سیستم‌های فازی و کاربردها
سال چهارم، ویژه نامه شماره ۱ (آبان ۱۴۰۰)
صص. ۷۱ تا ۹۳

شاپای چاپی: ۲۷۱۷-۴۴۰۹
شاپای الکترونیکی: ۲۷۱۷-۳۹۸۴
DOI:10.22034/JFSA.2021.137384

تعیین شاخص کارایی فرایند به روش استنباط پیشگو ناپارامتریک و بررسی آن در محیط فازی

سهیل شکری

استادیار گروه آمار، دانشکده علوم پایه، دانشگاه آزاد اسلامی واحد لاهیجان

به یاد روانشاد دکتر بهرام صادقپور گیلده

تاریخ دریافت: ۱۴۰۰/۵/۲۲ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۰/۷/۱

چکیده

در این مقاله روش آماری جدیدی برای تعیین شاخص کارایی فرایند ارائه می‌نماییم. روش ارائه شده پیشگو و ناپارامتریک بوده و برای تعیین شاخص کارایی فرایندهای گسسته معرفی شده است. روش مذکور روشی آماری براساس فرض‌های معدود در خصوص توزیع‌های احتمال و استنباط بر اساس مشاهدات می‌باشد. روش استنباط پیشگو روشی با فرض تعویض‌پذیری کمیت‌های تصادفی هم برای داده‌های مشاهده شده و هم برای داده‌های آتی (مشاهده نشده) است و عدم قطعیت را با استفاده از احتمالات فاصله‌ای تعیین می‌نماید. همچنین برآورد فازی شاخص کارایی پراکیس و زیکلاکی (۲۰۰۲) [۲۵] و شاخص کارایی پیشگوی جدید معرفی شده، به دست خواهد آمد.

۱ مقدمه

شاخص کارایی فرایند ابزاری جهت کمی کردن تغییرات فرایند و تجزیه و تحلیل این تغییرات با توجه به نیازها و مشخصات فنی محصول است. در نتیجهٔ چنین کاری می‌توان تغییرات یک فرایند را ریشه‌یابی کرده و برای حذف یا کاهش آنها اقدام نمود. شاخص

عبارات و کلمات کلیدی: کنترل کیفیت، شاخص کارایی فرایند، استنباط پیشگو ناپارامتری، اعداد فازی

Email(s): shokri@liau.ac.ir.

Mathematics Subject Classification (2010): 62A86

کارایی فرایند در حقیقت عددیست که توان فرایند را در بازتولید محصولات قابل قبول نشان داده و رفتار فرایند را نسبت به حدود مشخصهٔ فنی ارزیابی و اندازه‌گیری می‌کند به این اندازه‌گیری، نسبت یا شاخص انجام نیز می‌گویند. کارکردن با این شاخص‌ها بسیار راحت است زیرا اطلاعات یک فرایند پیچیده را در یک عدد خلاصه می‌کنند. شاخص‌های کارایی فرایند را نه تنها برای تشخیص کارایی یک فرایند، بلکه برای مقایسه کارایی دو فرایند مختلف نیز بکار می‌برند. لذا، برای خریدارانی که قصد انتخاب یک فرایند از میان دو یا چند فرایند را دارند، اطلاع از مقدار عددی این شاخص بسیار مفید است. روش تشخیص به این صورت است که اگر مشخصهٔ کیفیت محصولات با احتمال زیاد بین حدود مشخصهٔ فنی بالایی و پایینی قرار گیرد، آنگاه فرایند کارا گفته می‌شود. به نحوی که هر چه مقدار عددی شاخص مربوطه بزرگتر باشد (مخصوصا اگر بزرگتر از یک باشد) احتمال قرارگرفتن مشخصهٔ کیفیت در بین حدود مشخصهٔ فنی نیز بیشتر است. بنابراین، یک فرایند متمرکز زمانی کاراست که تقریبا صد در صد حدود تحمل طبیعی آن در میان حدود مشخصهٔ فنی بالایی و پایینی قرارگیرد. شایان ذکر است، فرایند متمرکز به فرایندی اطلاق می‌شود که میانگین آن μ بر نقطهٔ میانی حدود مشخصهٔ فنی، یعنی M منطبق باشد. تاکنون مطالعات زیادی در این زمینه صورت گرفته و شاخص‌های متعددی معرفی شده است (کارگر، ۱۳۹۰) [۱].

مهم‌ترین و رایج‌ترین این شاخص ها عبارتند از:

$$C_p, C_{pk}, C_{pm}, C_{pmk}$$

نقطه ضعف شاخص‌های کارایی فرایند ذکرشده این است که صرفا برای فرایندهایی قابل ارزیابی خواهند بود که هر دو حد بالایی و پایینی مشخصه فنی تعیین شده باشند. در بعضی از مواقع ممکن است با یک روند یکطرفه مواجه باشیم. برای مثال فرایندی که برای آن فقط حد پایینی یا حد بالایی مشخصه فنی تعیین شده است. در چنین شرایطی ارزیابی به کمک این چهار شاخص غیر ممکن شده و ناچار به به‌کارگیری شاخص‌های C_{pl} و C_{pu} که توسط کین[1] (۱۹۸۶) [۲۲] معرفی شده، خواهیم بود. بنابراین وجود محدودیت در به‌کارگیری این چهار شاخص استاندارد واضح است. یکی دیگر از نقاط ضعف این

[1] Kane

است که آنها بر اساس فرض نرمال بودن توزیع تعریف شده‌اند. بنابراین به‌کارگیری آنها برای فرایندهایی که به شکل نرمال توزیع نشده‌اند ممکن است به نتایج کاملا اشتباه منجر شود. برای رفع این مشکل کلمنت[۲] (۱۹۸۹) [۵] تعمیم‌هایی از C_p و C_{pk} پیشنهاد داد وپرن و کاتز[۳] (۱۹۹۴ و ۱۹۹۵) [۲۳] ایده کلمنت (۱۹۸۹) [۵] را برای C_{pm} و C_{pmk} توسعه دادند. با وجود این واقعیت که شاخص‌های تعمیم‌یافته صرف نظر از شکل توزیع فرایند، می‌توانند مفید باشند، باز هم دارای اشکالاتی هستند. به ویژه این شاخص ها با نسبت انطباق فرایند با مشخصه‌های فنی (p) رابطه مستقیم نداشته و علاوه براین اگر روند فرایند گسسته باشد این شاخص‌ها را نمی‌توان ارزیابی کرد و بدست آوردن توزیع برآوردگرهای آنها و ساختن حدود اطمینان برای آنها بدون در نظر گرفتن توزیع خاص بسیار دشوار می‌باشد (پراکیس و زیکلاکی[۴]، ۲۰۰۲) [۲۵].

