سیستم‌های فازی و کاربردها
سال چهارم، ویژه نامه شماره ۱ (آبان ۱۴۰۰)
صص. ۱ تا ۲۵

شاپای چاپی: ۲۷۱۷-۴۴۰۹
شاپای الکترونیکی: ۲۷۱۷-۳۹۸۴
DOI:10.22034/JFSA.2021.137385

شاخص‌های کارایی تابعی مبتنی بر منطق فازی برای پروفایل خطی ساده

زینب عباسی گنجی

مرکز تحقیقات و آموزش کشاورزی و منابع طبیعی خراسان رضوی، سازمان تحقیقات، آموزش و ترویج، مشهد، ایران

به یاد روانشاد دکتر بهرام صادقپور گیلده

تاریخ دریافت: ۱۳۹۹/۱/۱۰ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۹/۱۱/۱۳

چکیده

کیفیت فرایندهایی که بر اساس رابطه تابعی بین متغیر پاسخ و یک یا چند متغیر مستقل تعریف می‌شود، پروفایل نام دارد. اگر این رابطه به‌صورت تابع خطی از یک متغیر مستقل باشد، پروفایل خطی ساده نامیده می‌شود. در این مقاله، با استفاده از منطق فازی، دو شاخص کارایی تابعی برای پروفایل‌های خطی ساده پیشنهاد می‌شود و با استفاده از مطالعات شبیه‌سازی، عملکرد آن‌ها در مقایسه با شاخص‌های تابعی موجود مورد ارزیابی قرار می‌گیرد. نتایج نشان می‌دهند که شاخص‌های جدید در بیان کارایی فرایند بهتر از شاخص‌های موجود عمل می‌کنند. برای نشان‌دادن طرز استفاده از شاخص‌های جدید، مثال واقعی ارائه می‌شود.

۱ سرآغاز

شاخص‌های کارایی فرایند اعدادی هستند که نشان می‌دهند محصولات فرایند تا چه میزان با مشخصات تعیین‌شده توسط تولیدکنندگان یا مصرف‌کنندگان مطابقت دارد. در برخی

عبارات و کلمات کلیدی: شاخص‌های کارایی تابعی، اعداد فازی، پروفایل خطی ساده

Email(s): .

۱۴۰۰ انجمن سیستم‌های فازی ایران

Mathematics Subject Classification (2010): 62A86

فرایندها، کیفیت فرایند یا محصول با استفاده از رابطه تابعی بین متغیر پاسخ (وابسته) و یک یا چند متغیر مستقل (توضیحی) تعریف می‌شود. این رابطه، پروفایل نامیده می‌شود. پروفایل‌ها بر اساس توابع مختلف از جمله خطی و غیر خطی تعریف می‌شوند. تاکنون، بیشتر تحقیقات انجام‌شده بر روی پروفایل‌ها بر اساس پروفایل تابع خطی ساده بوده است. پروفایل خطی ساده یک پروفایل خطی با یک متغیر مستقل است.

تحقیقات زیادی در زمینه کارت‌های کنترل برای پروفایل‌های خطی ساده انجام شده است که برای مطالعه می‌توان به منابع مستک [۱] و همکاران (۱۹۹۴)، کنگ و البین [۲] (۲۰۰۰)، کیم [۳] و همکاران (۲۰۰۳)، محمود و وودال [۴] (۲۰۰۴)، زو [۵] و همکاران (۲۰۰۶ و ۲۰۰۷)، محمود و همکاران (۲۰۰۷)، سقایی و همکاران (۲۰۰۹)، حسینی‌فرد و همکاران (۲۰۱۱)، نورالسناء و همکاران (۲۰۱۱) مراجعه کرد. در زمینه شاخص‌های کارایی برای این نوع پروفایل نیز، مطالعاتی انجام شده است که می‌توان به تحقیقات انجام‌شده توسط حسینی‌فرد و همکاران (۲۰۱۲a و ۲۰۱۲b)، عبادی و امیری (۲۰۱۲)، عبادی و شهریاری (۲۰۱۳) رجوع کرد.

نعمتی کشتلی و همکاران (۲۰۱۴) دو شاخص کارایی با رویکرد تابعی برای اندازه‌گیری کارایی پروفایل خطی ساده پیشنهاد کردند که از تمام دامنه متغیر مستقل استفاده می‌شود که بر اساس انتگرال است و حدود انتگرال از کمترین مقدار متغیر مستقل تا بیشترین مقدار است. پاکزاد و همکاران (۲۰۲۱) تعمیمی بر این دو شاخص انجام داده دو شاخص کارایی بر اساس زیان ارائه کردند که در این مقاله، بر اساس آن‌ها دو شاخص کارایی جدید معرفی می‌شود.

در بخش بعد، برخی مفاهیم فازی و در بخش ۳، شاخص‌های کارایی تابعی موجود ارائه می‌شود. بخش ۴ به معرفی دو شاخص کارایی تابعی جدید بر اساس منطق فازی پرداخته و در بخش ۵ با استفاده از مطالعه شبیه‌سازی نشان داده می‌شود که عملکرد شاخص‌های جدید بهتر از شاخص‌های موجود است. بخش ۶ طریقه استفاده از شاخص‌های جدید برای داده‌های واقعی را توضیح می‌دهد و در پایان، بخش ۷ به ارائه

---

[1] Mestek

[2] Kang and Albin

[3] Kim

[4] Mahmoud and Woodall

[5] Zou

نتایج و تحقیقات آتی می‌پردازد.

۲ برخی مفاهیم فازی

در دنیای واقعی، بسیاری از پارامترها با متغیرهای زبانی توصیف می‌شوند که بایستی بر اساس منطق فازی تعریف شوند. هر توصیف زبانی به یک تابع عضویت مربوط می‌شود که یک مجموعه فازی را تشکیل می‌دهد. در واقع، توابع عضویت به هر جزء از مجموعه مرجع، یک عدد حقیقی در بازه $[0,1]$ نسبت می‌دهند. این عدد، درجه عضو بودن آن جزء به یک مجموعه فازی را نشان می‌دهد. هر چه این مقدار به یک نزدیکتر باشد، نشان‌دهنده درجه عضویت بالاتر است. همچنین، یک جزء می‌تواند تا درجه‌ای در عضویت یک مجموعه فازی و تا درجه‌ای متعلق به مجموعه فازی دیگر باشد. در این بخش، برخی تعاریف مورد نیاز این مقاله را ارائه می‌کنیم.

تعریف ۱.۲ (مجموعه فازی). فرض کنید E یک مجموعه ناتهی باشد. یک مجموعه فازی $\widetilde{A}$ در E با تابع عضویت آن تعیین می‌شود یعنی $\mu_{\widetilde{A}}: E \to [0,1]$. $\mu_{\widetilde{A}}(e)$ درجه عضویت e در مجموعه فازی $\widetilde{A}$ برای هر $e \in E$ تعریف می‌شود. این تابع با $\widetilde{A}$ نیز نشان داده می‌شود. به عبارت دیگر $\widetilde{A}: E \to [0,1]$.

تعریف ۲.۲ (تکیه گاه). فرض کنید $\widetilde{A}$ یک مجموعه فازی از E باشد. تکیه گاه $\widetilde{A}$ را با $supp(\widetilde{A})$ نشان داده، اعضای آن همه e هایی هستند که درجه عضویت آن‌ها بزرگتر از صفر است. به بیان دیگر

$$supp(\widetilde{A}) = \{e \in E \mid \widetilde{A}(e) > 0\}.$$

تعریف ۳.۲ (مجموعه فازی نرمال). مجموعه فازی $\widetilde{A}$ از مجموعه E نرمال نامیده می‌شود اگر e ای در آن وجود داشته باشد که درجه عضویت آن یک باشد یعنی $\widetilde{A}(e) = 1$. در غیر این صورت، $\widetilde{A}$ غیر نرمال خواهد بود.

تعریف ۴.۲ (آلفا برش). مجموعه α-برش از $\widetilde{A}$ یک مجموعه غیر فازی است که آن را

با $\widetilde{A}_\alpha$ نشان می‌دهیم و تعریف ریاضی آن به صورت زیر است:

$$\widetilde{A}_\alpha = \{e \in E \mid \widetilde{A}(e) \geq \alpha\}.$$

تعریف ۵.۲ (عدد فازی مثلثی). مجموعه فازی $\widetilde{A}$ عدد فازی مثلثی نامیده می‌شود و آن را با $T(a, b, c)$ نمایش می‌دهند هر گاه تابع عضویت آن برابر باشد با:

$$\widetilde{A}(e) = \begin{cases} \frac{e-a}{b-a}; & a \leq e < b, \\ \frac{c-e}{c-b}; & b \leq e < c, \\ ۰; & \text{در غیر این‌صورت}. \end{cases}$$

۳ شاخص‌های کارایی تابعی موجود برای پروفایل خطی ساده

فرض کنید کیفیت محصولات فرایند بر اساس رابطه خطی ساده بین متغیرهای وابسته و مستقل باشد. بنابراین، ارتباط بین این دو متغیر مشابه مدل رگرسیون خطی ساده است. متغیر مستقل X دارای k سطح $x_۱$،$x_۱$ ، ... و x_k با مقادیر ثابت است. در هر سطح از متغیر مستقل، نمونه‌ای تصادفی به اندازه n جمع‌آوری کرده و مقدار متغیر وابسته اندازه‌گیری می‌شود.

فرض کنید $(x_i, y_{ij});\ \ i = ۱, ۲, ..., k;\ \ \ j = ۱, ۲, ..., n$ مشاهده j نمونه در سطح x_i باشد. در واقع k نمونه تصادفی به اندازه n در دست است. با درنظر گرفتن این‌که فرایند تحت کنترل آماری است، رابطه بین متغیرهای وابسته، مستقل و خطای تصادفی به صورت زیر است:

$$Y_{ij} = A_۰ + A_۱ X_i + \varepsilon_{ij}; \qquad i = ۱, ۲, ..., k \quad , \quad j = ۱, ۲, ..., n, \qquad (۱)$$

ε_{ij}ها مستقل و هم‌توزیع بر اساس توزیع نرمال با میانگین صفر و واریانس $\sigma^۲$ هستند. $A_۰$ و $A_۱$ پارامترهای مدل هستند که بر اساس نمونه تصادفی جمع‌آوری‌شده از

فرایند تحت کنترل، طبق روابط زیر براورد می‌شوند:

$$\widehat{A}_0 = a_0 = \frac{\sum_{j=1}^{n} a_{0j}}{n}, \qquad \widehat{A}_1 = a_1 = \frac{\sum_{j=1}^{n} a_{1j}}{n}, \tag{2}$$

که در آن

$$a_{0j} = \bar{y}_j - a_{1j}\bar{x}, \qquad a_{1j} = \frac{S_{xy(j)}}{S_{xx}}, \tag{3}$$

و $\bar{y}_j = \sum_{i=1}^{k} y_{ij}/k$، $\bar{x} = \sum_{i=1}^{k} x_i/k$، $S_{xy(j)} = \sum_{i=1}^{k}(x_i - \bar{x})y_{ij}$، و

$$S_{xx} = \sum_{i=1}^{k}(x_i - \bar{x})^2.$$

بنابراین، خواهیم داشت: $\widehat{Y}_{ij} = a_{0j} + a_{1j}x_i; \quad i = 1, 2, ..., k$. براورد σ^2 از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\widehat{\sigma}^2 = MSE = \frac{\sum_{j=1}^{n} MSE_j}{n}, \tag{4}$$

که در آن $MSE_j = \sum_{i=1}^{k} e_{ij}^2/(k-2)$ است و $e_{ij} = y_{ij} - \widehat{y}_{ij}$ها باقی‌مانده‌های j امین نمونه هستند. برای اطلاعات بیشتر، به کانتر [6] و همکاران (۲۰۰۵) و دراپر و اسمیت [7] (۲۰۱۱) رجوع شود.

