سیستم‌های فازی و کاربردها
شاپای چاپی: ۴۴۰۹-۲۷۱۷
سال پنجم، شماره اول (بهار و تابستان ۱۴۰۱)
شاپای الکترونیکی: ۳۹۸۴-۲۷۱۷
صص. ۲۷ تا ۵۳
DOI:10.22034/JFSA.2022.321485.1108

ابرفضاهای برداری(کراسنری) شبه‌توپولوژیک فازی

رضا عامری *، محمد حمیدی و علی صمدی‌فام

دانشگاه تهران، دانشکده ریاضیات، آمار و علوم کامپیوتر، گروه ریاضی، تهران، ایران
گروه ریاضی، دانشگاه پیام نور، تهران، ایران
گروه ریاضی، دانشگاه پیام نور، تهران، ایران

تاریخ دریافت: ۱۴۰۰/۱۰/۴ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۱/۳/۲۵
نوع مقاله: علمی-پژوهشی

چکیده

در این مقاله ابرفضاهای برداری (کراسنری) را مورد مطالعه قرار داده و ابرفضاهای برداری (شبه) توپولوژیک فازی را معرفی می‌کنیم. نشان می‌دهیم در یک ابرفضای برداری خارج‌قسمت از یک ابرفضای برداری شبه‌توپولوژیک فازی، اگر نگاشت خارج‌قسمت باز فازی باشد آنگاه ابرفضای برداری خارج‌قسمت نیز یک ابرفضای برداری شبه‌توپولوژیک فازی است و نشان می‌دهیم اگر ابرفضای برداری خارج‌قسمت فشرده فازی باشد در این‌صورت ابرفضای برداری خارج‌قسمت نیز فشرده فازی خواهد شد. در پایان روی حاصل‌ضرب ابرفضاهای برداری شبه‌توپولوژیک فازی می‌پردازیم و نشان می‌دهیم که حاصل‌ضرب دو ابرفضای برداری شبه‌توپولوژیک فازی روی یک ابرمیدان، یک ابرفضای برداری شبه‌توپولوژیک فازی روی آن ابرمیدان است.

عبارات و کلمات کلیدی: ابرفضای برداری کراسنری، توپولوژی فازی، ابرفضای برداری توپولوژیک(شبه‌توپولوژیک) فازی

Email(s): rameri@ut.ac.ir, m.hamidi@pnu.ac.ir, alisamadifam@gmail.com.

Mathematics Subject Classification: 62J86; 90B50

۱ مقدمه

بعد از آنکه لطفی عسگرزاده [1] [۲۹] استاد ایرانی تبار دانشگاه برکلی در سال ۱۹۶۵، نظریه مجموعه فازی را معرفی کرد برخی ریاضی‌دانان این نظریه را در بخش‌های مختلف ریاضیات مانند جبر، هندسه، توپولوژی، بهینه‌سازی، تحقیق در عملیات و در بسیاری از زمینه‌های دیگر مانند استفاده از t-نرم‌ها [2] به عنوان عملگر مینیمم [۱] ویا از منطق فازی [۲] در علوم دیگر استفاده کردند. در این راستا زیرگروه‌های فازی نخستین بار توسط روزنفلد [3][۲۴] معرفی و مورد بررسی قرار گرفت به‌طوری‌که اکنون گروه‌های فازی به‌طور گسترده‌ای توسعه پیدا کرده‌اند. چانگ [4][۱۰] ، ونگ [5] [۲۸] و لاون [6][۲۱] نظریه فضاهای توپولوژیک فازی را معرفی کردند. ابتدا فاستر [7] [۱۴] گروه‌های توپولوژیک فازی را مطرح کرد و بعد لی‌آنگ [8][۲۰] تعریف گروه‌های توپولوژیک فازی را طوری اصلاح کرد تا گروه‌های توپولوژیک معمولی، را بعنوان حالت خاصی از گروه‌های توپولوژیک فازی در برگیرد. فضاهای برداری توپولوژیک فازی توسط کاتساراس [9] [۱۵] معرفی و مورد مطالعه قرار گرفت و در [۱۶، ۱۷] نظریه فضای برداری توپولوژیک فازی بگونه‌ای اصلاح گردید، تا مطابق با توپولوژی فازی لاون، شامل تمام مجموعه‌های فازی ثابت گردد. یکی از دلایل اصلی که لاون مجموعه‌های فازی ثابت را به توپولوژی فازی اضافه کرد، برای ایجاد ارتباط بیشتر بین توپولوژی معمولی و توپولوژی فازی مخصوصا در پیوستگی نگاشت‌ها است. سپس نویسندگان زیادی از جمله کریشنا [10] [۱۹] در زمینه فضاهای برداری توپولوژیک فازی کار کردند.

در سال ۱۹۳۴، مارتی ریاضی‌دان فرانسوی [11] [۲۲] در هشتمین کنگره ریاضی کشورهای اسکاندیناوی برای نخستین بار مفهوم یک ابرگروه را، بعنوان تعمیمی از مفهوم

[1] Zadeh
[2] T-norm
[3] Rosenfeld
[4] Chang
[5] Wong
[6] Lowen
[7] Foster
[8] Liang
[9] Katsaras
[10] Krishna
[11] Marty

یک گروه معرفی و برخی از خواص آن‌را تشریح کرد و آن‌را در بخش‌های مختلفی از جبر همچون توابع جبری، توابع گویا و گروه های ناجابجایی بکار برد. بنابراین می‌توانیم سال ۱۹۳۴ را سال پیدایش نظریه ابرساختارهای جبری محسوب کنیم. این نظریه در ابتدا برای بررسی ارتباط بین گروه ها و کاربردهای مختلف آن در هندسه با استفاده از مفهوم ابرگروه ها به کار گرفته شد ولی بعدها تعمیم و توسعه زیادی یافت و از نظر کاربرد هم مورد توجه قرار گرفت (برای اطلاعات بیشتر رجوع شود به کورسینی [12] [۱۲]). در ادامه کراسنر [13] [۱۸] نظریه ابرحلقه و ابرمیدان‌ها را معرفی کرد و سپس برخی از ریاضی‌دانان مانند وجیوکلیس [14] [۲۷] کار او را دنبال کردند و تعمیم آنرا به سایر ابرساختارهای جبری مانند H_v – ساختارها توسعه دادند. همچنین، برخی روی مفاهیمی مانند ابرمدول‌ها، ابرفضاهای برداری و ابرفضاهای برداری توپولوژیک به عنوان تعمیمی از مدول‌ها، فضاهای برداری و فضاهای برداری توپولوژیک کلاسیک کار کردند [۹، ۲۳، ۲۶]. اخیرا کاربرد نظریه مجموعه‌های فازی در ابرساختارهای جبری توسعه زیادی پیدا کرده است، به‌طوری‌که عامری و همکاران ابرفضاهای برداری فازی را به عنوان تعمیمی از فضاهای برداری فازی معرفی کردند [۴، ۵، ۶، ۷، ۸].

عامری در [۳] انواع مختلفی از ابرگروه‌های توپولوژیک را معرفی کرد. سپس محققانی مانند کریستی [15] [۱۳] و دیگران ، ابرگروه‌وارهای توپولوژیک فازی را معرفی و مطالعه کردند.

در این مقاله هدف معرفی و مطالعه ابر فضاهای برداری کراسنری توپولوژیک فازی است. در بخش ۲، تحت عنوان پیشنیازها، برخی مفاهیم و نتایج مورد نیاز از ابرفضاهای برداری و فضاهای توپولوژیک فازی را ارائه می‌دهیم. در بخش ۳، ابرفضاهای برداری (شبه)توپولوژیک فازی را معرفی و مثال‌هایی را ارائه می‌دهیم. نشان می‌دهیم در یک ابرفضای برداری شبه‌توپولوژیک فازی، اگر نگاشت خارج‌قسمت برای ابرفضای برداری خارج‌قسمت القا شده توسط یک زیر ابرفضا باز فازی باشد در این‌صورت ابرفضای برداری خارج‌قسمت یک ابرفضای برداری شبه‌توپولوژیک فازی است. در پایان نشان می‌دهیم که حاصل‌ضرب دو ابرفضای برداری شبه‌توپولوژیک فازی روی یک ابرمیدان،

[12] Corsini
[13] Krasner
[14] Vougioklis
[15] Cristea

یک ابرفضای برداری شبه‌توپولوژیک فازی روی آن ابرمیدان است.

