

همگون‌سازی اتوماتای نوتروسوفیک عمومی

مرضیه شمسی زاده*، محمدمهدی زاهدی و خدیجه ابولپور

گروه ریاضی، دانشگاه صنعتی خاتم الانبیاء بهبهان، بهبهان، ایران
گروه ریاضی، دانشگاه تحصیلات تکمیلی صنعتی و فناوری پیشرفته کرمان، کرمان، ایران
گروه ریاضی، واحد شیراز، دانشگاه آزاد اسلامی، شیراز، ایران

تاریخ پذیرش: ۱۴۰۱/۳/۲۵

تاریخ دریافت: ۱۴۰۱/۱/۱۵

نوع مقاله: علمی-پژوهشی

چکیده

در این مقاله، در ابتدا با در نظر گرفتن تعریف مجموعه‌ی نوتروسوفیک، تعریف اتوماتای نوتروسوفیک عمومی را بیان و مفهوم همگون‌سازی را ارائه می‌دهیم. سپس، الگوریتمی برای تشخیص رابطه همگون‌سازی بین دو اتوماتا ارائه داده و پیچیدگی زمانی آن را محاسبه می‌کنیم. علاوه بر این، نشان می‌دهیم که اجتماع همگون‌سازی‌ها روی دو اتوماتای نوتروسوفیک عمومی، خود یک همگون‌سازی بین آن‌هاست. همچنین، نشان می‌دهیم که اگر یک رابطه همگون‌سازی بین دو اتوماتای نوتروسوفیک عمومی برقرار باشد زبان‌های دو اتوماتای مذکور باهم برابر هستند. در ادامه، با در نظر گرفتن بزرگترین همگون‌سازی بین اتوماتای نوتروسوفیک عمومی، اتوماتای نوتروسوفیک عمومی خارج‌قسمتی را ارائه داده و نشان می‌دهیم که این اتوماتا، یک اتوماتای کمینه است که زبان اتوماتا را حفظ می‌کند. برای واضح‌تر شدن مفاهیم و قضایای ارائه شده چند مثال ارائه می‌دهیم.

۱ مقدمه

نظریه فازی، اولین بار توسط لطفی عسکرزاده^۱ [۱۴] در سال ۱۹۶۵ ارائه گردید و به سرعت کاربردهای آن در علوم مختلف گسترش یافت. یکی از این کاربردها، علوم کامپیوتر به ویژه نظریه اتوماتای فازی است که اولین بار توسط وی [۱۲] مورد بررسی قرار گرفت و در ادامه توسط محققان مختلفی توسعه یافت [۴، ۵، ۹، ۸، ۱۰]. دوست‌فاطمه و کرمر^۲ [۳] در سال ۲۰۰۵ مفهوم اتوماتای فازی را گسترش داده و مفهوم اتوماتای فازی عمومی را ارائه دادند. توسعه اتوماتای فازی به اتوماتای فازی عمومی ناشی از این واقعیت است که در تلاش برای استفاده از صورتگرایی‌های اتوماتای فازی به صورت یک ابزار مدل کردن تعدادی از کاستی‌های استنتاجی که مانع کاربرد آن برای مسایل جهان واقعی شده بود، بررسی شده است.

کمینه کردن حالت‌ها، یکی از مسایل مهم در نظریه‌ی اتوماتاست. مقاله‌های زیادی در این زمینه وجود دارد برای مثال: کمینه کردن اتوماتای حالت متناهی فازی از نوع میلی [۲] کمینه کردن اتوماتای حالت متناهی فازی با حالت‌های نهایی غیرفازی [۱] کمینه کردن اتوماتای حالت متناهی فازی قطعی با حالت‌های متناهی فازی [۶]. نظریه‌ی مایهیل-نرود علاوه بر کمینه‌سازی اتوماتای قطعی، در اثبات وجود و ساخت اتوماتای قطعی کمینه که زبان داده شده را شناسایی می‌کند، نقش مهمی را ایفا می‌کند [۶]. برای اتوماتای فازی متناهی قطعی به‌دست آوردن اتوماتای کمینه، کاری آسان است ولی برای اتوماتای غیرقطعی، چون در ابتدا باید اتوماتای غیرقطعی به یک اتوماتای قطعی تبدیل شود، به‌دست آوردن اتوماتای کمینه از نظر پیچیدگی محاسبات، کاری دشوار است و به عنوان مسایل محاسباتی سخت مطرح شده است [۴، ۱۱، ۱۳].

