سیستم‌های فازی و کاربردها
سال دوم، شماره دوم (پاییز و زمستان ۱۳۹۸) صص. ۸۱ تا ۱۰۸
DOR: 20.1001.1.27174409.1397.2.2.4.4

# مجموعه فازی مردد و برخی گسترش‌های آن

**امیر رحیمی، فرانک حسین‌زاده سلجوقی**
دانشگاه سیستان و بلوچستان، دانشکده ریاضی

**چکیده**
در این مقاله، مقدمه‌ای بطور کامل و منظم از فازی مردد، که شامل قوانین عملیاتی مجموعه فازی مردد است را با ارائه مثال‌های متنوع بیان می‌کنیم. همچنین برخی از گسترش‌های مجموعه فازی مردد را به همراه قوانین عملیاتی آنها بازگو خواهیم کرد. این مقاله برای مهندسین، تکنسین‌ها و محققان در زمینه‌های ریاضی فازی، تحقیق در عملیات، علوم اطلاعات، علوم مدیریت و مهندسی در جهت آشنایی و بهره‌مندی با فازی مردد، مناسب است.

## ۱ مقدمه

مجموعه‌های فازی، مجموعه‌های مبهم با مرزهای غیردقیق می‌باشند، که نخستین بار توسط دانشمندی به نام لطفی عسگرزاده[۱۲] در مقاله‌ای در سال ۱۹۶۵ مطرح گردید. نظریه مجموعه‌های فازی، نظریه‌ای برای اقدام در شرایط عدم اطمینان است. این نظریه قادر است بسیاری از مفاهیم و متغیرها و سیستم‌هایی را که نادقیق و مبهم هستند، همان‌گونه که در عالم واقع نیز اکثر اوقات چنین است، صورت‌بندی ریاضی ببخشد و زمینه را برای استدلال، استنتاج، کنترل و تصمیم‌گیری در شرایط عدم اطمینان فراهم

**Mathematics Subject Classification (2010):** 68Q70, 18B20 , **Email:** amirrahimi525@gmail.com.
**عبارات و کلمات کلیدی:**فازی، فازی مردد، عنصر فازی مردد، فازی مردد بازه‌ای ـ مقدار، دوگان فازی مردد

آورد. از زمانی که مجموعه‌های فازی کلاسیک معرفی شدند، آنها به چندین شکل مختلف گسترش یافته‌اند، مانند: فازی شهودی، فازی نوع ۲، فازی نوع$n$، فازی چندتایی و فازی مردد.

یک مجموعه فازی شهودی [۱] دارای سه بخش اصلی است: تابع عضویت، تابع غیرعضویت و تابع عدم اطمینان در عضویت. در مجموعه‌های فازی نوع۲ [۲] ، درجه عضویت هر یک از اجزاء نیز توسط یک تابع عضویت مشخص می‌گردد. در مجموعه فازی نوع $n$ [۳] ، تعمیمی از مجموعه فازی نوع۲ است که اجازه می‌دهد عضویت عناصر جزئی از $n - ۱$ مجموعه ممکن باشد. در مجموعه فازی چندتایی[۴]عضویت اجزاء می‌تواند بیشتر از یک بار تکرار شوند.

گاهی اوقات تصمیم‌گیرندگان در هنگام تصمیم‌گیری بسیار مردد و دو دل بوده و معمولاً برای دستیابی به توافق نهایی با مشکل مواجه می‌شوند. به عنوان مثال، دو تصمیم‌گیرنده زمانی که برای تعیین درجه عضویت یک عضو با یکدیگر بحث و تبادل نظر می‌کنند، ممکن است یک نفر درجه عضویت ۰٫۶ و دیگری درجه عضویت ۰٫۸ را اختصاص دهد. بر همین اساس، انتخاب درجه عضویت عناصر متفاوت بوده که این امر به سبب وجود یک درجه خطا و یا توزیع احتمال درجه عضویت نیست؛ بلکه بعلت وجود مجموعه‌ای از ارزش‌های ممکن است. در مواجهه با چنین شرایطی، تورا و ناروکاوا [۹] مفهوم جدیدی به عنوان مجموعه فازی مردد[۵] (HFS) را معرفی نمودند. تورا [۸] روابط بین فازی مردد و انواع دیگر مجموعه‌های فازی را مورد بحث قرار داده و نشان داد که پوشش فازی مردد یک فازی شهودی است. تورا

[1] Intuitionistic Fuzzy
[2] Type-2 Fuzzy
[3] Type-n Fuzzy
[4] Multiset Fuzzy
[5] Hesitant Fuzzy Set

همچنین اثبات کرد که عملیات پیشنهادی او سازگار با مجموعه‌های فازی شهودی در شرایطی که برای پوشش مجموعه‌های فازی مردد بکار می‌روند، هستند.

فازی مردد اجازه می‌دهد عضویت عناصر تنها مجموعه‌ای از ارزش‌های ممکن را داشته باشد؛ بعبارتی دیگر، فازی مردد اجازه می‌دهد عضویت عناصر مقادیر متعددی داشته باشد. پژوهش‌های زیادی درباره چهار نوع اول مجموعه‌های فازی انجام شده است. با این حال اقدامات اندکی در مورد مجموعه‌های فازی مردد انجام گرفته است. در واقع تورا روابط بین فازی مردد و سه نوع دیگر فازی را تعیین کرد و نشان داد که پوشش مجموعه فازی مردد یک مجموعه فازی شهودی است.

در این پژوهش، در بخش ۲، نخست مجموعه‌های فازی مردد را بطور دقیق معرفی خواهیم کرد. سپس، در این بخش، قوانین عملیاتی مربوط به آنها را با ارائه مثال‌هایی شرح خواهیم داد. در بخش ۳، دو مورد از گسترش‌های مجموعه فازی مردد را به همراه قوانین عملیاتی بیان خواهیم کرد. در بخش پایانی، نتیجه‌گیری لازم از این پژوهش را خواهیم داشت.

## ۲ مجموعه فازی مردد

### ۱.۲ معرفی مجموعه فازی مردد

**تعریف ۱.۲.** (مندل [۷]) فرض کنید $X$ نشان‌دهنده مجموعه‌ی مرجع باشد. در این صورت مجموعه فازی $A$ روی $X$ مجموعه‌ای از جفت‌های مرتب $A = \{(x, \mu_A(x)) : x \in X\}$ است، که در آن $\mu_A(x)$ درجه عضویت $x$ است.

مجموعه فازی مردد $(HFS)$ بعنوان یک تعمیم از مجموعه‌های فازی، در شرایطی که تعیین درجه عضویت عناصر یک تابع در ابهام و تردید باشد، ابزار بسیار مفیدی است. در چنین مواردی، مجموعه فازی مردد، بعنوان تعمیم مجموعه فازی، درجه عضویت یک عنصر را به مجموعه‌ای ارائه

می‌دهد که توسط چندین مقدار بین ۰ تا ۱ ارائه می‌شود.

با توجه به مطالب مطرح شده، تورا[۸]، فازی مردد را به صورت زیر ارائه نمود.

**تعریف ۲.۲.** (تورا [۸]) فرض کنید $X$ یک مجموعه مرجع روی اعداد حقیقی باشد. یک مجموعه فازی مردد روی $X$ در شرایط تابع $h$ است که وقتی روی $X$ اعمال می‌شود زیر مجموعه از $[۰,۱]$ را برمی‌گرداند.

به منظور درک بهتر، چو و چیا [۱۰] مجموعه فازی مردد را بصورت زیر تعریف کردند.

$$A = \{< x, h_A(x) >| x \in X\}, \qquad (۱)$$

که $h_A(x)$ مجموعه مقادیر در $[۰,۱]$ است و بیانگر درجه عضویت‌های ممکن $x \in X$ در مجموعه $A \subset X$ است. برای راحتی، چو و چیا $h_A(x)$ را یک عنصر فازی مردد[۶] $(HFE)$ نامیدند، که بیانگر یک مولفه اساسی مجموعه فازی مردد است.

**مثال ۳.۲.** فرض کنید $X = \{x_۱, x_۲, x_۳\}$ یک مجموعه ثابت بوده و $h_A(x_۱) = \{۰/۲, ۰/۴, ۰/۵\}$ و $h_A(x_۲) = \{۰/۳, ۰/۴\}$ و $h_A(x_۳) = \{۰/۲, ۰/۳, ۰/۶\}$ عناصر مجموعه فازی مردد از $x_i (i = ۱, ۲, ۳)$ برای مجموعه $A$ باشند. بنابراین $A$ بعنوان یک مجموعه فازی مردد می‌تواند به صورت زیر در نظر گرفته شود:

$$A = \{< x_۱, \{۰/۲, ۰/۴, ۰/۵\} >, < x_۲, \{۰/۳, ۰/۴\} >, < x_۳, \{۰/۲, ۰/۳, ۰/۶\}\}.$$

تورا [۸]، برخی از عناصر فازی مردد خاص را برای هر $x$ در $X$ بصورت زیر تعریف نمود.