کولن[۵] (۱۹۹۸) [۶] یک روش جدید برای استنباط آماری تحت عنوان استنباط پیشگو ناپارامتری[۶] ارائه نموده است. استنباط پیشگو ناپارامتری یک روش آماری بر اساس فرض $A_{(n)}$ هیل[۷] (۱۹۶۸) [۲۰] می‌باشد. که حاصل آن احتمال شرطی مستقیم به‌صورت احتمال رخداد یک کمیت تصادفی آتی مشاهده‌پذیر به‌شرط مقادیر مشاهده شده‌ی کمیت تصادفی مربوطه است. استنباط پیشگو ناپارامتری برای اندازه‌گیری احتمال پیشامدهایی که نمی‌توانند با استفاده از احتمال دقیق[۸] اندازگیری شوند، کارا می‌باشد (کولن، ۲۰۱۱) [۹]. برای آشنایی بیشتر با استنباط پیشگو ناپارامتری و کاربردهای آن (آگوستین[۹]، و کولن، ۲۰۰۴؛ کولن، ۱۹۹۸؛ کولن، ۲۰۰۴؛ کولن، ۲۰۰۶؛ کولن، و همکاران، ۲۰۲۱؛ کولن، و آگوستین، ۲۰۰۹؛ کولن و بن حمد[۱۰]، ۲۰۲۰؛ کولن، و الزیتی[۱۱]، ۲۰۰۹؛ کولن، و مارکز[۱۲]، ۲۰۲۰؛ کولن، و وان در لان[۱۳]، ۲۰۰۱؛ کولن، و

---

[2] Clements
[3] Pearn and Kotz
[4] Perakis and Xekalaki
[5] Coolen
[6] Nonparametric Predictive Inference (NPI)
[7] Hill
[8] Precise Probability
[9] Augustin
[10] Bin Himd
[11] Elsaeiti
[12] Marques
[13] Van der Laan

یان[۱۴]، ۲۰۰۴) [۳، ۶، ۷، ۸، ۱۰، ۱۱، ۱۲، ۱۳، ۱۴، ۱۶، ۱۷] را ببنید.

در این مقاله روش آماری جدیدی برای تعیین شاخص کارایی فرایند ارائه می‌نماییم. روش ارائه شده پیشگو و ناپارامتریک بوده و برای تعیین شاخص کارایی فرایندهای گسسته معرفی شده است. ادامه‌ی مقاله به شرح ذیل سازمان داده شده است. در بخش دو مقدمه‌ای بر شاخص کارایی فرایندهای گسسته، در بخش سوم استنباط پیشگو ناپارامتری، در بخش چهارم معرفی شاخص جدید کارایی فرایند و در نهایت برآورد فازی شاخص کارایی پراکیس و زیکلاکی (۲۰۰۲) [۲۵] و شاخص کارایی پیشگوی جدید معرفی شده، ارایه شده است.

۲ شاخص کارایی فرایندهای گسسته

پراکیس و زیکلاکی (۲۰۰۲) [۲۵] شاخص جدیدی معرفی نمودند که نقاط ضعف شاخص‌های استاندارد را نداشته و دارای چندین ویژگی جالب است. و همچنین می‌تواند صرف نظر از اینکه روند فرایند پیوسته یا گسسته باشد، به‌کارگیری شود. این شاخص به‌صورت زیر تعریف شده است

$$C_{pc} = \frac{1 - p_0}{1 - p} \tag{1}$$

که p_0، نشان‌دهنده حداقل نسبت انطباق مجاز (pc)[۱۵] می‌باشد. مقدار p_0 به‌طور شهودی باید نزدیک به مقدار یک باشد و تعیین آن وابسته به بررسی طبیعت تولید و الزامات مشتریان می‌باشد.

برخی از ویژگی‌های جالب این شاخص عبارتند از (پراکیس، و زیکلاکی، ۲۰۰۲) [۲۵]:

- این شاخص حتی در شرایطی که حدود مشخصات فنی LSL و USL می‌باشند و حداقل بازده مجاز p_0 است، مناسب می‌باشد؛

[14] Yan
[15] Proportion of Conformance

- این شاخص در هردو حالت مشخصه فنی یک‌طرفه و دو طرفه نیز قابل محاسبه می‌باشد؛
- تعریف این شاخص بر اساس فرض معمول نرمال بودن نمی‌باشد؛
- با توجه به اینکه به‌طور مستقیم با مقدارp مرتبط می‌باشد، تحلیل آن آسان است؛
- این شاخص (تحت برخی شرایط) در این ویژگی ''برابر است با یک اگر میانگین فرایند برابر با نقطه میانی مشخصات فنی باشد و $p = ۰٫۹۹۷۳$ باشد یعنی ۹۹٫۶ درصد تولیدات در حدود مشخصات فنی قرار خواهند گرفت'' که شاخص‌های استاندارد دارند، صدق می‌کند.
- ارزیابی آن نسبتا ساده است؛
- تحت فرض نرمال بودن توزیع ساخت حدود اطمینان برای مقدار واقعی آن نسبتا ساده است؛
- تحت فرض نرمال نبودن توزیع ساخت حدود اطمینان برای مقدار واقعی آن امکان‌پذیر است؛
- این شاخص را برای فرایندهای گسسته نیز می‌توان تعیین کرد.

همانطور که قبلا اشاره شد مقدار حداقل نسبت انطباق مجاز ($p_۰$) به‌طور شهودی باید نزدیک به یک باشد. هرگاه مقدار $p_۰$ مشخص نشده باشد، مقدار ۰٫۹۹۷۳ انتخاب مناسبی به نظر می‌رسد. بنابراین با فرض $p_۰ = ۰٫۹۹۷۳$ شاخص C_{pc} را می‌توان به‌صورت زیر باز نویسی کرد

$$C_{pc} = \frac{۰٫۰۰۲۷}{۱ - p} \qquad (۲)$$

در ادامه بر شاخص کارایی فرایندهای مرتبط با داده‌های وصفی در حالتی که اقلام تولیدی فرایند در جعبه‌هایی nتایی با شکل یکسان بسته‌بندی شده‌اند، که توسط پراکیس و زیکلاکی (۲۰۰۵) [۲۶] معرفی شده است، مروری داریم. در این شاخص لزوما حدود

مشخصات بر حسب حداقل نسبت انطباق قابل‌پذیرش مشخص نمی‌شوند و می‌توانند برحسب حداقل تعداد اقلام سالم که در هر جعبه باید وجود داشته باشد، تعیین گردند.

بنابراین اگر فرض کنیم هر جعبه شامل L عنصر سالم باشد، نسبت انطباق فرایند برابر است با

$$p = P\left(X > L\right)$$

در نتیجه C_{pc} به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$C_{pc} = \frac{۰/۰۰۲۷}{۱ - P\left(X > L\right)}$$

واضح است اگر فرایند مورد مطالعه در کنترل آماری باشد، احتمال داشتن اقلام سالم ثابت است که این احتمال را با q نشان می‌دهیم. تعداد اقلام سالم در هر جعبه از توزیع دوجمله‌ای با پارامترهای n (معلوم) و q (نامعلوم) پیروی می‌کند. بنابراین نسبت اقلام سالم فرایند برابر است با:

$$p = P\left(X > L\right) = \sum_{x=L+۱}^{n} \binom{n}{x} q^{x} \left(۱ - q\right)^{n-x} = ۱ - \sum_{x=۰}^{L} \binom{n}{x} q^{x} \left(۱ - q\right)^{n-x}$$

۳ استنباط پیشگو ناپارامتری برای متغیرهای تصادفی برنولی

به‌کارگیری فرض $A_{(n)}$ به همراه احتمالات بالایی و پایینی[۱۶] با تفسیر ویچسلبرگر[۱۷](۱۹۹۵ و ۲۰۰۰) [۲۷، ۲۸]، استنباط بدون نیاز به اطلاعات پیشین را فراهم می‌سازد. در احتمال و آمار عدم قطعیت[۱۸] به‌طور معمول با استفاده از احتمالات تک مقدار(دقیق) که از اصول موضوع کولموگروف نتیجه می‌شود، اندازه‌گیری شده است. تعمیم نظریه احتمال کلاسیک منجر به تفاسیر متفاوت با محدودیت کمتر از عدم‌قطعیت می‌شود که مجموعا به احتمال نادقیق[۱۹] مربوط می‌باشند. چندین روش برای استنباط آماری با استفاده از احتمال نادقیق

[16] Lower and Upper Probabilities
[17] Weichselberger
[18] Uncertainty
[19] Imprecise Probability

پیشنهاد شده است، یکی از آنها استنباط پیشگو ناپارامتری است (کولن، ۲۰۱۱) [۹].