یکی از سوالات بسیار مهم در نظریه اتوماتا این است که دو اتوماتای داده شده چه زمانی هم ارز هستند؟ در واقع چه زمانی رفتار مشابهی دارند؟ رفتار یک اتوماتای فازی، درجه عضویت عبارت‌ها در مجموعه‌ی زبان آن اتوماتا را مشخص می‌کند.

ساماران‌دج درجه عضویت نامعینی را به عنوان یک مولفه مستقل در مقاله سال ۱۹۹۵ خود که در سال ۱۹۹۸ چاپ شد مطرح نمود [۷]. ساماران‌دج اصطلاح

¹Zadeh²Doostfatemeh and Kremer

نوتروسوفیک را پیشنهاد نمود چرا که از ریشه نوتروسوفی ترکیبی از neutre فرانسوی یا لاتین آن neutral به معنی خنثی و sophia یونانی به معنی عقل و مهارت است. در نتیجه نوتروسوفی به معنی "دانش تفکر خنثی" خواهد بود. با توجه به این معنی و بکارگیری اصطلاح خنثی در کنار مولفه‌های درستی (عضویت) و نادرستی (عدم عضویت)، تفاوت آن با فازی و فازی شهودی مشخص می‌گردد. این نوع مجموعه‌ها نه تنها درجه عضویت و درجه عدم‌عضویت را دارند بلکه درجه عدم‌تعیین و عدم سازگاری را نیز مورد توجه قرار می‌دهند. این نوع مجموعه‌ها به خاطر تنوع نظریات و کاربردها مورد توجه محققان قرار گرفته و مقالات زیادی در این مورد به چاپ رسیده است.

با توجه به اینکه برای اتوماتای غیرقطعی، همواره به دست آوردن اتوماتای کمینه یکتا نیست و هم‌ارزی اتوماتای غیرقطعی معمولاً از طریق روابط دوشبیه‌سازی مورد بررسی قرار می‌گیرد. در این مقاله سعی شده است با توجه به رابطه‌ی همگون‌سازی اتوماتای کمینه ارایه شود.

در این مقاله، در ابتدا اتوماتای نوتروسوفیک عمومی را تعریف می‌کنیم و سپس، مفهوم همگون‌سازی اتوماتای نوتروسوفیک عمومی را ارایه داده و نشان می‌دهیم که اجتماع همگون‌سازی‌های روی دو اتوماتای نوتروسوفیک عمومی، خود یک همگون‌سازی بین آن‌هاست. سپس، یک الگوریتم که رابطه‌ی همگون‌سازی را برای دو اتوماتای نوتروسوفیک عمومی بررسی می‌کند، ارایه داده و پیچیدگی زمانی الگوریتم را مورد بررسی قرار می‌دهیم. با توجه به بزرگترین همگون‌سازی روی اتوماتای نوتروسوفیک عمومی، اتوماتای نوتروسوفیک عمومی خارج‌قسمتی را ارایه داده و نشان می‌دهیم که این اتوماتای خارج‌قسمتی، یک اتوماتای کمینه است که زبان اتوماتا را حفظ می‌کند.

۲ تعاریف و مفاهیم اولیه

تعریف ۱.۲. [۲] اتوماتای فازی عمومی^۳ یک ماشین هشت‌تایی به صورت

$$\tilde{F} = (Q, X, \tilde{R}, Z, \tilde{\delta}, \omega, F_1, F_2),$$

³General fuzzy automata

است که در آن،

$$۱. Q \text{ یک مجموعه ی متناهی از حالت ها، } Q = \{q_1, q_2, \dots, q_n\}$$

$$۲. X \text{ یک مجموعه ی متناهی از الفبای ورودی، } X = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$$

$$۳. \tilde{R} \text{ مجموعه ای از حالت های آغازین فازی، } \tilde{R} \subseteq \tilde{P}(Q)$$

$$۴. Z \text{ مجموعه ای از الفبای خروجی، } Z = \{b_1, b_2, \dots, b_k\}$$

$$۵. \tilde{\delta} : (Q \times [0, 1]) \times X \times Q \rightarrow [0, 1] \text{ تابع انتقال تقویت شده،}$$

$$۶. \omega : Q \rightarrow Z \text{ تابع غیرفازی خروجی،}$$

۷. $F_1 : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ تابع تعیین عضویت نامیده می شود که برای تعیین عضویت حالت های فعال به کار می رود. مقدار تابع $F_1(\mu, \delta)$ ، توسط دو پارامتر μ و δ بدست می آید که در آن، μ مقدار عضویت ماقبل بلافاصله و δ ارزش انتقال است. روندی که توسط انتقال از حالت q_i به حالت q_j روی ورودی a_k اتفاق می افتد به صورت زیر تعریف می شود:

$$\mu^{t+1}(q_j) = \tilde{\delta}((q_i, \mu^t(q_i)), a_k, q_j) = F_1(\mu^t(q_i), \delta(q_i, a_k, q_j)).$$