۲ پیش‌نیازها

در این بخش، مفاهیم و تعاریف در مورد ابر ساختارهای جبری را که در بخش‌های آتی مورد استفاده قرا می گیرند ارائه خواهیم کرد. [۱۱، ۱۲].

فرض کنید H یک مجموعه ناتهی و $P^*(H) = \{A : \emptyset \neq A \subseteq H\}$ مجموعه تمام زیرمجموعه های ناتهی H باشد. نگاشت $\circ : H \times H \to P^*(H)$ را یک ابرعمل [۱۶] و برای هر $x, y \in H$، $\circ(x, y)$ را ابرضرب x و y می‌نامیم. زوج مرتب $(H, \circ)$ را یک ابرگروه‌وار [۱۷] و یک مجموعه ناتهی به همراه یک خانواده از ابرعمل‌ها را یک ابرساختار [۱۸] جبری می‌نامیم. یک ابر عمل را می توان به روشی طبیعی به زیر مجموعه های ناتهی آن گسترش داد بدین صورت که برای زیرمجموعه‌های ناتهی A و B از H و $x \in H$ روابط $A \circ B = \bigcup_{a \in A, b \in B} a \circ b$، $x \circ A = \{x\} \circ A$ و $A \circ x = A \circ \{x\}$ تعریف می‌شوند. ابرگروه‌وار $(H, \circ)$ را یک نیم‌ابرگروه گوییم اگر برای هر $x, y, z \in H$، $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$. نیم‌ابرگروه $(H, \circ)$ را یک ابرگروه گوییم اگر برای هر $x \in H$، $x \circ H = H \circ x = H$.

تعریف ۱.۲. ابرگروه جابجایی $(H, +)$ یک ابرگروه کانونی [۱۹] نامیده می شود، هرگاه

(۱) عنصر $\circ \in H$ موجود باشد به‌طوری‌که به ازای هر $x \in H$، $\{x\} = x + \circ$، عنصر $\circ$ را همانی اسکالر می‌نامند.

(۲) برای هر عنصر $x \in H$، عنصر یکتای $x' \in H$ موجود باشد،
به‌طوری‌که $\circ \in (x + x') \cap (x' + x)$، معمولا x' را با نماد $-x$ نشان داده و به آن قرینه x می گویند.

---

[16] Hyperoperation
[17] Hypergroupoid
[18] Hyperstructure
[19] Canonical Hypergroup

(۳) برای هر $x,y,z\in H$، $x\in y+z$ نتیجه شود $y\in x-z$ و $z\in x-y$، و آن را خاصیت بازگشتی [20] می‌نامند.

واضح است که عنصر اسکالر از یک ابرگروه کانونی منحصر بفرد است، زیرا اگر e و e' هر دو عنصر اسکالر در ابرگروه کانونی $(H,+)$ باشد، آنگاه $e\in e+e'=\{e'\}$.

تعریف ۲.۲. ابرساختار $(R,+,\cdot)$ را یک ابرحلقه [21] کراسنری می‌نامند، هرگاه

(۱) $(R,+)$ یک ابرگروه کانونی باشد؛

(۲) $(R,\cdot)$ یک نیم‌گروه باشد؛

(۳) عنصر $\circ\in R$ موجود باشد به‌طوری‌که برای هر $x\in R$، $x\cdot\circ=\circ\cdot x=\circ$؛

(۴) ضرب "$\cdot$" نسبت به ابرعمل "$+$" از چپ و راست توزیع‌پذیر باشد.

یک ابرحلقه کراسنری را جابجایی می‌نامند، هرگاه $x\cdot y=y\cdot x$ باشد، و یکدار نامیده می‌شود هرگاه عنصر $۱\in R$ موجود باشد به‌طوری‌که برای هر $x\in R$، $۱\cdot x=x\cdot ۱=x$ باشد. اگر داشته باشیم $-A=\{-a:a\in A\}$، در این‌صورت در هر ابرحلقه کراسنری $(R,+,\cdot)$، به ازای هر x,y خواص مقدماتی $-(-x)=x$ و $-(x+y)=-x-y$ برقرار خواهد شد. ابرحلقه کراسنری جابجایی و یکدار $(R,+,\circ)$ را یک ابرمیدان کراسنری [22] می‌نامند هرگاه $(R/\{\circ\},\cdot)$ یک گروه باشد.

تعریف ۳.۲. [۱۲] فرض کنید $(K,+,\cdot)$ یک ابرمیدان کراسنری و $(V,\oplus)$ یک ابرگروه کانونی باشد. چهارتایی $(V,\oplus,\circ,K)$را یک ابرفضای برداری کراسنری [23] روی ابرمیدان K می‌نامیم هرگاه نگاشت $\circ:K\times V\to V$ ، برای هر $a,b\in K$ و $x,y\in V$ در شرایط زیر صدق کند:

(۱) $a\circ(x\oplus y)=a\circ x\oplus a\circ y$؛

(۲) $(a+b)\circ x=a\circ x\oplus b\circ y$؛

[20] Reversible

[21] Hyperring

[22] Krasner Hyperfield

[23] Krasner Hypervector Space

(۳) $a \circ (b \circ x) = (a \cdot b) \circ x$؛

(۴) $0 \circ x = \underline{0}$؛

(۵) $1 \circ x = x$.

در آن "0" عنصر صفر از K و "$\underline{0}$" عنصر صفر از V است. $(V, \oplus, \circ, K)$ را ابرفضای برداری کراسنری ضعیف [24] روی ابرمیدان K می‌نامیم هرگاه دو شرط (۱) و (۲) به‌ترتیب با ('۱) و ('۲) جایگزین شوند:

('۱) $a \circ (x \oplus y) \subseteq a \circ x \oplus a \circ y$؛

('۲) $(a + b) \circ x \subseteq a \circ x \oplus b \circ x$.

تعریف ۴.۲. [۲۵] فرض کنید $(V, +, \circ, K)$ یک ابرفضای برداری کراسنری(ضعیف) روی ابرمیدان K باشد. زیرمجموعه ناتهی $W \subseteq V$ را یک زیرابرفضا [25] از V می‌نامیم هرگاه به ازای هر $x, y \in W$ و $a \in K$، داشته باشیم:

(۱) $x - y \subseteq W$؛

(۲) $a \circ x \in W$.

فرض کنید W یک زیرابرفضا از ابرفضای برداری کراسنری $(V, +, \circ, K)$ روی ابرمیدان کراسنری $(K, +, \cdot)$ باشد. مجموعه $\{x + W : x \in V\}$ را مجموعه خارج‌قسمت از V نسبت به W می‌نامیم و با V/Wنشان می‌دهیم. دو نگاشت "$\oplus$" و "$\odot$" را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\oplus : V/W \times V/W \to P^*(V/W),\ (x + W) \oplus (y + W) = (x + y) + W$$

و

$$\odot : K \times V/W \to V/W,\ a \odot (x + W) = a \cdot x + W.$$

[24] Weak Krasner Hypervector Space

[25] Subhyperspace

قضیه ۵.۲. *[۲۵] $(V/W, \oplus, \odot, K)$ یک ابرفضای برداری کراسنری روی ابرمیدان کراسنری K است.*

در این قسمت، به بیان تعاریف، مفاهیم مقدماتی و قضایای مورد نیاز از فضاهای توپولوزیک فازی می‌پردازیم [۱۰، ۱۴، ۲۱، ۲۹].

تعریف ۶.۲. فرض کنید X یک مجموعه ناتهی است. مجموعه فازی A از X به‌صورت نگاشت $\mu : X \to [\circ, ۱]$ تعریف می‌شود که درآن μ_A را تابع عضویت و $\mu_A(x)$ را درجه عضویت x در مجموعه فازی A می‌نامند. برای مجموعه کلاسیک A تابع عضویت همان تابع مشخصه $\chi_A : X \to \{\circ, ۱\}$ تعریف می‌شود. مجموعه همه مجموعه‌های فازی روی X را با نماد I^X نشان می‌دهیم. مجموعه‌های فازی $\underline{\circ}, \underline{۱} \in I^X$ را برای هر $x \in X$ به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\mu_{\underline{\circ}}(x) = \circ, \ \mu_{\underline{۱}}(x) = ۱.$$

تعریف ۷.۲. توپولوژی فازی [26] از دیدگاه چانگ [27] [۱۰] روی مجموعه X به گردایه τ از مجموعه‌های فازی در X گفته می‌شود که در شرایط زیر صدق کنند:

(۱) $\underline{\circ}, \underline{۱} \in \tau$ که در آن به ازای هر $x \in X$، $\mu_{\underline{۱}}(x) = ۱$ و $\mu_{\underline{\circ}}(x) = \circ$؛

(۲) اگر $A_۱, A_۲ \in \tau$، آنگاه $A_۱ \cap A_۲ \in \tau$؛

(۳) اگر به ازای هر $i \in I$، $A_i \in \tau$ آنگاه $\bigcup_{i \in I} A_i \in \tau$.