فرض $A_{(n)}$ جهت پیشگویی در مواردی که دانش پیشین درباره شکل توزیع با ابهام شدید همراه است، توسط هیل (۱۹۶۸ و ۱۹۸۸) [۲۰، ۲۱] ارائه شده است. فرض $A_{(n)}$، فرض داده بعدی[۲۰] مربوط به ویژگی تعویض‌پذیری (دی فینیتی[۲۱]، ۱۹۷۴) [۱۸] کمیت‌های تصادفی می‌باشد. هیل (۱۹۸۸) [۲۱] $A_{(n)}$ را با جزئیات بیشتر مورد بررسی قرار داده است. استنباط بر اساس فرض $A_{(n)}$ پیشگو و ناپارامتری می‌باشد و در مواقعی که اطلاعات دیگری در خصوص کمیت تصادفی مورد بررسی به جز n مشاهده در دست نیست یا شخص چنین اطلاعاتی را نخواهد به‌کار برد، برای مثال مطالعه اثرات فرض‌های اضافی اساسی در سایر روش‌های آماری، استنباط بر اساس فرض $A_{(n)}$ می‌تواند مفید واقع شود. فرض $A_{(n)}$ برای تعیین احتمال دقیق پیشامدها کافی نمی‌باشد، اما این فرض کران‌های احتمال بهینه را برای تمامی پیشامدهایی که X_{n+1} را در بر می‌گیرند، تعیین می‌نماید. این احتمال‌ها را احتمال‌های پایینی و بالایی در نظریه احتمال نادقیق و نظریه احتمال فاصله‌ای می‌نامند. این احتمالات دارای خواص سازگاری قوی می‌باشند. استنباط پیشگو ناپارامتری چارچوبی از نظریه و روش‌های آماری می‌باشد که احتمال‌های پایینی و بالایی را بر اساس فرض $A_{(n)}$ به کاربرده و چندین تغییر در $A_{(n)}$، که برای تحلیل‌های متفاوت مناسب می‌باشد، در نظر می‌گیرد (کولن، ۲۰۰۶) [۸].

آگوستین و کولن (۲۰۰۴) [۳] ثابت کردن احتمالات پایینی و بالایی به‌دست آمده براساس فرض $A_{(n)}$، F-احتمال در نظریه احتمال فاصله‌ای هستند. به‌عبارت دیگر این احتمالات دارای سازگاری درونی قوی می‌باشند.

کولن (۱۹۹۸) [۶] احتمالات نادقیق شرطی مستقیم را برای تعداد موفقیت‌ها از تعداد متناهی آزمایش‌های آتی برنولی[۲۲] به‌شرط داشتن اطلاعات درباره تعداد متناهی از آزمایش‌های گذشته تعیین می‌کند. فرایند اساسی ساده تعیین تعداد شکست‌ها یا پیروزی‌های فرض شده مربوط به اصل بیز[۲۳] (بیز، ۱۷۶۳) [۴]، با استفاده از استنباط پیشگو ناپارامتری می‌باشد.

[20] Post-data Assumption
[21] De Finetti
[22] Bernoulli
[23] Bayes

قضیه ۱.۳. *یک دنباله $n+m$ تایی از آزمایشات برنولی تعویض‌پذیر را درنظر بگیرید که نتیجه آنها می‌تواند پیروزی یا شکست باشد که به شیوه مناسب آزمایش می‌شوند. فرض کنید*

متغیر تصادفی تعداد کل پیروزی‌ها از m آزمایش ($n+1$ تا $n+m$) آتی برنولی $\to Y_{n+1}^{n+m}$

متغیر تصادفی تعداد پیروزی‌ها در n آزمایش (۱ تا n) گذشته برنولی $\to Y_1^n$

برای سادگی تعریف می‌کنیم $\binom{s+r_0}{s}=0$ ، بنابراین احتمالات پایینی و بالایی استنباط پیشگو ناپارامتری عبارت است از

$$\overline{P}\left(Y_{n+1}^{n+m}\in R_t|Y_1^n=s\right)=\binom{n+m}{m}^{-1}\sum_{j=1}^{t}\left[\binom{s+r_j}{s}-\binom{s+r_{j-1}}{s}\right]\binom{n-s+m-r_j}{n-s}\quad (۳)$$

$$\underline{P}\left(Y_{n+1}^{n+m}\in R_t|Y_1^n=s\right)=1-\bar{P}\left(Y_{n+1}^{n+m}\in R_t^c|Y_1^n=s\right)\quad (۴)$$

که $R_t=\{r_1,\ \dots,\ r_t\}$ با $1\leq t\ \leq m+1$ و $0\ \leq\ r_1\ <r_2\ <\dots\ <r_t\ \leq m$ و $R_t^c=\ \{0,1,\ \dots,\ m\}\setminus R_t$.

اثبات. کولن (۱۹۹۸) [۶]. □

نتیجه ۲.۳. *با بسط روابط فوق برای پیشامد$\left(Y_{n+1}^{n+m}\geq r|Y_1^n\geq s\right)$ داریم:*

$$\underline{P}\left(Y_{n+1}^{n+m}\geq r|Y_1^n\geq s\right)=\binom{n+m}{m}^{-1}\sum_{j=r}^{m}\binom{s-1+j}{j}\binom{n-s+m-j}{m-j}\quad (۵)$$

و

$$\bar{P}\left(Y_{n+1}^{n+m}\geq r|Y_1^n\geq s\right)=1\quad (۶)$$

که $0\ \leq s\ \leq n$ و $0\ \leq r\ \leq m$ (کولن، ۱۹۹۸) [۶].

۴ روش پیشگو ناپارامتری برای تعیین شاخص کارایی فرایندهای گسسته

در این بخش تحلیل شاخص کارایی فرایندهای مرتبط با داده‌های وصفی را در حالتی که اقلام تولیدی فرایند در جعبه‌هایی با شکل یکسان بسته‌بندی شده‌اند، در نظر می‌گیریم. فرض کنید هر جعبه شامل $n+m$ کالا باشد و حد مشخصه فنی فرایند بر حسب حداقل تعداد اقلام سالم که در هر جعبه باید وجود داشته باشد، تعیین گردد. حال اگر بر اساس نمونه‌ای تعویض‌پذیر nتایی از هرجعبه بدانیم حداقل $L_۱$ کالای سالم داریم و این تنها اطلاعات در دسترس از نمونه nتایی باشد، می‌خواهیم شاخص کارایی فرایند را با داشتن اطلاعات نمونه nتایی برای m نمونه تعویض‌پذیر بعدی (همچنین این نمونه با n نمونه اولیه نیز تعویض‌پذیر می‌باشد)، با فرض اینکه حد مشخصه فنی $L_۲$ تعیین گردد، به دست آوریم. با توجه به مفروضات بالا ابتدا احتمال انطباق پیشگو فرایند را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$p = P\left(Y_{n+۱}^{n+m} \geq L_۲ | Y_۱^n \geq L_۱\right) \tag{۷}$$

که در رابطه (۷)

متغیر تصادفی تعداد کل اقلام سالم از m قلم تولیدی ($n+۱$ تا $n+m$) بعدی $\rightarrow Y_{n+۱}^{n+m}$

متغیر تصادفی تعداد کل اقلام سالم در n قلم تولیدی (۱ تا n) اول $\rightarrow Y_۱^n$

بر اساس قضیه ۱.۳ احتمالات پایینی و بالایی پیشگو ناپارامتری برای یک دنباله $n+m$تایی از آزمایشات برنولی تعویض‌پذیر که نتیجه آنها می‌تواند سالم یا معیوب باشد، عبارتند از

$$\begin{aligned}\underline{P}\left(Y_{n+۱}^{n+m} \geq L_۲ | Y_۱^n \geq L_۱\right. &= \underline{P}\left(Y_{n+۱}^{n+m} \geq L_۲ | Y_۱^n \geq L_۱\right) \\ &= \binom{n+m}{m}^{-۱} \sum_{j=L_۲}^{m} \binom{L_۱ - ۱ + j}{j} \binom{n - L_۱ + m - j}{m - j}\end{aligned} \tag{۸}$$

و

$$\bar{P}\left(Y_{n+1}^{n+m} \geq L_2 | Y_1^n \geq L_1\right) = 1$$

که $0 \leq L_1 \leq n$ و $0 \leq L_2 \leq m$.