(۱) مجموعه تهی: $h(x) = ۰$، که برای سادگی از این پس با $O^*$ نشان داده می‌شود.

(۲) مجموعه کامل: $h(x) = \{۱\}$، که بصورت $E^*$ بیان می‌شود.

(۳) مجموعه کاملاً نامعین: $h(x) \in [۰,۱]$، به طوری که همه مقادیر ممکن می‌باشد. که بصورت $U^*$ بیان می‌شود.

[۶] Hesitant Fuzzy Element

(۴) مجموعه بی‌معنی: $h(x) = \varnothing^*$.

لیائو و چو [۵] توضیحات عمیقی در مورد این عناصر فازی مردد ویژه از نقطه نظر تعریف مجموعه فازی مردد و همچنین فرآیندهای تصمیم‌گیری بیان نمودند. همانطورکه در تعریف ارائه شده است، مجموعه فازی مردد روی مجموعه مرجع $X$ دارای شرایط تابع $h$ است که وقتی در $X$ اعمال می‌شود زیر مجموعه از $[۰, ۱]$ را برمی‌گرداند. از این رو، اگر $h$ هیچ مقداری نداشته باشد؛ بدین معناست که یک مجموعه بی‌معنی است. طبق همین قیاس، در صورتی مجموعه شامل کل بازه ۰ و ۱ می‌شود که شامل کلیه مقادیر ممکن۰ و ۱ باشد، که در چنین شرایطی عضویت عناصر کاملاً نامعین می‌شود. همچنین اگر تنها شامل یک عدد منحصر به فرد $\gamma \in [۰, ۱]$ باشد بدین معناست که نظرات یکسان و محیط معین است. این مفهوم منطقی است، زیرا مقدار واحد $\gamma \in [۰, ۱]$ می‌تواند بعنوان یک زیر مجموعه از $[۰, ۱]$ دیده شود. یعنی می‌توانیم $\gamma$ را بصورت $[\gamma, \gamma]$ در نظر بگیریم. در مواقعی که مقدار $\gamma = ۰$ بدین معناست که عضویت عناصر برابر با صفر است. بنابراین می‌توان گفت این یک مجموعه تهی است. در حالی‌که اگر $\gamma = ۱$ باشد، این یک مجموعه کامل است. باید توجه داشت که نباید مجموعه تهی را بعنوان مجموعه‌ای که هیچ مقداری در آن وجود ندارد و همچنین نباید مجموعه کامل را بعنوان مجموعه‌ای از همه مقادیر ممکن در نظر گرفت. این موارد تفاوت عمده فازی کلاسیک و فازی مردد است. تفاوت این چهار مجموعه فازی مردد در تصمیم‌گیری به خوبی آشکار است. یک سازمان با چند تصمیم‌گیرنده از نواحی مختلف برای ارزیابی یک گزینه با استفاده از عناصر فازی مردد را در نظر بگیرید. مجموعه تهی بیانگر این است که همه تصمیم‌گیرندگان با گزینه مد نظر مخالفت دارند. مجموعه کامل بدین معناست که همه تصمیم‌گیرندگان با آن موافقند. مجموعه کاملاً نامعین بیانگر این است که همه تصمیم‌گیرندگان هیچ نظری برای گزینه ندارند. مجموعه بی‌معنا دلالت بر بی‌معنا بودن مجموعه دارد.

## ۲.۲ قوانین عملیاتی عناصر فازی مردد

تورا [۸] برخی عملیات همچون مکمل، اجتماع و اشتراک را برای عناصر فازی مردد بصورت زیر تعریف کرد.

**تعریف ۴.۲.** برای سه عنصر فازی مردد $h$، $h_۱$ و $h_۲$، عملیات زیر تعریف شده است.

(۱) کران پایین: $h^-(x) = \min h(x)$.

(۲) کران بالا: $h^+(x) = \max h(x)$.

(۳) $h^c = \cup_{\gamma \in h}\{۱ - \gamma\}$.

(۴) $h_۱ \cup h_۲ = \{h \in h_۱ \cup h_۲ | h \geq \max(h_۱^-, h_۲^-)\}$.

(۵) $h_۱ \cap h_۲ = \{h \in h_۱ \cup h_۲ | h \geq \min(h_۱^+, h_۲^+)\}$.

پس از آن، چیا و چو [۱۰] اشکال دیگری از (۴) و (۵) بصورت زیر ارائه نمودند.

(۶) $h_۱ \cup h_۲ = \cup_{\gamma_۱ \in h_۱, \gamma_۲ \in h_۲} \max\{\gamma_۱, \gamma_۲\}$.

(۷) $h_۱ \cap h_۲ = \cup_{\gamma_۱ \in h_۱, \gamma_۲ \in h_۲} \min\{\gamma_۱, \gamma_۲\}$.

**تعریف ۵.۲.** (چیا و چو [۱۰]) فرض کنید $h$، $h_۱$ و $h_۲$ سه عنصر فازی مردد، و $\lambda$ یک عدد حقیقی مثبت باشد. پس داریم:

(۱) $h^\lambda = \cup_{\gamma \in h}\{\gamma^\lambda\}$.

(۲) $\lambda h = \cup_{\gamma \in h}\{۱ - (۱ - \gamma)^\lambda\}$.

(۳) $h_۱ \oplus h_۲ = \cup_{\gamma_۱ \in h_۱, \gamma_۲ \in h_۲}\{\gamma_۱ + \gamma_۲ - \gamma_۱\gamma_۲\}$.

(۴) $h_۱ \otimes h_۲ = \cup_{\gamma_۱ \in h_۱, \gamma_۲ \in h_۲}\{\gamma_۱\gamma_۲\}$.

فرض کنید $h_j(j = ۱, ۲, ..., n)$ یک مجموعه از عناصر فازی مردد باشد. لیائو و همکاران [۵] (۳) و (۴) در تعریف ۵.۲ را به اشکال زیر گسترش دادند.

(۵) $\oplus_{j=۱}^n h_j = \cup_{\gamma_j \in h_j}\{۱ - \prod_{j=۱}^n (۱ - \gamma_j)\}$.

(۶) $\otimes_{j=۱}^n h_j = \cup_{\gamma_j \in h_j}\{\prod_{j=۱}^n \gamma_j\}$.

قابل ذکر است که ممکن است تعداد مقادیر موجود در عناصر فازی مردد مختلف متفاوت باشد. فرض کنید $l_{h_j}$ تعداد مقادیر در $h_j$ باشد. براساس قوانین عملیاتی بالا، قضیه‌های زیر بدست می‌آید:

**قضیه ۶.۲.** (لیائو و همکاران [۵]) فرض کنید $h_۱$ و $h_۲$ دو عنصر فازی مردد باشند، پس داریم:

$$l_{h_۱ \oplus h_۲} = l_{h_۱} \times l_{h_۲},\ l_{h_۱ \otimes h_۲} = l_{h_۱} \times l_{h_۲}, \tag{۲}$$

مشابها، همچنین موقعی که $n$، عناصر فازی مردد مختلف وجود داشته باشد، رابطه برقرار است. یعنی،

$$l_{\oplus_{j=۱}^{n} h_j} = \prod_{j=۱}^{n} l_{h_j},\ l_{\otimes_{j=۱}^{n} h_j} = \prod_{j=۱}^{n} l_{h_j}. \tag{۳}$$

**مثال ۷.۲.** فرض کنید $h_۱ = \{۰/۱, ۰/۲, ۰/۷\}$ و $h_۲ = \{۰/۲, ۰/۴\}$ دو عنصر فازی مردد باشند. پس با توجه به قوانین عملیاتی عناصر فازی مردد در تعریف ۵.۲ داریم:

$$\begin{aligned} h_۱ \oplus h_۲ &= \cup_{\gamma_۱ \in h_۱, \gamma_۲ \in h_۲} \{\gamma_۱ + \gamma_۲ - \gamma_۱\gamma_۲\} \\ &= \{۰/۱ + ۰/۲ - ۰/۱ \times ۰/۲, -۰/۱ + ۰/۴ - ۰/۱ \times ۰/۴, ۰/۲ + ۰/۲ \\ &- ۰/۲ \times ۰/۲, ۰/۲ + ۰/۴ - ۰/۲ \times ۰/۴, ۰/۷ + ۰/۲ - ۰/۷ \times ۰/۲, \\ &۰/۷ + ۰/۴ - ۰/۷ \times ۰/۴\} = \{۰/۲۸, ۰/۳۶, ۰/۴۶, ۰/۵۲, ۰/۷۶, ۰/۸۲\}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h_۱ \otimes h_۲ &= \cup_{\gamma_۱ \in h_۱, \gamma_۲ \in h_۲} \{\gamma_۱\gamma_۲\} \\ &\{۰/۱ \times ۰/۲, ۰/۱ \times ۰/۴, ۰/۲ \times ۰/۲, ۰/۲ \times ۰/۴, ۰/۷ \times ۰/۲, ۰/۷ \times ۰/۴\} \\ &= \{۰/۰۲, ۰/۰۴, ۰/۰۴, ۰/۰۸, ۰/۱۴, ۰/۲۸\} \end{aligned}$$

پس

$$l_{h_۱\oplus h_۲}=۶=۳\times ۲=l_{h_۱}\times l_{h_۲},$$

$$l_{h_۱\otimes h_۲}=۶=۳\times ۲=l_{h_۱}\times l_{h_۲}.$$

در سال ۲۰۱۴، لیائو و همکاران [۵] با توجه به رابطه بین مجموعه‌های فازی مردد و مجموعه‌های فازی شهودی[۱]، عملیات تفریق و تقسیم روی عناصر فازی مردد را بصورت زیر تعریف کردند.