در تعریف لاون [28] [۲۱] از توپولوژی فازی به‌جای شرط (۱)، شرط $(۱')$ به‌صورت زیر جایگزین می‌شود، برای هر $c \in [\circ, ۱]$، $k_c \in \tau$ که در آن به ازای هر $x \in X$، $\mu_{k_c}(x) = c$.

زوج مرتب (X, τ) را یک فضای توپولوژیک فازی [29] می‌نامند و با نماد fts نشان می‌دهند. هر عضو τ را یک مجموعه باز فازی و متمم آنرا مجموعه بسته فازی می‌نامند.

[26] Fuzzy Topology
[27] Chang
[28] Lowen
[29] Fuzzy Topological Space

مانند توپولوژی‌های معمولی، به توپولوژی فازی که شامل تنها عناصر $\underline{1}$ و $\underline{0}$ است توپولوژی فازی بدیهی و به توپولوژی فازی که همه مجموعه‌های فازی را شامل می‌شود توپولوژی فازی گسسته می‌گویند.

تعریف ۸.۲. [۱۴] فرض کنید (X,τ) یک فضای توپولوژیک فازی و $\emptyset \neq A \subseteq X$ باشد.
$\tau_A = \{B_A : B \in \tau\}$ را توپولوژی فازی القا شده [30] روی A گوییم ، هرگاه $B = \{(x, \mu_B(x)) : x \in X\}$ و $B_A = \{(x, \mu_{B|A}(x)) : x \in A\}$ باشد، دراین‌صورت (A, τ_A) را یک زیر فضای فازی از X می‌نامیم.

تعریف ۹.۲. [۱۰] فرض کنید (X,τ) (Y,δ) فضاهای توپولوژیک فازی هستند. نگاشت $f : X \to Y$ را پیوسته فازی (F–پیوسته) [31] می‌نامیم اگر برای هر مجموعه فازی $B \in \delta$، $f^{-1}(B) \in \tau$. برعکس، f را باز فازی [32] گوییم اگر برای هر مجموعه فازی $A \in \tau$، $f(A) \in \delta$.

نگاشت f را همسان‌ریختی فازی [33] گوییم هرگاه یک‌به‌یک، پوشا و F–پیوسته باشد و معکوس
آن نیز F–پیوسته باشد. اگر یک همسان‌ریختی فازی بین دو فضای توپولوژیک فازی باشد دو فضا را F–همسان‌ریخت [34] می‌نامیم.

تعریف ۱۰.۲. [۲۸] فرض کنید τ یک توپولوژی فازی است. زیرگردایه $\mathcal{B}$ از τ را یک پایه برای τ گوییم، اگروتنهااگر هر عنصر از τ را به‌توان به‌صورت اجتماعی از عناصر $\mathcal{B}$ نوشت. زیرگردایه $\mathcal{B}$ از τ را یک زیرپایه برای τ گوییم اگروتنهااگر گردایه همه اشتراک‌های متناهی از عناصر $\mathcal{B}$ یک پایه برای τ باشد.

قضیه ۱۱.۲. *[۱۳] فرض کنید (V,τ) یک فضای توپولوژیک فازی است.*
گردایه $\mathcal{B} = \{\tilde{A} \in I^{P^*(V)} : A \in \tau\}$ یک پایه برای توپولوژی فازی روی $P^*(V)$ است

[30] Induced Fuzzy Topology
[31] Fuzzy Continuous Map
[32] Fuzzy Open Map
[33] Fuzzy Homeomorphism
[34] Homeomorphic

در صورتی‌که $\mu_{\tilde{A}}(X) = \bigwedge_{x\in X} \mu_A(x)$ باشد. این توپولوژی فازی را با $\tau_{P^*(V)}$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۱۲.۲. [۱۳] فرض کنید $(V, \circ)$ یک ابرگروه‌وار و (V, τ) یک فضای توپولوژیک فازی است. ابرعمل "$\circ$" را شبه‌پیوسته فازی [۳۵] گوییم اگر برای هر $A \in \tau$، مجموعه فازی A_* با تابع عضویت $\mu_{A_*}(x, y) = \bigwedge_{u\in x\circ y} \mu_A(u)$ متعلق به $\tau \times \tau$ باشد.

قضیه ۱۳.۲. *[۱۳] فرض کنید $(V, \circ)$ یک ابرگروه‌وار و (V, τ) یک فضای توپولوژیک فازی است. $(V, \circ, \tau)$ یک ابرگروه‌وار شبه‌توپولوژیک فازی است اگروتنهااگر ابرعمل "$\circ$" نسبت به توپولوژی فازی $\tau_{P^*(V)}$ ، پیوسته فازی باشد.*

تعریف ۱۴.۲. [۱۰] گردایه $\mathcal{U}$ از مجموعه‌های فازی از یک فضای توپولوژیک فازی (X, τ) را یک پوشش برای مجموعه فازی B می‌نامند، اگروتنهااگر $B \subseteq \bigcup_{A\in\mathcal{U}} A$ باشد. آن را یک پوشش باز [۳۶] می‌نامند اگروتنهااگر هر عنصر از $\mathcal{U}$ یک مجموعه باز فازی باشد. یک زیرگردایه از $\mathcal{U}$ را یک زیرپوشش از $\mathcal{U}$ می‌نامند هرگاه آن نیز یک پوشش باشد.

تعریف ۱۵.۲. [۱۰] زیرمجموعه فازی B را فشرده فازی [۳۷] می‌نامند اگروتنهااگر هر پوشش باز از آن یک زیرپوشش متناهی داشته باشد. بنابراین فضای توپولوژیک فازی (X, τ) فشرده است اگر برای هر $i \in I$، $\mu_i \in \tau$ و $\bigcup_{i\in I} \mu_i = ۱$ ، اندیس‌های متناهی $i_۱, i_۲, \cdots, i_n \in I$ موجود باشند، به‌طوری‌که $\bigcup_{j=۱}^{n} \mu_{i_j} = ۱$.

۳ ابرفضاهای برداری (شبه) توپولوژیک فازی

در این بخش، با استفاده از توپولوژی فازی روی مجموعه توانی، ابرفضاهای برداری (شبه)توپولوژیک فازی را تعریف می‌کنیم.

قضیه ۱.۳. *فرض کنید K یک ابرمیدان کراسنری و $(V, \oplus, \circ, K)$ یک ابرفضای برداری کراسنری روی K باشد. اگر $a \in K$ و $x \in V$، آنگاه*

[35] Fuzzy Pseudocontinuous
[36] Open Cover
[37] Fuzzy Compact

(۱) $(-1)\circ x = -x$؛

(۲) $a\circ(-x) = (-a)\circ x = -(a\circ x)$.

اثبات.

(۱) $x \oplus (-1)\circ x = 1\circ x \oplus (-1)\circ x = (1+(-1))\circ x = 0\circ x = \underline{0}$ لذا $(-1)\circ x = -x$.

(۲) $a\circ x \oplus (-a)\circ x = (a+(-a))\circ x = 0\circ x = \underline{0}$ لذا $(-a)\circ x = -(a\circ x)$.
از سوی دیگر داریم $(-a)\circ x = (a\cdot(-1))\circ x = a\circ((-1)\circ x) = a\circ(-x)$.

□

تعریف ۲.۳. فرض کنید $(H,+)$ یک ابرگروه کانونی و (H,τ)، $(P^*(H),\tau^*)$ فضاهای توپولوژیک فازی هستند. $(H,+,\tau)$ را یک ابرگروه کانونی توپولوژیک فازی [۳۸] گوییم هرگاه:

(۱) نگاشت $+ : H\times H \to P^*(H),\ (x,y)\mapsto x+y$ نسبت به توپولوزی‌های فازی $\tau\times\tau$ و τ^* پیوسته فازی باشد؛

(۲) نگاشت $i : x\mapsto -x$ از (H,τ) به (H,τ) پیوسته فازی باشد.