و $\bar{P}$ احتمال انطباق پیشگو بالایی و $\underline{P}$ احتمال انطباق پیشگو پایینی فرایند می‌باشد.

در نظر گرفتن احتمال انطباق پیشگو پایینی به‌عنوان احتمال انطباق پیشگو جهت تعیین شاخص کارایی پیشگو فرایند، منطقی به نظر می‌رسد. بنابراین

$$p = \underline{P}\left(Y_{n+1}^{n+m} \geq L_2 | Y_1^n \geq L_1\right)$$

در نتیجه بر اساس رابطه (۱) شاخص کارایی پیشگو فرایند را به‌صورت زیر تعریف می‌نماییم

$$C_{ppc} = \frac{1 - p_0}{1 - p} \tag{۹}$$

که

$$p = \binom{n+m}{m}^{-1} \sum_{j=L_2}^{m} \binom{L_1 - 1 + j}{j} \binom{n - L_1 + m - j}{m - j}$$

بنابراین با فرض $p_0 = 0/9973$ شاخص C_{ppc} را می‌توان به‌صورت زیر بازنویسی کرد

$$C_{ppc} = \frac{0/0027}{1 - \binom{n+m}{m}^{-1} \sum_{j=L_2}^{m} \binom{L_1-1+j}{j} \binom{n-L_1+m-j}{m-j}} \tag{۱۰}$$

مثال ۱.۴. فرض کنید بر اساس نمونه‌ای تعویض‌پذیر ۴ تایی ($n = 4$) و حدمشخصه فنی L_1 می‌خواهیم شاخص کارایی فرایند را با داشتن اطلاعات نمونه nتایی برای ۵ نمونه تعویض‌پذیر بعدی، با فرض اینکه حد مشخصه فنی L_2 تعیین گردد، ($m = 5$) به دست آوریم. با توجه به مقادیر به دست آمده در جدول ۱ می‌توان گفت شاخص کارایی پیشگو ناپارامتری فرایند با فرض ثابت بودن n، m و L_1 نسبت به L_2 کاهشی و با فرض ثابت بودن n، m و L_2 نسبت به L_1 افزایشی می‌باشد. بنابراین برای رسیدن به کارایی بالا برای مقادیر کوچک L_2 نیازی نیست همه نمونه‌های اولیه سالم باشند اما برای

جدول ۱: *مقادیر شاخص کارایی پیشگو فرایند*

	$L_۲=۱$		$L_۲=۲$		$L_۲=۳$		$L_۲=۴$		$L_۲=۵$	
	p	C_{ppc}	p	C_{ppc}	p	C_{ppc}	p	C_{ppc}	p	C_{ppc}
$L_۱=۰$	۰٫۰۰۰۰	۰٫۰۰۲۷	۰٫۰۰۰۰	۰٫۰۰۲۷	۰٫۰۰۰۰	۰٫۰۰۲۷	۰٫۰۰۰۰	۰٫۰۰۲۷	۰٫۰۰۰۰	۰٫۰۰۲۷
$L_۱=۱$	۰٫۵۵۵۶	۰٫۰۰۶۱	۰٫۲۷۷۸	۰٫۰۰۳۷	۰٫۱۱۹۰	۰٫۰۰۳۱	۰٫۰۳۹۷	۰٫۰۰۲۸	۰٫۰۰۷۹	۰٫۰۰۲۷
$L_۱=۲$	۰٫۸۳۳۳	۰٫۰۱۶۲	۰٫۵۹۵۲	۰٫۰۰۶۷	۰٫۳۵۷۱	۰٫۰۰۴۲	۰٫۱۶۶۷	۰٫۰۰۳۲	۰٫۰۴۷۶	۰٫۰۰۲۸
$L_۱=۳$	۰٫۹۵۲۴	۰٫۰۵۶۷	۰٫۸۳۳۳	۰٫۰۱۶۲	۰٫۶۴۲۹	۰٫۰۰۷۶	۰٫۴۰۴۸	۰٫۰۰۴۵	۰٫۱۶۶۷	۰٫۰۰۳۲
$L_۱=۴$	۰٫۹۹۲۱	۰٫۳۴۰۲	۰٫۹۶۰۳	۰٫۰۶۸۰	۰٫۸۸۱۰	۰٫۰۲۲۷	۰٫۷۲۲۲	۰٫۰۰۹۷	۰٫۴۴۴۴	۰٫۰۰۴۹

$L_۲$های بزرگ باید همه نمونه‌های اولیه سالم باشند.
در ادامه هدف تعیین زوج $(n, L_۱)$ می‌باشد که با استفاده از معیار زیر به‌دست می‌آید.

$$C_{ppc} \geq k \qquad (۱۱)$$

رابطه (۱۱) یک رابطه دقیق کلی جهت تعیین زوج $(n, L_۱)$ ارائه نمی‌کند. بنابراین بحث در این بخش بر اساس مثال عددی می‌باشد. اگرچه تعیین جواب دقیق برای حالت‌های خاص امکان‌پذیر می‌باشد.

مثال ۲.۴. فرض کنید بر اساس شاخص کارایی پیشگو فرایند و بر اساس ۵ و ۶ (۶ و $m=۵$) نمونه تعویض‌پذیر بعدی، بخواهیم مینیمم حجم نمونه لازم را به دست آوریم. مینیمم حجم نمونه لازم برای مقادیر مختلف p با شرط برقراری رابطه (۱۱) به‌طور عددی در جدول ۲ و ۳ بدست آمده است.
نتایج نشان می‌دهد که استنباط در تعیین مینیمم حجم نمونه لازم بشدت تحت تاثیر انتخاب p (بخصوص برای مقادیر p نزدیک به یک) می‌باشد.