**تعریف ۸.۲.** (لیائو و همکاران [۵]) فرض کنید $h$، $h_۱$ و $h_۲$ سه عنصر فازی مردد باشند. پس داریم:

(۴)

$$(۱) h_۱\ominus h_۲=\cup_{\gamma_۱\in h_۱,\gamma_۲\in h_۲}\{t\},$$

$$t=\begin{cases}\frac{\gamma_۱-\gamma_۲}{۱-\gamma_۲} & \gamma_۱\geq\gamma_۲,\gamma_۲\neq ۱,\\ ۰, & \text{در غیر اینصورت.}\end{cases}$$

(۵)

$$(۲) h_۱\oslash h_۲=\cup_{\gamma_۱\in h_۱,\gamma_۲\in h_۲}\{t\},$$

$$t=\begin{cases}\frac{\gamma_۱}{\gamma_۲} & \gamma_۱\leq\gamma_۲,\gamma_۲\neq ۰,\\ ۱, & \text{در غیر اینصورت.}\end{cases}$$

قضایای زیر نشان می دهد که عملیات تفریق و تقسیم بر عناصر فازی مردد در تعریف ۸.۲ قانع کننده است و برخی از خصوصیات اساسی را برآورده می کند.

**قضیه ۹.۲.** (لیائو و همکاران [۵]) فرض کنید $h_۱$ و $h_۲$ دو عنصر فازی مردد باشند. پس داریم:

$$(۱)(h_۱ \ominus h_۲) \oplus h_۲ = h_۱, \quad \gamma_۱ \geq \gamma_۲, \gamma_۲ \neq ۱.$$
$$(۲)(h_۱ \oslash h_۲) \otimes h_۲ = h_۱, \quad \gamma_۱ \leq \gamma_۲, \gamma_۲ \neq ۰.$$

**قضیه ۱۰.۲.** (لیائو و همکاران [۵]) فرض کنید $h_۱$ و $h_۲$ دو عنصر فازی مردد و $\lambda > ۰$ باشند. پس داریم:

$$(۱)\lambda(h_۱ \ominus h_۲) = \lambda h_۱ \ominus \lambda h_۲, \quad \gamma_۱ \geq \gamma_۲, \gamma_۲ \neq ۱.$$
$$(۲)(h_۱ \oslash h_۲)^\lambda = h_۱^\lambda \oslash h_۲^\lambda, \quad \gamma_۱ \leq \gamma_۲, \gamma_۲ \neq ۰.$$

**قضیه ۱۱.۲.** (لیائو و همکاران [۵]) فرض کنید $h = \cup_{\gamma \in h}\{\gamma\}$ یک عنصر فازی مردد و $\lambda_۱ \geq \lambda_۲ > ۰$ باشد. لذا داریم:

$$(۱)\lambda_۱ h \ominus \lambda_۲ h = (\lambda_۱ - \lambda_۲)h, \quad \gamma \neq ۱.$$
$$(۲)h^{\lambda_۱} \oslash h^{\lambda_۲} = h^{(\lambda_۱ - \lambda_۲)}, \quad \gamma \neq ۰.$$

**قضیه ۱۲.۲.** (لیائو و همکاران [۵]) برای دو عنصر فازی مردد $h_۱$ و $h_۲$، روابط زیر برقرار است:

$$(۱) \quad h_۱^c \ominus h_۲^c = (h_۱ \oslash h_۲)^c.$$
$$(۲) \quad h_۱^c \oslash h_۲^c = (h_۱ \ominus h_۲)^c.$$

**مثال ۱۳.۲.** دو عنصر فازی مردد $h_۱ = \{۰/۳, ۰/۲\}$ و $h_۲ = \{۰/۱, ۰/۲\}$ را در نظر بگیرید. با توجه به تعریف ۸.۲ داریم:

$$h_۱ \ominus h_۲ = \{\frac{۰/۳ - ۰/۱}{۱ - ۰/۱}, \frac{۰/۳ - ۰/۲}{۱ - ۰/۲}, \frac{۰/۲ - ۰/۱}{۱ - ۰/۱}, \frac{۰/۲ - ۰/۲}{۱ - ۰/۲}\} = \{\frac{۲}{۹}, \frac{۱}{۸}, \frac{۱}{۹}, ۰\}$$

در مجموع، چون $h_1^c = \{۰/۷, ۰/۸\}$ و $h_2^c = \{۰/۹, ۰/۸\}$، با توجه به تعریف ۸.۲ مقادیر زیر بدست می‌آید:

$$h_1^c \oslash h_2^c = \{\frac{۰/۷}{۰/۹}, \frac{۰/۸}{۰/۹}, \frac{۰/۷}{۰/۸}, \frac{۰/۸}{۰/۸}\} = \{\frac{۷}{۹}, \frac{۸}{۹}, \frac{۷}{۸}, ۱\}$$

چون

$$(h_1 - h_2)^c = \{۱ - \frac{۲}{۹}, ۱ - \frac{۱}{۸}, ۱ - \frac{۱}{۹}, ۱ - ۰\} = \{\frac{۷}{۹}, \frac{۸}{۹}, \frac{۷}{۸}, ۱\}$$

پس، $(h_1 - h_2)^c = h_1^c \oslash h_2^c$، تایید قسمت (۲) قضیه ۱۲.۲ می‌باشد. بطور مشابه قسمت (۱) قضیه ۱۲.۲ می‌تواند تایید شود.

عملیات تفریق و تقسیم در شکل‌گیری چارچوب نظری مجموعه فازی مردد از اهمیت قایل توجهی برخوردار است.

## ۳.۲ قوانین مقایسه عناصر فازی مردد

چو و چیا [۱۰] با توجه به مقادیر موجود در عنصر فازی مردد، تابع امتیاز یک عنصر فازی مردد را تعریف کردند.

**تعریف ۱۴.۲.** (چو و چیا [۱۰]) برای یک عنصر فازی مردد $h$،

$$s(h) = \frac{۱}{l_h} \sum_{\gamma \in h} \gamma \qquad (۶)$$

تابع امتیاز $h$ می‌نامیم، که $l_h$ تعداد مقادیر در $h$ است.

برای دو عنصر فازی مردد $h_1$ و $h_2$، اگر $s(h_1) > s(h_2)$، پس $h_1 > h_2$؛ اگر $s(h_1) = s(h_2)$، پس $h_1 = h_2$ است.

علاوه براین، در برخی حالت‌های خاص، این قانون مقایسه نمی‌تواند برای دو عنصر فازی مردد مورد استفاده قرار گیرد. برای بیان واضح‌تر به مثال زیر توجه کنید.

**مثال ۱۵.۲.** فرض کنید $h_۱ = \{۰/۱, ۰/۲, ۰/۶\}$ و $h_۲ = \{۰/۲, ۰/۴\}$ دو عنصر فازی مردد باشند. پس باتوجه به تعریف ۱۴.۲ داریم:

$$s(h_۱) = \frac{۰/۱ + ۰/۲ + ۰/۶}{۳} = ۰/۳,$$
$$s(h_۲) = \frac{۰/۲ + ۰/۴}{۲} = ۰/۳.$$

چون $s(h_۱) = s(h_۲)$، نمی‌توانیم تفاوت بین $h_۱$ و $h_۲$ را فقط با استفاده از تعریف ۱۴.۲ بیان کنیم. در واقع رخ دادن چنین مواردی بسیار معمول می‌باشد.

واضح است که طبق تعریف ۱۴.۲ تنها تساوی امتیازات $h_۱$ و $h_۲$ ملاک مساوی بودن $h_۱$ و $h_۲$ نبوده، بلکه ممکن است درجه انحراف آنها متفاوت باشد. درجه انحراف همه اجزاء با توجه به میانگین مقادیر در یک عنصر فازی مردد بیانگر این است که چگونه اجزاء با یکدیگر سازش داشته و هر کدام از آنها از چه میزان پایداری برخوردار هستند. به منظور درک بهتر، لیائو و همکاران [۵] مفهوم درجه انحراف را به صورت زیر تعریف نمودند.

**تعریف ۱۶.۲.** برای یک عنصر فازی مردد $h$،

$$v_۱(h) = \frac{۱}{l_h}\sqrt{\sum_{\gamma_i,\gamma_j \in h} (\gamma_i - \gamma_j)^۲} \qquad (۷)$$

تابع انحراف $h$ نامیده می‌شود، که $l_h$ تعداد مقادیر در $h$، و $v_۱(h)$ درجه انحراف $h$ می‌نامیم. برای دو عنصر فازی مردد $h_۱$ و $h_۲$، اگر $v_۱(h_۱) > v_۱(h_۲)$ باشد، پس $h_۱ < h_۲$؛ اگر $v_۱(h_۱) = v_۱(h_۲)$، پس $h_۱ = h_۲$.