نعمتی کشتلی و همکاران (۲۰۱۴)، برای اولین بار رویکرد تابعی را در اندازه‌گیری کارایی پروفایل خطی ساده در نظر گرفتند تا از همه مقادیر متغیر مستقل، بین کمترین سطح و بیشترین سطح، استفاده کنند. در این رویکرد، حدود مشخصات فنی، حدود مشخصات طبیعی، هدف و میانگین همه توابعی از متغیر مستقل $X \in [x_1, x_k]$ هستند. این توابع به صورت زیر تعریف شده‌اند:

$$\mu_Y(X) = A_0 + A_1 X, \tag{5}$$

[6] Kunter

[7] Draper and Smith

$$LSL_Y(X) = A_{0l} + A_{1l}X, \quad USL_Y(X) = A_{0u} + A_{1u}X, \qquad (۶)$$

$$LNTL_Y(X) = A_0 + A_1X - 3\sigma, \quad UNTL_Y(X) = A_0 + A_1X + 3\sigma, \qquad (۷)$$

بر اساس LSL و USL متغیر پاسخ در هر سطح از متغیر مستقل، خط رگرسیون به‌دست می‌آید که در واقع A_{0l} و A_{1l} عرض از مبدا و شیب مربوط به خط رگرسیون حد پایین مشخصه فنی و A_{0u} و A_{1u} مربوط به حد بالای مشخصه فنی هستند. بر این اساس، دو شاخص کارایی $C_p(profile)$ و $C_{pk}(profile)$ را طبق روابط زیر معرفی کردند:

$$C_p(profile) = \frac{\int_{x_1}^{x_k}[USL_Y(X) - LSL_Y(X)]dX}{\int_{x_1}^{x_k}[UNTL_Y(X) - LNTL_Y(X)]dX}, \qquad (۸)$$

و

$$C_{pk}(profile) = \min\left\{C_{pkl}(profile), C_{pku}(profile)\right\}, \qquad (۹)$$

$$C_{pkl}(profile) = \frac{\int_{x_1}^{x_k}[\mu_Y(X) - LSL_Y(X)]dX}{\int_{x_1}^{x_k}[\mu_Y(X) - LNTL_Y(X)]dX},$$

$$C_{pku}(profile) = \frac{\int_{x_1}^{x_k}[USL_Y(X) - \mu_Y(X)]dX}{\int_{x_1}^{x_k}[UNTL_Y(X) - \mu_Y(X)]dX}.$$

بر اساس نمونه تصادفی جمع‌آوری‌شده از فرایند تحت کنترل، ابتدا تمام پارامترهای مدل را براورد کرده، سپس مقادیر شاخص‌های فوق براورد می‌شود.

پاکزاد و همکاران (۲۰۲۱) بر اساس همین رویکرد، دو شاخص کارایی $C_{pm}(profile)$ و $C_{pmk}(profile)$ را به صورت زیر ارائه کردند:

$$C_{pm}(profile) = \begin{cases} \dfrac{\int_{x_1}^{x_k}[USL_Y(X) - LSL_Y(X)]dX}{\int_{x_1}^{x_k}[6\sqrt{\sigma^2 + \left(\mu_Y(X) - T_Y(X)\right)^2}]dX}; & T_Y(X) = M_Y(X), \\[2ex] \dfrac{\int_{x_1}^{x_k}[d_Y^*(X)]dX}{\int_{x_1}^{x_k}[3\sqrt{\sigma^2 + \left(\mu_Y(X) - T_Y(X)\right)^2}]dX}; & T_Y(X) \neq M_Y(X), \end{cases} \qquad (۱۰)$$

که در آن $M_Y(X) = \big(LSL_Y(X) + USL_Y(X)\big)/۲$ و

$$d^*_Y(X) = \min\left\{\big(T_Y(X) - LSL_Y(X)\big),\ \big(USL_Y(X) - T_Y(X)\big)\right\}.$$

$$C_{pmk}(profile) = \min\left\{C_{pmkl}(profile), C_{pmku}(profile)\right\}, \qquad (۱۱)$$

$$C_{pmkl}(profile) = \frac{\int_{x_۱}^{x_k}[\mu_Y(X) - LSL_Y(X)]dX}{\int_{x_۱}^{x_k}[۳\sqrt{\sigma^۲ + \big(\mu_Y(X) - T_Y(X)\big)^۲}]dX},$$

$$C_{pmku}(profile) = \frac{\int_{x_۱}^{x_k}[USL_Y(X) - \mu_Y(X)]dX}{\int_{x_۱}^{x_k}[۳\sqrt{\sigma^۲ + \big(\mu_Y(X) - T_Y(X)\big)^۲}]dX}.$$

در این‌جا نیز بر اساس نمونه تصادفی، تمام پارامترهای مدل براورد و سپس، مقادیر شاخص‌ها براورد می‌شوند. آن‌ها با استفاده از مطالعه شبیه‌سازی، نشان دادند که عملکرد این دو شاخص بهتر از شاخص‌های معرفی‌شده توسط نعمتی کشتلی و همکاران (۲۰۱۴) است.

۴ دو شاخص کارایی تابعی جدید مبتنی بر منطق فازی

همان‌طور که در بخش قبل نشان داده شد، شاخص‌های موجود از همه مقادیر بین کمترین بیشترین سطح متغیر مستقل استفاده می‌کنند و این در حالی است که مقادیر این متغیر به تعداد k سطح است. از آن‌جایی که اندازه‌گیری هر یک از سطوح ممکن است به‌همراه خطا باشد و یا این‌که به دلایلی، مقدار متغیر مستقل در هر سطح عدد ثابت فرض شود، بهتر است مقادیر سطوح متغیر مستقل، اعداد/کمیت‌های فازی در نظر گرفته شود. یعنی متغیر مستقل X دارای k سطح به صورت $\tilde{x}_۱$، $\tilde{x}_۲$، ... و $\tilde{x}_k$ باشد. به بیان دیگر، مقادیر این متغیر عبارت‌اند از: تقریباً $x_۱$، تقریباً $x_۲$، ... و تقریباً x_k.

بنابراین، تفاوت اصلی شاخص‌های موجود و شاخص‌هایی که در این‌جا ارائه می‌شوند این است که شاخص‌های موجود به تمام مقادیر متغیر مستقل، از کمترین تا بیشترین

سطح، وزن یکسان و برابر یک در انتگرال‌گیری می‌دهند در حالی‌که شاخص‌های جدید، به تمام اعداد این متغیر، وزنی برابر با اندازه عضویت آن می‌دهند. در این مقاله، همه مقادیر را اعداد فازی مثلثی در نظر می‌گیریم.
برای تعیین تکیه‌گاه اعداد فازی متغیر مستقل X ، ابتدا مقادیر زیر را محاسبه می‌کنیم:

$$a_i = \frac{x_i - x_{i-1}}{2}, \quad b_i = \frac{x_{i+1} - x_i}{2}; \quad i = 2, 3, ..., k-1$$

و $b_1 = a_2$ و $a_k = b_{k-1}$. اعداد فازی مثلثی $\tilde{x}_1$ و $\tilde{x}_k$ را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\tilde{x}_1 = \begin{cases} \frac{x_1 + b_1 - x}{b_1}; & x_1 \leq x < x_1 + b_1, \\ 0; & \text{در غیر این‌صورت}. \end{cases} \quad (۱۲)$$

$$\tilde{x}_k = \begin{cases} \frac{x - x_k + a_k}{a_k}; & x_k - a_k < x \leq x_k, \\ 0; & \text{در غیر این‌صورت}. \end{cases} \quad (۱۳)$$

اعداد فازی سایر سطوح طبق فرمول زیر تعریف می‌شود:

$$\tilde{x}_i = \begin{cases} \frac{x - x_i + a_i}{a_i}; & x_i - a_i \leq x < x_i, \\ \frac{x_i + b_i - x}{b_i}; & x_i \leq x < x_i + b_i, \\ 0; & \text{در غیر این‌صورت}. \end{cases} \quad (۱۴)$$

اکنون، با توجه به شاخص‌های ارائه‌شده توسط پاکزاد و همکاران (۲۰۲۱)، دو شاخص کارایی تابعی را تعریف می‌کنیم.

$$C_{pm.g}(profile) = \begin{cases} \frac{\sum_{i=1}^{k} \int \tilde{x}_i [USL_Y(X) - LSL_Y(X)] dX}{\sum_{i=1}^{k} \int [6\tilde{x}_i \sqrt{\sigma^2 + \left(\mu_Y(X) - T_Y(X)\right)^2}] dX}; & T_Y(X) = M_Y(X), \\ \frac{\sum_{i=1}^{k} \int \tilde{x}_i [d_Y^*(X)] dX}{\sum_{i=1}^{k} \int [3\tilde{x}_i \sqrt{\sigma^2 + \left(\mu_Y(X) - T_Y(X)\right)^2}] dX}; & T_Y(X) \neq M_Y(X), \end{cases} \quad (۱۵)$$

و

$$C_{pmk.g}(profile) = \min\left\{C_{pmkl.g}(profile), C_{pmku.g}(profile)\right\}, \quad (۱۶)$$

$$C_{pmkl.g}(profile) = \frac{\sum_{i=۱}^{k}\int \tilde{x}_i[\mu_Y(X) - LSL_Y(X)]dX}{\sum_{i=۱}^{k}\int[۳\tilde{x}_i\sqrt{\sigma^۲ + \left(\mu_Y(X) - T_Y(X)\right)^۲}]dX},$$

$$C_{pmku}(profile) = \frac{\sum_{i=۱}^{k}\int \tilde{x}_i[USL_Y(X) - \mu_Y(X)]dX}{\sum_{i=۱}^{k}\int[۳\tilde{x}_i\sqrt{\sigma^۲ + \left(\mu_Y(X) - T_Y(X)\right)^۲}]dX}.$$

با استفاده از نمونه تصادفی جمع‌آوری شده از فرایند تحت کنترل، تمام پارامترها براورد و سپس، مقادیر شاخص‌ها براورد می‌شوند. مقدار شاخص‌های فوق اعداد دقیق است. برای تصمیم‌گیری در مورد کارا بودن فرایند، مقدار آستانه برابر با ۱ در نظر گرفته می‌شود. به این معنی که اگر مقدار شاخص کارایی بیشتر از ۱ باشد، فرایند کارا است.

۵ مطالعه شبیه‌سازی

در این بخش، عملکرد شاخص‌های $C_{pm.g}(profile)$ و $C_{pmk.g}(profile)$ در مقایسه با شاخص‌های $C_{pm}(profile)$ و $C_{pmk}(profile)$ با استفاده از مطالعه شبیه‌سازی‌شده برای مدل پروفایل مطرح شده در مقاله کنگ و البین (۲۰۰۰)، بر اساس معیارهای اریبی و میانگین مربعات خطا ارزیابی می‌شود. در این مدل، کیفیت فرایند یا محصول بر اساس مدل پروفایل خطی ساده $Y = ۳ + ۲X + \varepsilon$ با چهار سطح برای متغیر مستقل برابر با ۲، ۴، ۶ و ۸ تعریف شده است و ε از توزیع نرمال با میانگین صفر و واریانس $\sigma^۲$ پیروی می‌کند. حدود مشخصات و مقدار هدف متغیر وابسته در هر سطح از متغیر مستقل، در جدول ۱ آورده شده است.

بر اساس مقادیر جدول ۱، خطوط پایین و بالای مشخصات فنی و هدف تابعی به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند:

$$LSL_Y(X) = -۲/۲ + ۲/۲۸۲۵X, \quad USL_Y(X) = ۲/۵ + ۲/۲۸۲۵X,$$

جدول ۱: *حدود مشخصات و مقدار هدف متغیر وابسته*

i	x_i	LSL_i	USL_i	T_i
۱	۲	۲/۵	۱۰	۶/۲۵
۲	۴	۶/۸۵	۱۴/۳۵	۱۰/۶۰
۳	۶	۱۱/۲۵	۱۸/۷۵	۱۵
۴	۸	۱۶/۲۵	۲۳/۷۵	۲۰

$$T_Y(X) = ۱/۵۵ + ۲/۲۸۲۵X,$$

خط هدف فوق در وسط دو خط مشخصه فنی قرارگرفته، تلورانس متقارن نامیده می‌شود. به علاوه، دو خط پروفایل تابعی تحت کنترل زیر نیز درنظر گرفته شده تا مطالعه بیشتری انجام شود.

$$Y = ۳/۵ + ۲X + \varepsilon, \quad Y = ۳/۴ + ۱/۸X + \varepsilon,$$

نمودار این خطوط در شکل ۱ نشان داده شده است. در این مطالعه، ۱۰۰۰۰ بار نمونه‌هایی به اندازه‌های ۲۵، ۵۰، ۱۰۰ و ۲۰۰ با چهار مقدار مختلف ۰/۵، ۰/۸، ۱ و ۱/۲ برای انحراف معیار، تولید و مقادیر شاخص‌ها، اریبی و میانگین مربع خطا برای چهار شاخص مورد نظر محاسبه و در جداول ۲ تا ۷ نشان داده شده‌اند.