تعریف ۳.۳. فرض کنید $(R,+,\cdot)$ یک ابرحلقه کراسنری و (R,τ)، $(P^*(R),\tau^*)$ فضاهای توپولوژیک فازی باشند. $(R,+,\cdot,\tau)$ را یک ابرحلقه کراسنری توپولوژیک فازی [۳۹] گوییم هرگاه:

(۱) $(R,+,\tau)$ یک ابرگروه کانونی توپولوژیک فازی باشد؛

(۲) نگاشت $\cdot : R\times R\to R,\ (x,y)\mapsto x\cdot y$ نسبت به توپولوژی‌های فازی $\tau\times\tau$ و τ پیوسته فازی باشد.

---

[38]Fuzzy TopologicaL Canonical Hypergroup

[39]Fuzzy Topological Hyperring

تعریف ۴.۳. فرض کنید $(K,+,\cdot)$ یک ابرمیدان کراسنری، (K,τ) و $(P^(K),\tau^*)$ فضاهای توپولوژیک فازی باشند. $(K,+,\cdot,\tau)$ را یک ابرمیدان کراسنری توپولوژیک فازی [۴۰] گوییم، هرگاه:

(۱) $(K,+,\cdot,\tau)$ یک ابرحلقه کراسنری توپولوژیک فازی باشد؛

(۲) نگاشت $j : K \setminus \{\circ\} \to K \setminus \{\circ\},\ x \mapsto x^{-1}$ نسبت به توپولوژی فازی القایی روی $K \setminus \{\circ\}$ پیوسته فازی باشد.

تعریف ۵.۳. فرض کنید $(V,\oplus,\circ,K)$ یک ابرفضای برداری کراسنری (ضعیف) روی ابرمیدان $(K,+,\cdot)$ و (V,τ)، (K,δ) و $(P^*(V),\tau^*)$ فضاهای توپولوژیک فازی باشند. $(V,+,\circ,K,\tau,\delta)$ را یک ابرفضای برداری کراسنری (ضعیف) توپولوژیک فازی [۴۱] گوییم،
هرگاه :

(۱) $(V,\oplus,\tau)$ یک ابرگروه کانونی توپولوژیک فازی باشد؛

(۲) $(K,+,\cdot,\delta)$ یک ابرمیدان کراسنری توپولوژیک فازی باشد؛

(۳) نگاشت $\circ : K \times V \to V$ نسبت به توپولوژی‌های فازی $\tau \times \delta$ و τ پیوسته فازی باشد.

مثال ۶.۳. فرض کنید $(V,\oplus,\circ,K)$ یک ابرفضای برداری کراسنری روی ابرمیدان K باشد. فرض کنید (V,τ)، $(P^*(V),\tau^*)$، (K,δ) و $(P^*(K),\delta^*)$ فضاهای توپولوژیک فازی باشند به طوری که

$$\tau = \{\underline{\circ},\underline{\text{۱}},A\}, A(x) = \frac{\text{۱}}{\text{۳}}, \forall x \in V \text{ ، } \tau^* = \{\underline{\circ},\underline{\text{۱}},B\}, B(X) = \frac{\text{۱}}{\text{۳}}, \forall X \in P^*(V)$$

و

$$\delta = \{\underline{\circ},\underline{\text{۱}},C\}, \delta(k) = \frac{\text{۱}}{\text{۲}}, \forall k \in K \text{ ، } \delta^* = \{\underline{\circ},\underline{\text{۱}},D\}, \delta^*(Y) = \frac{\text{۱}}{\text{۲}}, \forall Y \in P^*(K).$$

[40] Fuzzy Topolocical Hyperfield

[41] Fuzzy Topological Hypervector Space

اگر نگاشت "$\oplus$" را با f نشان دهیم برای $U = B$ داریم

$$\mu_{f^{-۱}(U)}(x,y) = \mu_B(f(x,y)) = \mu_B(x \oplus y) = \frac{۱}{۳} = \frac{۱}{۳} \wedge \frac{۱}{۳}$$
$$= \mu_A(x) \wedge \mu_A(y) = \mu_{A\times A}(x,y).$$

لذا $f^{-۱}(U) = A \times A \in \tau \times \tau$. برای $U = \underline{۱}$ رابطه $f^{-۱}(U) = \underline{۱} \times \underline{۱} \in \tau \times \tau$ و برای $U = \underline{۰}$ رابطه $f^{-۱}(U) = \underline{۰} \times \underline{۰} \in \tau \times \tau$ برقرارند. در نگاشت $g : x \mapsto -x$ برای $U = A$ داریم $\mu_{g^{-۱}(U)}(x) = \mu_{g^{-۱}(A)}(x) = \mu_A(g(x)) = \mu_A(-x) = \frac{۱}{۲} = \mu_A(x)$ لذا $g^{-۱}(A) = A \in \tau$. و به همین ترتیب $g^{-۱}(\underline{۱}) = \underline{۱} \in \tau$ و $g^{-۱}(\underline{۰}) = \underline{۰} \in \tau$ برقرارند لذا $(V,\oplus)$ یک ابرگروه کانونی توپولوژیک فازی است. به همین ترتیب می‌توان نشان داد $(K,+,\cdot)$ یک ابرمیدان کراسنری توپولوژیک فازی است. اگر نگاشت "$\circ$" را با h نشان دهیم برای $U = A$ داریم

$$\mu_{h^{-}(A)}(k,v) = \mu_A(h(k,v)) = \mu_A(k \circ v) = \frac{۱}{۳} = \frac{۱}{۲} \wedge \frac{۱}{۳}$$
$$= \mu_C(k) \wedge \mu_A(v) = \mu_{C\times A}(k,v)$$

لذا $h^{-۱}(A) = C \times A \in \delta \times \tau$. به همین ترتیب $h^{-۱}(\underline{۰}), h^{-۱}(\underline{۱}) \in \delta \times \tau$. لذا $(V,\oplus,\circ,K)$ یک ابرفضای برداری توپولوژیک فازی است.

مثال ۷.۳. فرض کنید $(V,\oplus,\circ,K)$ یک ابرفضای برداری کراسنری روی ابرمیدان K باشد و هر یک از فضاهای توپولوژیک فازی (V,τ)، (K,δ)، $(P^*(V),\tau^*)$ و $(P^*(K),\delta^*)$ فقط کل مجموعه‌های فازی ثابت را شامل می‌شوند در این‌صورت $(V,\oplus,\circ,K)$ یک ابرفضای برداری توپولوژیک فازی است.

تعریف ۸.۳. فرض کنید $(H,+)$ یک ابرگروه کانونی و (H,τ)، $(P^*(H),\tau^*)$ فضاهای توپولوژیک فازی هستند. $(H,+,\tau)$ را یک ابرگروه کانونی شبه‌توپولوژیک فازی [۴۲] گوییم، هرگاه:

(۱) نگاشت $+ : H \times H \to P^*(H),\ (x,y) \mapsto x+y$ شبه‌پیوسته فازی باشد؛

[42] Fuzzy Pseudotopological Canonical Hypergroup

(۲) نگاشت $i : x \mapsto -x$ از (H, τ) به (H, τ) پیوسته فازی باشد.

تعریف ۹.۳. فرض کنید $(R, +, \cdot)$ یک ابرحلقه کراسنری و (R, τ) فضای توپولوژیک فازی باشد. $(R, +, \cdot, \tau)$ را یک ابرحلقه کراسنری شبه‌توپولوژیک فازی [43] گوییم هرگاه:

(۱) $(R, +, \tau)$ یک ابرگروه کانونی شبه‌توپولوژیک فازی باشد؛

(۲) نگاشت $\cdot : R \times R \to R,\ (x, y) \mapsto x \cdot y$ نسبت به توپولوژی‌های فازی $\tau \times \tau$ و τ پیوسته فازی باشد.

تعریف ۱۰.۳. فرض کنید $(K, +, \cdot)$ یک ابرمیدان کراسنری و (K, τ) فضای توپولوژیک فازی باشد. $(K, +, \cdot, \tau)$ را یک ابرمیدان کراسنری شبه‌توپولوژیک فازی [44] گوییم، هرگاه:

(۱) $(K, +, \cdot, \tau)$ یک ابرحلقه کراسنری شبه‌توپولوژیک فازی باشد؛

(۲) نگاشت $j : K \setminus \{0\} \to K \setminus \{0\},\ x \mapsto x^{-1}$ نسبت به توپولوژی فازی القایی روی $K \setminus \{0\}$ پیوسته فازی باشد.