**مثال ۱۷.۲.** با توجه به معادله (۲) در مثال ۱۵.۲، داریم:

$$v_۱(h_۱) = \frac{\sqrt{۰/۲^۲ + ۰/۴^۲ + ۰/۵^۲}}{۳} = ۰/۲۱۶۰,$$
$$v_۱(h_۲) = \frac{\sqrt{۰/۲^۲}}{۲} = ۰/۱.$$

پس، $v_۱(h_۱) > v_۱(h_۲)$، یعنی درجه انحراف $h_۱$ بالاتر از $h_۲$ است. پس بنابراین، $h_۱ < h_۲$.

از تحلیل‌های بالا، می‌توان دید که رابطه‌ی بین تابع امتیاز و تابع انحراف مشابه رابطه‌ی بین میانگین و انحراف در آمار است. در سال ۲۰۱۵، لیائو و چو [۶] تابع انحراف را به شکل زیر اصلاح کردند:

$$v_۲(h) = \frac{۲}{l_h(l_h - ۱)} \sqrt{\sum_{\gamma_i, \gamma_j \in h} (\gamma_i - \gamma_j)^۲} \qquad (۸)$$

**تعریف ۱۸.۲.** (چن و همکاران [۴]) برای یک عنصر فازی مردد $h$، درجه انحراف $v_۳(h)$ بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$v_۳(h) = \sqrt{\frac{۱}{l_h} \sum_{\gamma \in h} (\gamma - s(h))^۲} \qquad (۹)$$

براساس تابع امتیاز $s(h)$ و تابع واریانس $v_q(h)(q = ۱, ۲, ۳)$، یک طرح مقایسه برای رتبه‌بندی هر عنصر فازی مردد می‌تواند ایجاد شود.

(۱) اگر $s(h_۱) < s(h_۲)$، پس $h_۱ < h_۲$؛

(۲) اگر $s(h_۱) = s(h_۲)$،پس

اگر $v_q(h_۱) < v_q(h_۲)$، پس $h_۱ > h_۲$.

اگر $v_q(h_۱) = v_q(h_۲)$، پس $h_۱ = h_۲$.

به دلیل اینکه واریانس گاهی اوقات بد و گاهی اوقات خوب است، نمی‌توانیم ادعا کنیم که برای دو عنصر فازی مردد $h_۱$ و $h_۲$، اگر $v(h_۱) > v(h_۲)$، پس $h_۱ < h_۲$ و اگر $v(h_۱) = v(h_۲)$، پس $h_۱ = h_۲$ است. این تایید فقط تحت پیش‌شرط $s(h_۱) = s(h_۲)$ برقرار است.

# ۳ گسترش‌های مجموعه فازی مردد

## ۱.۳ مجموعه فازی مردد بازه‌ای ـ مقدار

در بسیاری از مسائل تصمیم‌گیری، بعلت کمبود اطلاعات در دسترس، ممکن است برای تصمیم گیرندگان و یا متخصصان، تعیین دقیق درجه عضویت یک عنصر به یک مجموعه اعداد قطعی با اعداد بازه‌ای مقدار که زیر مجموعه‌ای از $[۰, ۱]$ هستند، دشوار باشد. در نتیجه، لازم است تا مفهوم مجموعه فازی مردد بازه‌ای ـ مقدار $(IVHFS)$[۷] معرفی شود، که اجازه می‌دهد درجه عضویت یک عنصر به یک مجموعه معین داده شود تا دارای مقادیر بازه‌ای مختلف باشد.

**تعریف ۱.۳.** (چن و همکاران [۳]) فرض کنید $X$ یک مجموعه مرجع، و $D[۰, ۱]$ مجموعه تمام زیربازه‌های بسته $[۰, ۱]$ باشد. یک مجموعه فازی مردد بازه‌ای ـ مقدار روی $X$ بصورت زیر است:

$$\widetilde{A} = \{< x, \widetilde{h}_A(x) > | x \in X\}. \qquad (۱۰)$$

که $\widetilde{h}_A(x) : X \longrightarrow D[۰, ۱]$ بیانگر تمام درجه عضویت‌های بازه‌ای ـ مقدار عنصر $x \in X$ در مجموعه $A \subset X$ است. برای راحتی، $\widetilde{h}_A(x)$ را یک عنصر فازی مردد بازه‌ای ـ مقدار $(IVHFE)$[۸] می‌نامیم، که

$$\widetilde{h}_A(x) = \{\widetilde{\gamma} | \widetilde{\gamma} \in \widetilde{h}_A(x)\}. \qquad (۱۱)$$

[7] Interval Valued Hesitant Fuzzy Set
[8] Interval Valued Hesitant Fuzzy Element

از این رو $\widetilde{\gamma} = [\widetilde{\gamma}^L, \widetilde{\gamma}^U]$ یک عدد بازه‌ای ـ مقدار است. $\widetilde{\gamma}^L = \inf \widetilde{\gamma}$ و $\widetilde{\gamma}^U = \sup \widetilde{\gamma}$ بترتیب بیانگر حدهای پایین و بالای $\widetilde{\gamma}$ هستند.

عنصر فازی مردد بازه‌ای ـ مقدار واحد اساسی مجموعه فازی مردد بازه‌ای ـ مقدار است. این مورد می‌تواند بعنوان یک حالت خاص مجموعه فازی مردد بازه‌ای ـ مقدار در نظر گرفته شود.

**مثال ۲.۳.** فرض کنید $X = \{x_۱, x_۲\}$ یک مجموعه مرجع و عناصر فازی مردد بازه‌ای ـ مقدار $\widetilde{h}_A(x_۱) = \{[۰/۱, ۰/۳], [۰/۴, ۰/۵]\}$ و $\widetilde{h}_A(x_۲) = \{[۰/۱, ۰/۲], [۰/۳, ۰/۵], [۰/۷, ۰/۹]\}$ بیانگر درجه عضویت‌های $x_i (i = ۱, ۲)$ در مجموعه $\widetilde{A} \subset X$ باشد. $\widetilde{A}$ را یک مجموعه فازی مردد بازه‌ای ـ مقدار می‌نامیم، که

$$\widetilde{A} = \{< x_۱, \{[۰/۱, ۰/۳], [۰/۴, ۰/۵]\} >, < x_۲, \{[۰/۱, ۰/۲], [۰/۳, ۰/۵], [۰/۷, ۰/۹]\} >\}.$$

لازم به ذکر است وقتی که کران‌های بالا و پایین مقادیر بازه‌ای یکسان هستند، مجموعه فازی مردد بازه‌ای ـ مقدار به مجموعه فازی مردد تبدیل می‌شود. این نشان می‌دهد که مجموعه فازی مردد یک حالت خاص مجموعه فازی مردد بازه‌ای ـ مقدار است. علاوه بر این، هنگامی که درجه عضویت هر عنصر متعلق به یک مجموعه فقط یک مقدار بازه‌ای داشته باشد، عنصر فازی مردد بازه‌ای ـ مقدار به عدد فازی بازه‌ای ـ مقدار و مجموعه فازی مردد بازه‌ای ـ مقدار به مجموعه فازی بازه‌ای ـ مقدار تبدیل می‌شود.

در ادامه، می‌توانیم برخی عناصر فازی مردد بازه‌ای ـ مقدار خاص را بصورت زیر معرفی کنیم.

(۱) مجموعه تهی: $\widetilde{O}^* = \{< x, \widetilde{h}^o(x) > | x \in X\}$ که به ازای هر $x \in X$، $\widetilde{h}^o(x) = \{[۰, ۰]\}$،

(۲) مجموعه کامل: $\widetilde{E}^* = \{< x, \widetilde{h}^*(x) > | x \in X\}$ که به ازای هر $x \in X$، $\widetilde{h}^*(x) = \{[۱, ۱]\}$،

(۳) مجموعه نامعین(تمام حالت‌های ممکن است): $\widetilde{U}^* = \{< x, \widetilde{h}(x) > | x \in X\}$ که به ازای هر $x \in X$، $\widetilde{h}(x) = \{[\circ, ۱]\}$،

(۴) مجموعه بی‌معنی: $\widetilde{\varnothing}^* = \{< x, \widetilde{h}(x) > | x \in X\}$ که به ازای هر $x \in X$، $\widetilde{h}(x) = \varnothing$.

چن و همکاران [۳] از طریق رابطه بین عناصر فازی مردد بازه‌ای ـ مقدار و عناصر فازی مردد برخی عملیات روی عناصر فازی مردد بازه‌ای ـ مقدار را تعریف کردند.