عبارت بالا به این معناست که مقدار عضویت حالت q_j در زمان $t + 1$ توسط تابع F_1 با استفاده از مقدار عضویت q_i در زمان t و ارزش انتقال محاسبه می شود. انتخاب های متفاوتی برای تابع F_1 وجود دارد که مهمترین انتخاب به کاربرد مورد نظر بستگی دارد. تابع F_1 را می توان به صورت هر تابع ریاضی که در دو اصل زیر صدق کند در نظر گرفت.

$$(A) \quad 0 \leq F_1(\mu, \delta) \leq 1$$

$$(B) \quad F_1(0, 0) = 0 \text{ و } F_1(1, 1) = 1$$

۸. $F_2 : [0, 1]^* \rightarrow [0, 1]$ تابع رفع چندعضویتی است که چندعضویتی حالت های فعال را برطرف می کند. در نتیجه، ترکیب عمل توابع F_1 و F_2 روی حالت چندعضویتی q_j الگوریتم رفع چندعضویتی را معرفی خواهد کرد.

تعریف ۲.۲. یک مجموعه نوتروسوفیک A در U با سه تابع F_A ، I_A و T_A به ترتیب با نام‌های تابع درستی عضویت، عدم قطعیت عضویت و عدم عضویت مشخص می‌شود. برای هر $x \in U$ ، مقادیر $T_A(x)$ ، $I_A(x)$ و $F_A(x)$ زیرمجموعه‌هایی از اعداد حقیقی استاندارد یا غیراستاندارد $[0^-, 1^+]$ هستند، یعنی $[0^-, 1^+]$ ، $T_A : \Sigma \rightarrow [0^-, 1^+]$ ، $I_A : \Sigma \rightarrow [0^-, 1^+]$ ، $F_A : \Sigma \rightarrow [0^-, 1^+]$ هیچ محدودیتی روی حاصل جمع $T_A(x)$ ، $I_A(x)$ و $F_A(x)$ وجود ندارد. بنابراین، $0^- \leq \sup T_A(x) + \sup I_A(x) + \sup F_A(x) \leq 3^+$.

تعریف ۳.۲. مجموعه نوتروسوفیک تک‌ارزشی یک مجموعه نوتروسوفیکی است که روی فاصله استاندارد $[0, 1]$ تعریف شده باشد. یک مجموعه نوتروسوفیک تک‌ارزشی A از Q به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\{(x, T_A(x), I_A(x), F_A(x)) \mid x \in \Sigma\},$$

که در آن، $T_A, I_A, F_A : \Sigma \rightarrow [0, 1]$ به‌طوری‌که

$$0 \leq \sup_{x \in \Sigma} T_A(x) + \sup_{x \in \Sigma} I_A(x) + \sup_{x \in \Sigma} F_A(x) \leq 3.$$

در این مقاله از مجموعه نوتروسوفیک تک‌ارزشی استفاده می‌شود و برای راحتی به آن مجموعه‌ی نوتروسوفیک گفته می‌شود.

۳ کمینه سازی اتوماتای نوتروسوفیک عمومی

تعریف ۱.۳. یک اتوماتای نوتروسوفیک عمومی $\mathcal{M}$ یک ماشین نه‌تایی به صورت

$$\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \tilde{R}, Z, \tilde{\delta}, \omega, E_1, E_2, E_3),$$

است که در آن:

۱. Q مجموعه‌ی متناهی از حالت‌ها،

۲. Σ مجموعه‌ی متناهی از الفبای ورودی،

۳. $\tilde{R} \subseteq \tilde{P}(Q)$ مجموعه ای نوتروسوفیک از حالت های آغازین،

۴. $Z = \{b_1, b_2, \dots, b_k\}$ مجموعه ی متناهی از الفبای خروجی،

۵. $\tilde{\delta} : (Q \times [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]) \times \Sigma \times Q \rightarrow [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$ تابع انتقال تقویت شده نوتروسوفیک،

۶. $\omega : (Q \times [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]) \times Z \rightarrow [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$ خروجی نوتروسوفیک،