تعریف ۱۱.۳. فرض کنید $(V, \oplus, \circ, K)$ یک ابرفضای برداری کراسنری (ضعیف) روی ابرمیدان $(K, +, \cdot)$ و (V, τ)، (K, δ) فضاهای توپولوژیک فازی باشند. $(V, \oplus, \circ, K, \tau, \delta)$ را یک ابرفضای برداری کراسنری (ضعیف) شبه‌توپولوژیک فازی [45] گوییم اگر در شرایط زیر صدق کند:

(۱) $(V, \oplus, \tau)$ یک ابرگروه کانونی شبه‌توپولوژیک فازی باشد؛

(۲) $(K, +, \cdot, \delta)$ یک ابرمیدان کراسنری شبه‌توپولوژیک فازی باشد؛

(۳) نگاشت $\circ : K \times V \to V$ نسبت به توپولوژی‌های فازی $\tau \times \delta$ و τ پیوسته فازی باشد.

مثال ۱۲.۳. نگاشت‌های "$\oplus$"، "$+$" و "$\circ$" را روی $K = \{0, 1\}$ به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

---

[43] Fuzzy Pseudotopological Hypervector Space

[44] Fuzzy Pseudotopological Hyperfield

[45] Fuzzy Pseudotopological Hypervector Space

$\oplus$	۰	۱
۱	۰	۱
۱	۱	$\{$۱،۰$\}$

،

$+$	۰	۱
۱	۰	۱
۱	۱	$\{$۱،۰$\}$

و

$\cdot$	۰	۱
۰	۰	۰
۱	۰	۱

در این‌صورت $(V,\oplus)$ یک ابرگروه کانونی و $(K,+,\cdot)$ یک ابرمیدان کراسنری است.
نگاشت $\circ : K \times V \to V,\ (a,x) \mapsto a \circ x$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$a \circ x = \begin{cases} ۰ & \text{اگر } a = ۰ \text{ ؛} \\ x & \text{اگر } a = ۱ \text{ ؛} \end{cases}$$

در این‌صورت $(V,\oplus,\circ,K)$ یک ابرفضای برداری کراسنری روی ابرمیدان K است.
فرض کنید

$$\tau_V = \{\underline{۰}, \underline{۱}, A, B\},\ A(x) = ۰/۵,\ B(x) = ۰/۲,\ \forall x \in V$$

و

$$\tau_K = \{\underline{۰}, \underline{۱}, C\},\ C(k) = ۰/۶,\ \forall k \in K.$$

اگر نگاشت "$\oplus$" را با f نشان دهیم برای $A \in \tau_V$ داریم

$$\mu_{f^{-۱}(\tilde{A})}(x,y) = \mu_{\tilde{A}}(f(x,y)) = \mu_{\tilde{A}}(x \oplus y) = \bigwedge_{u \in x \oplus y} \mu_A(u) = ۰/۵$$
$$= ۰/۵ \wedge ۰/۵ = \mu_A(x) \wedge \mu_A(y) = \mu_{A \times A}(x,y).$$

لذا $f^{-۱}(\tilde{A}) = A \times A \in \tau_V \times \tau_V$. به همین ترتیب $f^{-۱}(\tilde{B}) = B \times B \in \tau_V \times \tau_V$
و برای $U = \underline{۱} \in \tau_V$، $f^{-۱}(\tilde{U}) = \underline{۱} \times \underline{۱} \in \tau_V \times \tau_V$ و
$U = \underline{۰} \in \tau_V$، $f^{-۱}(\tilde{U}) = \underline{۰} \times \underline{۰} \in \tau_V \times \tau_V$ برقرارند و لذا f شبه‌پیوسته فازی است.
چون قرینه هر عنصر x در V خود x است لذا نگاشت $x \mapsto -x$ پیوسته فازی است
بنابراین $(V,\oplus)$ یک ابرگروه شبه‌توپولوژیک فازی است. برای ابرمیدان K نگاشت "$+$"
شبه‌پیوسته فازی و نگاشت‌های $k \mapsto -k$، $(k,k') \mapsto k \cdot k'$ و $k \mapsto k^{-۱}$ پیوسته فازی

هستند لذا $(K, +, \cdot)$ یک ابرمیدان شبه‌توپولوژیک فازی است. اگر نگاشت "$\circ$" را با g نشان دهیم برای $A \in \tau_V$ داریم

$$\mu_{g^{-1}(A)}(k, v) = \mu_A(g(k, v)) = \mu_A(k \circ v) = 0/5 = 0/6 \wedge 0/5$$
$$= \mu_C(k) \wedge \mu_A(v) = \mu_{c \times A}(k, v).$$

لذا $g^{-1}(A) = C \times A \in \tau_K \times \tau_V$. به همین ترتیب $g^{-1}(B) = C \times B \in \tau_K \times \tau_V$، $g^{-1}(\underline{1}) = \underline{1} \times \underline{1} \in \tau_K \times \tau_V$ و $g^{-1}(\underline{0}) = \underline{0} \times \underline{0} \in \tau_K \times \tau_V$ برقرارند. لذا $(V, \oplus, \circ, K, \tau_V, \tau_K)$ یک ابرفضای برداری شبه‌توپولوژیک فازی است.

مثال ۱۳.۳. روی $K = \{0, 1\}$ دو نگاشت "+" و "$\cdot$" را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

+	۰	۱
۱	۰	۱
۱	۱	{۱،۰}

و

$\cdot$	۰	۱
۰	۰	۰
۱	۰	۱

در این‌صورت $(K, +, \cdot)$ یک ابرمیدان کراسنری است.

ابرعمل "$\oplus$" را روی مجموعه $\mathbb{Q}^+ = \{x : x \in \mathbb{Q}, x \geq 0\}$ به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$x \oplus y = \begin{cases} \{y : y \leq x\} & \text{اگر } x = y \text{ ؛} \\ max\{x, y\} & \text{اگر } x \neq y \text{ ؛} \end{cases}$$

در این‌صورت $(\mathbb{Q}^+, \oplus)$ یک ابرگروه کانونی است که در آن عنصر ۰، همان صفر معمولی است و قرینه هر $x \in \mathbb{Q}^+$، خود x است.

نگاشت $\circ : K \times \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{Q}^+,\ (a, x) \mapsto a \circ x$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$a \circ x = \begin{cases} 0 & \text{اگر } a = 0 \text{ ؛} \\ x & \text{اگر } a = 1 \text{ ؛} \end{cases}$$

در این‌صورت $(V = \mathbb{Q}^+, \oplus, \circ, K)$ یک ابرفضای برداری کراسنری ضعیف روی

ابرمیدان K است زیرا $(۱+۱)\circ x \subseteq ۱\circ x \oplus ۱\circ x$. فرض کنید $\tau_V = \{A_i : \mu_{A_i}(x) = ۱ - \frac{۱}{i},\ x \in V,\ i \in (۰,۱]\} \cup \{\underline{۱}\}$ و $\tau_K = \{\underline{۰}, \underline{۱}\}$.
اگر نگاشت "$\oplus$" را با $h_۱$ نشان دهیم برای $A_i \in \tau_V$ داریم

$$\begin{aligned}
\mu_{h_۱^{-۱}(\tilde{A}_i)}(x,y) &= \mu_{\tilde{A}_i}(h_۱(x,y)) = \mu_{\tilde{A}_i}(x \oplus y) = \bigwedge_{u \in x\oplus y} \mu_{A_i}(u) \\
&= ۱ - \frac{۱}{i} = (۱ - \frac{۱}{i}) \wedge (۱ - \frac{۱}{i}) = \mu_{A_i}(x) \wedge \mu_{A_i}(y) \\
&= \mu_{A_i \times A_i}(x,y).
\end{aligned}$$

لذا $h_۱^{-۱}(\tilde{A}_i) = A_i \times A_i \in \tau_V \times \tau_V$. اگر $A = \underline{۱}$ باشد داریم $h_۱^{-۱}(\tilde{A}) = \underline{۱} \times \underline{۱} \in \tau_V \times \tau_V$ ، لذا $h_۱$ شبه‌پیوسته فازی است. قرینه هر عنصر x در V خود x است لذا نگاشت $i : x \mapsto -x$ پیوسته فازی است. نگاشت "$+$" را با $h_۲$ نشان می‌دهیم. برای $A = \underline{۰} \in \tau_K$ داریم

$$\begin{aligned}
\mu_{h_۲^{-۱}(\tilde{A})}(k,k') &= \mu_{\tilde{A}}(h_۲(k,k')) = \mu_{\tilde{A}}(k+k') = \bigwedge_{u \in k+k'} \mu_A(u) \\
&= \underline{۰} = \underline{۰} \wedge \underline{۰} = \mu_A(k) \wedge \mu_A(k') = \mu_{A\times A}(k,k').
\end{aligned}$$