**تعریف ۳.۳.** فرض کنید $\widetilde{h}$، $\widetilde{h}_۱$ و $\widetilde{h}_۲$ سه عنصر فازی مردد بازه‌ای ـ مقدار باشند. پس داریم:

$$(۱)\quad \widetilde{h}^c = \{[۱ - \widetilde{\gamma}^U, ۱ - \widetilde{\gamma}^L] | \widetilde{\gamma} \in \widetilde{h}\}.$$

$$(۲)\quad \widetilde{h}_۱ \cup \widetilde{h}_۲ = \{[\max(\widetilde{\gamma}_۱^L, \widetilde{\gamma}_۲^L), \max(\widetilde{\gamma}_۱^U, \widetilde{\gamma}_۲^U)] | \widetilde{\gamma}_۱ \in \widetilde{h}_۱, \widetilde{\gamma}_۲ \in \widetilde{h}_۲\}.$$

$$(۳)\quad \widetilde{h}_۱ \cap \widetilde{h}_۲ = \{[\min(\widetilde{\gamma}_۱^L, \widetilde{\gamma}_۲^L), \min(\widetilde{\gamma}_۱^U, \widetilde{\gamma}_۲^U)] | \widetilde{\gamma}_۱ \in \widetilde{h}_۱, \widetilde{\gamma}_۲ \in \widetilde{h}_۲\}.$$

$$(۴)\quad \widetilde{h}^\lambda = \{[(\widetilde{\gamma}^L)^\lambda, (\widetilde{\gamma}^U)^\lambda] | \widetilde{\gamma} \in \widetilde{h}\}, \lambda > \circ.$$

$$(۵)\quad \lambda\widetilde{h} = \{[۱ - (۱ - \widetilde{\gamma}^L)^\lambda, ۱ - (۱ - \widetilde{\gamma}^U)^\lambda] | \widetilde{\gamma} \in \widetilde{h}\}, \lambda > \circ.$$

$$(۶)\quad \widetilde{h}_۱ \oplus \widetilde{h}_۲ = \{[\widetilde{\gamma}_۱^L + \widetilde{\gamma}_۲^L - \widetilde{\gamma}_۱^L.\widetilde{\gamma}_۲^L, \widetilde{\gamma}_۱^U + \widetilde{\gamma}_۲^U - \widetilde{\gamma}_۱^U.\widetilde{\gamma}_۲^U] | \widetilde{\gamma}_۱ \in \widetilde{h}_۱, \widetilde{\gamma}_۲ \in \widetilde{h}_۲\}.$$

$$(۷)\quad \widetilde{h}_۱ \otimes \widetilde{h}_۲ = \{[\widetilde{\gamma}_۱^L.\widetilde{\gamma}_۲^L, \widetilde{\gamma}_۱^U.\widetilde{\gamma}_۲^U] | \widetilde{\gamma}_۱ \in \widetilde{h}_۱, \widetilde{\gamma}_۲ \in \widetilde{h}_۲\}.$$

**مثال ۴.۳.** فرض کنید $\widetilde{h}_۱ = \{[\circ/۴, \circ/۶]\}$، $\widetilde{h}_۲ = \{[\circ/۲, \circ/۳], [\circ/۵, \circ/۷], [\circ/۶, \circ/۸]\}$ و $\widetilde{h}_۳ = \{[\circ/۳, \circ/۴], [\circ/۷, \circ/۸]\}$ سه عنصر فازی مردد بازه‌ای ـ مقدار و $\lambda = ۲$ باشد. پس داریم:

$$(۱)\quad \widetilde{h}_۳^c = \{[۱ - \widetilde{\gamma}_۳^U, ۱ - \widetilde{\gamma}_۳^L] | \widetilde{\gamma}_۳ \in \widetilde{h}_۳\}$$
$$= \{[۱ - \circ/۸, ۱ - \circ/۷], [۱ - \circ/۴, ۱ - \circ/۳]\} = \{[\circ/۲, \circ/۳], [\circ/۶, \circ/۷]\}.$$

$$(۲)\quad \widetilde{h}_۱ \cup \widetilde{h}_۲ = \{[\max(\widetilde{\gamma}_۱^L, \widetilde{\gamma}_۲^L), \max(\widetilde{\gamma}_۱^U, \widetilde{\gamma}_۲^U)] | \widetilde{\gamma}_۱ \in \widetilde{h}_۱, \widetilde{\gamma}_۲ \in \widetilde{h}_۲\}$$
$$= \{[\max(۰/۴, ۰/۲), \max(۰/۶, ۰/۳)], [\max(۰/۴, ۰/۵), \max(۰/۶, ۰/۷)], [\max(۰/۴, ۰/۶), \max(۰/۶, ۰/۸)]\}$$
$$= \{[۰/۴, ۰/۶], [۰/۵, ۰/۷], [۰/۶, ۰/۸]\}.$$

$$(۳)\quad \widetilde{h}_۱ \cap \widetilde{h}_۲ = \{[\min(\widetilde{\gamma}_۱^L, \widetilde{\gamma}_۲^L), \min(\widetilde{\gamma}_۱^U, \widetilde{\gamma}_۲^U)] | \widetilde{\gamma}_۱ \in \widetilde{h}_۱, \widetilde{\gamma}_۲ \in \widetilde{h}_۲\}$$
$$= \{[\min(۰/۴, ۰/۲), \min(۰/۶, ۰/۳)], [\min(۰/۴, ۰/۵), \min(۰/۶, ۰/۷)], [\min(۰/۴, ۰/۶), \min(۰/۶, ۰/۸)]\}$$
$$= \{[۰/۲, ۰/۳], [۰/۴, ۰/۶]\}.$$

با توجه به خواص مجموعه مبنی بر اینکه هر دو عنصر در یک مجموعه بایستی متفاوت باشد، پس بنابراین عناصر تکراری حذف خواهند شد.

$$(۴)\quad \widetilde{h}_۱ \oplus \widetilde{h}_۲ = \{[\widetilde{\gamma}_۱^L + \widetilde{\gamma}_۲^L - \widetilde{\gamma}_۱^L.\widetilde{\gamma}_۲^L, \widetilde{\gamma}_۱^U + \widetilde{\gamma}_۲^U - \widetilde{\gamma}_۱^U.\widetilde{\gamma}_۲^U] | \widetilde{\gamma}_۱ \in \widetilde{h}_۱, \widetilde{\gamma}_۲ \in \widetilde{h}_۲\}$$
$$= \{[۰/۴ + ۰/۲ - ۰/۴ \times ۰/۲, ۰/۶ + ۰/۳ - ۰/۶ \times ۰/۳], [۰/۴ + ۰/۵ - ۰/۴ \times ۰/۵, ۰/۶ + ۰/۷ - ۰/۶ \times ۰/۷], [۰/۴ + ۰/۶ - ۰/۴ \times ۰/۶, ۰/۶ + ۰/۸ - ۰/۶ \times ۰/۸]\}$$
$$= \{[۰/۵۲, ۰/۷۲], [۰/۷, ۰/۸۸], [۰/۷۶, ۰/۹۲]\}.$$

$$(۵)\quad \widetilde{h}_۱ \otimes \widetilde{h}_۲ = \{[\widetilde{\gamma}_۱^L.\widetilde{\gamma}_۲^L, \widetilde{\gamma}_۱^U.\widetilde{\gamma}_۲^U] | \widetilde{\gamma}_۱ \in \widetilde{h}_۱, \widetilde{\gamma}_۲ \in \widetilde{h}_۲\}$$
$$= \{[۰/۴ \times ۰/۲, ۰/۶ \times ۰/۳], [۰/۴ \times ۰/۵, ۰/۶ \times ۰/۷], [۰/۴ \times ۰/۶, ۰/۶ \times ۰/۸]\} = \{[۰/۰۸, ۰/۱۸], [۰/۲, ۰/۴۲], [۰/۲۴, ۰/۴۸]\}.$$

$$
\begin{aligned}
(۶)\quad ۲\widetilde{h}_۳ &= \{[۱-(۱-\widetilde{\gamma}_۳^L)^۲, ۱-(۱-\widetilde{\gamma}_۳^U)^۲]|\widetilde{\gamma}_۳ \in \widetilde{h}_۳\} \\
&= \{[۱-(۱-۰٫۳)^۲, ۱-(۱-۰٫۴)^۲], [۱-(۱-۰٫۷)^۲, ۱-(۱-۰٫۸)^۲]\} \\
&= \{[۰٫۵۱, ۰٫۶۴], [۰٫۹۱, ۰٫۹۶]\}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(۷)\quad \widetilde{h}_۳^۲ &= \{[(\widetilde{\gamma}_۳^L)^۲, (\widetilde{\gamma}_۳^U)^۲]|\widetilde{\gamma}_۳ \in \widetilde{h}-۳\}, \\
&= \{[(۰٫۳)^۲, (۰٫۴)^۲], [۹۰٫۷)^۲, (۰٫۸)^۲]\} = \{[۰٫۰۹, ۰٫۱۶], [۰٫۴۹, ۰٫۶۴]\}.
\end{aligned}
$$