۵ شاخص‌های کارایی فرایند فازی

شاخص‌های کارایی فرایندهای تولید، بطور گسترده در صنایع تولیدی برای اندازه‌گیری توانایی فرایندها در کشف درصد اقلامی که مطابق با حدود مشخصات فنی هستند، مورد استفاده قرار می‌گیرند. از آنجاییکه در اغلب موارد، غالب اطلاعات در دسترس، به دلیل خطای دستگاه‌های اندازه‌گیری یا زبانی بودن دقیق نمی‌باشد، بنابراین در اکثر مواقع تشخیص و تعیین مقادیر به‌صورت دقیق بسیار مشکل است. نظریه مجموعه‌های فازی برای بیان یا نشان دادن چنین مشاهداتی از ویژگی خوبی برخوردار است. در بسیاری از

جدول ۲: مینیمم حجم نمونه n با فرض $m = 6$

p	k	$m = 6$			
		$L_1 = n$ $L_2 = 6$	$L_1 = n - 1$ $L_2 = 6$	$L_1 = n$ $L_2 = 5$	$L_1 = n - 1$ $L_2 = 5$
۰٫۹۵	۰٫۰۵۴	۱۱۴	۲۳۱	۱۹	۳۵
۰٫۹۶	۰٫۰۶۷	۱۴۴	۲۹۱	۲۲	۴۰
۰٫۹۷	۰٫۰۹	۱۹۴	۳۹۱	۲۶	۴۸
۰٫۹۸	۰٫۱۳۵	۲۹۴	۵۹۱	۳۳	۶۰
۰٫۹۹	۰٫۲۷	۵۹۴	۱۱۹۱	۴۹	۸۸
۰٫۹۹۱	۰٫۳	۶۶۱	۱۳۲۵	۵۲	۹۳
۰٫۹۹۲	۰٫۳۳۸	۷۴۴	۱۴۹۱	۵۶	۹۹
۰٫۹۹۳	۰٫۳۸۶	۸۵۱	۱۷۰۶	۶۰	۱۰۷
۰٫۹۹۴	۰٫۴۵	۹۹۴	۱۹۹۱	۶۵	۱۱۶
۰٫۹۹۵	۰٫۵۴	۱۱۹۴	۲۳۹۲	۷۲	۱۲۷
۰٫۹۹۶	۰٫۶۷۵	۱۴۹۴	۲۹۹۲	۸۱	۱۴۳
۰٫۹۹۷	۰٫۹	۱۹۹۴	۳۹۹۲	۹۵	۱۶۶
۰٫۹۹۸	۱٫۳۵	۲۹۹۴	۵۹۹۲	۱۱۷	۲۰۵
۰٫۹۹۹	۲٫۷	۵۹۹۴	۱۱۹۹۲	۱۶۸	۲۹۳

موارد نسبت اقلام منطبق و حدود مشخصات، به دلیل عدم قطعیت در سیستم اندازه‌گیری که شامل اپراتور، گیج‌ها، شرایط محیطی و غیره نمی‌توانند دقیق باشند. از این رو اعدادی که توسط بازرسان برای هر نمونه آماری ثبت می‌شوند بنا به تشخیص فرد بوده و ممکن است این عدد دچار خطا باشد. با توجه به مسائل فوق از منطق فازی جهت افزایش دقت و انعطاف پذیری شاخص‌های کارایی فرایندهای تولید استفاده می‌گردد. نظریه مجموعه‌های فازی برای بیان یا نشان دادن چنین مشاهداتی از ویژگی خوبی برخوردار است. نظریه مجموعه‌های فازی می‌تواند به خوبی مراحلی را مدل‌سازی کند که داده‌های مشاهده شده دقیق نبوده و فازی می‌باشند. برای آشنایی بیشتر با کاربردهای نظریه مجموعه‌های فازی در این زمینه (صالح‌نیا، ۱۳۹۹) [۲] را ببینید.

نظریه مجموعه‌ها و منطق فازی ابتدا در سال ۱۹۶۵ توسط زاده [۲۹] مطرح شد. این نظریه کاربردهای گسترده‌ای در زمینه‌های کامپیوتر، تحلیل سیستمی، الکترونیک و اخیراً در علوم اجتماعی، اقتصاد و صنعت پیدا کرده است. منطق فازی نظریه‌ای برای شرایط عدم اطمینان است. این نظریه قادر است بسیاری از مفاهیم و متغیرها و سیستم‌هایی را که نادقیق و مبهم هستند، صورتبندی ریاضی بدهد و زمینه را برای استدلال، استنتاج،

جدول ۳: مینیمم حجم نمونه n با فرض $m = 5$

$m=6$				k	p
$L_1 = n-1$, $L_2 = 5$	$L_1 = n$, $L_2 = 5$	$L_1 = n-1$, $L_2 = 6$	$L_1 = n$, $L_2 = 6$		
۲۹	۱۶	۱۹۳	۹۵	۰/۰۵۴	۰/۹۵
۳۳	۱۸	۲۴۳	۱۲۰	۰/۰۶۷	۰/۹۶
۳۹	۲۱	۳۲۶	۱۶۲	۰/۰۹	۰/۹۷
۴۹	۲۷	۴۹۳	۲۴۵	۰/۱۳۵	۰/۹۸
۷۲	۴۰	۹۹۳	۴۹۵	۰/۲۷	۰/۹۹
۷۶	۴۳	۱۱۰۴	۵۵۱	۰/۳	۰/۹۹۱
۸۱	۴۶	۱۲۴۳	۶۲۰	۰/۳۳۸	۰/۹۹۲
۸۷	۴۹	۱۴۲۲	۷۰۹	۰/۳۸۶	۰/۹۹۳
۹۴	۵۳	۱۶۶۰	۸۲۸	۰/۴۵	۰/۹۹۴
۱۰۴	۵۹	۱۹۹۳	۹۹۵	۰/۵۴	۰/۹۹۵
۱۱۷	۶۶	۲۴۹۳	۱۲۴۵	۰/۶۷۵	۰/۹۹۶
۱۳۶	۷۷	۳۳۲۶	۱۶۶۲	۰/۹	۰/۹۹۷
۱۶۸	۹۶	۴۹۹۳	۲۴۹۵	۱/۳۵	۰/۹۹۸
۲۳۹	۱۳۷	۹۹۹۳	۴۹۹۵	۲/۷	۰/۹۹۹

کنترل و تصمیم‌گیری در شرایط عدم اطمینان فراهم آورد. در ادامه بعضی از مفاهیم نظریه مجموعه‌های فازی به‌کار رفته در این مقاله و برگرفته از منابع شماره [۲۹، ۳۱] را یادآوری می‌نماییم.

تعریف ۱.۵ (متغیرهای زبان شناختی). در صحبت‌های عامیانه اگر یک متغیر بتواند واژه‌هایی از زبان طبیعی را به‌عنوان مقدار بپذیرد یک متغیر زبان شناختی نامیده می‌شود. برای فرموله کردن واژه‌ها در گزاره‌های ریاضی از مجموعه‌های فازی برای مشخص کردن واژه ها استفاده می‌کنیم و به‌عبارت دیگر: ”اگر یک متغیر بتواند واژه‌هایی از زبان طبیعی را به‌عنوان مقدار خود بپذیرد آنگاه متغیر زبان شناختی نامیده می‌شود، که واژه‌ها به‌وسیله مجموعه‌های فازی در محدوده‌ای که متغیرها تعریف شده‌اند مشخص می‌گردد“. زاده در سال ۱۹۷۳ [۳۰] مفهوم زبان شناختی یا متغیرهای فازی را ارائه داد.

تعریف ۲.۵ (عدد فازی). مجموعه $\tilde{A}$ از R را یک عدد فازی گویند هرگاه در شرایط زیر صدق کند:

۱) $\tilde{A}$ نرمال باشد، یعنی $\exists x_\circ \in R;\ \tilde{A}(x_\circ) = 1$

۲) $\tilde{A}$ محدب باشد، یعنی برای هر $x_۱, x_۲ \in R$ و هر $\lambda \in [۰, ۱]$ داشته باشیم:

$$\tilde{A}\big(\lambda x_۱ + (۱ - \lambda)x_۲\big) \geq \min\big(\tilde{A}(x_۱), \tilde{A}(x_۲)\big)$$

۳) $\tilde{A}$ نیمه‌پیوسته بالایی باشد. یعنی $\tilde{A}$ پیوستگی راست داشته باشد درجایی که $\tilde{A}$ صعودی می‌باشد و $\tilde{A}$ پیوستگی چپ دارد درجایی که $\tilde{A}$ نزولی می‌باشد.