۷. $E_1 = (E_1^T, E_1^I, E_1^F)$ که $E_1^T : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ یک t -نرم است و تابع تخصیص عضویت نامیده می شود. مقدار تابع $E_1^T(T, T_\delta)$ توسط دو پارامتر T و T_δ تعیین می شود که T مقدار عضویت ماقبل بلافاصله و T_δ مقدار عضویت تابع انتقال را نشان می دهد. همچنین، $E_1^I : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ یک t -نرم است که تابع عدم قطعیت نامیده می شود. مقدار تابع $E_1^I(I, I_\delta)$ توسط دو پارامتر I و I_δ مشخص می شود، که I مقدار عدم قطعیت ماقبل بلافاصله و I_δ مقدار عدم قطعیت تابع انتقال را نشان می دهد. علاوه بر این، $E_1^F : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ یک s -نرم است و تابع عدم عضویت نامیده می شود. مقدار تابع $E_1^F(F, F_\delta)$ توسط دو پارامتر F و F_δ تعیین می شود، که F مقدار عدم عضویت ماقبل بلافاصله و F_δ مقدار عدم عضویت تابع انتقال را نشان می دهد.

در این تعریف روند انتقال از حالت q_i به q_j تحت الفبای a_k با توجه به اینکه

$$\delta(q_i, a_k, q_j) = (\delta_1(q_i, a_k, q_j), \delta_2(q_i, a_k, q_j), \delta_3(q_i, a_k, q_j)),$$

به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} T^{t+1}(q_j) &= \tilde{\delta}_1((q_i, T^t(q_i), I^t(q_i), F^t(q_i)), a_k, q_j) \\ &= E_1^T(T^t(q_i), \delta_1(q_i, a_k, q_j)), \\ I^{t+1}(q_j) &= \tilde{\delta}_2((q_i, T^t(q_i), I^t(q_i), F^t(q_i)), a_k, q_j) \\ &= E_1^I(I^t(q_i), \delta_2(q_i, a_k, q_j)), \\ F^{t+1}(q_j) &= \tilde{\delta}_3((q_i, T^t(q_i), I^t(q_i), F^t(q_i)), a_k, q_j) \\ &= E_1^F(F^t(q_i), \delta_3(q_i, a_k, q_j)), \end{aligned}$$

که

$$\begin{aligned} &\tilde{\delta}_1((q_i, T^t(q_i), I^t(q_i), F^t(q_i)), a_k, q_j) \\ &= (\tilde{\delta}_1((q_i, T^t(q_i), I^t(q_i), F^t(q_i)), a_k, q_j), \\ &\tilde{\delta}_2((q_i, T^t(q_i), I^t(q_i), F^t(q_i)), a_k, q_j), \\ &\tilde{\delta}_3((q_i, T^t(q_i), I^t(q_i), F^t(q_i)), a_k, q_j)). \end{aligned}$$

۸. $E_T = (E_T^T, E_T^I, E_T^F)$ ، که $E_T^T : [0, 1]^* \rightarrow [0, 1]$ یک s -نرم است و تابع رفع چندعضویت نامیده می‌شود، تابع رفع چند عضوی در واقع چند عضوی حالت‌های فعال را برطرف می‌کند و به هر حالت یک مقدار عضویت نسبت می‌دهد. $E_T^I : [0, 1]^* \rightarrow [0, 1]$ یک s -نرم است و تابع رفع چند عدم‌قطعیتی نامیده می‌شود. تابع رفع چند عدم‌قطعیتی در واقع چند عدم‌قطعیتی حالت‌های فعال را برطرف می‌کند و به هر حالت یک مقدار عدم‌قطعیت نسبت می‌دهد. همچنین، $E_T^F : [0, 1]^* \rightarrow [0, 1]$ یک t -نرم است و تابع رفع چند عدم‌عضوی نامیده می‌شود. تابع رفع چند عدم‌عضوی در واقع چند عدم‌عضوی حالت‌های فعال را برطرف می‌کند و به هر حالت یک مقدار عدم‌عضویت نسبت می‌دهد.

۹. $E_T = (E_T^T, E_T^I, E_T^F)$ ، که $E_T^T : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ یک t -نرم است و تابع خروجی تخصیص عضویت نامیده می‌شود. مقدار تابع $E_T^T(T, T_\omega)$ توسط دو

پارامتر T و T_ω تعیین می شود که T مقدار عضویت حالت فعال و T_ω مقدار عضویت حالت خروجی است. همچنین، $E_\gamma^I : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ یک t -نرم است. مقدار تابع $E_\gamma^I(I, I_\omega)$ توسط دو پارامتر I و I_ω تعیین می شود که I مقدار عدم قطعیت حالت فعال و I_ω مقدار عدم قطعیت حالت خروجی است.