**قضیه ۵.۳.** (چن و ژو [۲]) فرض کنید $\widetilde{h}$ یک عنصر فازی مردد بازه‌ای ـ مقدار و $\lambda, \lambda_۱, \lambda_۲ > ۰$ باشند. پس عملیات روی مکمل بصورت زیر است:

$$
\begin{array}{lll}
(۱) & \widetilde{h} \cup \widetilde{h} = \widetilde{h}, & \widetilde{h} \cap \widetilde{h} = \widetilde{h}. \\
(۲) & \widetilde{h} \cup \widetilde{h}^o = \widetilde{h}, & \widetilde{h} \cap \widetilde{h}^o = \widetilde{h}^o. \\
(۳) & \widetilde{h} \cup \widetilde{h}^* = \widetilde{h}^*, & \widetilde{h} \cap \widetilde{h}^* = \widetilde{h}. \\
(۴) & \widetilde{h} \oplus \widetilde{h}^o = \widetilde{h}, & \widetilde{h} \otimes \widetilde{h}^o = \widetilde{h}^o. \\
(۵) & \widetilde{h} \oplus \widetilde{h}^* = \widetilde{h}^*, & \widetilde{h} \otimes \widetilde{h}^* = \widetilde{h}. \\
(۶) & \lambda\widetilde{h}^o = \widetilde{h}^o, & \lambda\widetilde{h}^* = \widetilde{h}^*. \\
(۷) & (\widetilde{h}^o)^\lambda = \widetilde{h}^o, & (\widetilde{h}^*)^\lambda = \widetilde{h}^*. \\
(۸) & (\widetilde{h}^{\lambda_۱})^{\lambda_۲} = (\widetilde{h}^{\lambda_۲})^{\lambda_۱} = \widetilde{h}^{\lambda_۱\lambda_۲}, & \lambda_۲(\lambda_۱\widetilde{h}) = \lambda_۱(\lambda_۲\widetilde{h}) = (\lambda_۱\lambda_۲)\widetilde{h}.
\end{array}
$$

**قضیه ۶.۳.** (چن و ژو [۲]) فرض کنید $\widetilde{h}_۱$، $\widetilde{h}_۲$ و $\widetilde{h}_۳$ سه عنصر فازی مردد بازه‌ای ـ مقدار باشند.

پس برخی عملگرهای زیر را روی مکمل عناصر فازی مردد داریم:

$$(۱)\quad \widetilde{h}_۱ \cup \widetilde{h}_۲ = \widetilde{h}_۲ \cup \widetilde{h}_۱.$$

$$(۲)\quad \widetilde{h}_۱ \cap \widetilde{h}_۲ = \widetilde{h}_۲ \cap \widetilde{h}_۱.$$

$$(۳)\quad \widetilde{h}_۱ \cup (\widetilde{h}_۲ \cup \widetilde{h}_۳) = (\widetilde{h}_۱ \cup \widetilde{h}_۲) \cup \widetilde{h}_۳.$$

$$(۴)\quad \widetilde{h}_۱ \cap (\widetilde{h}_۲ \cap \widetilde{h}_۳) = (\widetilde{h}_۱ \cap \widetilde{h}_۲) \cap \widetilde{h}_۳.$$

$$(۵)\quad \widetilde{h}_۱ \oplus (\widetilde{h}_۲ \oplus \widetilde{h}_۳) = (\widetilde{h}_۱ \oplus \widetilde{h}_۲) \oplus \widetilde{h}_۳.$$

$$(۶)\quad \widetilde{h}_۱ \otimes (\widetilde{h}_۲ \otimes \widetilde{h}_۳) = (\widetilde{h}_۱ \otimes \widetilde{h}_۲) \otimes \widetilde{h}_۳.$$

$$(۷)\quad \widetilde{h}_۱ \cap (\widetilde{h}_۲ \cup \widetilde{h}_۳) = (\widetilde{h}_۱ \cap \widetilde{h}_۲) \cup (\widetilde{h}_۳ \cap \widetilde{h}_۳).$$

$$(۷)\quad \widetilde{h}_۱ \cup (\widetilde{h}_۲ \cap \widetilde{h}_۳) = (\widetilde{h}_۱ \cup \widetilde{h}_۲) \cap (\widetilde{h}_۳ \cup \widetilde{h}_۳).$$

**قضیه ۷.۳.** (چن و ژو [۲]) فرض کنید $\widetilde{h}_۱$و $\widetilde{h}_۲$ دو عنصر فازی مردد بازه‌ای ـ مقدار و $\lambda > ۰$ باشند. پس،

$$(۱)\quad \lambda(\widetilde{h}_۱ \cup \widetilde{h}_۲) = \lambda\widetilde{h}_۱ \cup \lambda\widetilde{h}_۲.$$

$$(۲)\quad \lambda(\widetilde{h}_۱ \cap \widetilde{h}_۲) = \lambda\widetilde{h}_۱ \cap \lambda\widetilde{h}_۲.$$

$$(۳)\quad (\widetilde{h}_۱ \cup \widetilde{h}_۲)^\lambda = \widetilde{h}_۱^\lambda \cup \widetilde{h}_۲^\lambda.$$

$$(۴)\quad (\widetilde{h}_۱ \cap \widetilde{h}_۲)^\lambda = \widetilde{h}_۱^\lambda \cap \widetilde{h}_۲^\lambda.$$

**قضیه ۸.۳.** (چن و همکاران [۳]) فرض کنید $\widetilde{h}$، $\widetilde{h}_۱$ و $\widetilde{h}_۲$ سه عنصر فازی مردد بازه‌ای ـ مقدار

باشند. لذا عملیات جمع، تفریق، ضرب با خواص متفاوت زیر را داریم:

$$(۱)\quad \widetilde{h}_۱ \oplus \widetilde{h}_۲ = \widetilde{h}_۲ \oplus \widetilde{h}_۱.$$
$$(۲)\quad \widetilde{h}_۱ \otimes \widetilde{h}_۲ = \widetilde{h}_۲ \otimes \widetilde{h}_۱.$$
$$(۳)\quad \lambda(\widetilde{h}_۱ \oplus \widetilde{h}_۲) = \lambda\widetilde{h}_۱ \oplus \lambda\widetilde{h}_۲, \quad \lambda > ۰.$$
$$(۴)\quad (\widetilde{h}_۱ \otimes \widetilde{h}_۲)\lambda = \widetilde{h}_۱^{\lambda} \otimes \widetilde{h}_۲^{\lambda}, \quad \lambda > ۰.$$
$$(۵)\quad \lambda_۱\widetilde{h} \oplus \lambda_۱\widetilde{h} = (\lambda_۱ + \lambda_۲)\widetilde{h}, \quad \lambda_۱, \lambda_۲ > ۰.$$
$$(۶)\quad \widetilde{h}^{\lambda_۱} \otimes \widetilde{h}^{\lambda_۲} = \widetilde{h}^{(\lambda_۱+\lambda_۲)}, \quad \lambda_۱, \lambda_۲ > ۰.$$

**قضیه ۹.۳.** (چن و همکاران [۳]) فرض کنید $\widetilde{h}$، $\widetilde{h}_۱$ و $\widetilde{h}_۲$ سه عنصر فازی مردد بازه‌ای ـ مقدار باشند. پس داریم .

$$(۱)\quad \widetilde{h}_۱^c \cup \widetilde{h}_۲^c = (\widetilde{h}_۱ \cap \widetilde{h}_۲)^c.$$
$$(۲)\quad \widetilde{h}_۱^c \cap \widetilde{h}_۲^c = (\widetilde{h}_۱ \cup \widetilde{h}_۲)^c.$$
$$(۳)\quad (\widetilde{h}^c)^{\lambda} = (\lambda\widetilde{h})^c.$$
$$(۴)\quad \lambda(\widetilde{h}^c) = (\widetilde{h}^{\lambda})^c.$$
$$(۵)\quad \widetilde{h}_۱^c \oplus \widetilde{h}_۲^c = (\widetilde{h}_۱ \otimes \widetilde{h}_۲)^c.$$
$$(۶)\quad \widetilde{h}_۱^c \otimes \widetilde{h}_۲^c = (\widetilde{h}_۱ \oplus \widetilde{h}_۲)^c.$$

**تعریف ۱۰.۳.** (ژو و همکاران [۱۱]) فرض کنید $[\widetilde{a}^L, \widetilde{a}^U]$ و $[\widetilde{b}^L, \widetilde{b}^U]$ دو عدد بازه‌ای و

$\lambda \geq \text{۰}$ باشند. داریم:

$$(\text{۱})\quad \widetilde{a}=\widetilde{b} \Longleftrightarrow \widetilde{a}^L=\widetilde{b}^L \ \ and\ \ \widetilde{a}^U=\widetilde{b}^U.$$
$$(\text{۲})\quad \widetilde{a}+\widetilde{b}=[\widetilde{a}^L+\widetilde{b}^L, \widetilde{a}^U+\widetilde{b}^U].$$
$$(\text{۳})\quad \lambda\widetilde{a}=[\lambda\widetilde{a}^L, \lambda\widetilde{a}^U].$$