لذا $h_۲^{-۱}(A) = \underline{۰} \times \underline{۰} \in \tau_K \times \tau_K$. برای $A = \underline{۱}$ نیز می‌توان نشان داد $h_۲^{-۱}(A) = \underline{۱} \times \underline{۱} \in \tau_K \times \tau_K$. لذا $h_۲$ شبه‌پیوسته فازی است. واضح است که نگاشت‌های $k \mapsto -k$، $(k,k') \mapsto k \cdot k'$ و $k \mapsto k^{-۱}$ پیوسته فازی هستند لذا $(K,+,\cdot)$ شبه‌توپولوژیک فازی است. نگاشت "$\circ$" را با h نشان می‌دهیم برای $A_i \in \tau_V$ داریم

$$\begin{aligned}
\mu_{h^{-۱}(A_i)}(k,v) &= \mu_{A_i}(h(k,v)) = \mu_{A_i}(k \circ v) = ۱ - \frac{۱}{i} = ۱ \wedge (۱ - \frac{۱}{i}) \\
&= \mu_{\underline{۱}}(k) \wedge \mu_{A_i}(v) = \mu_{\underline{۱}\times A_i}(k,v).
\end{aligned}$$

لذا $h^{-۱}(A_i) = \underline{۱} \times A_i \in \tau_K \times \tau_V$. برای $A = \underline{۱}$ داریم $h^{-۱}(A) = \underline{۱} \times \underline{۱} \in \tau_K \times \tau_V$.
لذا $(V = \mathbb{Q}^+, \oplus, \circ, \tau_V, \tau_K)$ یک ابرفضای برداری شبه‌توپولوژیک فازی است.

مثال ۱۴.۳. روی $V=\mathbb{R}^+=\{x : x\in\mathbb{R}, x\geq \circ\}$ ابرعمل "$\oplus$" را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$a\oplus b=\begin{cases}[\circ,a] & ; \quad a=b,\\ max\{a,b\} & ; \quad a\neq b,\end{cases}$$

در این‌صورت $(V=\mathbb{R}^+,\oplus)$ یک ابرگروه کانونی است.

ابرمیدان کراسنری $(\mathbb{Q}^+,+,\cdot)$ که در آن $\mathbb{Q}^+=\{x : x\in\mathbb{Q}, x\geq \circ\}$ است با نگاشت

$$x+y=\begin{cases}\{y : y\leq x\} & ; \quad x=y,\\ max\{x,y\} & ; \quad x\neq y,\end{cases}$$

و ضرب معمولی را در نظر بگیرید. چهارتایی $(V=\mathbb{R}^+,\oplus,\circ,K=\mathbb{Q}^+)$ با نگاشت

$$\begin{cases}\circ : \mathbb{Q}^+\times V\to V\\ (k,v)\mapsto k\circ v,\ k\circ v=kv\end{cases}$$

یک ابرفضای برداری کراسنری ضعیف روی ابرمیدان K است. زیرا $۲\circ ۵\oplus ۲\circ ۵\subseteq (۲+۲)\circ ۵$.

فرض کنید $\tau_V=\{\lambda^* : \lambda\in[\circ,۱]\},\ \mu_{\lambda^*}(x)=\lambda$ و به‌همین ترتیب $\tau_{\mathbb{Q}^*}=\{\lambda^* : \lambda\in[\circ,۱]\},\ \mu_{\lambda^*}(x)=\lambda$ باشد. اگر نگاشت "$\oplus$" را با h نشان دهیم و $\tilde{A}\in\tau_{P^*(V)}$ باشد، در این‌صورت

$$\mu_{h^{-۱}(\tilde{A})}(a,b)=\mu_{\tilde{A}}(h(a,b))=\mu_{\tilde{A}}(a\oplus b)=\bigwedge_{u\in a\oplus b}\mu_A(u)=\lambda$$
$$=\lambda\wedge\lambda=\mu_A(a)\wedge\mu_A(b)=\mu_{A\times A}(a,b).$$

بنابراین ، $h^{-۱}(\tilde{A})=A\times A\in\tau_V\times\tau_V$. واضح است نگاشت $i : x\mapsto -x$ پیوسته فازی است ، لذا V یک ابرگروه شبه‌توپولوژیک فازی است. به‌همین ترتیب ثابت می‌شود

$\mathbb{Q}^*$ یک ابرمیدان شبه‌توپولوژیک فازی است. اگر نگاشت "$\circ$" را با g نشان دهیم برای $A \in \tau_V$ داریم

$$\begin{aligned}\mu_{g^{-1}(A)}(k,v) &= \mu_A(g(k,v)) = \mu_A(k \circ v) = \mu_A(kv) = \lambda \\ &= \lambda \wedge \lambda = \mu_B(k) \wedge \mu_A(v) = \mu_{B\times A}(k,v),\end{aligned}$$

در آن $B \in \tau_{\mathbb{Q}^*}$ یک مجموعه فازی باز است، لذا $g^{-1}(A) = B \times A \in \tau_{\mathbb{Q}^*} \times \tau_V$ بنابراین $(V, \oplus, \circ, K, \tau_V, \tau_{\mathbb{Q}^*})$ یک ابرفضای برداری شبه‌توپولوژیک فازی است.

فرض کنید (X, τ) یک فضای توپولوژیک فازی و R یک رابطه هم‌ارزی روی X باشد. برای مجموعه خارج‌قسمت X/R، نگاشت خارج‌قسمت $q : X \to X/R$ را در نظر بگیرید. خانواده $\mathcal{U} = \{B : q^{-1}(B) \in \tau\}$ از مجموعه‌های فازی در X/R یک توپولوژی فازی روی X/R تشکیل می‌دهد آن را توپولوژی فازی خارج‌قسمت برای X/R می‌نامیم و $(X/R, \mathcal{U})$ را یک فضای خارج‌قسمت از (X, τ) می‌نامیم. نگاشت q نسبت به این توپولوژی، پیوسته فازی است

قضیه ۱۵.۳. *فرض کنید $(V, +, \circ, K, \tau_V)$ یک ابرفضای برداری کراسنری شبه‌توپولوژیک فازی است. در این‌صورت نگاشت $g : P^*(V) \to P^*(V/W),\ X \mapsto X + W$ نسبت به توپولوژی‌های $\tau_{P^*(V)}$ و $\tau_{P^*(V/W)}$ پیوسته فازی است.*

اثبات. فرض کنید $S \in \tau_{V/W}$ باشد در این‌صورت $\tilde{S} \in \tau_{P^*(V/W)}$. در این‌صورت

$$\begin{aligned}\mu_{g^{-1}(\tilde{S})}(X) &= \mu_{\tilde{S}}(g(X)) = \mu_{\tilde{S}}(X + W) \\ &= \bigwedge_{u \in X} \mu_S(u + W) = \bigwedge_{u \in X} \mu_S(q(u)) \\ &= \bigwedge_{u \in X} \mu_{q^{-1}(S)}(u) = \bigwedge_{(\widetilde{q^{-1}(S)})} (X).\end{aligned}$$

لذا $g^{-1}(\tilde{S}) = (\widetilde{q^{-1}(S)})$. مجموعه فازی $S \in \tau_{V/W}$ باز است لذا $q^{-1}(S) \in \tau_V$ باز است. چون نگاشت "+" شبه‌پیوسته است و در نتیجه $(\widetilde{q^{-1}(S)})$ باز است. □

قضیه ۱۶.۳. *فرض کنید W یک زیرابرفضا از ابرفضای برداری $(V,+,\circ,K)$ روی ابرمیدان $(K,+,\cdot)$ باشد. فرض کنید (V,τ_V) و (K,τ_K) فضاهای توپولوژیک فازی و $(V,+,\circ,K,\tau_V,\tau_K)$ یک ابرفضای برداری شبه‌توپولوزیک فازی روی ابرمیدان K است. اگر نگاشت کانونی $q:V\to V/W$ باز باشد، در این‌صورت $(V/W,\oplus,\odot,K,\tau_{V/W},\tau_K)$ یک ابرفضای برداری شبه‌توپولوژیک فازی روی ابرمیدان K است.*

اثبات. فرض کنید

$$\phi: V\times V\to P^*(V),\ (x,y)\mapsto x+y,$$

$$h: V/W\times V/W\to P^*(V/W),\ (x+W,y+W)\mapsto (x+y)+W.$$

در اینصورت دیاگرام

$$V\times V @>\phi>> P^*(V) @Vq\times qVV @VVgV V/W\times V/W @>h>> P^*(V/W)$$

جابجایی است. زیرا فرض کنید $S\in\tau_{V/W}$ و $\tilde{S}\in\tau_{P^*(V/W)}$ باشد، بنابر این $Z=(g\circ\phi)^{-1}(\tilde{S})=\phi^{-1}(g^{-1}(S))$ در $V\times V$ باز است. چون نگاشت q باز است، لذا $q\times q$ بنابر لم ۳.۶ از [۱۵] نیز باز است. لذا $Z_1=(q\times q)(Z)$ در $V/W\times V/W$ باز است. از سوی دیگر ، داریم $Z_1=h^{-1}(\tilde{S})$، نتیجه می‌دهد h شبه‌پیوسته فازی است.

