} \in \tilde{R}$ به صورت یکتا وجود داشته باشد به قسمی‌که $\mu^{t_{\circ}}(p_{\circ}) > \circ$ و برای هر $q \in Q$ و $a \in X$، حداکثر یک $p \in Q$ وجود داشته باشد به قسمی‌که $\delta_{۲}(q, a, p) < ۱$.

مثال ۸.۴. مشبکه‌ی کراندار $L = (L, \leq, T, S, \circ, ۱)$ را به صورت شکل ۳ در نظر بگیرید که در آن، $L = \{\circ, a, b, c, d, e, f, ۱\}$ و $N(\circ) = ۱$، $N(۱) = \circ$، $N(a) = b$، $N(b) = a$، $N(c) = d$، $N(d) = c$، $N(e) = f$، $N(f) = e$. اتوماتای L -فازی عمومی شهودی max-min $\tilde{F}^* = (Q, X, \tilde{R}, Z, \tilde{\delta}^*, \tilde{\omega}, F_{۱}, F_{۲}, F_{۳}, F_{۴})$ را به صورت شکل ۴ در نظر

[26] (α, β)-complete
[27] (α, β)-accessible
[28] Deterministic

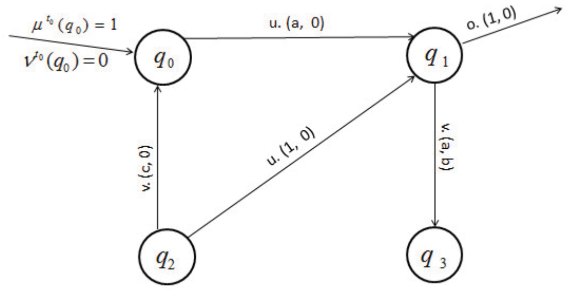


شکل ۳: مشبکه‌ی کراندار L مثال ۸.۴

بگیرید که در آن، $Q = \{q_۰,\ q_۱,\ q_۲,\ q_۳\}$، $X = \{u,\ v\}$، $\tilde{R} = \{(q_۰, ۱, ۰)\}$، $Z = \{o\}$ و $\delta : Q \times X \times Q \to L \times L$ به صورت زیر تعریف شده است:

$$\delta(q_۰, u, q_۱) = (a, ۰) \qquad \delta(q_۱, v, q_۳) = (a, b),$$
$$\delta(q_۲, u, q_۱) = (۱, ۰) \qquad \delta(q_۲, v, q_۰) = (c, ۰),$$

برای بقیه‌ی $(q, x, q') \in Q \times X \times Q$ داریم $\delta(q, x, q') = (۰, ۱)$ و $\omega : Q \times Z \to L \times L$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم: $\omega(q_۱, o) = (۱, ۰)$ و برای بقیه‌ی $(q, e) \in Q \times Z$، $\omega(q, e) = (۰, ۱)$ در نظر می‌گیریم. بنابراین، $q_۱$ یک $(۰, \alpha)$ -قابل‌دسترس و یک (f, β) -قابل‌دسترس است که $\alpha \in \{a, b, c, d, e, f, ۱\}$ و $\beta \in \{a, b, c, d, e, f\}$، همچنین، $q_۳$ یک $(۰, ۱)$ -قابل‌دسترس، (f, d) -قابل‌دسترس است اما، $q_۳$ یک $(f, ۱)$ -قابل‌دسترس نیست، چون $f \not\leq N(۱) = ۰$. بنابراین، $\tilde{F}^*$ برای هر $(\alpha, \beta) \in L$ به قسمی‌که $\alpha \leq N(\beta)$ باشد، یک (α, β) -قابل‌دسترس نیست و یک (α, β) -کامل نیست. به وضوح دیده می‌شود این اتوماتا یک اتوماتای قطعی است.



شکل ۴: اتوماتای L-فازی عمومی شهودی max–min مثال ۸.۴

قضیه ۹.۴. فرض کنید $\tilde{F}^*$ یک اتوماتای قطعی باشد. اگر

$$\tilde{\delta}_1^*((p,\mu^{t_0}(p),\nu^{t_0}(p)),x,q)\wedge\tilde{\delta}_1^*((p,\mu^{t_0}(p),\nu^{t_0}(p)),x,q')>\alpha,$$

و

$$\tilde{\delta}_2^*((p,\mu^{t_0}(p),\nu^{t_0}(p)),x,r)\vee\tilde{\delta}_2^*((p,\mu^{t_0}(p),\nu^{t_0}(p)),x,r')<\beta,$$

آنگاه $q=q'=r=r'$ که در آن، $q,q',r,r'\in Q$ و $x\in X^*$.

اثبات. در ابتدا فرض کنید $x=\Lambda$. بنابراین،

$$\tilde{\delta}_1((p,\mu^{t_0}(p),\nu^{t_0}(p)),\Lambda,q)\wedge\tilde{\delta}_1((p,\mu^{t_0}(p),\nu^{t_0}(p)),\Lambda,q')>\alpha,$$

و

$$\tilde{\delta}_2((p,\mu^{t_0}(p),\nu^{t_0}(p)),\Lambda,r)\vee\tilde{\delta}_2((p,\mu^{t_0}(p),\nu^{t_0}(p)),\Lambda,r')<\beta,$$

نتیجه می‌دهند $p=q'=q=r=r'$. لذا، ادعا برای $x=\Lambda$ برقرار است. حال فرض کنید $x\in X^*$ و $x\notin\Lambda$. با استقرا روی $|x|$ ادعا را ثابت می‌کنیم. فرض کنید $|x|=1$. لذا،

$$\tilde{\delta}_1((p,\mu^{t_0}(p),\nu^{t_0}(p)),x,q)=F_1^T(\mu^{t_0}(p),\delta_1(p,x,q))>\alpha,$$

$$\tilde{\delta}_1((p,\mu^{t_0}(p),\nu^{t_0}(p)),x,q') = F_1^T(\mu^{t_0}(p),\delta_1(p,x,q')) > \alpha,$$