برای انجام مقایسه‌های بیشتر، خط هدف دیگری به صورت $T_Y(X) = ۳/۴۲۵ + ۲/۲۸۲۵X$ نیز در نظر گرفته شده است تا تلورانس نامتقارن نیز مورد بررسی قرارگیرد. در این حالت، سه خط پروفایل تابعی تحت کنترل زیر مورد ارزیابی قرارگرفته‌اند:

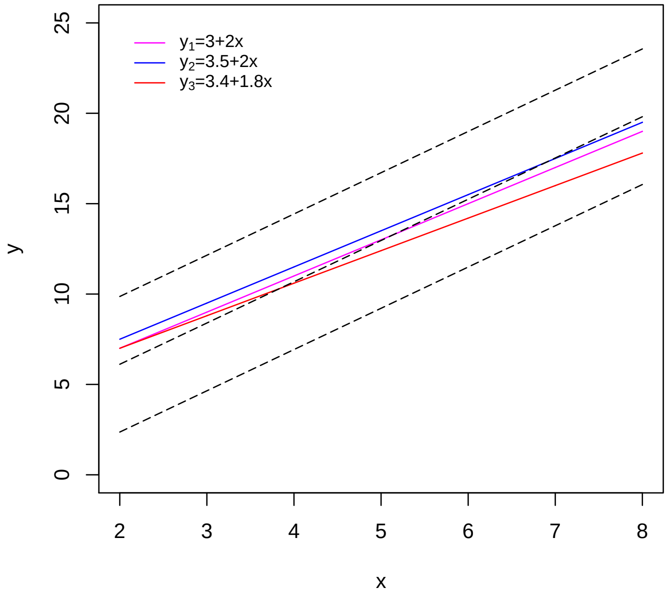
$$Y = ۳/۴ + ۲/۴X + \varepsilon, \quad Y = ۳/۶ + ۲/۲X + \varepsilon, \quad Y = ۵ + ۱/۹X + \varepsilon,$$

نمودار این خطوط در شکل ۲ و نتایج مطالعه شبیه‌سازی در جداول ۸ تا ۱۳ آورده شده است.

در جداول مشاهده می‌شود که مقادیر میانگین مربعات خطا برای شاخص تابعی $C_{pm.g}(profile)$ کمتر از شاخص $C_{pm}(profile)$ و همچنین، این مقادیر برای شاخص

تابعی $C_{pmk.g}(profile)$ کمتر از شاخص $C_{pmk}(profile)$ است. برای توضیح شکلی، برای برخی مقایسه‌ها مقادیر میانگین مربعات خطا رسم شده است. شکل‌های ۳ و ۴ که به ترتیب مربوط به جداول ۴-۵ و ۱۲-۱۳ هستند، به وضوح گویای این مطلب هستند.

این مطالعات شبیه‌سازی نتیجه می‌دهند که شاخص‌های تابعی جدید معرفی‌شده عملکرد بهتری نسبت به شاخص‌های تابعی موجود دارند.



شکل ۱: *نمودار خطوط حدود مشخصات، هدف و پروفایل‌های تابعی، تلورانس تابعی متقارن*

۶ مثال واقعی

در این بخش، با استفاده از داده‌های مقاله شی [۸] و همکاران (۲۰۱۴) طریقه استفاده از شاخص‌های جدید را نشان می‌دهیم. عملکرد فنر با استفاده از رابطه بین کشش و طول فنر تعیین می‌شود. طبق قانون هوک [۹] هنگامی‌که فنر به حالتی از تعادل می‌رسد، میزان

[8] Shi
[9] Hooke

جدول ۲: مقایسه‌ای بین شاخص‌های جدید و شاخص‌های موجود-هدف متقارن $(y_{ij} = ۳ + ۲x_i + \varepsilon_{ij})$

$\varepsilon_{ij} \sim N(۰, ۰/۵^۲)$	مقدار واقعی	$C_{pm}(profile)$ (۱/۸۲۶۹)	$C_{pmk}(profile)$ (۱/۸۰۸۷)	$C_{pm.g}(profile)$ (۱/۸۰۸۷)	$C_{pmk.g}(profile)$ (۱/۷۹۰۷)
		$\widehat{C}_{pm}(profile)$ (bias&MSE)	$\widehat{C}_{pmk}(profile)$ (bias&MSE)	$\widehat{C}_{pm.g}(profile)$ (bias&MSE)	$\widehat{C}_{pmk.g}(profile)$ (bias&MSE)
حجم نمونه	۲۵	۱/۸۳۰۲ (۰/۰۰۳۲&۰/۰۰۹۵)	۱/۸۰۵۵ (−۰/۰۰۳۱&۰/۰۰۹۹)	۱/۸۱۲۰ (۰/۰۰۳۳&۰/۰۰۹۳)	۱/۷۸۷۵ (−۰/۰۰۳۱&۰/۰۰۹۷)
	۵۰	۱/۸۲۸۱ (۰/۰۰۱۱&۰/۰۰۴۷)	۱/۸۰۷۲ (−۰/۰۰۱۵&۰/۰۰۵۰)	۱/۸۰۹۹ (۰/۰۰۱۱&۰/۰۰۴۷)	۱/۷۸۹۲ (−۰/۰۰۱۵&۰/۰۰۴۹)
	۱۰۰	۱/۸۱۷۵ (−۰/۰۰۹&۰/۰۰۲۴)	۱/۷۹۸۵ (۰/۰۴۹۴&۰/۰۰۲۵)	۱/۷۹۹۶ (−۰/۰۰۹۱&۰/۰۰۲۳)	۱/۷۸۰۷ (−۰/۰۰۹۹&۰/۰۰۲۵)
	۲۰۰	۱/۸۲۲۳ (−۰/۰۰۴۵&۰/۰۰۱۲)	۱/۸۰۳۹ (−۰/۰۰۴۷&۰/۰۰۱۳)	۱/۸۰۴۳ (−۰/۰۰۴۴&۰/۰۰۱۱)	۱/۷۸۶۱ (−۰/۰۰۴۶&۰/۰۰۱۲)
$\varepsilon_{ij} \sim N(۰, ۰/۸^۲)$	مقدار واقعی	(۱/۳۴۱۶)	(۱/۳۲۸۲)	(۱/۳۳۳۳)	(۱/۳۲۰۰)
حجم نمونه	۲۵	۱/۳۰۲۷ (−۰/۰۳۸۹&۰/۰۰۸۱)	۱/۲۷۸۲ (−۰/۰۴۹۹&۰/۰۰۹۶)	۱/۲۹۵۱ (−۰/۰۳۸۳&۰/۰۰۸۰)	۱/۲۷۰۸ (−۰/۰۴۹۳&۰/۰۰۹۴)
	۵۰	۱/۳۲۲۱ (−۰/۰۱۹۵&۰/۰۰۳۷)	۱/۳۰۲۸ (−۰/۰۲۵۴&۰/۰۰۴۳)	۱/۳۱۴۲ (−۰/۰۱۹۱&۰/۰۰۳۷)	۱/۲۹۵۰ (−۰/۰۲۵۱&۰/۰۰۴۲)
	۱۰۰	۱/۳۳۲۱ (−۰/۰۰۹۵&۰/۰۰۱۸)	۱/۳۱۵۹ (−۰/۰۱۲۲&۰/۰۰۲۰)	۱/۳۲۴۰ (−۰/۰۰۹۳&۰/۰۰۱۸)	۱/۳۰۸۰ (−۰/۰۱۲۱&۰/۰۰۲۰)
	۲۰۰	۱/۳۳۷۰ (−۰/۰۰۴۶&۰/۰۰۰۹)	۱/۳۲۲۷ (−۰/۰۰۵۵&۰/۰۰۱۰)	۱/۳۲۸۸ (−۰/۰۰۴۵&۰/۰۰۰۹)	۱/۳۱۴۶ (−۰/۰۰۵۴&۰/۰۰۱۰)

جدول ۳: مقایسه‌ای بین شاخص‌های جدید و شاخص‌های موجود-هدف متقارن $(y_{ij} = ۳ + ۲x_i + \varepsilon_{ij})$

$\varepsilon_{ij} \sim N(۰, ۱^۲)$	مقدار واقعی	$C_{pm}(profile)$ (۱/۱۲۶۳)	$C_{pmk}(profile)$ (۱/۱۱۵۰)	$C_{pm.g}(profile)$ (۱/۱۲۱۱)	$C_{pmk.g}(profile)$ (۱/۱۰۹۹)
		$\widehat{C}_{pm}(profile)$ (bias&MSE)	$\widehat{C}_{pmk}(profile)$ (bias&MSE)	$\widehat{C}_{pm.g}(profile)$ (bias&MSE)	$\widehat{C}_{pmk.g}(profile)$ (bias&MSE)
حجم نمونه	۲۵	۱/۰۹۰۴ (−۰/۰۳۵۹&۰/۰۰۶۴)	۱/۰۶۵۷ (−۰/۰۴۹۳&۰/۰۰۸۰)	۱/۰۸۵۷ (−۰/۰۳۵۴&۰/۰۰۶۳)	۱/۰۶۱۱ (−۰/۰۴۸۸&۰/۰۰۷۹)
	۵۰	۱/۱۰۸۳ (−۰/۰۱۸۰&۰/۰۰۲۹)	۱/۰۸۹۳ (−۰/۰۲۵۷&۰/۰۰۳۵)	۱/۱۰۳۴ (−۰/۰۱۷۷&۰/۰۰۲۹)	۱/۰۸۴۴ (−۰/۰۲۵۵&۰/۰۰۳۵)
	۱۰۰	۱/۱۱۷۵ (−۰/۰۰۸۸&۰/۰۰۱۴)	۱/۱۰۲۲ (−۰/۰۱۲۸&۰/۰۰۱۶)	۱/۱۱۲۴ (−۰/۰۰۸۷&۰/۰۰۱۴)	۱/۰۹۷۲ (−۰/۰۱۲۷&۰/۰۰۱۶)
	۲۰۰	۱/۱۲۲۰ (−۰/۰۰۴۳&۰/۰۰۰۷)	۱/۱۰۹۱ (−۰/۰۰۵۹&۰/۰۰۰۸)	۱/۱۱۶۹ (−۰/۰۰۴۲&۰/۰۰۰۷)	۱/۱۰۴۱ (−۰/۰۰۵۸&۰/۰۰۰۸)
$\varepsilon_{ij} \sim N(۰, ۱/۲^۲)$	مقدار واقعی	(۰/۹۶۶۱)	(۰/۹۵۶۴)	(۰/۹۶۲۷)	(۰/۹۵۳۱)
حجم نمونه	۲۵	۰/۹۳۳۵ (−۰/۰۳۲۶&۰/۰۰۵۰)	۰/۹۰۸۷ (−۰/۰۴۷۸&۰/۰۰۶۷)	۰/۹۳۰۴ (−۰/۰۳۲۳&۰/۰۰۴۹)	۰/۹۰۵۶ (−۰/۰۴۷۴&۰/۰۰۶۷)
	۵۰	۰/۹۴۹۷ (−۰/۰۱۶۳&۰/۰۰۲۳)	۰/۹۳۰۹ (−۰/۰۲۵۵&۰/۰۰۲۹)	۰/۹۴۶۵ (−۰/۰۱۶۲&۰/۰۰۲۳)	۰/۹۲۷۷ (−۰/۰۲۵۳&۰/۰۰۲۹)
	۱۰۰	۰/۹۵۸۰ (−۰/۰۰۸۱&۰/۰۰۱۱)	۰/۹۴۳۳ (−۰/۰۱۳۱&۰/۰۰۱۳)	۰/۹۵۴۷ (−۰/۰۰۸۰&۰/۰۰۱۱)	۰/۹۴۰۱ (−۰/۰۱۳۰&۰/۰۰۱۳)
	۲۰۰	۰/۹۶۲۱ (−۰/۰۰۳۹&۰/۰۰۰۵)	۰/۹۵۰۳ (−۰/۰۰۶۲&۰/۰۰۰۶)	۰/۹۵۸۸ (−۰/۰۰۳۹&۰/۰۰۰۵)	۰/۹۴۶۹ (−۰/۰۰۶۱&۰/۰۰۰۶)

جدول ۴: مقایسه‌ای بین شاخص‌های جدید و شاخص‌های موجود-هدف متقارن $(y_{ij} = ۳٫۵ + ۲x_i + \varepsilon_{ij})$