علاوه بر این، $E_\gamma^F : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ یک s -نرم است. مقدار تابع $E_\gamma^F(F, F_\omega)$ توسط دو پارامتر F و F_ω تعیین می شود که F مقدار عدم عضویت حالت فعال و F_ω مقدار عدم عضویت حالت خروجی است. مقدار تابع خروجی با توجه به اینکه

$$\omega(q_i, b_l) = (\omega_1(q_i, b_l), \omega_2(q_i, b_l), \omega_3(q_i, b_l)),$$

به صورت زیر در نظر گرفته می شود:

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}((q_i, T^t(q_i), I^t(q_i), F^t(q_i)), b_l) \\ = (\tilde{\omega}_1((q_i, T^t(q_i), I^t(q_i), F^t(q_i)), b_l), \\ \tilde{\omega}_2((q_i, T^t(q_i), I^t(q_i), F^t(q_i)), b_l), \\ \tilde{\omega}_3((q_i, T^t(q_i), I^t(q_i), F^t(q_i)), b_l)), \end{aligned}$$

که در آن

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}_1((q_i, T^t(q_i), I^t(q_i), F^t(q_i)), b_l) &= E_\gamma^T(T^t(q_i), \omega_1(q_i, b_l)), \\ \tilde{\omega}_2((q_i, T^t(q_i), I^t(q_i), F^t(q_i)), b_l) &= E_\gamma^I(I^t(q_i), \omega_2(q_i, b_l)), \\ \tilde{\omega}_3((q_i, T^t(q_i), I^t(q_i), F^t(q_i)), b_l) &= E_\gamma^F(F^t(q_i), \omega_3(q_i, b_l)). \end{aligned}$$

مثال ۲.۳. اتوماتای نوتروسوفیک عمومی $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \tilde{\delta}, Z, \tilde{R}, \omega, E_1, E_2, E_3)$ را در نظر بگیرید که در آن، $Q = \{p_1, p_2, p_3\}$ ، $\Sigma = \{a\}$ ، $\tilde{R} = \{(p_1, \circ_1, \circ_2, \circ_3, \circ_4)\}$ و

δ به صورت زیر تعریف شده است:

$$\begin{aligned}\delta(p_1, a, p_1) &= (\circ/\mathfrak{A}, \circ/\mathfrak{A}, \circ/\mathfrak{E}), & \delta(p_1, a, p_2) &= (\circ/\mathfrak{E}, \circ/\mathfrak{D}, \circ/\mathfrak{A}), \\ \delta(p_1, a, p_3) &= (\circ/\mathfrak{A}, \circ/\mathfrak{A}, \circ/\mathfrak{A}), & \delta(p_2, a, p_2) &= (\circ/\mathfrak{A}, \circ/\mathfrak{A}, \circ/\mathfrak{A}), \\ \delta(p_2, a, p_3) &= (\circ/\mathfrak{A}, \circ/\mathfrak{A}, \circ/\mathfrak{D}), & \delta(p_3, a, p_1) &= (\circ/\mathfrak{E}, \circ/\mathfrak{A}, \circ/\mathfrak{D}), \\ \delta(p_3, a, p_2) &= (\circ/\mathfrak{E}, \circ/\mathfrak{D}, \circ/\mathfrak{A}), & \delta(p_3, a, p_3) &= (\circ/\mathfrak{D}, \circ/\mathfrak{A}, \circ/\mathfrak{A}).\end{aligned}$$

می توان E_1 را به صورت های زیر در نظر گرفت:

$$E_1^F = F \vee F_\delta, \quad E_1^I = I \wedge I_\delta, \quad E_1^T = T \wedge T_\delta. \quad ۱$$

$$T^{t+1}(p_m) = \bigvee_{i=1}^n E_1^T(T^t(p_i), \delta_1(p_i, a_k, p_m)),$$

$$I^{t+1}(p_m) = \bigvee_{i=1}^n E_1^I(I^t(p_i), \delta_2(p_i, a_k, p_m)),$$

$$F^{t+1}(p_m) = \bigwedge_{i=1}^n E_1^F(F^t(p_i), \delta_3(p_i, a_k, p_m)),$$

$$E_1^F = F + F_\delta - F.F_\delta, \quad E_1^I = I.I_\delta, \quad E_1^T = T.T_\delta. \quad ۲$$