و

$$\tilde{\delta}_2((p,\mu^{t_0}(p),\nu^{t_0}(p)),x,r) = F_1^S(\nu^{t_0}(p),\delta_1(p,x,r)) < \beta,$$

$$\tilde{\delta}_2((p,\mu^{t_0}(p),\nu^{t_0}(p)),x,r') = F_1^S(\nu^{t_0}(p),\delta_1(p,x,r')) < \beta.$$

بنابراین، $\delta_1(p,x,q) \wedge \delta_1(p,x,q') > \alpha$ و $\delta_2(p,x,r) \vee \delta_2(p,x,r') < \beta$. چون $\delta_1(p,x,q) \wedge \delta_1(p,x,q') > \alpha$، پس $\delta_2(p,x,q) \vee \delta_2(p,x,q') < N(\alpha) \leq 1$. بنابراین، با در نظر گرفتن تعریف ۷.۴، $q = q' = r = r'$. حال فرض کنید ادعا برای هر $y \in X^*$ به قسمی‌که $|y| = n-1$ و $n > 1$ برقرار باشد. فرض کنید $x = ya$ که در آن، $y \in X^*$، $a \in X$ و $|y| = n-1$. بنابراین،

$$\begin{aligned}\tilde{\delta}_1^*((p,\mu^{t_0}(p),\nu^{t_0}(p)),x,q) &= \vee\{\tilde{\delta}_1^*((p,\mu^{t_0}(p),\nu^{t_0}(p)),y,p')\\ &\wedge \tilde{\delta}_1((p',\mu^{t_0+n-1}(p'),\nu^{t_0+n-1}(p')),a,q)\big|p' \in Q\} > \alpha,\end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned}\tilde{\delta}_1^*((p,\mu^{t_0}(p),\nu^{t_0}(p)),x,q') &= \vee\{\tilde{\delta}_1^*((p,\mu^{t_0}(p),\nu^{t_0}(p)),y,p')\\ &\wedge \tilde{\delta}_1((p',\mu^{t_0+n-1}(p'),\nu^{t_0+n-1}(p')),a,q')\big|p' \in Q\} > \alpha.\end{aligned}$$

همچنین، $d, d' \in Q$ وجود دارد به قسمی‌که

$$\begin{aligned}&\vee\{\tilde{\delta}_1^*((p,\mu^{t_0}(p),\nu^{t_0}(p)),y,p') \wedge \tilde{\delta}_1((p',\mu^{t_0+n-1}(p'),\nu^{t_0+n-1}(p')),a,q)\big|p' \in Q\}\\ &= \tilde{\delta}_1^*((p,\mu^{t_0}(p),\nu^{t_0}(p)),y,d) \wedge \tilde{\delta}_1((d,\mu^{t_0+n-1}(d),\nu^{t_0+n-1}(d)),a,q) > \alpha,\end{aligned}$$

و

$$\vee\{\tilde{\delta}_1^*((p,\mu^{t_0}(p),\nu^{t_0}(p)),y,p')\wedge\tilde{\delta}_1((p',\mu^{t_0+n-1}(p'),\nu^{t_0+n-1}(p')),a,q')\big|p'\in Q\}$$
$$=\tilde{\delta}_1^*((p,\mu^{t_0}(p),\nu^{t_0}(p)),y,d')\wedge\tilde{\delta}_1((d',\mu^{t_0+n-1}(d'),\nu^{t_0+n-1}(d')),a,q')>\alpha.$$

علاوه براین، $s,s'\in Q$ وجود دارد به طوری‌که

$$\tilde{\delta}_2^*((p,\mu^{t_0}(p),\nu^{t_0}(p)),x,r)$$
$$=\wedge\{\tilde{\delta}_2^*((p,\mu^{t_0}(p),\nu^{t_0}(p)),y,p')\vee\tilde{\delta}_2((p',\mu^{t_0+n-1}(p'),\nu^{t_0+n-1}(p')),a,r)\big|p'\in Q\}$$
$$=\tilde{\delta}_2^*((p,\mu^{t_0}(p),\nu^{t_0}(p)),y,s)\vee\tilde{\delta}_2((s,\mu^{t_0+n-1}(s),\nu^{t_0+n-1}(s)),a,r)<\beta,$$

و

$$\tilde{\delta}_2^*((p,\mu^{t_0}(p),\nu^{t_0}(p)),x,r')$$
$$=\wedge\{\tilde{\delta}_2^*((p,\mu^{t_0}(p),\nu^{t_0}(p)),y,p')\vee\tilde{\delta}_2((p',\mu^{t_0+n-1}(p'),\nu^{t_0+n-1}(p')),a,r')\big|p'\in Q\}$$
$$=\tilde{\delta}_2^*((p,\mu^{t_0}(p),\nu^{t_0}(p)),y,s')\vee\tilde{\delta}_2((s',\mu^{t_0+n-1}(s'),\nu^{t_0+n-1}(s')),a,r')<\beta.$$

بنابراین، با توجه به فرض استقرا $s=s'=d=d'$. بنابراین،

$$\tilde{\delta}_1((d,\mu^{t_0+n-1}(d),\nu^{t_0+n-1}(d)),a,q)\wedge\tilde{\delta}_1((d,\mu^{t_0+n-1}(d),\nu^{t_0+n-1}(d)),a,q')>\alpha,$$

و

$$\tilde{\delta}_2((s,\mu^{t_0+n-1}(s),\nu^{t_0+n-1}(s)),a,r)\vee\tilde{\delta}_2((s,\mu^{t_0+n-1}(s),\nu^{t_0+n-1}(s)),a,r')<\beta,$$

نتیجه می‌دهند $\delta_1(d,a,q)\wedge\delta_1(d,a,q')>\alpha$ و $\delta_2(s,a,r)\vee\delta_2(s,a,r')<\beta$. بنابراین، $q=q'=r=r'$ و ادعا ثابت می‌شود. $\square$

تعریف ۴.۱۰. اتوماتای $\tilde{F}^*$ را در نظر بگیرید. (α,β) -زبان پذیرش شده توسط $\tilde{F}^*$