درجه امکانی برای مقایسه دو عدد بازه‌ای بصورت زیر می‌باشد:

**تعریف ۱۱.۳.** فرض کنید $[\widetilde{a}^L, \widetilde{a}^U]$ و $[\widetilde{b}^L, \widetilde{b}^U]$ و $l_{\widetilde{a}}=\widetilde{a}^U-\widetilde{a}^L$ و $l_{\widetilde{b}}=\widetilde{b}^U-\widetilde{b}^L$ باشند. پس درجه امکانی $\widetilde{a} \geq \widetilde{b}$ بصورت زیر می‌باشد[۱۱]:

$$p(\widetilde{a}\geq \widetilde{b})=\max\{\text{۱}-\max(\frac{\widetilde{b}^U-\widetilde{a}^L}{l_{\widetilde{a}}+l_{\widetilde{b}}}, \text{۰}), \text{۰}\}. \qquad (\text{۱۲})$$

حال تابع امتیاز برای عناصر فازی مردد بازه‌ای ـ مقدار بصورت زیر تعریف می‌شود:

**تعریف ۱۲.۳.** (چن و همکاران [۳]) برای یک عنصر فازی مردد بازه‌ای ـ مقدار $\widetilde{h}$،

$$s(\widetilde{h})=\frac{\text{۱}}{l_{\widetilde{h}}}\sum_{\widetilde{\gamma}\in\widetilde{h}}\widetilde{\gamma} \qquad (\text{۱۳})$$

تابع امتیاز $\widetilde{h}$ با $l_{\widetilde{h}}$ که بیانگر تعداد بازه‌ها در $\widetilde{h}$ است می‌باشد. $s(\widetilde{h})$ یک مقدار بازه‌ای در $[\text{۰}, \text{۱}]$ است. برای $\widetilde{h}_\text{۱}$ و $\widetilde{h}_\text{۲}$ دو عنصر فازی مردد بازه‌ای ـ مقدار، اگر $s(\widetilde{h}_\text{۱}) \geq s(\widetilde{h}_\text{۲})$، پس $\widetilde{h}_\text{۱} \geq \widetilde{h}_\text{۲}$ است.

توجه کنید که می‌توانیم مقایسه را با توجه به معادله (۳) انجام دهیم.

## ۲.۳ دوگان مجموعه فازی مردد

ژو و همکاران [۱۳]دوگان مجموعه فازی مردد را برحسب دو تابع که بترتیب دو مجموعه از مقادیر عضویت و مقادیر عدم عضویت را برای هر عنصر در دامنه برمی‌گرداند را تعریف کردند.

**تعریف ۱۳.۳.** فرض کنید $X$ یک مجموعه مرجع باشد. پس دوگان مجموعه فازی مردد $D$ $(DHFS)$[۹] روی $X$ بصورت زیر است:

$$D = \{< x, h_A(x), g_A(x) > | x \in X\} \tag{۱۴}$$

که در آن $h_A(x)$ و $g_A(x)$ دو مجموعه از مقادیر $[\circ, ۱]$ هستند. همچنین $h_A(x)$ و $g_A(x)$ بترتیب بیانگر درجه عضویت‌ها و درجه عدم‌عضویت‌های ممکن عنصر $x \in X$ در مجموعه $A \subset X$ با شرایط زیر هستند.

$$\circ \leq \gamma,\ \ \eta \leq ۱,\ \ \circ \leq \gamma^+ + \eta^+ \leq ۱, \tag{۱۵}$$

که برای تمام $x \in X$

$$\gamma \in h_A(x),\ \ \gamma^+ \in h^+(x) = \cup_{\gamma \in h_A(x)} \max\{\gamma\},$$
$$\eta \in g_A(x),\ \ \eta^+ \in g^+(x) = \cup_{\eta \in g_A(x)} \max\{\eta\},$$

برای راحتی، جفت $d_A(x) = (h_A(x), g_A(x))$ را دوگان عنصر فازی مردد[۱۰] $(DHFE)$ می‌نامند و توسط $d = (h, g)$ با شرایط فوق بیان می‌شود.
برخی از دوگان عنصر فازی مرددهای خاص را بصورت زیر بیان می‌کنیم:

(۱) کاملاً نادقیق: $d = (\{\circ\}, \{۱\})$.

(۲) کاملاً دقیق: $d = (\{۱\}, \{\circ\})$.

[9] Dual Hesitant Fuzzy Set
[10] Dual Hesitant Fuzzy Element

(۳) کاملاً نامعین (تمام حالت‌های ممکن است): $d = [۰, ۱]$.

(۴) عنصر بی‌معنی: $d = \varnothing$ ، یعنی، $h = \varnothing$، $g = \varnothing$.

* برای یک $d \neq \varnothing$ داده شده، اگر $h$ و $g$ بترتیب فقط یک مقدار $\gamma$ و $\eta$ داشته باشند، و $\gamma + \eta < ۱$ باشد، پس دوگان مجموعه فازی مردد به یک مجموعه فازی شهودی تبدیل می‌شود.

* اگر $h$ و $g$ بترتیب فقط یک مقدار $\gamma$ و $\eta$ داشته باشند، و $\gamma + \eta = ۱$، یا $h$ فقط یک مقدار، و $g = \varnothing$ باشد، پس دوگان مجموعه فازی مردد به یک مجموعه فازی تبدیل می‌شود.

* اگر $g = \varnothing$ و $h \neq \varnothing$، پس دوگان مجموعه فازی مردد به یک مجموعه فازی مردد تبدیل می‌شود.

از این رو، در حالت‌های خاص، دوگان مجموعه فازی مردد شامل مجموعه فازی، مجموعه فازی شهودی و مجموعه فازی مردد است.
دوگان مجموعه فازی مردد از دو بخش، یعنی، تابع مردد عضویت و تابع مردد عدم‌عضویت تشکیل شده است. فرض کنید $\gamma^- \in h^- = \cup_{\gamma\in h(x)} \min\{\gamma\}$، $\eta^- \in g^- = \cup_{\eta\in g(x)} \min\{\eta\}$. $\gamma^+$ و $\eta^+$ همان‌گونه که در بالا تعریف کردیم باشند. برای یک دوگان مجموعه فازی مردد خاص، $h$ و $g$ می‌تواند بصورت دو بازه بیان شود:

$$h = [\gamma^-, \gamma^+], \quad g = [\eta^-, \eta^+]. \qquad (۱۶)$$

**تعریف ۱۴.۳.** (ژو و همکاران [۱۳]) یک دوگان عنصر فازی مردد با تابع $d$ و $d \neq \varnothing$ را در نظر

بگیرید. مکمل آن بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$d^c = \begin{cases} (\cup_{\eta\in g}\{\eta\}, \cup_{\gamma\in h}\{\gamma\}), & if g \neq \varnothing \;\; and \;\; h \neq \varnothing \\ (\cup_{\gamma\in h}\{۱-\gamma\}, \{\varnothing\}), & if g = \varnothing \;\; and \;\; h \neq \varnothing \\ (\{\varnothing\}, \cup_{\eta\in g}\{۱-\eta\}), & if h = \varnothing \;\; and \;\; g \neq \varnothing \end{cases} \tag{۱۷}$$

ظاهرا، مکمل مکمل می‌تواند بصورت $(d^c)^c$ باشد.

برای دو دوگان مجموعه فازی مردد $d_۱$ و $d_۲$، کران‌های پایین و بالای مربوط به $h$ و $g$ بترتیب $h^-$، $h^+$، $g^-$ و $g^+$ است، که $h^- = \cup_{\gamma\in h}\min\{\gamma\}$، $h^+ = \cup_{\gamma\in h}\max\{\gamma\}$، $g^- = \cup_{\eta\in g}\min\{\eta\}$ و $g^+ = \cup_{\eta\in g}\max\{\eta\}$ است. پس اجتماع و اشتراک دوگان مجموعه‌های فازی مردد می‌تواند بصورت زیر تعریف شود.