$$T^{t+1}(p_m) = \bigvee_{i=1}^n E_1^T(T^t(p_i), \delta_1(p_i, a_k, p_m)),$$

$$I^{t+1}(p_m) = \bigvee_{i=1}^n E_1^I(I^t(p_i), \delta_2(p_i, a_k, p_m)),$$

$$F^{t+1}(p_m) = \bigwedge_{i=1}^n E_1^F(F^t(p_i), \delta_3(p_i, a_k, p_m)),$$

اگر مورد اول را در نظر بگیریم، داریم:

$$\begin{aligned}
 T^{t_1}(p_1) &= E_1^T(T^{t_0}(p_1), \delta_1(p_1, a, p_1)) = \circ/\delta \wedge \circ/\mathfrak{A} = \circ/\mathfrak{A}, \\
 I^{t_1}(p_1) &= E_1^I(I^{t_0}(p_1), \delta_1(p_1, a, p_1)) = \circ/\mathfrak{A} \wedge \circ/\mathfrak{A} = \circ/\mathfrak{A}, \\
 F^{t_1}(p_1) &= E_1^F(F^{t_0}(p_1), \delta_1(p_1, a, p_1)) = \circ/\mathfrak{A} \vee \circ/\mathfrak{A} = \circ/\mathfrak{A}, \\
 T^{t_1}(p_2) &= E_1^T(T^{t_0}(p_1), \delta_1(p_1, a, p_2)) = \circ/\delta \wedge \circ/\mathfrak{A} = \circ/\delta, \\
 I^{t_1}(p_2) &= E_1^I(I^{t_0}(p_1), \delta_1(p_1, a, p_2)) = \circ/\mathfrak{A} \wedge \circ/\delta = \circ/\mathfrak{A}, \\
 F^{t_1}(p_2) &= E_1^F(F^{t_0}(p_1), \delta_1(p_1, a, p_2)) = \circ/\mathfrak{A} \vee \circ/\mathfrak{A} = \circ/\mathfrak{A}, \\
 T^{t_1}(p_3) &= E_1^T(T^{t_0}(p_1), \delta_1(p_1, a, p_3)) = \circ/\delta \wedge \circ/\mathfrak{A} = \circ/\mathfrak{A}, \\
 I^{t_1}(p_3) &= E_1^I(I^{t_0}(p_1), \delta_1(p_1, a, p_3)) = \circ/\mathfrak{A} \wedge \circ/\mathfrak{A} = \circ/\mathfrak{A}, \\
 F^{t_1}(p_3) &= E_1^F(F^{t_0}(p_1), \delta_1(p_1, a, p_3)) = \circ/\mathfrak{A} \vee \circ/\mathfrak{A} = \circ/\mathfrak{A}, \\
 T^{t_2}(p_1) &= E_1^T(T^{t_1}(p_1), \delta_1(p_1, a, p_1)) \vee E_1^T(T^{t_1}(p_3), \delta_1(p_3, a, p_1)) \\
 &= (\circ/\mathfrak{A} \wedge \circ/\mathfrak{A}) \vee (\circ/\mathfrak{A} \wedge \circ/\mathfrak{A}) = \circ/\mathfrak{A}, \\
 I^{t_2}(p_1) &= E_1^I(I^{t_1}(p_1), \delta_1(p_1, a, p_1)) \vee E_1^I(I^{t_1}(p_3), \delta_1(p_3, a, p_1)) \\
 &= (\circ/\mathfrak{A} \wedge \circ/\mathfrak{A}) \vee (\circ/\mathfrak{A} \wedge \circ/\mathfrak{A}) = \circ/\mathfrak{A}, \\
 F^{t_2}(p_1) &= E_1^F(F^{t_1}(p_1), \delta_1(p_1, a, p_1)) \wedge E_1^F(F^{t_1}(p_3), \delta_1(p_3, a, p_1)) \\
 &= (\circ/\mathfrak{A} \vee \circ/\mathfrak{A}) \wedge (\circ/\mathfrak{A} \vee \circ/\mathfrak{A}) = \circ/\mathfrak{A}, \\
 T^{t_2}(p_2) &= E_1^T(T^{t_1}(p_1), \delta_1(p_1, a, p_2)) \vee E_1^T(T^{t_1}(p_2), \delta_1(p_2, a, p_2)) \\
 &\quad \vee E_1^T(T^{t_1}(p_3), \delta_1(p_3, a, p_2)) \\
 &= (\circ/\mathfrak{A} \wedge \circ/\mathfrak{A}) \vee (\circ/\delta \wedge \circ/\mathfrak{A}) \vee (\circ/\mathfrak{A} \wedge \circ/\mathfrak{A}) = \circ/\mathfrak{A}, \\
 I^{t_2}(p_2) &= E_1^I(I^{t_1}(p_1), \delta_1(p_1, a, p_2)) \vee E_1^I(I^{t_1}(p_2), \delta_1(p_2, a, p_2)) \\
 &\quad \vee E_1^I(I^{t_1}(p_3), \delta_1(p_3, a, p_2)) \\
 &= (\circ/\mathfrak{A} \wedge \circ/\delta) \vee (\circ/\mathfrak{A} \wedge \circ/\mathfrak{A}) \vee (\circ/\mathfrak{A} \wedge \circ/\delta) = \circ/\mathfrak{A},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F^{t_2}(p_2) &= E_1^F(F^{t_1}(p_1), \delta_2(p_1, a, p_2)) \wedge E_1^F(F^{t_1}(p_2), \delta_2(p_2, a, p_2)) \\
 &\quad \wedge E_1^F(F^{t_1}(p_3), \delta_2(p_3, a, p_2)) \\
 &= (\circ 9 \vee \circ 4) \wedge (\circ 9 \vee \circ 2) \wedge (\circ 9 \vee \circ 9) = \circ 9, \\
 T^{t_2}(p_3) &= E_1^T(T^{t_1}(p_1), \delta_1(p_1, a, p_3)) \vee E_1^T(T^{t_1}(p_2), \delta_1(p_2, a, p_3)) \\
 &\quad \vee E_1^T(T^{t_1}(p_3), \delta_1(p_3, a, p_3)) \\
 &= (\circ 1 \wedge \circ 3) \vee (\circ 1 \wedge \circ 4) \vee (\circ 1 \wedge \circ 5) = \circ 1, \\
 I^{t_2}(p_3) &= E_1^I(I^{t_1}(p_1), \delta_2(p_1, a, p_3)) \vee E_1^I(I^{t_1}(p_2), \delta_2(p_2, a, p_3)) \\
 &\quad \vee E_1^I(I^{t_1}(p_3), \delta_2(p_3, a, p_3)) \\
 &= (\circ 2 \wedge \circ 8) \vee (\circ 2 \wedge \circ 8) \vee (\circ 2 \wedge \circ 4) = \circ 2, \\
 F^{t_2}(p_3) &= E_1^F(F^{t_1}(p_1), \delta_2(p_1, a, p_3)) \wedge E_1^F(F^{t_1}(p_2), \delta_2(p_2, a, p_3)) \\
 &\quad \wedge E_1^F(F^{t_1}(p_3), \delta_2(p_3, a, p_3)) \\
 &= (\circ 9 \vee \circ 4) \wedge (\circ 9 \vee \circ 5) \wedge (\circ 9 \vee \circ 4) = \circ 9.
 \end{aligned}$$