زیرمجموعه‌ای از X^* است که به صورت زیر تعریف شده است:

$$\mathcal{L}^{\alpha,\beta}(\tilde{F}^*) = \{x \in X^* \big| \tilde{\delta}_1^*((p, \mu^{t_0}(p), \nu^{t_0}(p)), x, q) \wedge \tilde{\omega}_1((q, \mu^{t_0+|x|}(q), \nu^{t_0+|x|}(q)), b) > \alpha, \tilde{\delta}_2^*((p, \mu^{t_0}(p), \nu^{t_0}(p)), x, q) \vee \tilde{\omega}_2((q, \mu^{t_0+|x|}(q), \nu^{t_0+|x|}(q)), b') < \beta, \text{برای بعضی } p \in \tilde{R}, q \in Q, b, b' \in Z\}. \quad (۴)$$

تعریف ۱۱.۴. فرض کنید X یک مجموعه‌ی متناهی غیرتهی باشد. به زیرمجموعه‌ی $\mathcal{L}$ از X^* یک (α, β) -زبان پذیرشی گفته می‌شود اگر یک اتوماتای $\tilde{F}^*$ وجود داشته باشد به قسمی‌که $\mathcal{L} = \mathcal{L}^{\alpha,\beta}(\tilde{F}^*)$.

قضیه ۱۲.۴. برای هر اتوماتا $\tilde{F}^*$، یک اتوماتای (α, β) -کامل مانند $\tilde{F}^{*c}$ وجود دارد به قسمی‌که $\mathcal{L}^{\alpha,\beta}(\tilde{F}^*) = \mathcal{L}^{\alpha,\beta}(\tilde{F}^{*c})$.

اثبات. فرض کنید $\tilde{F}^* = (Q, X, \tilde{R}, Z, \tilde{\delta}^*, \tilde{\omega}, F_1, F_2, F_3, F_4)$ یک اتوماتای (α, β) -غیرکامل باشد. فرض کنید $Q^c = Q \cup \{t\}$، به قسمی‌که t متعلق به Q نباشد. در نظر بگیرید $\gamma, \eta \in L$ که در آن، $\alpha <_L \gamma$، $\beta >_L \eta$ و $N(\eta) \leq_L \gamma$. حال الگوریتمی را ارایه می‌دهیم که اتوماتای (α, β) - غیرکامل را بگیرید و اتوماتای (α, β) - کامل را به عنوان خروجی تحویل دهد:

الگوریتم ایجاد اتوماتای (α, β) -کامل:

گام ۱. ورودی: اتوماتای (α, β) -غیرکامل $\tilde{F}^* = (Q, X, \tilde{R}, Z, \tilde{\delta}^*, \tilde{\omega}, F_1, F_2, F_3, F_4)$، که $Q = \{q_1, q_2, ..., q_n\}$ و $X = \{a_1, a_2, ..., a_m\}$،

گام ۲. $i = 1$،

گام ۳. $j = 1$، اگر $i \leq n$، برو به گام بعدی، در غیر این صورت برو به گام ۷،

گام ۴. اگر $j \leq m$، فرض کن $T = \{q \big| \delta_۱(q_i, a_j, q) >_L \alpha\}$، در غیر اینصورت فرض کن $i = i + ۱$ و برو به گام ۳،

گام ۵. اگر $T = \emptyset$، فرض کن $\delta_۱^c(q_i, a_j, t) = \gamma$، $\delta_۲^c(q_i, a_j, t) = \eta$، $j = j + ۱$ و برو به گام ۴، در غیر این صورت برو به گام ۶،

گام ۶. برای $q \in T$، اگر $\delta_۲(q_i, a_j, q) <_L \beta$، فرض کن $j = j + ۱$ و برو به گام ۴، در غیر اینصورت فرض کن $T = T - \{q\}$ و برو به گام ۵،

گام ۷. برای هر $p, q \in Q$، $a \in X$ فرض کن $\delta_۱^c(p, a, q) = \delta_۱(p, a, q)$، و $\delta_۲^c(p, a, q) = \delta_۲(p, a, q)$، و برای هر $a \in X$ فرض کن $\delta_۱^c(t, a, t) = \gamma$ و $\delta_۲^c(t, a, t) = \eta$،

گام ۸. $Q^c = Q \cup \{t\}$،

$$\omega_۱^c(p, b) = \begin{cases} \omega_۱(p, b) & \text{اگر } p \neq t \\ ۰ & \text{اگر } p = t \end{cases},$$

و

$$\omega_۲^c(p, b) = \begin{cases} \omega_۲(p, b) & \text{اگر } p \neq t \\ ۱ & \text{اگر } p = t \end{cases}.$$

گام ۹. خروجی $\tilde{F}^{*c} = (Q^c, X, \tilde{R}, Z, \tilde{\delta}^{*c}, \tilde{\omega}^c, F_۱, F_۲, F_۳, F_۴)$.

به راحتی دیده می‌شود $\tilde{F}^{*c} = (Q^c, X, \tilde{R}, Z, \tilde{\delta}^{*c}, \tilde{\omega}^c, F_۱, F_۲, F_۳, F_۴)$ یک اتوماتای (α, β)-کامل است و $\mathcal{L}^{\alpha,\beta}(\tilde{F}^*) \subseteq \mathcal{L}^{\alpha,\beta}(\tilde{F}^{*c})$. حال فرض کنید $x = u_۱u_۲...u_{k+۱} \in L^{\alpha,\beta}(\tilde{F}^{*c})$. لذا، $p \in \tilde{R}$، $q \in Q^c$ و $b, b' \in Z$ وجود دارند به قسمی‌که

$$\tilde{\delta}_۱^{*c}((p, \mu^{t_۰}(p), \nu^{t_۰}(p)), x, q) \wedge \tilde{\omega}_۱^c((q, \mu^{t_۰+|x|}(q), \nu^{t_۰+|x|}(q)), b) >_L \alpha,$$

و

$$\tilde{\delta}_{۲}^{*c}((p,\mu^{t_{\circ}}(p),\nu^{t_{\circ}}(p)),x,q)\vee\tilde{\omega}_{۲}^{c}((q,\mu^{t_{\circ}+|x|}(q),\nu^{t_{\circ}+|x|}(q)),b')<_L\beta.$$