**تعریف ۱۵.۳.** (ژو و همکاران [۱۳]) فرض $d_۱$ و $d_۲$ دو دوگان عنصر فازی مردد باشند. پس داریم:

(۱) $d_۱ \cup d_۲ =$

$$(\{h \in (h_۱ \cup h_۲) | h \geq \max(h_۱^-, h_۲^-)\}, \{g \in (g_۱ \cap g_۲) | g \leq \min(g_۱^+, g_۲^+)\}).$$

(۲) $d_۱ \cap d_۲ =$

$$(\{h \in (h_۱ \cap h_۲) | h \leq \min(h_۱^+, h_۲^+)\}, \{g \in (g_۱ \cup g_۲) | g \geq \max(g_۱^-, g_۲^-)\}).$$

**مثال ۱۶.۳.** فرض $d_۱ = (\{۰/۱, ۰/۳, ۰/۴\}, \{۰/۳, ۰/۵\})$ و $d_۲ = (\{۰/۲, ۰/۵\}, \{۰/۱, ۰/۲, ۰/۴\})$

دو دوگان عنصر فازی مردد باشند. پس داریم:

(۱) $d_۱^c = (\{۰/۳, ۰/۵\}, \{۰/۱, ۰/۳, ۰/۴\}.$

(۲) $d_۱ \cup d_۲ = (\{۰/۲, ۰/۳, ۰/۴, ۰/۵\}, \{۰/۱, ۰/۲, ۰/۳, ۰/۴\}).$

(۲) $d_۱ \cap d_۲ = (\{۰, ۱, ۰/۲, ۰/۳, ۰/۴\}, \{۰/۳, ۰/۴, ۰/۵\}).$

**تعریف ۱۷.۳.** (ژو و همکاران [۱۳]) فرض $d_۱$ و $d_۲$ دو دوگان عنصر فازی مردد و $n$ یک عدد صحیح مثبت باشد. پس عملگرهای زیر برقرار است:

$$(۱)\quad d_۱ \oplus d_۲ = (h_{d_۱} \oplus h_{d_۲}, g_{d_۱} \otimes g_{d_۲})$$
$$= (\cup_{\gamma_{d_۱} \in h_{d_۱}, \gamma_{d_۲} \in h_{d_۲}} \{\gamma_{d_۱} + \gamma_{d_۲} - \gamma_{d_۱}\gamma_{d_۲}\}, \cup_{\eta_{d_۱} \in g_{d_۱}, \eta_{d_۲} \in g_{d_۲}} \{\eta_{d_۱}\eta_{d_۲}\}).$$

$$(۲)\quad d_۱ \otimes d_۲ = (h_{d_۱} \otimes h_{d_۲}, g_{d_۱} \oplus g_{d_۲})$$
$$= (\cup_{\gamma_{d_۱} \in h_{d_۱}, \gamma_{d_۲} \in h_{d_۲}} \{\gamma_{d_۱}\gamma_{d_۲}\}, \cup_{\eta_{d_۱} \in g_{d_۱}, \eta_{d_۲} \in g_{d_۲}} \{\eta_{d_۱} + \eta_{d_۲} - \eta_{d_۱}\eta_{d_۲}\}).$$

$$(۳)\quad nd = (\cup_{\gamma_d \in h_d} \{۱ - (۱ - \gamma_d)^n\}, \cup_{\eta_g \in g_d} \{(\eta_d)^n\}).$$

$$(۴)\quad d^n = (\cup_{\gamma_d \in h_d} \{(\gamma_d)^n\}, \cup_{\eta_g \in g_d} \{۱ - (۱ - \eta_d)^n\}).$$

**قضیه ۱۸.۳.** (ژو همکاران [۱۳]) فرض $d$، $d_۱$ و $d_۲$ سه دوگان عنصر فازی مردد باشند و

$\lambda \geq ۰$، پس داریم:

$$
\begin{aligned}
&(۱)\quad d_۱ \oplus d_۲ = d_۲ \oplus d_۱.\\
&(۲)\quad d_۱ \otimes d_۲ = d_۲ \otimes d_۱.\\
&(۳)\quad \lambda(d_۱ \otimes d_۲) = \lambda d_۱ \otimes \lambda d_۲.\\
&(۴)\quad (d_۱ \oplus d_۲)^{\lambda} = d_۱^{\lambda} \otimes d_۲^{\lambda}.
\end{aligned}
$$

برای مقایسه دوگان عناصر فازی مردد، با الهام از روش مقایسه عناصر فازی مردد، تعریف زیر آورده شده است.

**تعریف ۱۹.۳.** (ژو همکاران [۱۳]) فرض کنید $d = \{h, g\}$ هر دو دوگان عنصر فازی مردد باشند،

$$s(d) = \frac{۱}{l_h}\sum_{\gamma\in h}\gamma - \frac{۱}{l_g}\sum_{\eta\in g}\eta,$$

تابع امتیاز $d$ می‌نامیم، و

$$p(d) = \frac{۱}{l_h}\sum_{\gamma\in h}\gamma + \frac{۱}{l_g}\sum_{\eta\in g}\eta,$$

تابع دقت $d$ می‌نامیم، که $l_h$ و $l_g$ بترتیب تعداد عنصرهای موجود در $h$ و $g$ هستند.

براساس تابع امتیاز و تابع دقت دوگان عناصر فازی مردد، طرح زیر برای مقایسه دو $d_۱$ و $d_۲$ پیشنهاد می‌شود:

(۱) اگر $s(d_۱) > s(d_۲)$، پس $d_۱$ برتر از $d_۲$ است، که با $d_۱ \succ d_۲$ مشخص می‌شود.

(۲) اگر $s(d_۱) = s(d_۲)$، پس

**(الف)** اگر $d(d_۱) = p(d_۲)$، پس $d_۱$ معادل با $d_۲$ است، که با $d_۱ \sim d_۲$ نشان داده می‌شود.

**(ب)** اگر $p(d_۱) > p(d_۲)$، پس $d_۱$ برتر از $d_۲$ است، که با $d_۱ \succ d_۲$ مشخص می‌شود.

**مثال ۲۰.۳.** فرض کنید $d_۱ = (\{۰/۱, ۰/۳\}, \{۰/۳, ۰/۵\})$ و $d_۲ = (\{۰/۲, ۰/۴\}, \{۰/۴, ۰/۶\})$ دو دوگان عنصر فازی مردد، پس براساس تعریف ۱۹.۳ ، $s(d_۱) = s(d_۲) = ۰$، $p(d_۲)(۰/۸) > p(d_۱)(= ۰/۶)$. پس بنابراین، $d_۲ \succ d_۱$.

# ۴ نتیجه‌گیری

مجموعه فازی مردد، بعنوان یک تعمیم از مجموعه‌های فازی، نسبت به مجموعه‌های فازی و گسترش‌های آن از مزایای بیشتری در مسائل دنیای واقعی برخوردار است. در فازی مردد اجازه داده می‌شود که عضویت عناصر مقادیر متعددی داشته باشد. در این پژوهش، نخست مجموعه فازی مردد بطور کامل و منظم معرفی گردیده شد. سپس قوانین عملیاتی که شامل اجتماع، اشتراک و ... بود را معرفی کردیم. همچنین، قوانین مقایسه باتوجه به تابع امتیاز و تابع واریانس عنصرهای فازی مردد بازگو شد، که از تحلیل‌های انجام شده، دیدیم رابطه بین تابع امتیاز و تابع انحراف، مشابه رابطه بین میانگین و انحراف در آمار است. با وجود اینکه تابحال اقدامات اندکی در مورد مجموعه‌های فازی مردد انجام گرفته است، اما در این پژوهش، برخی از گسترش‌های آن همچون مجموعه فازی مردد بازه‌ای ـ مقدار و دوگان مجموعه فازی مردد بهمراه قوانین عملیاتی و مقایسه‌ای آنها بیان شد. امید است که این پژوهش بتواند کمک راه اولیه برای مهندسین، محققان در زمینه‌های ریاضی فازی، تحقیق در عملیات و علوم اطلاعات و ... در جهت آشنایی و بهره‌مندی از فازی مردد گردد.

# مراجع

[1] Atanassov KT (1986) lntuitionistic fuzzy sets. Fuzzy Sets and Systems, 20(1), 87-96.

[2] Chen N, Xu ZS (2014) Properties of interval-valued hesitant fuzzy sets. J Intell Fuzzy Syst, 27(1), 143–158.

[3] Chen N, Xu ZS, Xia MM (2013) Interval-valued hesitant preference relations and their applications to group decision making. Knowl-Based Syst, 37, 528–540

[4] Chen N, Xu ZS, Xia MM (2015) The ELECTRE I multi-criteria decision making method based on hesitant fuzzy sets. Int J Inf Technol Decis Making, 14(3), 621–657.

[5] Liao HC, Xu ZS (2014a) Subtraction and division operations over hesitant fuzzy sets. J Intell Fuzzy Syst, 27(1), 65–72.

[6] Liao HC, Xu ZS, Zeng XJ (2015c) Hesitant fuzzy linguistic VIKOR method and its application in qualitative multiple criteria decision making. IEEE Trans Fuzzy Syst, 23(5), 1343–1355.

[7] Mendel J.M., Uncertain Rule-Based Fuzzy Logic Systems, Introduction and New Directions 2nd Edition. Springer International Publishing, (2017).

[8] Torra V (2010) Hesitant fuzzy sets. Int J Intell Syst, 25, 529–539.

[9] Torra V, Narukawa Y (2009) On hesitant fuzzy sets and decision. The 18th IEEE international conference on fuzzy systems (FS'09). Jeju Island, Korea, pp 1378–1382.

[10] Xia MM, Xu ZS (2011a) Hesitant fuzzy information aggregation in decision making. Int J Approximate Reasoning, 52(3), 395–407.

[11] Xu ZS, Da QL (2002) The uncertain OWA operator. Int J Intell Syst, 17, 569–575.

[12] Zadeh LA (1965) Fuzzy sets. Inf Control, 8, 338–353.

[13] Zhu B, Xu ZS, Xia MM (2012) Dual hesitant fuzzy set. J Appl Math, 2012, 1-13.