به‌طور مشابه ثابت می‌شود، نگاشت

$$\odot: K\times V/W\to P^*(V/W),\ (a,x+W)\mapsto a\odot(x+W)=a\cdot x+W$$

پیوسته فازی است. □

قضیه ۱۷.۳. *اگر (V,τ_V) یک ابرفضای برداری کراسنری توپولوژیک فازی فشرده باشد.*

دراینصورت ابرفضای خارج‌قسمتی $(V/W,\mathcal{U})$ فشرده فازی است.

اثبات. فرض کنید $\mathcal{B}$ یک پوشش باز از V/W باشد. در این‌صورت برای هر $x \in V$،

$$\begin{aligned}\mu_{\bigcup_{B\in\mathcal{B}} q^{-1}(B)}(x) &= \bigvee\{\mu_{q^{-1}(B)}(x) : B \in \mathcal{B}\}\\ &= \bigvee\{\mu_B(q(x)) : B \in \mathcal{B}\} = 1.\end{aligned}$$

یعنی گردایه‌ای از مجموعه‌های فازی $\{q^{-1}(B) : B \in \mathcal{B}\}$ داریم که یک پوشش باز از X است. بنابراین دارای یک زیرپوشش متناهی است. چون q یک نگاشت پوشا است و $q(q^{-1}(B)) = B$، لذا گردایه‌ای از تصاویر عناصر این زیرپوشش یک زیرگردایه متناهی از $\mathcal{B}$ است که V/W را می‌پوشاند. $\square$

قضیه ۱۸.۳. *فرض کنید (V_1, τ_1)، (V_2, τ_2) و (V_3, τ_3) فضاهای توپولوژیک فازی باشند، در این‌صورت نگاشت*

$$\begin{cases}\beta : V_3 \times (V_1 \times V_2) \to (V_3 \times V_1) \times (V_3 \times V_2)\\ \beta(a,(x_1,x_2)) = ((a,x_1),(a,x_2))\end{cases}$$

پیوسته فازی است.

اثبات. نشان می‌دهیم برای هر مجموعه فازی $F \in (\tau_3 \times \tau_1) \times (\tau_3 \times \tau_2)$ ، تصویر معکوس $\beta^{-1}(F) \in \tau_3 \times (\tau_1 \times \tau_2)$.

فرض کنیم $F = (A_1 \times B_1) \times (A_2 \times B_2) \in (\tau_3 \times \tau_1) \times (\tau_3 \times \tau_2)$ باشد. در

اینصورت

$$\begin{aligned}
\mu_{\beta^{-1}(F)}(a,(x_1,x_2)) &= \mu_F(\beta(a,(x_1,x_2)))\\
&= \mu_F((a,x_1),(a,x_2))\\
&= \mu_{A_1\times B_1}(a,x_1)\wedge \mu_{A_2\times B_2}(a,x_2)\\
&= \mu_{A_1}(a)\wedge \mu_{B_1}(x_1)\wedge \mu_{A_2}(a)\wedge \mu_{B_2}(x_2)\\
&= \mu_{A_1\cap A_2}(a)\wedge \mu_{B_1\times B_2}(x_1,x_2)\\
&= \mu_{(A_1\cap A_2)\times(B_1\times B_2)}(a,(x_1,x_2)).
\end{aligned}$$

لذا، $\beta^{-1}(F)=(A_1\cap A_2)\times(B_1\times B_2)\in \tau_3\times(\tau_1\times\tau_2)$. $\square$

فرض کنید $(V_1,+_1,\circ_1,K)$ و $(V_2,+_2,\circ_2,K)$ دو ابرفضای برداری روی ابرمیدان کراسنری K باشند. با فرض $V=V_1\times V_2$ دو نگاشت زیر را تعریف می‌کنیم:

$$\oplus : V\times V\to (P^*(V_1),P^*(V_2)),\ \oplus : ((x_1,x_2),(y_1,y_2))\mapsto (x_1+_1y_1,x_2+_2y_2)$$

و

$$\odot : K\times V\to V,\ \odot : (a,(x_1,x_2))\mapsto (a\circ_1 x_1, a\circ_2 x_2)$$

قضیه ۱۹.۳. *$(V,\oplus,\odot,K)$ یک ابرفضای برداری کراسنری روی ابرمیدان کراسنری K است.*

اثبات. فرض کنید $a,b\in K$ ، $(x_1,x_2),(y_1,y_2),(z_1,z_2)\in V$ و $\circ_V=(\circ_{V_1},\circ_{V_2})$ در اینصورت :

(۱) $(x_1,x_2)\oplus(y_1,y_2)=(y_1,y_2)\oplus(x_1,x_2)$؛

(۲) $((x_1,x_2)\oplus(y_1,y_2))\oplus(z_1,z_2)=(x_1,x_2)\oplus((y_1,y_2)\oplus(z_1,z_2))$؛

(۳) $\circ_V\oplus(x_1,x_2)=(x_1,x_2)$؛

(۴) برای $(x_1, x_2) \in V$ عنصر یکتای $(-x_1, -x_2)$ وجود دارد که

$$\circ_V = (\circ_{V_1}, \circ_{V_2}) \in (x_1, x_2) \oplus (-x_1, -x_2) = (x_1 - x_1, x_2 - x_2);$$

(۵) فرض کنید: $(z_1, z_2) \in (x_1, x_2) \oplus (y_1, y_2) = (x_1 +_1 y_1, x_2 +_2 y_2)$ در این‌صورت، $z_1 \in x_1 +_1 y_1,\ z_2 \in x_2 +_2 y_2$ نتیجه می‌دهد $x_1 \in z_1 - y_1, x_2 \in z_2 - y_2$ ، لذا $(x_1, x_2) \in (z_1 - y_1, z_2 - y_2) = (z_1, z_2) - (y_1, y_2)$؛

(۶) $a \odot ((x_1, x_2) \oplus (y_1, y_2)) = a \odot (x_1, x_2) \oplus a \odot (y_1, y_2)$؛

(۷) $(a + b) \odot (x_1, x_2) = a \odot (x_1, x_2) \oplus b \odot (x_1, x_2)$؛

(۸) $a \odot (b \odot (x_1, x_2)) = (a \cdot b) \odot (x_1, x_2)$؛

(۹) $\circ_K \odot (x_1, x_2) = \circ_V$؛

(۱۰) $1 \odot (x_1, x_2) = (x_1, x_2)$.