بنابراین، $q\in Q$ و $p_۱,p_۲,...,p_k,p'_۱,p'_۲,...,p'_k\in Q$ وجود دارند به قسمی‌که

(۵)
$$\tilde{\delta}_{۱}^{c}((p,\mu^{t_{\circ}}(p),\nu^{t_{\circ}}(p)),u_۱,p_۱)\wedge...\wedge\tilde{\delta}_{۱}^{c}((p_k,\mu^{t_{\circ}+|x|}(p_k),\nu^{t_{\circ}+|x|}(p_k)),u_k,q)>_L\alpha,$$

و

(۶)
$$\tilde{\delta}_{۲}^{c}((p,\mu^{t_{\circ}}(p),\nu^{t_{\circ}}(p)),u_۱,p'_۱)\vee...\vee\tilde{\delta}_{۲}^{c}((p'_k,\mu^{t_{\circ}+|x|}(p'_k),\nu^{t_{\circ}+|x|}(p'_k)),u_k,q)<_L\beta.$$

با استفاده از تعریف t -نرم و (۵)، داریم $\mu^{t_{\circ}}(p)\ >_L\ \alpha,\ \delta_{۱}^{c}(p,u_۱,p_۱)\ >_L\ \alpha$ و $\delta_{۱}^{c}(p_۱,u_۲,p_۲)>_L\alpha,...,\delta_{۱}^{c}(p_k,u_k,q)>_L\alpha$. حال فرض کنید p_j، $۱\leq j\leq k$، اولین حالتی باشد که $\delta_{۱}^{c}(p_j,u_j,p_{j+۱})>_L\alpha$ و $\delta_۱(p_j,u_j,p_{j+۱})$ تعریف نشده باشد. لذا، $p_{j+۱}=t$. درنتیجه، $p_{j+۱}=p_{j+۲}=...=q=t$، که تناقض است. بنابراین،

$$\tilde{\delta}_{۱}^{*}((p,\mu^{t_{\circ}}(p),\nu^{t_{\circ}}(p)),x,q)\wedge\tilde{\omega}_{۱}((q,\mu^{t_{\circ}+|x|}(q),\nu^{t_{\circ}+|x|}(q)),b)>_L\alpha.$$

به روش مشابه به دست می‌آوریم

$$\tilde{\delta}_{۲}^{*}((p,\mu^{t_{\circ}}(p),\nu^{t_{\circ}}(p)),x,q)\vee\tilde{\omega}_{۲}((q,\mu^{t_{\circ}+|x|}(q),\nu^{t_{\circ}+|x|}(q)),b')<_L\beta.$$

بنابراین، ادعا ثابت می‌شود. □

قضیه ۱۳.۴. اتوماتای $\tilde{F}^*$ را به گونه‌ای در نظر بگیرید که $\tilde{R}\neq\emptyset$. آنگاه، اتوماتای قطعی‌ای مانند $\tilde{F}_d^*$ وجود دارد به قسمی‌که $\mathcal{L}^{\alpha,\beta}(\tilde{F}^*)=\mathcal{L}^{\alpha,\beta}(\tilde{F}_d^*)$.

اثبات. برای هر $x \in X^*$ تعریف کنید:

$$I_x = \{q' \in Q \big| \exists p \in \tilde{R} \text{ به قسمی که } \tilde{\delta}_1^*((p, \mu^{t_0}(p), \nu^{t_0}(p)), x, q') > \alpha$$
$$\tilde{\delta}_2^*((p, \mu^{t_0}(p), \nu^{t_0}(p)), x, q') < \beta\}. \quad (۷)$$

درنتیجه، $I_\Lambda = \{q' \in Q \big| q' \in \tilde{R}\}$. فرض کنید $Q_d = \{I_x \big| x \in X^*\}$. تعریف می‌کنیم $\delta_d : Q_d \times X \times Q_d \to L \times L$ که در آن،

$$\delta_{d1}(I_y, a, I_x) = \begin{cases} \gamma_1 & \text{اگر } I_x = I_{ya} \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases},$$

$$\delta_{d2}(I_y, a, I_x) = \begin{cases} \eta_1 & \text{اگر } I_x = I_{ya} \\ 1 & \text{در غیر این صورت} \end{cases},$$

و $\omega_d : Q_d \times Z_d \to L \times L$، به طوری‌که

$$\omega_{d1}(I_x, e) = \begin{cases} \gamma_2 & \text{اگر } x \in \mathcal{L}^{\alpha,\beta}(\tilde{F}^*) \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}, \quad (۸)$$

$$\omega_{d2}(I_x, e) = \begin{cases} \eta_2 & \text{اگر } x \in \mathcal{L}^{\alpha,\beta}(\tilde{F}^*) \\ 1 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}, \quad (۹)$$

که $\gamma_1, \eta_1, \gamma_2, \eta_2 \in L$، $\gamma_1 \wedge \gamma_2 > \alpha$، $\eta_1 \vee \eta_2 < \beta$، $\gamma_1 \leq N(\eta_1)$ و $\gamma_2 \leq_L N(\eta_2)$. در نظر بگیرید $\mu^{t_0}(I_\Lambda) = \vee\{\mu^{t_0}(q) \big| q \in I_\Lambda\}$، $\nu^{t_0}(I_\Lambda) = \wedge\{\nu^{t_0}(q) \big| q \in I_\Lambda\}$ و $Z_d = \{e\}$. حال اتوماتای $\tilde{F}_d^* = (Q_d, X, I_\Lambda, Z_d, \tilde{\delta}_d^*, \tilde{\omega}_d, F_1, F_2, F_3, F_4)$ را در نظر

بگیرید. واضح است δ_d خوش‌تعریف است. نشان می‌دهیم ω_d نیز خوش‌تعریف است. فرض کنید $I_x = I_y$ و $e \in Z_d$. اگر $x \in \mathcal{L}^{\alpha,\beta}(\tilde{F}^*)$، آنگاه $q \in \tilde{R}$، $p \in Q$ و $b, b' \in Z$ وجود دارند به قسمی‌که

$$\tilde{\delta}_1^*((q, \mu^{t_0}(q), \nu^{t_0}(q)), x, p) \wedge \tilde{\omega}_1((p, \mu^{t_0+|x|}(p), \nu^{t_0+|x|}(p)), b) > \alpha,$$