به طور واضح دیده می‌شود که سه انتقال همزمان برای حالت‌های p_1 ، p_2 و p_3 در زمان t_2 وجود دارد.

الگوریتم زیر رابطه‌ی همگون‌سازی بین دو اتوماتای نوتروسوفیک عمومی را بررسی می‌کند. در واقع با الگوریتم زیر می‌توان بررسی کرد که آیا دو اتوماتای نوتروسوفیک عمومی داده شده رابطه‌ی همگون سازی بین آنها برقرار است یا خیر؟ سپس، با کمک این الگوریتم می‌توان اتوماتای کمینه را ارایه داد.

الگوریتم همگون سازی دو اتوماتای نوتروسوفیک عمومی

گام ۱. ورودی: اتوماتای $\mathcal{M}_1 = (Q_1, \Sigma, \tilde{\delta}, Z, \tilde{R}, \omega, E_1, E_2, E_3)$ و

$$\mathcal{M}_2 = (Q_2, \Sigma, \tilde{\delta}', Z', \tilde{R}', \omega', E_1, E_2, E_3),$$

$$q_2 \in Q_2, q_1 \in Q_1, i = 0$$

گام ۲. اگر و فقط اگر $q_1 \in \tilde{R} \Leftrightarrow q_2 \in \tilde{R}'$ اگر $q_1 \tau_i q_2$