$\varepsilon_{ij} \sim N(۰, ۰٫۵^۲)$	مقدار واقعی	$C_{pm}(profile)$ (۱٫۵۱۱۲)	$C_{pmk}(profile)$ (۱٫۲۹۴۶)	$C_{pm.g}(profile)$ (۱٫۵۰۰۴)	$C_{pmk.g}(profile)$ (۱٫۲۸۵۳)
		$\widehat{C}_{pm}(profile)$ $(bias\&MSE)$	$\widehat{C}_{pmk}(profile)$ $(bias\&MSE)$	$\widehat{C}_{pm.g}(profile)$ $(bias\&MSE)$	$\widehat{C}_{pmk.g}(profile)$ $(bias\&MSE)$
حجم نمونه	۲۵	۱٫۴۸۶۳ (−۰٫۰۲۴۹&۰٫۰۰۵۶)	۱٫۲۷۳۷ (−۰٫۰۲۰۹&۰٫۰۰۶۱)	۱٫۴۷۶۱ (−۰٫۰۲۴۳&۰٫۰۰۵۵)	۱٫۲۶۵۰ (−۰٫۰۲۰۴&۰٫۰۰۵۹)
	۵۰	۱٫۴۹۸۹ (−۰٫۰۱۲۳&۰٫۰۰۲۷)	۱٫۲۸۴۴ (−۰٫۰۱۰۲&۰٫۰۰۳۰)	۱٫۴۸۸۴ (−۰٫۰۱۲۰&۰٫۰۰۲۶)	۱٫۲۷۵۳ (−۰٫۰۱۰۰&۰٫۰۰۲۹)
	۱۰۰	۱٫۵۰۵۰ (−۰٫۰۰۶۲&۰٫۰۰۱۳)	۱٫۲۸۹۳ (−۰٫۰۰۵۳&۰٫۰۰۱۵)	۱٫۴۹۴۴ (−۰٫۰۰۶۱&۰٫۰۰۱۳)	۱٫۲۸۰۲ (۰٫۰۰۵۲&۰٫۰۰۱۴)
	۲۰۰	۱٫۵۰۸۱ (−۰٫۰۰۳۱&۰٫۰۰۰۶)	۱٫۲۹۲۰ (−۰٫۰۰۲۷&۰٫۰۰۰۷)	۱٫۴۹۷۴ (−۰٫۰۰۳۰&۰٫۰۰۰۶)	۱٫۲۸۲۸ (−۰٫۰۰۲۶&۰٫۰۰۰۷)
$\varepsilon_{ij} \sim N(۰, ۰٫۸^۲)$	مقدار واقعی	(۱٫۱۸۸۳)	(۱٫۰۱۸۰)	(۱٫۱۸۲۸)	(۱٫۰۱۳۳)
حجم نمونه	۲۵	۱٫۱۶۰۰ (−۰٫۰۲۸۲&۰٫۰۰۵۴)	۰٫۹۹۴۳ (−۰٫۰۲۳۶&۰٫۰۰۶۲)	۱٫۱۵۴۹ (−۰٫۰۲۷۹&۰٫۰۰۵۴)	۰٫۹۸۹۹ (−۰٫۰۲۳۴&۰٫۰۰۶۱)
	۵۰	۱٫۱۷۴۲ (−۰٫۰۱۴۰&۰٫۰۰۲۶)	۱٫۰۰۶۳ (−۰٫۰۱۱۶&۰٫۰۰۳۰)	۱٫۱۶۹۰ (−۰٫۰۱۳۹&۰٫۰۰۲۵)	۱٫۰۰۱۸ (−۰٫۰۱۱۵&۰٫۰۰۳۰)
	۱۰۰	۱٫۱۸۱۲ (−۰٫۰۰۷۱&۰٫۰۰۱۲)	۱٫۰۱۱۹ (−۰٫۰۰۶۰&۰٫۰۰۱۵)	۱٫۱۷۵۸ (−۰٫۰۰۷۰&۰٫۰۰۱۲)	۱٫۰۰۷۳ (−۰٫۰۰۶۰&۰٫۰۰۱۵)
	۲۰۰	۱٫۱۸۴۸ (−۰٫۰۰۳۵&۰٫۰۰۰۶)	۱٫۰۱۵۰ (−۰٫۰۰۳۰&۰٫۰۰۰۷)	۱٫۱۷۹۴ (−۰٫۰۰۳۴&۰٫۰۰۰۶)	۱٫۰۱۰۳ (−۰٫۰۰۳۰&۰٫۰۰۰۷)

جدول ۵: مقایسه‌ای بین شاخص‌های جدید و شاخص‌های موجود-هدف متقارن $(y_{ij} = ۳٫۵ + ۲x_i + \varepsilon_{ij})$

$\varepsilon_{ij} \sim N(۰, ۱^۲)$	مقدار واقعی	$C_{pm}(profile)$ (۱٫۰۲۷۳)	$C_{pmk}(profile)$ (۰٫۸۸۰۰)	$C_{pm.g}(profile)$ (۱٫۰۲۳۶)	$C_{pmk.g}(profile)$ (۰٫۸۷۶۹)
		$\widehat{C}_{pm}(profile)$ $(bias\&MSE)$	$\widehat{C}_{pmk}(profile)$ $(bias\&MSE)$	$\widehat{C}_{pm.g}(profile)$ $(bias\&MSE)$	$\widehat{C}_{pmk.g}(profile)$ $(bias\&MSE)$
حجم نمونه	۲۵	۰٫۹۹۹۳ (−۰٫۰۲۷۹&۰٫۰۰۴۷)	۰٫۸۵۶۷ (−۰٫۰۲۳۳&۰٫۰۰۵۵)	۰٫۹۹۵۹ (−۰٫۰۲۷۷&۰٫۰۰۴۷)	۰٫۸۵۳۷ (−۰٫۰۲۳۱&۰٫۰۰۵۵)
	۵۰	۱٫۰۱۳۴ (−۰٫۰۱۳۹&۰٫۰۰۲۲)	۰٫۸۶۸۵ (−۰٫۰۱۱۵&۰٫۰۰۲۷)	۱٫۰۰۹۸ (−۰٫۰۱۳۷&۰٫۰۰۲۲)	۰٫۸۶۵۵ (−۰٫۰۱۱۴&۰٫۰۰۲۷)
	۱۰۰	۱٫۰۲۰۳ (−۰٫۰۰۷۰&۰٫۰۰۱۱)	۰٫۸۷۴۰ (−۰٫۰۰۶۰&۰٫۰۰۱۳)	۱٫۰۱۶۷ (−۰٫۰۰۶۹&۰٫۰۰۱۰)	۰٫۸۷۰۹ (−۰٫۰۰۵۹&۰٫۰۰۱۳)
	۲۰۰	۱٫۰۲۳۸ (−۰٫۰۰۳۴&۰٫۰۰۰۵)	۰٫۸۷۷۱ (۰٫۰۰۳۰&۰٫۰۰۰۷)	۱٫۰۲۰۲ (−۰٫۰۰۳۴&۰٫۰۰۰۵)	۰٫۸۷۳۹ (−۰٫۰۰۲۹&۰٫۰۰۰۷)
$\varepsilon_{ij} \sim N(۰, ۱٫۲^۲)$	مقدار واقعی	(۰٫۸۹۹۶)	(۰٫۷۷۰۶)	(۰٫۸۹۷۰)	(۰٫۷۶۸۴)
حجم نمونه	۲۵	۰٫۸۷۲۹ (−۰٫۰۲۶۷&۰٫۰۰۴۰)	۰٫۷۴۸۳ (−۰٫۰۲۲۳&۰٫۰۰۴۹)	۰٫۸۷۰۵ (−۰٫۰۲۶۵&۰٫۰۰۳۹)	۰٫۷۴۶۳ (−۰٫۰۲۲۲&۰٫۰۰۴۸)
	۵۰	۰٫۸۸۶۲ (−۰٫۰۱۳۳&۰٫۰۰۱۸)	۰٫۷۵۹۶ (−۰٫۰۱۱۰&۰٫۰۰۲۴)	۰٫۸۸۳۸ (−۰٫۰۱۳۲&۰٫۰۰۱۸)	۰٫۷۵۷۵ (−۰٫۰۱۰۹&۰٫۰۰۲۴)
	۱۰۰	۰٫۸۹۲۸ (−۰٫۰۰۶۷&۰٫۰۰۰۹)	۰٫۷۶۴۹ (−۰٫۰۰۵۷&۰٫۰۰۱۲)	۰٫۸۹۰۳ (−۰٫۰۰۶۷&۰٫۰۰۰۹)	۰٫۷۶۲۷ (−۰٫۰۰۵۷&۰٫۰۰۱۲)
	۲۰۰	۰٫۸۹۶۲۹ (−۰٫۰۰۳۳&۰٫۰۰۰۴)	۰٫۷۶۷۸ (−۰٫۰۰۲۸&۰٫۰۰۰۶)	۰٫۸۹۳۷ (−۰٫۰۰۳۳&۰٫۰۰۰۴)	۰٫۷۶۵۶ (−۰٫۰۰۲۸&۰٫۰۰۰۶)

جدول ۶: مقایسه‌ای بین شاخص‌های جدید و شاخص‌های موجود-هدف متقارن $(y_{ij} = ۳٫۴ + ۱٫۸x_i + \varepsilon_{ij})$

$\varepsilon_{ij} \sim N(۰, ۰٫۵^۲)$	مقدار واقعی	$C_{pm}(profile)$ (۱٫۲۲۲۲)	$C_{pmk}(profile)$ (۱٫۰۳۸۹)	$C_{pm.g}(profile)$ (۱٫۲۰۸۸)	$C_{pmk.g}(profile)$ (۱٫۰۲۷)
		$\widehat{C}_{pm}(profile)$ $(bias\&MSE)$	$\widehat{C}_{pmk}(profile)$ $(bias\&MSE)$	$\widehat{C}_{pm.g}(profile)$ $(bias\&MSE)$	$\widehat{C}_{pmk.g}(profile)$ $(bias\&MSE)$
حجم نمونه	۲۵	۱٫۲۰۸۴ (−۰٫۰۱۳۷&۰٫۰۰۲۰۸)	۱٫۰۲۷۶ (−۰٫۰۱۱۳&۰٫۰۰۲۳۱)	۱٫۱۹۵۳ (−۰٫۰۱۳۵&۰٫۰۰۲۰۳)	۱٫۰۱۶۴ (−۰٫۰۱۱۱&۰٫۰۰۲۲۶)
	۵۰	۱٫۲۱۵۲ (−۰٫۰۰۶۹&۰٫۰۰۱۰۲)	۱٫۰۳۳۲ (−۰٫۰۰۵۷&۰٫۰۰۱۱۷)	۱٫۲۰۲۰ (−۰٫۰۰۶۸&۰٫۰۰۱۰۰)	۱٫۰۲۱۹ (−۰٫۰۰۵۶&۰٫۰۰۱۱۴)
	۱۰۰	۱٫۲۱۹۱ (−۰٫۰۰۳۱&۰٫۰۰۰۴۹)	۱٫۰۳۶۴ (−۰٫۰۰۲۴&۰٫۰۰۰۵۷)	۱٫۲۰۵۸ (−۰٫۰۰۳۰&۰٫۰۰۰۴۸)	۱٫۰۲۵۱ (−۰٫۰۰۲۴&۰٫۰۰۰۵۶)
	۲۰۰	۱٫۲۲۰۷ (−۰٫۰۰۱۵&۰٫۰۰۰۲۴)	۱٫۰۳۷۷ (−۰٫۰۰۱۱&۰٫۰۰۰۲۸)	۱٫۲۰۷۴ (−۰٫۰۰۱۴&۰٫۰۰۰۲۳)	۱٫۰۲۶۴ (−۰٫۰۰۱۱&۰٫۰۰۰۲۷)
$\varepsilon_{ij} \sim N(۰, ۰٫۸^۲)$	مقدار واقعی	(۱٫۰۲۳۴)	(۰٫۸۶۹۹)	(۱٫۰۱۴۱)	(۰٫۸۶۲۰)
حجم نمونه	۲۵	۱٫۰۰۴۷ (−۰٫۰۱۸۶&۰٫۰۰۲۷۳)	۰٫۸۵۴۷ (−۰٫۰۱۵۲&۰٫۰۰۳۱۶)	۰٫۹۹۵۹ (−۰٫۰۱۸۲&۰٫۰۰۲۶۷)	۰٫۸۴۷۲ (−۰٫۰۱۴۹&۰٫۰۰۳۰۸)
	۵۰	۱٫۰۱۴۰ (−۰٫۰۰۹۳&۰٫۰۰۱۳۳)	۰٫۸۶۲۲ (−۰٫۰۰۷۶&۰٫۰۰۱۶۰)	۱٫۰۰۵۰ (−۰٫۰۰۹۱&۰٫۰۰۱۲۹)	۰٫۸۵۴۵ (−۰٫۰۰۷۴&۰٫۰۰۱۵۶)
	۱۰۰	۱٫۰۱۹۱ (−۰٫۰۰۴۳&۰٫۰۰۰۶۳)	۰٫۸۶۶۵ (−۰٫۰۰۳۴&۰٫۰۰۰۷۸)	۱٫۰۰۹۹ (−۰٫۰۰۴۲&۰٫۰۰۰۶۲)	۰٫۸۵۸۷ (−۰٫۰۰۳۳&۰٫۰۰۰۷۶)
	۲۰۰	۱٫۰۲۱۳۰ (−۰٫۰۰۲۰۶&۰٫۰۰۰۳۱)	۰٫۸۶۸۳ (−۰٫۰۰۱۶&۰٫۰۰۰۳۸)	۱٫۰۱۲۱ (−۰٫۰۰۲۰&۰٫۰۰۰۳۰)	۰٫۸۶۰۵ (−۰٫۰۰۱۵&۰٫۰۰۰۳۷)

جدول ۷: مقایسه‌ای بین شاخص‌های جدید و شاخص‌های موجود-هدف متقارن $(y_{ij} = ۳٫۴ + ۱٫۸x_i + \varepsilon_{ij})$