و

$$\tilde{\delta}_2^*((q, \mu^{t_0}(q), \nu^{t_0}(q)), x, p) \vee \tilde{\omega}_2((p, \mu^{t_0+|x|}(p), \nu^{t_0+|x|}(p)), b') < \beta.$$

بنابراین، $p \in I_x = I_y$. در نتیجه، برای بعضی $q \in \tilde{R}$ داریم:

$$\tilde{\delta}_1^*((q, \mu^{t_0}(q), \nu^{t_0}(q)), y, p) > \alpha \text{ و } \tilde{\delta}_2^*((q, \mu^{t_0}(q), \nu^{t_0}(q)), y, p) < \beta.$$

علاوه براین، $\omega_1(p, b) > \alpha$ و $\omega_2(p, b) < \beta$. بنابراین، $y \in \mathcal{L}^{\alpha,\beta}(\tilde{F}^*)$. به روش مشابه اگر $y \in \mathcal{L}^{\alpha,\beta}(\tilde{F}^*)$، آنگاه $x \in \mathcal{L}^{\alpha,\beta}(\tilde{F}^*)$. درنتیجه، $\omega_d(I_x, e) = \omega_d(I_y, e)$. چون $q \in \tilde{R}$ وجود دارد به قسمی‌که $\mu^{t_0}(q) > 0$، لذا، $\mu^{t_0}(I_\Lambda) > 0$. به وضوح دیده می‌شود $\tilde{F}_d^*$ یک اتوماتای قطعی است. حال نشان می‌دهیم $\mathcal{L}^{\alpha,\beta}(\tilde{F}_d^*) = \mathcal{L}^{\alpha,\beta}(\tilde{F}^*)$. فرض کنید $x = u_1 u_2 \ldots u_{k+1} \in \mathcal{L}^{\alpha,\beta}(\tilde{F}^*)$. لذا، $q \in \tilde{R}$، $p \in Q$ و $b, b' \in Z$ وجود دارند به قسمی‌که

$$\tilde{\delta}_1^*((q, \mu^{t_0}(q), \nu^{t_0}(q)), x, p) \wedge \tilde{\omega}_1((p, \mu^{t_0+|x|}(p), \nu^{t_0+|x|}(p)), b) > \alpha,$$

و

$$\tilde{\delta}_2^*((q, \mu^{t_0}(q), \nu^{t_0}(q)), x, p) \vee \tilde{\omega}_2((p, \mu^{t_0+|x|}(p), \nu^{t_0+|x|}(p)), b') < \beta.$$

چون

$$\tilde{\delta}^*_1((q, \mu^{t_0}(q), \nu^{t_0}(q)), u_1 \ldots u_{k+1}, p) > \alpha,$$

و

$$\tilde{\delta}^*_2((q, \mu^{t_0}(q), \nu^{t_0}(q)), u_1 \ldots u_{k+1}, p) < \beta,$$

لذا، $\mu^{t_0}(q) > \alpha, \nu^{t_0}(q) < \beta$. درنتیجه، $\mu^{t_0}(I_\Lambda) > \alpha$ و $\nu^{t_0}(I_\Lambda) < \beta$. همچنین،

$$\tilde{\delta}^*_{d1}((I_\Lambda, \mu^{t_0}(I_\Lambda), \nu^{t_0}(I_\Lambda)), u_1, I_{u_1}) = F^T_1(\mu^{t_0}(I_\Lambda), \delta_{d1}(I_\Lambda, u_1, I_{u_1})) \geq \alpha,$$

بنابراین، $\mu^{t_1}(I_{u_1}) \geq \alpha$. علاوه بر این، داریم:

$$\tilde{\delta}_{d1}((I_{u_1}, \mu^{t_1}(I_{u_1}), \nu^{t_1}(I_{u_1})), u_2, I_{u_1u_2}) = F^T_1(\mu^{t_1}(I_{u_1}), \delta_{d1}(I_{u_1}, u_2, I_{u_1u_2})) \geq \alpha.$$

اگر این روش را ادامه دهیم به رابطه‌ی زیر می‌رسیم:

$$\tilde{\delta}^*_{d1}((I_\Lambda, \mu^{t_0}(I_\Lambda), \nu^{t_0}(I_\Lambda)), x, I_x) \geq \alpha.$$

همچنین، داریم:

$$\tilde{\delta}^*_{d2}((I_\Lambda, \mu^{t_0}(I_\Lambda), \nu^{t_0}(I_\Lambda)), u_1, I_{u_1}) = F^S_1(\nu^{t_0}(I_\Lambda), \delta_{d2}(I_\Lambda, u_1, I_{u_1})) \leq \beta,$$

بنابراین، $\nu^{t_1}(I_{u_1}) \leq \beta$. در نتیجه، $\tilde{\delta}_{d2}((I_{u_1}, \mu^{t_1}(I_{u_1}), \nu^{t_1}(I_{u_1})), u_2, I_{u_1u_2}) \leq \beta$. با ادامه دادن این روش، داریم $\tilde{\delta}^*_{d2}((I_\Lambda, \mu^{t_0}(I_\Lambda), \nu^{t_0}(I_\Lambda)), x, I_x) \leq \beta$. از طرفی $\omega_{d1}(I_x, e) = \gamma_2$ و $\omega_{d2}(I_x, e) = \eta_2$. بنابراین، $x \in \mathcal{L}^{\alpha,\beta}(\tilde{F}^*_d)$. حال فرض کنید $x \in \mathcal{L}^{\alpha,\beta}(\tilde{F}^*_d)$. لذا،

$$\tilde{\delta}^*_{d1}((I_\Lambda, \mu^{t_0}(I_\Lambda), \nu^{t_0}(I_\Lambda)), x, I_x) \wedge \tilde{\omega}_{d1}((I_x, \mu^{t_0+|x|}(I_x), \nu^{t_0+|x|}(I_x)), e) > \alpha,$$