تعریف ۳.۵ (α-برش مجموعه فازی). مجموعه α-برش، A_α، از عناصری تشکیل می‌شود که درجه عضویت آنها در $\tilde{A}$ کمتر از α نباشد

$$A_\alpha = \{x \in X | \tilde{A}(x) \geq \alpha\}, \quad ۰ \leq \alpha \leq ۱$$

مجموعه α-برش یک عدد فازی، فاصله‌ای بسته است و به‌صورت $A_\alpha = \lfloor A_\alpha^-, A_\alpha^- \rfloor$ نشان داده می‌شود، که در آن

$$A_\alpha^- = \inf\{x \in R;\ \tilde{A}(x) \geq \alpha\}$$
$$A_\alpha^+ = \sup\{x \in R;\ \tilde{A}(x) \geq \alpha\}$$

بیشترین اعداد فازی مورد استفاده، اعداد فازی مثلثي و ذوزنقه‌ای هستند. اعداد فازی مثلثی، به دلیل محاسبات ساده‌تر، بیشتر مورد استفاده قرار می‌گیرند.

تعریف ۴.۵ (اصل گسترش). فرض کنید $X_۱, \ldots, X_n$، n مجموعه مرجع و $X = X_۱ \times \ldots \times X_n$ حاصل‌ضرب دکارتی آن‌ها باشد. همچنین $\tilde{A}_۱, \ldots, \tilde{A}_n$، n مجموعه فازی به ترتیب از $X_۱, \ldots, X_n$ باشند. همچنین $y = f(x_۱, \ldots, x_n)$ یک نگاشت از X به Y باشد. حاصل عمل f بر n مجموعه فازی $\tilde{A}_۱, \ldots, \tilde{A}_n$ به‌صورت

مجموعه فازی $\tilde{B}$ از Y با تابع عضویت $\mu_{\tilde{B}}(y)$ می‌باشد که به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$\tilde{B} = \{(y, \mu_{\tilde{B}}(y))|y = f(x_۱, \cdots, x_n), (x_۱, \cdots, x_n) \in X\}$$

$$\mu_{\tilde{B}}(y) = \begin{cases} \sup_{(x_۱,\cdots,x_n)\in f^{-۱}(y)} \min\{\mu_{\tilde{A}_۱}(x_۱), \cdots, \mu_{\tilde{A}_n}(x_n)\} & f^{-۱}(y) \neq \varnothing \\ ۰ & f^{-۱}(y) = \varnothing \end{cases}$$

که $f^{-۱}$ معکوس f است.

در ادامه نسبت انطباق تولیدات (p) را در شاخص کارایی C_{pc} و حد مشخصه پایینی $(L_۱)$ را در شاخص کارایی پیشگو C_{ppc} به‌صورت عدد فازی مثلثی در نظر می‌گیریم و برآورد فازی شاخص کارایی C_{pc} و شاخص کارایی پیشگو C_{ppc} را بدست می‌آوریم.

۱.۵ نسبت انطباق تولیدات (p) در شاخص کارایی فازی

یکی از حالت‌هایی که می‌تواند درنظر گرفته شود، این است که نسبت انطباق محصولات به‌صورت متغیرهای زبانی تعریف شود. اعداد فازی را می‌توان برای نمایش نسبت انطباق محصولات مورد استفاده قرار داد. فرض کنید که نسبت انطباق محصولات به‌صورت عدد فازی مثلثی $\widetilde{p}= TFN(p_۱, p_۲, p_۳)$ تعریف شود. اگر شاخص کارایی فازی یک عدد فازی مثلثی باشد، α-برش‌های آن می‌تواند بصورت زیر بدست آید.

$$p\,(\alpha) = (p_۱ + (p_۲ - p_۱)\alpha \;, p_۳ + (p_۲ - p_۳)\alpha)$$

بنابراین

$$\widetilde{C}_{pc} = \frac{۰/۰۰۲۷}{۱ - \widetilde{p}} \qquad (۱۲)$$

در نتیجه

$$\widetilde{C}_{pc}=\left\{\frac{۰/۰۰۲۷}{۱-p}|p\in p\left(\alpha\right)\right\}\quad ۰\leq\alpha\leq ۱$$
$$\widetilde{C}_{pc}(\alpha)=\left[C_{pcl}\left(\alpha\right),\ C_{pcr}\left(\alpha\right)\right]$$

به بیانی دیگر،

$$C_{pcl}\left(\alpha\right)=\min\left\{\frac{۰/۰۰۲۷}{۱-p}|p\in p\left(\alpha\right)\right\}$$
$$C_{pcr}\left(\alpha\right)=\max\left\{\frac{۰/۰۰۲۷}{۱-p}|p\in p\left(\alpha\right)\right\}$$

اگر $\tilde{p}$ عد فازی مثلثی باشد آنگاه

$$C_{pcl}\left(\alpha\right)=\frac{۰/۰۰۲۷}{۱-(p_{۱}+(p_{۲}-p_{۱})\alpha\ )}$$
$$C_{pcr}\left(\alpha\right)=\frac{۰/۰۰۲۷}{۱-(p_{۳}+(p_{۲}-p_{۳})\alpha)}$$

مثال ۵.۵. فرض کنید نسبت انطباق محصولات به‌صورت ”تقریبا ۰/۹۹۸“ تعریف شود. نسبت انطباق محصولات باید به یک عدد فازی مثلثی به‌صورت $\tilde{s}=TFN\ (۰/۹۹۷, ۰/۹۹۸, ۰/۹۹۹)$ تبدیل شود. می‌خواهیم شاخص کارایی فازی $\widetilde{C}_{pc}$ را به‌دست‌آوریم.

با توجه به مفروضات و بر اساس رابطه (۱۲) داریم:

$$p\left(\alpha\right)=\left(۰/۹۹۷+۰/۰۰۱\alpha\ ,\ ۰/۹۹۹-۰/۰۰۱\alpha\right)$$

و

$$C_{pcl}\left(\alpha\right)=\frac{۰/۰۰۲۷}{۱-(۰/۹۹۷+۰/۰۰۱\alpha\ )}$$
$$C_{pcr}\left(\alpha\right)=\frac{۰/۰۰۲۷}{۱-(۰/۹۹۹-۰/۰۰۱\alpha)}$$

جدول ۴: *α-برش‌های مختلف مربوط به شاخص کارایی فازی $\widetilde{C}_{pc}$*

α	$C_{pcl}\,(\alpha)$	$C_{pcr}\,(\alpha)$	α	$C_{pcl}\,(\alpha)$	$C_{pcr}\,(\alpha)$
۰	۰٫۹۰	۲٫۷۰	۰٫۵۵	۱٫۱۰	۱٫۷۴
۰٫۰۵	۰٫۹۲	۲٫۵۷	۰٫۶۰	۱٫۱۳	۱٫۶۹
۰٫۱۰	۰٫۹۳	۲٫۴۵	۰٫۶۵	۱٫۱۵	۱٫۶۴
۰٫۱۵	۰٫۹۵	۲٫۳۵	۰٫۷۰	۱٫۱۷	۱٫۵۹
۰٫۲۰	۰٫۹۶	۲٫۲۵	۰٫۷۵	۱٫۲۰	۱٫۵۴
۰٫۲۵	۰٫۹۸	۲٫۱۶	۰٫۸۰	۱٫۲۳	۱٫۵۰
۰٫۳۰	۱٫۰۰	۲٫۰۸	۰٫۸۵	۱٫۲۶	۱٫۴۶
۰٫۳۵	۱٫۰۲	۲٫۰۰	۰٫۹۰	۱٫۲۹	۱٫۴۲
۰٫۴۰	۱٫۰۴	۱٫۹۳	۰٫۹۵	۱٫۳۲	۱٫۳۸
۰٫۴۵	۱٫۰۶	۱٫۸۶	۱	۱٫۳۵	۱٫۳۵
۰٫۵۰	۱٫۰۸	۱٫۸۰			

شکل ۱: *نمودار تابع عضویت شاخص کارایی فازی $\widetilde{C}_{pc}$*

جدول ۴، α-برش‌های مختلف و شکل ۱ نمودار تابع عضویت مربوط به شاخص کارایی فازی $\widetilde{C}_{pc}$ را نشان می‌دهد.