$\varepsilon_{ij} \sim N(۰, ۱^۲)$	مقدار واقعی	$C_{pm}(profile)$ (۰٫۹۱۱۵)	$C_{pmk}(profile)$ (۰٫۷۷۴۸)	$C_{pm.g}(profile)$ (۰٫۹۰۴۶)	$C_{pmk.g}(profile)$ (۰٫۷۶۸۹)
		$\widehat{C}_{pm}(profile)$ $(bias\&MSE)$	$\widehat{C}_{pmk}(profile)$ $(bias\&MSE)$	$\widehat{C}_{pm.g}(profile)$ $(bias\&MSE)$	$\widehat{C}_{pmk.g}(profile)$ $(bias\&MSE)$
حجم نمونه	۲۵	۰٫۸۹۱۶ (−۰٫۰۱۹۹&۰٫۰۰۲۷۲)	۰٫۷۵۸۶ (−۰٫۰۱۶۲&۰٫۰۰۳۲۶)	۰٫۸۸۵۱ (−۰٫۰۱۹۵&۰٫۰۰۲۶۶)	۰٫۷۵۳۰ (−۰٫۰۱۵۹&۰٫۰۰۳۱۹)
	۵۰	۰٫۹۰۱۶ (−۰٫۰۰۹۹&۰٫۰۰۱۳۱)	۰٫۷۶۶۶ (−۰٫۰۰۸۱&۰٫۰۰۱۶۵)	۰٫۸۹۴۸ (−۰٫۰۰۹۷&۰٫۰۰۱۲۹)	۰٫۷۶۰۹ (−۰٫۰۰۸۰&۰٫۰۰۱۶۲)
	۱۰۰	۰٫۹۰۶۹ (−۰٫۰۰۴۶&۰٫۰۰۰۶۳)	۰٫۷۷۱۱ (−۰٫۰۰۳۶&۰٫۰۰۰۸۰)	۰٫۹۰۰۰ (−۰٫۰۰۴۵&۰٫۰۰۰۶۱)	۰٫۷۶۵۳ (−۰٫۰۰۳۶&۰٫۰۰۰۷۹)
	۲۰۰	۰٫۹۰۹۳ (−۰٫۰۰۲۲&۰٫۰۰۰۳۱)	۰٫۷۷۳۱ (−۰٫۰۰۱۷&۰٫۰۰۰۴۰)	۰٫۹۰۲۴ (−۰٫۰۰۲۲&۰٫۰۰۰۳۰)	۰٫۷۶۷۲ (−۰٫۰۰۱۷&۰٫۰۰۰۳۹)
$\varepsilon_{ij} \sim N(۰, ۱٫۲^۲)$	مقدار واقعی	(۰٫۸۱۶۶)	(۰٫۶۹۴۱)	(۰٫۸۱۱۳)	(۰٫۶۸۹۷)
حجم نمونه	۲۵	۰٫۷۹۶۴ (−۰٫۰۲۰۲&۰٫۰۰۲۵۴)	۰٫۶۷۷۷ (−۰٫۰۱۶۴&۰٫۰۰۳۱۷)	۰٫۷۹۱۵ (−۰٫۰۱۹۸&۰٫۰۰۲۴۹)	۰٫۶۷۳۵ (−۰٫۰۱۶۱&۰٫۰۰۳۱۱)
	۵۰	۰٫۸۰۶۵ (−۰٫۰۱۰۱&۰٫۰۰۱۲۱)	۰٫۶۸۵۸ (−۰٫۰۰۸۲&۰٫۰۰۱۶۱)	۰٫۸۰۱۴ (−۰٫۰۰۹۹&۰٫۰۰۱۲۰)	۰٫۶۸۱۵ (−۰٫۰۰۸۱&۰٫۰۰۱۵۸)
	۱۰۰	۰٫۸۱۱۸ (−۰٫۰۰۴۸&۰٫۰۰۰۵۸)	۰٫۶۹۰۳ (−۰٫۰۰۳۷&۰٫۰۰۰۷۹)	۰٫۸۰۶۷ (−۰٫۰۰۴۷&۰٫۰۰۰۵۷)	۰٫۶۸۶۰ (−۰٫۰۰۳۷&۰٫۰۰۰۷۷)
	۲۰۰	۰٫۸۱۴۳ (−۰٫۰۰۲۳&۰٫۰۰۰۲۸)	۰٫۶۹۲۳ (−۰٫۰۰۱۷&۰٫۰۰۰۳۹)	۰٫۸۰۹۱ (−۰٫۰۰۲۲&۰٫۰۰۰۲۸)	۰٫۶۸۷۹ (−۰٫۰۰۱۷&۰٫۰۰۰۳۸)

جدول ۸: مقایسه‌ای بین شاخص‌های جدید و شاخص‌های موجود-هدف نامتقارن $(y_{ij} = ۳/۴ + ۲/۴x_i + \varepsilon_{ij})$

$\varepsilon_{ij} \sim N(۰, ۰/۵^{۲})$	مقدار واقعی	$C_{pm}(profile)$ (۰/۸۱۶۵)	$C_{pmk}(profile)$ (۰/۵۷۱۶)	$C_{pm.g}(profile)$ (۰/۸۱۵۷)	$C_{pmk.g}(profile)$ (۰/۵۷۱۰)
		$\widehat{C}_{pm}(profile)$ $(bias\&MSE)$	$\widehat{C}_{pmk}(profile)$ $(bias\&MSE)$	$\widehat{C}_{pm.g}(profile)$ $(bias\&MSE)$	$\widehat{C}_{pmk.g}(profile)$ $(bias\&MSE)$
حجم نمونه	۲۵	۰/۸۰۲۸ (−۰/۰۱۳۷&۰/۰۰۲۲۱)	۰/۵۶۲۷ (−۰/۰۰۸۸&۰/۰۰۲۶۰)	۰/۸۰۱۹ (−۰/۰۱۳۷&۰/۰۰۲۲۰)	۰/۵۶۲۱ (−۰/۰۰۸۹&۰/۰۰۲۵۹)
	۵۰	۰/۸۱۰۰ (−۰/۰۰۶۵&۰/۰۰۱۰۸)	۰/۵۶۷۴ (−۰/۰۰۴۱&۰/۰۰۱۳۳)	۰/۸۰۹۱ (−۰/۰۰۶۶&۰/۰۰۱۰۸)	۰/۵۶۶۸ (−۰/۰۰۴۱&۰/۰۰۱۳۳)
	۱۰۰	۰/۸۱۳۰ (−۰/۰۰۳۵&۰/۰۰۰۵۳)	۰/۵۶۹۲ (−۰/۰۰۲۴&۰/۰۰۰۶۶)	۰/۸۱۲۱ (−۰/۰۰۳۶&۰/۰۰۰۵۳)	۰/۵۶۸۶ (−۰/۰۰۲۴&۰/۰۰۰۶۶)
	۲۰۰	۰/۸۱۴۸ (−۰/۰۰۱۷&۰/۰۰۰۲۷)	۰/۵۷۰۳ (−۰/۰۰۱۲&۰/۰۰۰۳۳)	۰/۸۱۳۹ (−۰/۰۰۱۷&۰/۰۰۰۲۶)	۰/۵۶۹۷ (−۰/۰۰۱۲&۰/۰۰۰۳۳)
$\varepsilon_{ij} \sim N(۰, ۰/۸^{۲})$	مقدار واقعی	(۰/۶۲۹۹)	(۰/۴۴۰۹)	(۰/۶۲۹۳)	(۰/۴۴۰۵)
حجم نمونه	۲۵	۰/۶۱۳۹ (−۰/۰۱۶۰&۰/۰۰۱۸۴)	۰/۴۳۰۶ (−۰/۰۱۰۳&۰/۰۰۲۵۱)	۰/۶۱۳۳ (−۰/۰۱۶۰&۰/۰۰۱۸۳)	۰/۴۳۰۲ (−۰/۰۱۰۳&۰/۰۰۲۵۰)
	۵۰	۰/۶۲۲۱ (−۰/۰۰۷۸&۰/۰۰۰۸۷)	۰/۴۳۶۰ (−۰/۰۰۴۹&۰/۰۰۱۲۹)	۰/۶۲۱۶ (−۰/۰۰۷۸&۰/۰۰۰۸۷)	۰/۴۳۵۶ (−۰/۰۰۴۹&۰/۰۰۱۲۸)
	۱۰۰	۰/۶۲۵۷ (−۰/۰۰۴۱&۰/۰۰۰۴۲)	۰/۴۳۸۱ (−۰/۰۰۲۸&۰/۰۰۰۶۴)	۰/۶۲۵۲ (−۰/۰۰۴۱&۰/۰۰۰۴۲)	۰/۴۳۷۷ (−۰/۰۰۲۸&۰/۰۰۰۶۴)
	۲۰۰	۰/۶۲۷۸ (−۰/۰۰۲۰&۰/۰۰۰۲۱)	۰/۴۳۹۵ (−۰/۰۰۱۴&۰/۰۰۰۳۲)	۰/۶۲۷۳ (−۰/۰۰۲۰&۰/۰۰۰۲۱)	۰/۴۳۹۱ (−۰/۰۰۱۴&۰/۰۰۰۳۲)

جدول ۹: مقایسه‌ای بین شاخص‌های جدید و شاخص‌های موجود-هدف نامتقارن $(y_{ij} = ۳/۴ + ۲/۴x_i + \varepsilon_{ij})$

$\varepsilon_{ij} \sim N(۰, ۱^{۲})$	مقدار واقعی	$C_{pm}(profile)$ (۰/۵۳۸۳)	$C_{pmk}(profile)$ (۰/۳۷۶۸)	$C_{pm.g}(profile)$ (۰/۵۳۷۹)	$C_{pmk.g}(profile)$ (۰/۳۷۶۵)
		$\widehat{C}_{pm}(profile)$ $(bias\&MSE)$	$\widehat{C}_{pmk}(profile)$ $(bias\&MSE)$	$\widehat{C}_{pm.g}(profile)$ $(bias\&MSE)$	$\widehat{C}_{pmk.g}(profile)$ $(bias\&MSE)$
حجم نمونه	۲۵	۰/۵۲۲۷ (−۰/۰۱۵۶&۰/۰۰۱۴۸)	۰/۳۶۶۷ (−۰/۰۱۰۱&۰/۰۰۲۲۶)	۰/۵۲۲۳ (−۰/۰۱۵۶&۰/۰۰۱۴۸)	۰/۳۶۶۴ (−۰/۰۱۰۱&۰/۰۰۲۲۵)
	۵۰	۰/۵۳۰۷ (−۰/۰۰۷۶&۰/۰۰۰۶۹)	۰/۳۷۲۰ (−۰/۰۰۴۸&۰/۰۰۱۱۶)	۰/۵۳۰۳ (−۰/۰۰۷۶&۰/۰۰۰۶۹)	۰/۳۷۱۷ (−۰/۰۰۴۸&۰/۰۰۱۱۵)
	۱۰۰	۰/۵۳۴۳ (−۰/۰۰۴۰&۰/۰۰۰۳۳)	۰/۳۷۴۱ (−۰/۰۰۲۷&۰/۰۰۰۵۸)	۰/۵۳۳۹ (−۰/۰۰۴۰&۰/۰۰۰۳۳)	۰/۳۷۳۸ (−۰/۰۰۲۷&۰/۰۰۰۵۸)
	۲۰۰	۰/۵۳۶۳ (−۰/۰۰۱۹&۰/۰۰۰۱۷)	۰/۳۷۵۴ (−۰/۰۰۱۴&۰/۰۰۰۲۹)	۰/۵۳۶۰ (−۰/۰۰۱۹&۰/۰۰۰۱۷)	۰/۳۷۵۲ (−۰/۰۰۱۳&۰/۰۰۰۲۹)
$\varepsilon_{ij} \sim N(۰, ۱/۲^{۲})$	مقدار واقعی	(۰/۴۶۷۱)	(۰/۳۲۶۹)	(۰/۴۶۶۸)	(۰/۳۲۶۸)
حجم نمونه	۲۵	۰/۴۵۲۴ (−۰/۰۱۴۷&۰/۰۰۱۱۹)	۰/۳۱۷۴ (−۰/۰۰۹۵&۰/۰۰۲۰)	۰/۴۵۲۱ (−۰/۰۱۴۷&۰/۰۰۱۲)	۰/۳۱۷۲ (−۰/۰۰۹۶&۰/۰۰۲۰)
	۵۰	۰/۴۵۹۸ (−۰/۰۰۷۲&۰/۰۰۰۵۵)	۰/۳۲۲۴ (−۰/۰۰۴۶&۰/۰۰۱۰۴)	۰/۴۵۹۶ (−۰/۰۰۷۲&۰/۰۰۰۵۵)	۰/۳۲۲۲ (−۰/۰۰۴۶&۰/۰۰۱۰۴)
	۱۰۰	۰/۴۶۳۳ (−۰/۰۰۳۸&۰/۰۰۰۲۶)	۰/۳۲۴۴ (−۰/۰۰۲۵&۰/۰۰۰۵۲)	۰/۴۶۳۰ (−۰/۰۰۳۸&۰/۰۰۰۲۶)	۰/۳۲۴۲ (−۰/۰۰۲۶&۰/۰۰۰۵۲)
	۲۰۰	۰/۴۶۵۲ (−۰/۰۰۱۸&۰/۰۰۰۱۳)	۰/۳۲۵۷ (−۰/۰۰۱۳&۰/۰۰۰۲۶)	۰/۴۶۵۰ (−۰/۰۰۱۸&۰/۰۰۰۱۳)	۰/۳۲۵۵ (−۰/۰۰۱۳&۰/۰۰۰۲۶)