و

$$\tilde{\delta}^{*}_{d2}((I_\Lambda,\mu^{t_0}(I_\Lambda),\nu^{t_0}(I_\Lambda)),x,I_x)\vee\tilde{\omega}_{d2}((I_x,\mu^{t_0+|x|}(I_x),\nu^{t_0+|x|}(I_x)),e)<\beta.$$

چون $\omega_{d1}(I_x,e)>\alpha$ و $\omega_{d2}(I_x,e)<\beta$ و از طرفی با توجه (۸) و (۹)، $x\in\mathcal{L}^{\alpha,\beta}(\tilde{F}^*)$. □

قضیه ۱۴.۴. اتوماتای $\tilde{F}^*$ را در نظر بگیرید و فرض کنید $\tilde{R}\neq\emptyset$. آنگاه، یک اتوماتای (α,β) - قابل دسترس مانند $\tilde{F}^*_a$ وجود دارد به قسمی‌که $\mathcal{L}^{\alpha,\beta}(\tilde{F}^*)=\mathcal{L}^{\alpha,\beta}(\tilde{F}^*_a)$.

اثبات. بدون کم شدن از کلیت مساله فرض کنید $\tilde{F}^*$ قطعی باشد. همچنین، فرض کنید $S=\{q\in Q|$ قابل دسترس- (α,β) حالت $q\}$، $\tilde{R}_a=\{(q,\mu^{t_0}(q),\nu^{t_0}(q))|q\in S|_{\tilde{R}}\}$، $Z_a=Z$، $\delta_a=\delta|_{S\times X\times S}$، و $\omega_a=\omega|_{S\times Z}$، یعنی، δ_a تحدیدی از δ نسبت به $S\times X\times S$ و ω_a تحدیدی از ω نسبت به $S\times Z$ در نظر گرفته شوند. درنتیجه، اتوماتای $\tilde{F}^*_a$ یک (α,β) -قابل دسترس است. در نظر بگیرید $\tilde{F}_a=(S,X,\tilde{R}_a,Z,\tilde{\delta}_a,\tilde{\omega}_a,F_1,F_2,F_3,F_4)$. واضح است $\mathcal{L}^{\alpha,\beta}(\tilde{F}^*_a)\subseteq\mathcal{L}^{\alpha,\beta}(\tilde{F}^*)$. حال فرض کنید $x=u_1u_2...u_{k+1}\in\mathcal{L}^{\alpha,\beta}(\tilde{F}^*)$. لذا، $q\in\tilde{R}$، $p\in Q$ و $b\in Z$ وجود دارند به قسمی‌که

$$\tilde{\delta}^{*}_{1}((q,\mu^{t_0}(q),\nu^{t_0}(q)),x,p)\wedge\tilde{\omega}_{1}((p,\mu^{t_0+|x|}(p),\nu^{t_0+|x|}(p)),b)>\alpha,$$

و

$$\tilde{\delta}^{*}_{2}((q,\mu^{t_0}(q),\nu^{t_0}(q)),x,p)\vee\tilde{\omega}_{2}((p,\mu^{t_0+|x|}(p),\nu^{t_0+|x|}(p)),b')<\beta.$$

بنابراین، $p_1, p_2, ..., p_k, p'_1, p'_2, ..., p'_k \in Q$ وجود دارند به قسمی‌که

$$\tilde{\delta}^*_1((q, \mu^{t_0}(q), \nu^{t_0}(q)), u_1, p_1) \wedge ... \wedge \tilde{\delta}^*_1((p_k, \mu^{t_k}(p_k), \nu^{t_k}(p_k)), u_{k+1}, p) > \alpha,$$

و

$$\tilde{\delta}^*_2((q, \mu^{t_0}(q), \nu^{t_0}(q)), u_1, p'_1) \vee ... \vee \tilde{\delta}^*_2((p'_k, \mu^{t_k}(p'_k), \nu^{t_k}(p'_k)), u_{k+1}, p) < \beta.$$

درنتیجه، $q \in \tilde{R}_a$. با توجه به اینکه $\tilde{F}^*$ قطعی است، داریم $p_1 = p'_1, p_2 = p'_2, ..., p_k = p'_k$. بنابراین، $p_1, p_2, ..., p_k, p \in S$. از این رو داریم:

$$\tilde{\delta}^*_{a1}((q, \mu^{t_0}(q), \nu^{t_0}(q)), x, p) \wedge \tilde{\omega}_{a1}((p, \mu^{t_0+|x|}(p), \nu^{t_0+|x|}(p)), b) > \alpha,$$

و

$$\tilde{\delta}^*_{a2}((q, \mu^{t_0}(q), \nu^{t_0}(q)), x, p) \vee \tilde{\omega}_{a2}((p, \mu^{t_0+|x|}(p), \nu^{t_0+|x|}(p)), b') < \beta.$$

بنابراین، $x \in \mathcal{L}^{\alpha,\beta}(\tilde{F}^*_a)$ و درنتیجه، $\mathcal{L}^{\alpha,\beta}(\tilde{F}^*) \subseteq \mathcal{L}^{\alpha,\beta}(\tilde{F}^*_a)$ و ادعا برقرار است. $\square$

۵ اتوماتای فازی عمومی BL

در این بخش با توجه به مفاهیم اتوماتای فازی عمومی و جبر BL، مفهوم اتوماتای فازی عمومی BL ارایه شده است. مطالب این بخش از [۱۴، ۱۹] گرفته شده است.

تعریف ۱.۵. [۹] یک BL -جبر[۲۹] ، یک جبر $(L, \wedge, \vee, *, \rightarrow, 0, 1)$ با چهار عمل

[29] BL-algebra

$\wedge, \vee, *, \to$ و دو ثابت ۱ ,۰ می‌باشد به قسمی‌که

۱. $(L, \wedge, \vee, \circ, ۱)$ یک مشبکه‌ی کراندار،

۲. $(L, *, ۱)$ یک مونوید جابجایی،

۳. $*$ و $\to$ یک جفت الحاقی است، یعنی $x \leq y \to z$ اگر و فقط اگر $x * y \leq z$ که در آن، $x, y, z \in L$،

۴. $x \wedge y = x * (x \to y)$ و

۵. $(x \to y) \vee (y \to x) = ۱$.