بنابر این $(V, \oplus, \odot, K)$ یک ابرفضای برداری کراسنری روی K است. □

قضیه ۲۰.۳. *اگر $(V_1, +_1, \circ_1, \tau_{V_1}, \tau_K)$ و $(V_2, +_2, \circ_2, K, \tau_{V_2}, \tau_K)$ دو ابرفضای برداری کراسنری شبه‌توپولوژیک فازی روی ابرمیدان کراسنری K باشند، آنگاه ابرفضای برداری کراسنری $(V_1 \times V_2, \oplus, \odot, K, \tau_{V_1} \times \tau_{V_2}, \tau_K)$ شبه‌توپولوژیک فازی روی ابرمیدان کراسنری K است.*

اثبات. نگاشت "$+_1$" را با h_1 ، "$+_2$" را با h_2 و "$\oplus$" را با h نشان می‌دهیم. نگاشت‌های h_1 و h_2 شبه‌پیوسته فازی هستند. پس بنا بر قضیه ۱۳.۲ به‌ترتیب نسبت به توپولوژی‌های فازی $\tau_{P^*(V_1)}$ و $\tau_{P^*(V_2)}$ پیوسته فازی هستند لذا بنابر قضیه ۹.۴ از [۱۳]

نگاشت حاصل‌ضرب

$$\begin{cases} h_1 \times h_2 : (V_1 \times V_1, \tau_{V_1} \times \tau_{V_1}) \times (V_2 \times V_2, \tau_{V_2} \times \tau_{V_2}) \to \\ (P^*(V_1 \times V_2), \tau_{P^*(V_1)} \times \tau_{P^*(V_2)}) \\ (h_1 \times h_2)((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = (h_1(x_1, y_1), h_2(x_2, y_2)) \end{cases}$$

نسبت به توپولوژی $\tau_{P^*(V_1)} \times \tau_{P^*(V_2)}$ شبه‌پیوسته فازی است. نگاشت زیر

$$\begin{cases} \alpha : (V, \tau) \times (V, \tau) \to (V_1 \times V_1, \tau_1 \times \tau_1) \times (V_2 \times V_2, \tau_2 \times \tau_2) \\ \alpha((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = ((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \end{cases}$$

بنابر قضیه ۸.۴ از [۱۳] پیوسته فازی است. لذا نگاشت $h = (h_1 \times h_2) \circ \alpha$ پیوسته فازی است. فرض کنید

$$\begin{cases} j_1 : V_1 \to V_1 \\ j_1(x) = -x \end{cases} \text{، } \begin{cases} j_2 : V_2 \to V_2 \\ j_2(x) = -x. \end{cases} \text{ و } j = j_1 \times j_2.$$

نگاشت‌های j_1 و j_2 پیوسته فازی هستند، بنابر این نگاشت

$$j : V_1 \times V_2 \to V_1 \times V_2,\ j(x_1, x_2) = (-x_1, -x_2)$$

پیوسته فازی است.

نگاشت "$\circ_1$" را با g_1 ،و "$\circ_2$" را با g_2 و "$\odot$" را با g نشان می‌دهیم. بوضوح نگاشت‌های g_1 و g_2 پیوسته فازی هستند، لذا نگاشت

$$\begin{cases} g_1 \times g_2 : (K \times V_1) \times (K \times V_2) \to V_1 \times V_2 \\ (g_1 \times g_2)((a, x_1), (a, x_2)) = (g_1(a, x_1), g_2(a, x_2)) \end{cases}$$

پیوسته فازی است. نگاشت β نیز بنابر قضیه ۱۸.۳ پیوسته فازی است . بنابراین
نگاشت $g = (g_1 \times g_2) \circ \beta$ پیوسته فازی است. □

۴ نتیجه‌گیری

ما در این تحقیق، ابرفضاهای برداری (شبه) توپولوژیک فازی را مورد مطالعه قرار دادیم و مثال‌هایی را ارائه کردیم. نشان دادیم در یک ابرفضای برداری شبه‌توپولوژیک فازی، اگر نگاشت خارج‌قسمت برای ابرفضای برداری خارج‌قسمت القا شده توسط یک زیر ابرفضا باز فازی باشد آنگاه ابرفضای برداری خارج‌قسمت نیز شبه‌توپولوژیک فازی است.. همچنین نشان دادیم حاصل‌ضرب دو ابرفضای برداری شبه‌توپولوژیک فازی روی یک ابرمیدان، یک ابرفضای برداری شبه‌توپولوژیک فازی روی آن ابرمیدان است. به‌نظر می‌رسد روند ارائه شده می‌تواند به عنوان روشی مناسب در توپولوژیکی کردن H_v-فضاهای برداری (حالت عمومی ابرفضاهای برداری) مورد استفاده قرار گیرد.

مراجع

[۱] موسوی، س.ع. ماشین‌چی، م. (۱۳۹۸) t-نرم‌های ارشمیدسی و قانون تناقض. سیستم‌های فازی و کاربردها، شماره ۲، صص. ۱ تا ۳۲.

[۲] شوقی، آ. دولتشاهی، م.ب. (۱۳۹۹) کاربرد منطق فازی در تشخیص تپش قلب نامنظم با استفاده از نوار قلب. سیستم‌های فازی و کاربردها، شماره ۱، صص. ۳۳ تا ۶۱.

[3] Ameri, R. (2003). Topological (transposition) hypergroups, *Italian Journal of Pure and Applied Mathematics*, **13**, 181-186.

[4] Ameri, R. (2005). Fuzzy hypervector spaces over valued fields. *Iranian Journal of Fuzzy Systems*, **2**, 37–47.

[5] Ameri, R., Dehghan, O.R. (2008). Fuzzy hypervector spaces. *Advances in Fuzzy Systems*, **8**, 1–9.

[6] Ameri, R., Dehghan, O.R. (2010). Fuzzy Basis of Fuzzy Hypervector Spaces. *Iranian Journal of Fuzzy Systems*, **7**(3), 97–113.

[7] Amer, R., Dehghan, O.R. (2011). Fuzzy hypervector spaces based on fuzzy singletons. *Computers and Mathematics with Applications*, **61**(10), 2933–2943.

[8] Ameri, R., Dehghan, O.R. (2011). Dimension of Fuzzy Hypervector Spaces. *Iranian Journal of Fuzzy Systems*, **8**(5), 149-166.

[9] Ameri, R., Hamidi, M., Samadifam, A. (2020). Hausdorff hypervector spaces. submitted.

[10] Chang, C. L. (1968). Fuzzy topological spaces. *Journal of mathematical Analysis and Applications*, **24**(1), 182-190.

[11] Corsini, P. (1993). Prolegomena of Hypergroup Theory. *Second edition, Aviani Editor*.

[12] Corsini, P. and Leoreanu, V. (2003) Applications of hyperstructures theory. *Advances in Mathematics, Kluwer Academic Publisher,Dordrecht*, **5**.

[13] Cristea, I., Hoskova, S. (2009). Fuzzy pseudotopological hypergroupoids. *Iranian Journal of Fuzzy Systems*, itextbf6(4), 11-19.

[14] Foster, D. H. (1979). Fuzzy topological groups. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **67**(2), 549-564.

[15] Katsaras, A. K., Liu, D. B. (1977). Fuzzy vector spaces and fuzzy topological vector spaces. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **58**(1), 135-146.

[16] Katsaras, A.K. (1981). Fuzzy topological vectors spaces I, *Fuzzy Sets and Systems*, **6**(1), 85-95.

[17] Katsaras, A.K. (1984). Fuzzy topological vector spaces II, *Fuzzy Sets and Systems*, **12**(2), 143-154.

[18] Krasner, M. (1983). A class of hyperrings and hyperfields, *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, **6**(2), 307-311.

[19] Krishna, S.V., Sarma, K.K.M. (1991). Fuzzy topological vector spaces – topological generation and normability, *Fuzzy Sets and Systems*, **41**(1), 89-99.

[20] Liang, M. J., Hai, Y. C. (1984). Fuzzy topological groups. [tFuzzy sets and systems, **12**(3), 289-299.

[21] Lowen, R. (1976).Fuzzy topological spaces and fuzzy compactness. *Journal of Mathematical analysis and applications*, **56**(3), 621-633.

[22] Marty, F. (1934). Sur une generalization de la notion de groupe, *Eight Congress Math. Scandinaves, Stockholm*, 45-90.

[23] Massouros, C.G. (1988). Free and cyclic hypermodules. *Annali di Matematica Pura ed Applicata*, **150**(1), 153–166.

[24] Rosenfeld, A. (1971). Fuzzy groups. *Journal of mathematical analysis and applications*, **35**(3), 512-517.

[25] Tahan, M.A.L. and Davvaz, B. (2020). Hyper vector spaces over Krasner hyperfields, *Journal of Algebraic Hyperstructures and Logical Algebras*, **1**(3, Special Issue (AHA2020) Dedicated to Professor Piergiulio Corsini), 61-72.

[26] Tallini, M. S. (1988). A–ipermoduli e spazi ipervettoriali. *Rivisita di Mat. Pura e Appl., Univ. Udine*, **3**, 39-48.

[27] Vougiouklis, T. (1994). Hyperstructures and their representations. *Hadronic Press, Inc*, **115**, Palm Harbor.

[28] Wong, C. K. (1974). Fuzzy topology: product and quotient theorems. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **45**(2), 512-521.

[29] Zadeh, L. A. (1965). Fuzzy sets. *Information and Control*, **8**(3), 338–353.