جدول ۱۰: *مقایسه‌ای بین شاخص‌های جدید و شاخص‌های موجود-هدف نامتقارن* $(y_{ij} = ۳٫۶ + ۲٫۲x_i + \varepsilon_{ij})$

$\varepsilon_{ij} \sim N(۰, ۰٫۵^۲)$	مقدار واقعی	$C_{pm}(profile)$ (۱٫۰۹۹۳)	$C_{pmk}(profile)$ (۱٫۲۳۸۶)	$C_{pm.g}(profile)$ (۱٫۰۹۷۷)	$C_{pmk.g}(profile)$ (۱٫۲۳۶۸)
		$\widehat{C}_{pm}(profile)$ $(bias\&MSE)$	$\widehat{C}_{pmk}(profile)$ $(bias\&MSE)$	$\widehat{C}_{pm.g}(profile)$ $(bias\&MSE)$	$\widehat{C}_{pmk.g}(profile)$ $(bias\&MSE)$
حجم نمونه	۲۵	۱٫۰۶۶۲ (−۰٫۰۳۳۲&۰٫۰۰۶۱۱)	۱٫۲۰۰۱ (−۰٫۰۳۸۵&۰٫۰۰۶۵۲)	۱٫۰۶۴۶ (−۰٫۰۳۳۱&۰٫۰۰۶۰۸)	۱٫۱۹۸۳ (−۰٫۰۳۸۴&۰٫۰۰۶۵۱)
	۵۰	۱٫۰۸۲۸ (−۰٫۰۱۶۵&۰٫۰۰۲۹۱)	۱٫۲۱۹۴ (−۰٫۰۱۹۱&۰٫۰۰۲۹۴)	۱٫۰۸۱۲ (−۰٫۰۱۶۵&۰٫۰۰۲۹۰)	۱٫۲۱۷۶ (−۰٫۰۱۹۱&۰٫۰۰۲۹۴)
	۱۰۰	۱٫۰۹۱۳ (−۰٫۰۰۷۹&۰٫۰۰۱۳۹)	۱٫۲۲۹۱ (−۰٫۰۰۹۴&۰٫۰۰۱۳۸)	۱٫۰۸۹۸ (−۰٫۰۰۷۹&۰٫۰۰۱۳۹)	۱٫۲۲۷۳ (−۰٫۰۰۹۴&۰٫۰۰۱۳۷)
	۲۰۰	۱٫۰۹۵۵ (−۰٫۰۰۳۷&۰٫۰۰۰۶۸)	۱٫۲۳۴۰ (−۰٫۰۰۴۵&۰٫۰۰۰۶۶)	۱٫۰۹۳۹ (−۰٫۰۰۳۷&۰٫۰۰۰۶۸)	۱٫۲۳۲۲ (−۰٫۰۰۴۵&۰٫۰۰۰۶۶)
$\varepsilon_{ij} \sim N(۰, ۰٫۸^۲)$	مقدار واقعی	(۰٫۷۳۹۱)	(۰٫۸۳۲۷)	(۰٫۷۳۸۵)	(۰٫۸۳۲۱)
حجم نمونه	۲۵	۰٫۷۱۳۲ (−۰٫۰۲۵۹&۰٫۰۰۳۱۳)	۰٫۸۰۲۶ (−۰٫۰۳۰۱&۰٫۰۰۳۸۶)	۰٫۷۱۲۶ (−۰٫۰۲۵۹&۰٫۰۰۳۱۳)	۰٫۸۰۱۹ (−۰٫۰۳۰۱&۰٫۰۰۳۸۶)
	۵۰	۰٫۷۲۶۱ (−۰٫۰۱۲۹&۰٫۰۰۱۴۵)	۰٫۸۱۷۶ (−۰٫۰۱۵۰&۰٫۰۰۱۷۱)	۰٫۷۲۵۶ (−۰٫۰۱۳۰&۰٫۰۰۱۴۵)	۰٫۸۱۷۰ (−۰٫۰۱۵۱&۰٫۰۰۱۷۰)
	۱۰۰	۰٫۷۳۲۷ (−۰٫۰۰۶۳&۰٫۰۰۰۶۹)	۰٫۸۲۵۱ (−۰٫۰۰۷۶&۰٫۰۰۰۸۰)	۰٫۷۳۲۲ (−۰٫۰۰۶۳&۰٫۰۰۰۶۸)	۰٫۸۲۴۵ (−۰٫۰۰۷۵&۰٫۰۰۰۷۹)
	۲۰۰	۰٫۷۳۶۰ (−۰٫۰۰۳۰&۰٫۰۰۰۳۳)	۰٫۸۲۹۰ (−۰٫۰۰۳۷&۰٫۰۰۰۳۹)	۰٫۷۳۵۵ (−۰٫۰۰۳۰&۰٫۰۰۰۳۳)	۰٫۸۲۸۴ (−۰٫۰۰۳۷&۰٫۰۰۰۳۸)

جدول ۱۱: *مقایسه‌ای بین شاخص‌های جدید و شاخص‌های موجود-هدف نامتقارن* $(y_{ij} = ۳٫۶ + ۲٫۲x_i + \varepsilon_{ij})$

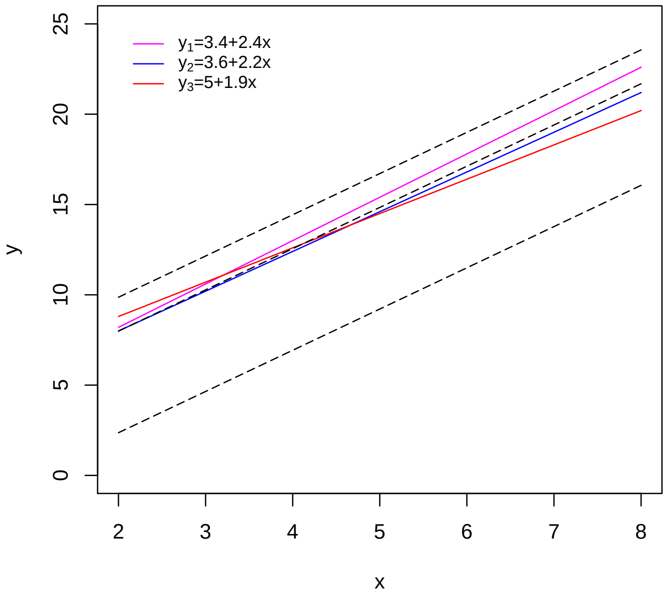
$\varepsilon_{ij} \sim N(۰, ۱^۲)$	مقدار واقعی	$C_{pm}(profile)$ (۰٫۶۰۲۶)	$C_{pmk}(profile)$ (۰٫۶۷۸۹)	$C_{pm.g}(profile)$ (۰٫۶۰۲۳)	$C_{pmk.g}(profile)$ (۰٫۶۷۸۶)
		$\widehat{C}_{pm}(profile)$ $(bias\&MSE)$	$\widehat{C}_{pmk}(profile)$ $(bias\&MSE)$	$\widehat{C}_{pm.g}(profile)$ $(bias\&MSE)$	$\widehat{C}_{pmk.g}(profile)$ $(bias\&MSE)$
حجم نمونه	۲۵	۰٫۵۸۰۶ (−۰٫۰۲۲۰&۰٫۰۰۲۱۵)	۰٫۶۵۳۳ (−۰٫۰۲۵۶&۰٫۰۰۲۹۷)	۰٫۵۸۰۳ (−۰٫۰۲۲۰&۰٫۰۰۲۱۵)	۰٫۶۵۲۹ (−۰٫۰۲۵۷&۰٫۰۰۲۹۷)
	۵۰	۰٫۵۹۱۶ (−۰٫۰۱۱۰&۰٫۰۰۰۹۹)	۰٫۶۶۶۱ (−۰٫۰۱۲۸&۰٫۰۰۱۳۳)	۰٫۵۹۱۳ (−۰٫۰۱۱۰&۰٫۰۰۰۹۸)	۰٫۶۶۵۸ (−۰٫۰۱۲۸&۰٫۰۰۱۳۲)
	۱۰۰	۰٫۵۹۷۲ (−۰٫۰۰۵۴&۰٫۰۰۰۴۷)	۰٫۶۷۲۴ (−۰٫۰۰۶۵&۰٫۰۰۰۶۲)	۰٫۵۹۶۹ (−۰٫۰۰۵۴&۰٫۰۰۰۴۷)	۰٫۶۷۲۱ (−۰٫۰۰۶۵&۰٫۰۰۰۶۲)
	۲۰۰	۰٫۵۶۰۰ (−۰٫۰۰۲۶&۰٫۰۰۰۲۳)	۰٫۶۷۵۷ (−۰٫۰۰۳۲&۰٫۰۰۰۳۰)	۰٫۵۹۹۷ (−۰٫۰۰۲۶&۰٫۰۰۰۲۳)	۰٫۶۷۵۴ (−۰٫۰۰۳۲&۰٫۰۰۰۳۰)
$\varepsilon_{ij} \sim N(۰, ۱٫۲^۲)$	مقدار واقعی	(۰٫۵۰۷۶)	(۰٫۵۷۱۹)	(۰٫۵۰۷۴)	(۰٫۵۷۱۷)
حجم نمونه	۲۵	۰٫۴۸۸۶ (−۰٫۰۱۹۰&۰٫۰۰۱۵۵)	۰٫۵۴۹۸ (−۰٫۰۲۲۱&۰٫۰۰۲۴۴)	۰٫۴۸۸۴ (−۰٫۰۱۹۰&۰٫۰۰۱۵۵)	۰٫۵۴۹۵ (−۰٫۰۲۲۲&۰٫۰۰۲۴۳)
	۵۰	۰٫۴۹۸۱ (−۰٫۰۰۹۵&۰٫۰۰۰۷۱)	۰٫۵۶۰۹ (−۰٫۰۱۱۱&۰٫۰۰۱۱۰)	۰٫۴۹۷۹ (−۰٫۰۰۹۵&۰٫۰۰۰۷۰)	۰٫۵۶۰۶ (−۰٫۰۱۱۰&۰٫۰۰۱۱۰)
	۱۰۰	۰٫۵۰۲۹ (−۰٫۰۰۴۷&۰٫۰۰۰۳۳)	۰٫۵۶۶۲ (−۰٫۰۰۵۷&۰٫۰۰۰۵۲)	۰٫۵۰۲۷ (−۰٫۰۰۴۷&۰٫۰۰۰۳۳)	۰٫۵۶۶۰ (−۰٫۰۰۵۷&۰٫۰۰۰۵۲)
	۲۰۰	۰٫۵۰۵۳ (−۰٫۰۰۲۳&۰٫۰۰۰۱۷)	۰٫۵۶۹۱ (−۰٫۰۰۲۸&۰٫۰۰۰۲۶)	۰٫۵۰۵۱ (−۰٫۰۰۲۳&۰٫۰۰۰۱۶)	۰٫۵۶۸۹ (−۰٫۰۰۲۷&۰٫۰۰۰۲۵)

جدول ۱۲: مقایسه‌ای بین شاخص‌های جدید و شاخص‌های موجود-هدف نامتقارن $(y_{ij} = ۵ + ۱٫۹x_i + \varepsilon_{ij})$