لم ۲.۵. [۱۴] فرض کنید Q یک مجموعه‌ی غیرتهی باشد. آنگاه، $(P(Q), *, \to, \cap, \cup, \emptyset, Q)$ یک BL-جبر است که در آن، $P(Q)$ مجموعه توانی Q است.

تعریف ۳.۵. فرض کنید $L = (L, \vee, \wedge, \circ, ۱)$ یک مشبکه‌ی کامل

$$\widetilde{F} = (Q, X, \widetilde{R}, Z, \tilde{\delta}, \omega, F_۱, F_۲),$$

یک اتوماتای فازی عمومی و $(P(Q), \subseteq, \cap, \cup, \emptyset, Q)$، BL-جبر ارایه شده در لم ۲.۵ باشد. اتوماتای فازی عمومی BL [30] یک ماشین ده‌تایی به صورت

$$\widetilde{F}_l = (\bar{Q}, X, \widetilde{R} = (\{q_\circ\}, \mu^{t_\circ}(\{q_\circ\})), \bar{Z}, \omega_l, \delta_l, f_l, \tilde{\delta}_l, F_۱, F_۲),$$

است که

(i) $\bar{Q} = P(Q)$، Q یک مجموعه‌ی متناهی و $\bar{Q}$ مجموعه توانی Q است،

(ii) X مجموعه‌ی متناهی از الفبای ورودی،

[30] BL-general fuzzy automata

(iii) $\widetilde{R}$ مجموعه‌ای از حالت‌های آغازین فازی،

(iv) $\bar{Z}$ مجموعه‌ی متناهی از الفبای خروجی، $\bar{Z}$ مجموعه توانی Z است،

(v) $\omega_l : \bar{Q} \to \bar{Z}$ تابع خروجی تعریف شده به صورت $\omega_l(Q_i) = \{\omega(q) \big| q \in Q_i\}$،

(vi) $\delta_l : \bar{Q} \times X \times \bar{Q} \to L$ تابع انتقال فازی است که برای هر $Q_i, Q_j \in P(Q)$ و $a \in X$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\delta_l(\{p\}, a, \{q\}) = \delta(p, a, q),$$

و

$$\delta_l(Q_i, a, Q_j) = \vee_{q_i \in Q_i, q_j \in Q_j} \delta(q_i, a, q_j),$$

(vii) $f_l : \bar{Q} \times X \to \bar{Q}$ تابع حالت بعدی است که به صورت:

$$f_l(Q_i, a) = \cup_{q_i \in Q_i} \{q_j \big| \delta(q_i, a, q_j) \in \Delta\},$$

(viii) $\tilde{\delta}_l : (\bar{Q} \times L) \times X \times \bar{Q} \to L$ تابع انتقال تکمیلی تعریف شده به صورت:

$$\tilde{\delta}_l((Q_i, \mu^t(Q_i)), a, Q_j) = F_1(\mu^t(Q_i), \delta_l(Q_i, a, Q_j)),$$

(ix) $F_1 : L \times L \to L$ تابع تخصیص عضویت،

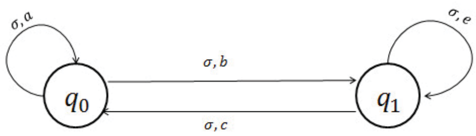
(x) $F_2 : L^* \to L$ تابع رفع چندعضویتی است.

مثال ۴.۵. [۱۹] فرض کنید مشبکه‌ی کراندار $L=(L, \leq, T, S, 0, 1)$ به صورت شکل ۳ باشد. اتوماتای فازی عمومی $\widetilde{F} = (Q, X, \tilde{\delta}, \widetilde{R}, Z, \omega, F_1, F_2)$ را به صورت شکل ۵ در نظر بگیرید که در آن، $Q = \{q_0, q_1\}$، $\widetilde{R} = \{(q_0, 1)\}$، $X = \{\sigma\}$، $Z = \{z_1, z_2\}$،

$\omega(q_\circ) = z_۱ = \omega(q_۱)$ و

$$\delta(q_\circ, \sigma, q_\circ) = a, \qquad \delta(q_\circ, \sigma, q_۱) = b,$$
$$\delta(q_۱, \sigma, q_\circ) = c, \qquad \delta(q_۱, \sigma, q_۱) = e.$$

حال با در نظر گرفتن تعریف ۳.۵، اتوماتای فازی عمومی ، BL



شکل ۵: اتوماتای فازی عمومی $\widetilde{F}$ مثال ۴.۵

$$\widetilde{F}_l = (\bar{Q}, X, \widetilde{R} = (\{q_\circ\}, \mu^{t_\circ}(\{q_\circ\})), \bar{Z}, \omega_l, \delta_l, f_l, \tilde{\delta}_l, F_۱, F_۲),$$

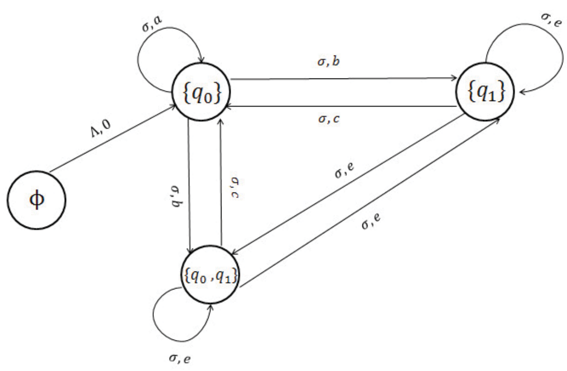
را به صورت ارایه شده در شکل ۶ داریم که $\bar{Q} = \{\emptyset, \{q_\circ\}, \{q_۱\}, \{q_\circ, q_۱\}\}$،

$$\bar{Z} = \{\emptyset, \{z_۱\}, \{z_۲\}, \{z_۱, z_۲\}\},$$

$$\omega_l(\{q_\circ\}) = \omega_l(\{q_۱\}) = \omega_l(\{q_\circ, q_۱\}) = \{z_۱\},$$