۲.۵ حد مشخصه پایینی (L_1) در شاخص کارایی پیشگو فازی

یکی دیگر از حالت‌هایی که می‌تواند در نظر گرفته شود، این است که حد مشخصه پایینی (L_1) به‌صورت متغیرهای زبانی تعریف شود. اعداد فازی را می‌توان برای نمایش حد مشخصه پایینی مورد استفاده قرار داد. فرض کنید حد مشخصه پایینی محصولات به‌صورت عدد فازی مثلثی $\tilde{L}_1 = TFN(L_{11},\ L_{12},\ L_{13})$ تعریف شود. اگر شاخص کارایی پیشگو فازی یک عدد فازی مثلثی باشد، α-برش‌های آن می‌تواند به‌صورت زیر به‌دست آید.

$$L_1\,(\alpha) = (L_{11} + (L_{12} - L_{11})\alpha\ , L_{13} + (L_{12} - L_{13})\alpha)$$

بنابراین

$$\widetilde{C}_{ppc}=\frac{0/0027}{1-\binom{n+m}{m}^{-1}\sum_{j=L_2}^{m}\binom{\widetilde{L}_1-1+j}{j}\binom{n-\widetilde{L}_1+m-j}{m-j}} \tag{13}$$

در نتیجه

$$\widetilde{C}_{ppc}=\left\{\frac{0/0027}{1-\binom{n+m}{m}^{-1}\sum_{j=L_2}^{m}\binom{L_1-1+j}{j}\binom{n-L_1+m-j}{m-j}}\middle| L_1\in L_1(\alpha)\right\}$$
$$\widetilde{C}_{ppc}(\alpha)=\left[C_{ppcl}(\alpha)\,,\ C_{ppcr}(\alpha)\right]\qquad 0\leq\alpha\leq 1$$

به بیانی دیگر

$$C_{ppcl}(\alpha)=\min\left\{\frac{0/0027}{1-\binom{n+m}{m}^{-1}\sum_{j=L_2}^{m}\binom{L_1-1+j}{j}\binom{n-L_1+m-j}{m-j}}\middle| L_1\in L_1(\alpha)\right\}$$
$$C_{ppcr}(\alpha)=\max\left\{\frac{0/0027}{1-\binom{n+m}{m}^{-1}\sum_{j=L_2}^{m}\binom{L_1-1+j}{j}\binom{n-L_1+m-j}{m-j}}\middle| L_1\in L_1(\alpha)\right\}$$

اگر $\tilde{L}_1$ عدد فازی مثلثی باشد آنگاه

$$C_{ppcl}(\alpha)=\frac{0/0027}{1-\binom{n+m}{m}^{-1}\sum_{j=L_2}^{m}\binom{(L_{11}+(L_{12}-L_{11})\alpha)-1+j}{j}\binom{n-(L_{11}+(L_{12}-L_{11})\alpha)+m-j}{m-j}}$$
$$C_{ppcr}(\alpha)=\frac{0/0027}{1-\binom{n+m}{m}^{-1}\sum_{j=L_2}^{m}\binom{(L_{13}+(L_{12}-L_{13})\alpha)-1+j}{j}\binom{n-(L_{13}+(L_{12}-L_{13})\alpha)+m-j}{m-j}}$$

مثال ۶.۵. فرض کنید حد مشخصه پایینی در $n=50$ کالا تولیدشده به‌صورت "تقریباً ۴۹" تعریف شود. حد مشخصه پایینی باید به یک عدد فازی مثلثی به‌صورت $\tilde{s}=TFN\,(48,49,50)$ تبدیل شود. می‌خواهیم شاخص کارایی پیشگو فازی مشاهده‌ی حداقل $r=20$ محصول سالم در $m=25$ محصول تولید شده بعدی را به‌دست آوریم.

با توجه به رابطه‌ی (۱۳) داریم:

$$L_1(\alpha)=(48+\alpha\,,50-\alpha)$$

و

$$C_{ppcl}\left(\alpha\right)=\frac{0/0027}{1-\binom{n+m}{m}^{-1}\sum_{j=L_2}^{m}\binom{(48+\alpha)-1+j}{j}\binom{n-(48+\alpha)+m-j}{m-j}}$$

$$C_{ppcr}\left(\alpha\right)=\frac{0/0027}{1-\binom{n+m}{m}^{-1}\sum_{j=L_2}^{m}\binom{(50-\alpha)-1+j}{j}\binom{n-(50-\alpha)+m-j}{m-j}}$$

جدول ۵: *α-برش‌های مختلف مربوط به شاخص کارایی فازی $\widetilde{C}_{ppc}$*

α	$C_{ppcl}\left(\alpha\right)$	$C_{ppcr}\left(\alpha\right)$	α	$C_{ppcl}\left(\alpha\right)$	$C_{ppcr}\left(\alpha\right)$
۰	۰/۱۹	۳/۰۷	۰/۵۵	۰/۳۳	۱/۱۰
۰/۰۵	۰/۲۰	۲/۷۶	۰/۶۰	۰/۳۵	۱/۰۲
۰/۱۰	۰/۲۱	۲/۴۹	۰/۶۵	۰/۳۷	۰/۹۴
۰/۱۵	۰/۲۲	۲/۲۵	۰/۷۰	۰/۳۹	۰/۸۸
۰/۲۰	۰/۲۳	۲/۰۴	۰/۷۵	۰/۴۲	۰/۸۱
۰/۲۵	۰/۲۴	۱/۸۵	۰/۸۰	۰/۴۴	۰/۷۶
۰/۳۰	۰/۲۵	۱/۶۹	۰/۸۵	۰/۴۷	۰/۷۰
۰/۳۵	۰/۲۷	۱/۵۵	۰/۹۰	۰/۵۰	۰/۶۶
۰/۴۰	۰/۲۸	۱/۴۲	۰/۹۵	۰/۵۴	۰/۶۱
۰/۴۵	۰/۳۰	۱/۳۰	۱	۰/۵۷	۰/۵۷
۰/۵۰	۰/۳۱	۱/۲۰			

شکل ۲: *نمودار تابع عضویت شاخص کارایی فازی $\widetilde{C}_{ppc}$*

جدول ۵، α-برش‌های مختلف و شکل ۲ نمودار تابع عضویت مربوط به شاخص کارایی فازی $\widetilde{C}_{pc}$ را نشان می‌دهد.

نتایج حاصل از مثال‌های ۵.۵ و ۶.۵ نشان می‌دهد نظریه‌ی مجموعه‌های فازی تعریفی انعطاف‌پذیر را برای نسبت انطباق محصولات در شاخص کارایی و حد مشخصه پایینی در شاخص کارایی پیشگو ارایه می‌نماید. نتایج به‌دست آمده نشان می‌دهد که تعریف فازی پارامترهای شاخص‌های کارایی انعطاف‌پذیری و قابلیت استفاده‌ی بیش‌تری را میسر می‌سازد. نشان دادیم در مواردی که، تعریف پارامترهای شاخص‌های کارایی به‌صورت مقادیر قطعی ممکن نیست، و ممکن است تعریف این پارامترها به‌عنوان ارزش قطعی آسان نباشد، آنها می‌توانند با متغیرهای زبانی بیان شوند و نظریه‌ی مجموعه‌ی

فازی با موفقیت برای مقابله با ابهام در این عبارات زبانی به‌کار رود.