$\varepsilon_{ij} \sim N(۰, ۰٫۵^{۲})$	مقدار واقعی	$C_{pm}(profile)$ (۰٫۷۴۲۲)	$C_{pmk}(profile)$ (۰٫۸۷۵۸)	$C_{pm.g}(profile)$ (۰٫۷۳۴۲)	$C_{pmk.g}(profile)$ (۰٫۸۶۶۴)
		$\widehat{C}_{pm}(profile)$ $(bias\&MSE)$	$\widehat{C}_{pmk}(profile)$ $(bias\&MSE)$	$\widehat{C}_{pm.g}(profile)$ $(bias\&MSE)$	$\widehat{C}_{pmk.g}(profile)$ $(bias\&MSE)$
حجم نمونه	۲۵	۰٫۷۳۰۹ (−۰٫۰۱۱۳&۰٫۰۰۱۱۴)	۰٫۸۶۲۰ (−۰٫۰۱۳۹&۰٫۰۰۱۴۸)	۰٫۷۲۳۱ (−۰٫۰۱۱۱&۰٫۰۰۱۱۱)	۰٫۸۵۲۸ (−۰٫۰۱۳۵&۰٫۰۰۱۴۵)
	۵۰	۰٫۷۳۶۵ (−۰٫۰۰۵۷&۰٫۰۰۰۵۵)	۰٫۸۶۸۹ (−۰٫۰۰۶۹&۰٫۰۰۰۷۰)	۰٫۷۲۸۷ (−۰٫۰۰۵۶&۰٫۰۰۰۵۴)	۰٫۸۵۹۶ (−۰٫۰۰۶۸&۰٫۰۰۰۶۹)
	۱۰۰	۰٫۷۳۹۶ (−۰٫۰۰۲۶&۰٫۰۰۰۲۷)	۰٫۸۷۲۵ (−۰٫۰۰۳۳&۰٫۰۰۰۳۳)	۰٫۷۳۱۷ (−۰٫۰۰۲۵&۰٫۰۰۰۲۶)	۰٫۸۶۳۲ (−۰٫۰۰۳۲&۰٫۰۰۰۳۲)
	۲۰۰	۰٫۷۴۱۰ (−۰٫۰۰۱۲&۰٫۰۰۰۱۳)	۰٫۸۷۴۲ (−۰٫۰۰۱۷&۰٫۰۰۰۱۶)	۰٫۷۳۳۰ (−۰٫۰۰۱۲&۰٫۰۰۰۱۲)	۰٫۸۶۴۸ (−۰٫۰۰۱۶&۰٫۰۰۰۱۶)
$\varepsilon_{ij} \sim N(۰, ۰٫۸^{۲})$	مقدار واقعی	(۰٫۵۸۸۱)	(۰٫۶۹۳۹)	(۰٫۵۸۳۴)	(۰٫۶۸۸۴)
حجم نمونه	۲۵	۰٫۵۷۴۶ (−۰٫۰۱۳۵&۰٫۰۰۱۱۹)	۰٫۶۷۷۴ (−۰٫۰۱۶۵&۰٫۰۰۱۷۳)	۰٫۵۷۰۲ (−۰٫۰۱۳۲&۰٫۰۰۱۱۷)	۰٫۶۷۲۲ (−۰٫۰۱۶۲&۰٫۰۰۱۷۰)
	۵۰	۰٫۵۸۱۳۱ (−۰٫۰۰۶۷&۰٫۰۰۰۵۷)	۰٫۶۸۵۷ (−۰٫۰۰۸۲&۰٫۰۰۰۸۱)	۰٫۵۷۶۸ (−۰٫۰۰۶۶&۰٫۰۰۰۵۵)	۰٫۶۸۰۳ (−۰٫۰۰۸۱&۰٫۰۰۰۷۹)
	۱۰۰	۰٫۵۸۴۹ (−۰٫۰۰۳۱&۰٫۰۰۰۲۷)	۰٫۶۸۹۹ (−۰٫۰۰۴۱&۰٫۰۰۰۳۸)	۰٫۵۸۰۳ (−۰٫۰۰۳۱&۰٫۰۰۰۲۶)	۰٫۶۸۴۵ (−۰٫۰۰۴۰&۰٫۰۰۰۳۷)
	۲۰۰	۰٫۵۸۶۵ (−۰٫۰۰۱۵&۰٫۰۰۰۱۳)	۰٫۶۹۱۹ (−۰٫۰۰۲۰&۰٫۰۰۰۱۹)	۰٫۵۸۱۹ (−۰٫۰۰۱۴&۰٫۰۰۰۱۳)	۰٫۶۸۶۵ (−۰٫۰۰۱۹&۰٫۰۰۰۱۸)

جدول ۱۳: مقایسه‌ای بین شاخص‌های جدید و شاخص‌های موجود-هدف نامتقارن $(y_{ij} = ۵ + ۱٫۹x_i + \varepsilon_{ij})$

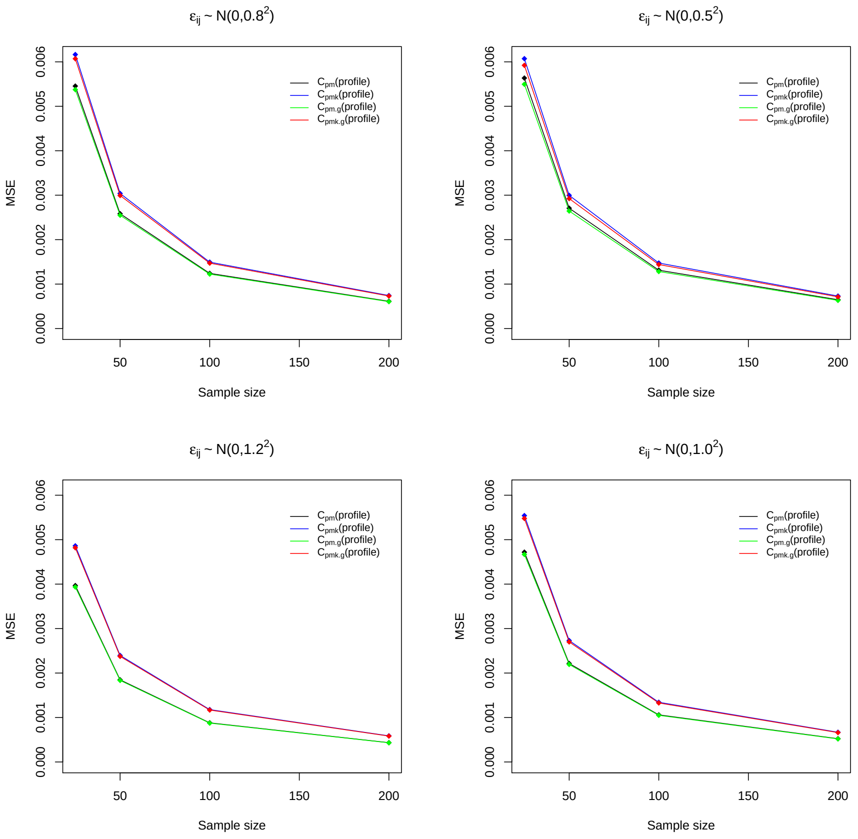
$\varepsilon_{ij} \sim N(۰, ۱^{۲})$	مقدار واقعی	$C_{pm}(profile)$ (۰٫۵۰۹۷)	$C_{pmk}(profile)$ (۰٫۶۰۱۵)	$C_{pm.g}(profile)$ (۰٫۵۰۶۵)	$C_{pmk.g}(profile)$ (۰٫۵۹۷۷)
		$\widehat{C}_{pm}(profile)$ $(bias\&MSE)$	$\widehat{C}_{pmk}(profile)$ $(bias\&MSE)$	$\widehat{C}_{pm.g}(profile)$ $(bias\&MSE)$	$\widehat{C}_{pmk.g}(profile)$ $(bias\&MSE)$
حجم نمونه	۲۵	۰٫۴۹۶۳ (−۰٫۰۱۳۵&۰٫۰۰۱۰۶)	۰٫۵۸۴۹ (−۰٫۰۱۶۶&۰٫۰۰۱۷۰)	۰٫۴۹۳۳ (−۰٫۰۱۳۲&۰٫۰۰۱۰۴)	۰٫۵۸۱۴ (−۰٫۰۱۶۳&۰٫۰۰۱۶۷)
	۵۰	۰٫۵۰۳۰ (−۰٫۰۰۶۷&۰٫۰۰۰۵۰)	۰٫۵۹۳۲ (−۰٫۰۰۸۳&۰٫۰۰۰۷۹)	۰٫۴۹۹۹ (−۰٫۰۰۶۶&۰٫۰۰۰۴۹)	۰٫۵۸۹۶ (−۰٫۰۰۸۱&۰٫۰۰۰۷۸)
	۱۰۰	۰٫۵۰۶۵ (−۰٫۰۰۳۲&۰٫۰۰۰۲۴)	۰٫۵۹۷۴ (−۰٫۰۰۴۱&۰٫۰۰۰۳۸)	۰٫۵۰۳۳ (−۰٫۰۰۳۱&۰٫۰۰۰۲۳)	۰٫۵۹۳۶ (−۰٫۰۰۴۰&۰٫۰۰۰۳۷)
	۲۰۰	۰٫۵۰۸۲ (−۰٫۰۰۱۵&۰٫۰۰۰۱۲)	۰٫۵۹۹۵ (−۰٫۰۰۲۰&۰٫۰۰۰۱۸)	۰٫۵۰۵۰ (−۰٫۰۰۱۵&۰٫۰۰۰۱۱)	۰٫۵۹۵۷ (−۰٫۰۰۱۹&۰٫۰۰۰۱۸)
$\varepsilon_{ij} \sim N(۰, ۱٫۲^{۲})$	مقدار واقعی	(۰٫۴۴۷۲)	(۰٫۵۲۷۷)	(۰٫۴۴۴۹)	(۰٫۵۲۵۰)
حجم نمونه	۲۵	۰٫۴۳۴۲ (−۰٫۰۱۳۰&۰٫۰۰۰۹۱)	۰٫۵۱۱۷ (−۰٫۰۱۶۰&۰٫۰۰۱۶۲)	۰٫۴۳۲۱ (−۰٫۰۱۲۸&۰٫۰۰۰۹۰)	۰٫۵۰۹۲ (−۰٫۰۱۵۸&۰٫۰۰۱۶۱)
	۵۰	۰٫۴۴۰۷ (−۰٫۰۰۶۵&۰٫۰۰۰۴۳)	۰٫۵۱۹۷ (−۰٫۰۰۸۰&۰٫۰۰۰۷۶)	۰٫۴۳۸۵ (−۰٫۰۰۶۴&۰٫۰۰۰۴۲)	۰٫۵۱۷۱ (−۰٫۰۰۷۹&۰٫۰۰۰۷۵)
	۱۰۰	۰٫۴۴۴۰ (−۰٫۰۰۳۱&۰٫۰۰۰۲۰)	۰٫۵۲۳۶ (−۰٫۰۰۴۰&۰٫۰۰۰۳۶)	۰٫۴۴۱۸ (−۰٫۰۰۳۱&۰٫۰۰۰۲۰)	۰٫۵۲۱۰ (−۰٫۰۰۴۰&۰٫۰۰۰۳۵)
	۲۰۰	۰٫۴۴۵۷ (−۰٫۰۰۱۵&۰٫۰۰۰۱۰)	۰٫۵۲۵۷ (−۰٫۰۰۲۰&۰٫۰۰۰۱۸)	۰٫۴۴۳۴ (−۰٫۰۰۱۵&۰٫۰۰۰۰۹۸)	۰٫۵۲۳۰ (−۰٫۰۰۱۹&۰٫۰۰۰۱۷)



شکل ۲: *نمودار خطوط حدود مشخصات، هدف و پروفایل‌های تابعی، تلورانس تابعی نامتقارن*

کشش آن از پروفایل خطی ساده از تغییرات طول فنر پیروی می‌کند. بنابراین، در بهبود کیفیت، کنترل کشش فنر در طول‌های مختلف فنر ضروری است. نتایج اندازه‌گیری کشش ۹ فنر (بر حسب نیوتن) در طول‌های مختلف فنرها پس از فشار در اندازه‌های ۱۱، ۱۲٫۵، ۱۳٫۵، ۱۵، ۱۶ و ۱۷ (بر حسب سانتی‌متر) در جدول ۱۴ آورده شده است. به علاوه، حدود مشخصات بالا و پایین کشش فنر در هر سطح از متغیر مستقل در جدول ۱۵ ارائه شده است.

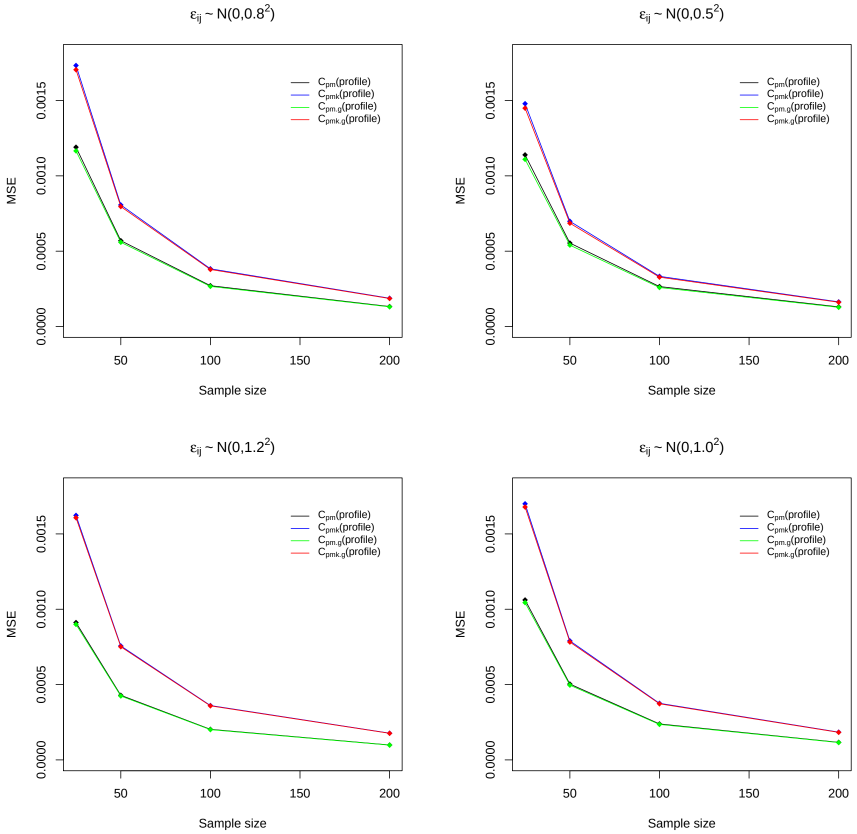
برای بررسی فرض نرمال بودن، آماره آزمون اندرسون-دارلینگ برای خطاها محاسبه و برابر با ۰٫۷۸۷ به دست آمد که دلیلی بر رد این فرض وجود ندارد. بر اساس روش کمترین مربعات خطا (فرمول‌های براورد در بخش ۳) مقدار واریانس برابر با ۰٫۰۰۰۱۹۶۳۷ براورد شده و معادله خط پروفایل به صورت $Y_{ij} = ۵٫۲۳۴۰ - ۰٫۲۹۵۲X_i + \varepsilon_{ij}$ به دست آمد. به علاوه، خطوط حدود مشخصات فنی و هدف تابعی به صورت $LSL_Y(X) = ۵٫۵۳۷۷ - ۰٫۳۲۲۳X$ ، $USL_Y(X) = ۴٫۸۱۹۰ - ۰٫۲۴۶۴X$ و