$f_l(\{q_0\},\sigma)=f_l(\{q_1\},\sigma)=f_l(\{q_0,q_1\},\sigma)=\{q_0,q_1\}$ و

$$\begin{aligned}
&\delta_l(\{q_0\},\sigma,\{q_0\})=a, && \delta_l(\{q_0\},\sigma,\{q_1\})=b,\\
&\delta_l(\{q_0\},\sigma,\{q_0,q_1\})=b, && \delta_l(\{q_1\},\sigma,\{q_0\})=c,\\
&\delta_l(\{q_1\},\sigma,\{q_1\})=e, && \delta_l(\{q_1\},\sigma,\{q_0,q_1\})=e,\\
&\delta_l(\{q_0,q_1\},\sigma,\{q_0\})=c, && \delta_l(\{q_0,q_1\},\sigma,\{q_1\})=e,\\
&\delta_l(\{q_0,q_1\},\sigma,\{q_0,q_1\})=e.
\end{aligned}$$



شکل ۶: اتوماتای فازی عمومی، $\widetilde{F_l}\ BL$ مثال ۴.۵

۶ نتیجه‌گیری

در این مقاله، در ابتدا ساختمان جبری ماشین ها و سپس مفاهیم اتوماتای فازی عمومی شهودی و اتوماتای فازی عمومی BL ارایه شد.

حال، در اینجا چند ایده برای کارهای آتی ارایه می‌دهیم:

۰. مفهوم گرامر در اتوماتای فازی عمومی و اتوماتای فازی عمومی شهودی به چه صورت ارایه

می‌شود؟

۲. مفهوم اتوماتای فازی عمومی وزن دار و اتوماتای فازی عمومی شهودی وزن دار به چه صورت ارایه می‌شود؟

۳. مفهوم اتوماتای فازی عمومی را به چه صورت می‌توان گسترش داد که زبان های مستقل از متن را نیز پذیرش کنند؟

مراجع

[۱] شمسی زاده، م، زاهدی، م. م. (۱۳۹۸) مروری بر اتوماتای فازی، شماره ۱، صص. ۶۹ تا ۸۷، سیستم‌های فازی و کاربردها.

[2] Atanassov, K. (1986) Intuitionistic fuzzy sets, Fuzzy Sets and Systems, 20, 87-96.

[3] Atanassov, K. Stoeva, S. (1984) Intuitionistic L-fuzzy sets. In: R. Trappl (ed.) Cybernetics and Systems Research 2. Elsevier, North-Holland, 539-540.

[4] Belohlávek, R. (2002) Fuzzy Relational Systems: Foundations and Principles, Kluwer, NewYork.

[5] Davvaz, B. Dudek, W. A. Jun, Y. B. (2006) Intuitionistic fuzzy H v-submodules, Information Sciences, 176, 285-300.

[6] Doostfatemeh, M. Kremer, S. C. (2005) New directions in fuzzy automata, International Journal of Approximate Reasoning, 38, 175-214.

[7] Dudek, W. A. Davvaz, B. Jun, Y. B. (2005) On intuitionistic fuzzy sub-hyperquasigroups of hyperquasigroups, Information Sciences 170, 251-262.

[8] Gerstenkorn, T. Tepavĉević, A. (2004) Lattice valued intuitionistic fuzzy sets, Central European Journal of Mathematics 2, 388-398.

[9] Hájek, P. (1998) Metamathematics of Fuzzy Logic, Trends in Logic, 4, Kluwer, Dordercht.

[10] Jun, Y. B. (2005) Intuitionistic fuzzy finite state machines, Journal of Applied Mathematics and Computing, 17, 109-120.

[11] Jun, Y. B. Öztürk, M. A. Park, C. H. (2007) Intuitionistic nil radicals of intuitionistic fuzzy ideals and Euclidean intuitionistic fuzzy ideals in rings, Information Sciences, 177, 4662-4677.

[12] Santos, E. S. (1968) Maximin automata, Information and Control, 13, 363-377.

[13] Shamsizadeh, M. Zahedi, M. M. (2016) A note on ”Quotient structures of intuitionistic fuzzy finite state machines, Journal of Applied Mathematics and Computing, 51, 413-423.

[14] Shamsizadeh, M. Zahedi, M. M. (2019) Bisimulation of type 2 for BL- general fuzzy automata, Soft Computing, doi.org/10.1007/s00500-019-03812-y, 9843-9852.

[15] Shamsizadeh, M. Zahedi, M. M. (2018) I-homomorphism for BL-I-general L-fuzzy automata, Journal of Mahani Mathematical Research Center, 7, 57-77.

[16] Shamsizadeh, M. Zahedi, M. M. (2016) Intuitionistic general fuzzy automata, Soft Computing, 20, 3505-3519.

[17] Shamsizadeh, M. Zahedi, M. M. (2016) Minimal and statewise minimal intuitionistic general L-fuzzy automata, Iranian Journal of Fuzzy Systems, 13, 131-152.

[18] Shamsizadeh, M. Zahedi, M. M. (2015) Minimal intuitionistic general L-fuzzy automata, Italian Journal of Pure and Applied Mathematics, 35, 155-186.

[19] Shamsizadeh, M. Zahedi, M. M. Abolpour, Kh. (2016) Bisimulation for BL-general fuzzy automata, Iranian Journal of Fuzzy Systems, 13, 35-50.

[20] Wee, W. G. (1968) On generalizations of adaptive algorithms and application of the fuzzy sets concept to pattern classification, 4587-4587.

[21] Wu, W. (1994) Commutative implications on complete lattices, International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems, 2, 333-341.

[22] Zadeh, L. A. (1965) Fuzzy sets, Information and control, 8, 338-353.

[23] Zahedi, M. M. Horry, M. Abolpor, Kh. (2008) Bifuzzy (General) topology on max-min general fuzzy automata, Advanced in Fuzzy Mathematics, 3, 51-68.