۶ نتیجه‌گیری

در این مقاله برای فرایندهای گسسته، شاخص کارایی جدیدی که پیشگو و ناپارامتریک می‌باشد، معرفی شد. روش ارائه شده از روش‌های فراوانی‌گرا دیگر متفاوت بوده و به جای آزمون‌های آماری و استنباط مربوط به پارامترهای مدل بر متغیرهای تصادفی که عملکرد عناصر واقعی را نمایندگی می‌کنند، تاکید دارد. روش معرفی شده با وجود کاهش مدل‌سازی و سایر مفروضات مانند اطلاعات پیشین، استنباط مفید را امکان‌پذیر می‌سازد. در این روش از احتمالات نادقیق برای تعین عدم قطعیت استفاده شده است. تعریف شاخص کارایی فرایند بر اساس احتمال پایینی منجر به استنباط نیرومند در خصوص فرایند می‌شود. همچنین برآورد فازی شاخص کارایی پراکیس و زیکلاکی (۲۰۰۲) [۲۵] و شاخص کارایی پیشگوی جدید معرفی شده، به‌دست آمد. با استفاده از برش آلفا تابع عضویت مقدار شاخص کارایی فرایند را قطعی کردیم. بنابراین برش آلفا از اعداد فازی ذکرشده، فاصله‌هایی به‌صورت قطعی ایجاد می‌کند. با استفاده از این روش برای هر سطح برش آلفا، می‌توان شاخص کارایی فرایند را تعیین کرد. لذا تصمیم گیرنده می‌تواند با توجه به سطوح مختلف برش آلفا تصمیم‌گیری نماید.

مراجع

[۱] کارگر، مرجان. (۱۳۹۰). رویکرد بیز برای دستیابی به شاخص‌های کارایی فرآیند بر پایه نمونه‌های چندگانه. (پایان‌نامه کارشناسی ارشد)، دانشگاه شهید باهنر کرمان.

[۲] صالح‌نیا، مهدی. (۱۳۹۹). استفاده از شاخص‌های قابلیت فرایند فازی برای بررسی و تحلیل آلودگی هوا. مجله سیستم‌های فازی و کاربردها، شماره ۳، صص ۱۴۱ – ۱۵۲.

[3] Augustin, T. and Coolen, F.P.A. (2004). Nonparametric predictive inference and interval probability. *Journal of Statistical Planning and Inference*, **124**, 251-272.

[4] Bayes, T. (1763). An essay towards solving a problem in the doctrine of chances. *Philosophical Transactions of the Royal Society London*, **53**, 370-418; **54**, 296-325.

[5] Clements, J.A. (1989). Process capability calculations for non-normal distributions. *Quality Progress*, **22**(9), 95–100.

[6] Coolen, F.P.A. (1998). Low structure imprecise predictive inference for Bayes' problem. *Statistics & Probability Letters*, **36**, 349-357.

[7] Coolen, F.P.A. (2004). On the use of imprecise probabilities in reliability. *Quality and Reliability Engineering International*, **20**, 193–202.

[8] Coolen, F.P.A. (2006). On nonparametric predictive inference and objective Bayesianism. *Journal of Logic, Language and Information*, **15**, 21-47.

[9] Coolen, F.P.A. (2011). Nonparametric Predictive Inference. *In International encyclopedia of statistical science*, ed. M. Lovric, 968–970. Berlin, Springer.

[10] Coolen, F.P.A., Ahmadini, A. and Coolen-Maturi, T. (2021). Imprecise inference based on the log-rank test for accelerated life testing. *Metrika*, **84**, 913–925.

[11] Coolen, F.P.A. and Augustin, T. (2009). A nonparametric predictive alternative to the Imprecise Dirichlet Model: the case of a known number of categories. *International Journal of Approximate Reasoning*, **50**, 217-230.

[12] Coolen, F.P.A. and Bin Himd, S. (2020). Nonparametric predictive inference bootstrap with application to reproducibility of the two-sample Kolmogorov–Smirnov test. *Journal of Statistical Theory and Practice*, **14**(2), 1-13.

[13] Coolen, F.P.A. and Elsaeiti, M.A. (2009). Nonparametric Predictive methods for acceptance sampling. *Journal of Statistical Theory and Practice*, **3**, 907-921.

[14] Coolen, F.P.A. and Marques, F.J. (2020). Nonparametric Predictive Inference for Test Reproducibility by Sampling Furture Data Orderings. *Journal of Statistical Theoty and Practice*, **14**(4), 1-22.

[15] Coolen, F.P.A. and Utkin, L.V. (2011). Imprecise reliability. In: *International Encyclopedia of Statistical Science*, M. Lovric (Ed.). Springer, 649-650.

[16] Coolen, F.P.A. and Van Der Laan, P. (2001). Imprecise predictive selection based on low structure assumptions. *Journal of Statistical Planning and Inference*, **98**, 259-277.

[17] Coolen, F.P.A. and Yan, K.J. (2004). Nonparametric predictive inference with right-censored data. *Journal of Statistical Planning and Inference*, **126**, 25-54.

[18] De Finetti, B. (1974). *Theory of Probability*, 2 vols. Wiley, London.

[19] Geisser, S. (1993). *Predictive Inference: An Introduction*. Chapman & Hall, London.

[20] Hill, B.M. (1968). Posterior distribution of percentiles: Bayes' theorem for sampling from a population. *Journal of the American Statistical Association*, **63**, 677-691.

[21] Hill, B.M. (1988). De Finetti's theorem, induction, and A(n) or Bayesian nonparametric predictive inference (with discussion). *In J.M. Bernardo, et al. (Eds.), Bayesian Statistics 3, 211-241. Oxford University Press*.

[22] Kane, V.E. (1986). Process capability indices. *Journal of Quality Technology*, **18**(1), 41–52 (Corrigenda, 18(4), 265).

[23] Pearn, W.L. and Kotz, S. (1994–1995). Application of Clements' method for calculating second- and thirdgeneration process capability indices for non-normal pearsonian populations. *Quality Engineering*, **7**(1), 139–145.

[24] Pearn, W.L. and Chen, K.S. (1995). Estimating process capability indices for non-normal pearsonian populations. *Quality and Reliability Engineering International*, **11**, 389–391.

[25] Perakis, M. and Xekalaki, E. (2002). A process capability index that is based on the proportion of conformance. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, **72**(9), 707–718.

[26] Perakis, M. and Xekalaki, E. (2005). A process capability index for discrete processes. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, **75**(3), 175–187.

[27] Weichselberger, K. (1995). Axiomatic foundations of the theory of interval-probability. *In: Mammitzsch, V., SchneeweiU, H. (Eds.), Proceedings of the Second GauU Symposion, Section B. De Gruyter, Berlin*, 47–64.

[28] Weichselberger, K. (2000). The theory of interval-probability as a unifying concept for uncertainty. *International Journal of Approximate*, **24**, 149–170.

[29] Zadeh, L.A. (1965). Fuzzy sets. Information and Control 8, 338–353.

[30] Zadeh, L.A. (1975). The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning. *Information Sciences*, **3**(8), 199-249.

[31] Zimmermann, H.J. (1991). Fuzzy set theory and its applications. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.