شکل ۳: نمودار MSE در مدل پروفایل $y_{ij} = ۳/۵ + ۲x_i + \varepsilon_{ij}$ در حالت تلورانس متقارن

جدول ۱۴: میزان کشش فنر در اندازه‌های مختلف طول فنر

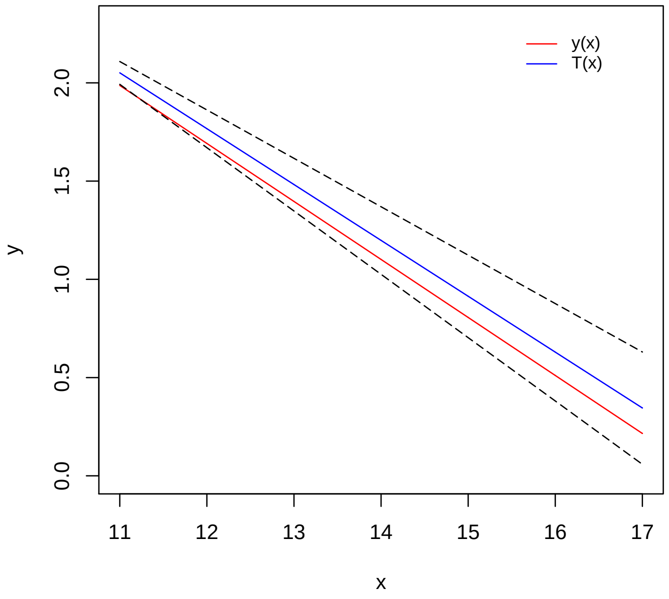
	طول فنر					
نمونه	۱۱	۱۲/۵	۱۳/۵	۱۵	۱۶	۱۷
۱	۲/۱۷۶۷	۱/۶۶۶۷	۱/۳۶۳۳	۰/۸۶۰۰	۰/۵۷۰۰	۰/۲۴۶۷
۲	۲/۰۵۳۳	۱/۵۷۶۷	۱/۲۴۶۷	۰/۷۷۶۷	۰/۴۹۰۰	۰/۲۱۰۰
۳	۱/۹۵۶۷	۱/۵۳۰۰	۱/۲۳۳۳	۰/۸۱۰۰	۰/۵۳۶۷	۰/۲۶۰۰
۴	۲/۰۴۰۰	۱/۵۶۳۳	۱/۲۶۰۰	۰/۷۹۰۰	۰/۴۸۰۰	۰/۱۹۰۰
۵	۱/۸۳۰۰	۱/۴۴۶۷	۱/۲۰۰۰	۰/۸۰۰۰	۰/۵۵۶۷	۰/۲۸۰۰
۶	۱/۹۷۶۷	۱/۵۳۰۰	۱/۲۲۶۷	۰/۷۶۳۳	۰/۴۶۶۷	۰/۱۸۳۳
۷	۲/۰۹۶۷	۱/۶۳۳۳	۱/۳۲۳۳	۰/۸۲۶۷	۰/۵۳۶۷	۰/۲۴۶۷
۸	۱/۹۹۰۰	۱/۵۳۰۰	۱/۲۲۰۰	۰/۷۴۳۳	۰/۴۰۶۷	۰/۱۴۳۳
۹	۱/۷۹۶۷	۱/۴۱۰۰	۱/۱۸۳۳	۰/۷۸۳۳	۰/۵۳۶۷	۰/۲۶۰۰



شکل ۴: نمودار MSE در مدل پروفایل $y_{ij} = ۵ + ۱٫۹x_i + \varepsilon_{ij}$ در حالت تلورانس نامتقارن

جدول ۱۵: حدود مشخصات برای کشش فنر در هر سطح از طول فنر

i	۱	۲	۳	۴	۵	۶
x_i	۱۱	۱۲٫۵	۱۳٫۵	۱۵	۱۶	۱۷
LSL_i	۱٫۹۹۲۳	۱٫۵۰۸۹	۱٫۱۸۶۶	۰٫۷۰۳۱	۰٫۳۸۰۸	۰٫۰۵۸۵
USL_i	۲٫۱۰۸۶	۱٫۷۳۹۰	۱٫۴۹۲۶	۱٫۱۲۳۰	۰٫۸۷۶۶	۰٫۶۳۰۲



شکل ۵: *نمودار خطوط حدود مشخصات فنی و هدف تابعی و پروفایل در فرایند مربوط به فنر*

$T_Y(X) = ۵/۱۷۸۴ - ۰/۲۸۴۳X$ حاصل شده است. نمودار این خطوط در شکل ۵ نشان داده شده است.

طول‌های فنر در اندازه‌های تقریباً ۱۱، تقریباً ۱۲/۵، تقریباً ۱۳/۵، تقریباً ۱۵، تقریباً ۱۶ و تقریباً ۱۷ سانتی‌متر با توابع عضویت زیر در نظر گرفته شده‌اند:

$$\tilde{x}_۱ = \begin{cases} \frac{۱۱/۷۵-x}{۰/۷۵}; & ۱۱ \leq x < ۱۱/۷۵, \\ ۰; & \text{در غیر این‌صورت.} \end{cases} \qquad \tilde{x}_۶ = \begin{cases} \frac{x-۱۶/۵}{۰/۵}; & ۱۶/۵ < x \leq ۱۷, \\ ۰; & \text{در غیر این‌صورت.} \end{cases}$$

$$\tilde{x}_{۲} = \begin{cases} \frac{x-۱۱/۷۵}{۰/۷۵}; & ۱۱/۷۵ \le x < ۱۲/۵, \\ \frac{۱۳-x}{۰/۵}; & ۱۲/۵ \le x < ۱۳, \\ ۰; & \text{در غیر این‌صورت}. \end{cases} \quad \tilde{x}_{۳} = \begin{cases} \frac{x-۱۳}{۰/۵}; & ۱۳ \le x < ۱۳/۵, \\ \frac{۱۴/۲۵-x}{۰/۷۵}; & ۱۳/۵ \le x < ۱۴/۲۵, \\ ۰; & \text{در غیر این‌صورت}. \end{cases}$$

$$\tilde{x}_{۴} = \begin{cases} \frac{x-۱۴/۲۵}{۰/۷۵}; & ۱۴/۲۵ \le x < ۱۵, \\ \frac{۱۵/۵-x}{۰/۵}; & ۱۵ \le x < ۱۵/۵, \\ ۰; & \text{در غیر این‌صورت}. \end{cases} \quad \tilde{x}_{۵} = \begin{cases} \frac{x-۱۵/۵}{۰/۵}; & ۱۵/۵ \le x < ۱۶, \\ \frac{۱۶/۵-x}{۰/۵}; & ۱۶ \le x < ۱۶/۵, \\ ۰; & \text{در غیر این‌صورت}. \end{cases}$$

بنابراین، مقدار براورد شده دو شاخص کارایی تابعی جدید به صورت زیر به دست آمده است:

$$\widehat{C}_{pm.g}(profile) = ۰/۶۵۴۸, \quad \widehat{C}_{pmk.g}(profile) = ۰/۳۲۶۶$$

بر اساس هر دو شاخص نتیجه می‌شود که فرایند ناکارا است.

۷ نتیجه‌گیری و کارهای آینده

در دنیای واقعی، بسیاری از مفاهیم به صورت نادقیق یا با استفاده از متغیرهای زبانی بیان می‌شوند که برای توصیف آن‌ها، منطق فازی به‌کار برده می‌شود. در مقاله حاضر، برای فرایندهایی که کیفیت محصولات بر اساس رابطه پروفایل خطی ساده بیان می‌شود، دو شاخص کارایی تابعی مبتنی بر منطق فازی ارائه شده و با استفاده از مطالعه شبیه‌سازی نشان داده شده است که عملکرد بهتری نسبت به شاخص‌های موجود دارند. برای نشان‌دادن طریقه استفاده و تصمیم‌گیری در خصوص میزان کارایی فرایند، مثال کاربردی ارائه شده است.

تحقیقات آتی در همین راستا، در ارتباط با تعاریف دیگر اعداد/کمیت‌های فازی

خواهد بود. به علاوه، شاخص‌های تابعی دیگری با منطق فازی برای پروفایل‌های خطی ساده یا پروفایل‌های غیرخطی نیز از موضوعاتی است که قابل تحقیق و بررسی هستند.

مراجع

[1] Draper, N.R., and Smith, H. (2011) Applied Regression Analysis, Third Edition, John Wiley & Sons, Inc.

[2] Ebadi, M., and Shahriari, H. (2013) A process capability index for simple linear profile, International Journal of Advanced Manufacturing Technology, 64, 857-865.

[3] Ebadi, M., and Amiri, A. (2012) Evaluation of process capability in multivariate simple linear profiles, Scientia Iranica, Transactions E: Industrial Engineering, 19 (6), 1960-1968.

[4] Hosseinifard, S.Z., Abbasi, B., and Abdollahian, M. (2011) Performance analysis in non-normal linear profiles using gamma distribution, In 2011 Eighth International Conference on Information Technology: New generations, Las Vegas, NV, USA, 603-607.

[5] Hosseinifard, S.Z., andAbbasi, B. (2012a) Evaluation of process capability indices of Linear profiles, International Journal of Quality & Reliability Management, 29 (2), 162-176.

[6] Hosseinifard, S.Z., and Abbasi, B. (2012b) Process capability analysis in non normal linear regression profiles, Communications in Statistics - Simulation and Computation, 41 (10), 1761-1784.

[7] Kang, L., and Albin, S.L. (2000) On-line monitoring when the process yields a linear profile, Journal of Quality Technology, 32, 418-426.

[8] Kim, K., Mahmoud, M.A., and Woodall, W.H. (2003) On the monitoring of linear profiles, Journal of Quality Technology, 35, 317-328.

[9] Kunter, M.H., Nachtsheim, C.J., Neter, J., and Li, W. (2005) Applied linear statistical models, McGraw-Hill, Boston.

[10] Mahmoud, M.A., and Woodall, W.H. (2004) Phase I monitoring of linear profiles with calibration application, Technometrics, 46, 380-391.

[11] Mahmoud, M.A., Parker, P.A., Woodall, W.H., and Hawkins, D.M. (2007) A change point method for linear profile data, Quality and Reliability Engineering International, 23, 247-268.

[12] Mestek, O., Pavlik, J., and Suchánek, M. (1994) Multivariate control charts: control charts for calibration curves, Fresenius' Journal of Analytical Chemistry, 350, 344-351.

[13] Nemati Keshteli, R., Baradaran Kazemzadeh, R., Amiri. A., and Noorossana, R. (2014) Developing functional process capability indices for simple linear profile , Scientia Iranica, 21 (3), 1044-1050.

[14] Noorossana, R., Vaghefi, A., and Dorri, M. (2011) Effect of non-normality on the monitoring of simple linear profiles, Quality and Reliability Engineering International, 27 (4), 425-436.

[15] Pakzad, A., Razavi, H., and Sadeghpour Gildh, B. (2021) Developing loss-based functional process capability indices for simple linear profile, Journal of Statistical Computation and Simulation, DOI: 10.1080/00949655.2021.1933486.

[16] Saghaei, A., Mehrjoo, M., and Amiri, A. (2009) A CUSUM-based method for monitoring simple linear profiles, International of Journal of Advanced Manufacturing Technology, 45, 1252-1260.

[17] Shi, L., Chen, W. and Lu, L.F. (2014) An Approach for Simple Linear Profile Gauge R & R Studies, Discrete and Dynamic Optimization Problems in Operations Management, DOI: 10.1155/2014/816980.

[18] Zou, C.و Zhang, Y.و and Wang, Z. (2006) A control chart based on a change-point model for monitoring linear profiles, IIE Transactions, 38, 1093-1103.

[19] Zou, C. Zhou, C., Wang, Z., and Tsung, F. (2007) A self-starting control chart for linear profiles, Journal of Quality Technology, 39 (4), 364-375.