$$T^{t_0}(q_1) = k_1, I^{t_0}(q_1) = k_2, F^{t_0}(q_1) = k_3,$$

آن گاه

$$T^{t_0}(q_2) \geq k_1, I^{t_0}(q_2) \geq k_2, F^{t_0}(q_2) \leq k_3,$$

و برعکس اگر

$$T^{t_0}(q_2) = k_1, I^{t_0}(q_2) = k_2, F^{t_0}(q_2) = k_3,$$

آن گاه

$$T^{t_0}(q_1) \geq k_1, I^{t_0}(q_1) \geq k_2, F^{t_0}(q_1) \leq k_3,$$

گام ۳. $i = i + 1$

گام ۴. اگر $q_1 \tau_i q_2$ و فقط اگر $q_1 \tau_{i-1} q_2$ برای $a \in \Sigma$ و $p_1 \in Q_1$

$$\delta_1(q_1, a, p_1) = l_1 \Rightarrow \exists p_2 \in Q_2, s.t. \delta'_1(q_2, a, p_2) \geq l_1,$$

که در آن $p_1 \tau_{i-1} p_2$ و برعکس،

$$\delta'_1(q_2, a, p_2) = l_1 \Rightarrow \exists p_1 \in Q_1, s.t. \delta_1(q_1, a, p_1) \geq l_1,$$

که در آن $p_1 \tau_{i-1} p_2$ همچنین،

$$\delta_2(q_1, a, p_1) = l_2 \Rightarrow \exists p_2 \in Q_2, s.t. \delta'_2(q_2, a, p_2) \geq l_2,$$

هنگامی که $p_1 \tau_{i-1} p_2$ و برعکس

$$\delta'_2(q_2, a, p_2) = l_2 \Rightarrow \exists p_1 \in Q_1, s.t. \delta_2(q_1, a, p_1) \geq l_2,$$

آنگاه $p_1 \tau_{i-1} p_2$. همچنین، برای $p_1 \in Q_1, a \in \Sigma$

$$\delta_3(q_1, a, p_1) = l_3 \Rightarrow \exists p_2 \in Q_2, s.t. \delta'_3(q_2, a, p_2) \leq l_3,$$

زمانی که $p_1 \tau_{i-1} p_2$ ،

گام ۵. اگر $\tau_i = \tau_{i-1}$ ، آنگاه برو به گام بعدی در غیر اینصورت برو به گام ۳،

گام ۶. $q_1 \rho q_2$ اگر و فقط اگر $q_1 \tau_i q_2$ و هرگاه

$$\omega_1(q_1, z) = l_1, \omega_2(q_1, z) = l_2, \omega_3(q_1, z) = l_3,$$

آنگاه $z' \in Z'$ وجود دارد به طوری که $\omega'_1(q_2, z) \geq l_1$ و $\omega'_2(q_2, z) \geq l_2$ و برعکس.

گام ۷. خروجی: ρ

در الگوریتم داده شده، پیچیدگی زمانی گام دوم برابر $O(|Q_1||Q_2|)$ و پیچیدگی زمانی گام چهارم برابر $O(|Q_1||Q_2||\Sigma|)$ و این الگوریتم حداکثر در $\max\{|Q_1|, |Q_2|\}$ تکرار می‌شود. پس پیچیدگی کل الگوریتم برابر $O(|Q_1||Q_2||\Sigma|(|Q_1| + |Q_2|))$ است. برای سهولت در ادامه مقاله، برای هر $q_1 \in Q_1$ و $q_2 \in Q_2$ به جای $q_1 \rho q_2$ از نماد $q_1 \simeq q_2$ استفاده می‌کنیم. علاوه بر این، $M_1 \simeq M_2$ اگر و فقط اگر برای هر حالت $q_1 \in Q_1$ وجود داشته باشد $q_2 \in Q_2$ به طوری که $q_1 \simeq q_2$ و برعکس، برای هر حالت $q_2 \in Q_2$ وجود داشته باشد $q_1 \in Q_1$ به طوری که $q_1 \simeq q_2$.

تعریف ۳.۳. گوییم بین دو اتوماتای نوتروسوفیک عمومی $\mathcal{M}_1$ و $\mathcal{M}_2$ داده شده یک رابطه‌ی همگون سازی برقرار هست اگر و فقط اگر $\mathcal{M}_1 \simeq \mathcal{M}_2$.

مثال ۴.۳. فرض کنید $i = 1, 2$ $\mathcal{M}_i = (Q_i, \Sigma, \tilde{\delta}^i, Z^i, \tilde{R}^i, \omega^i, E_1, E_2, E_3)$ ، دو اتوماتای نوتروسوفیک عمومی باشند که در آن، $\Sigma = \{a\}$ ، $Q_1 = \{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ ، $Z^1 = \{z_1, z_2\}$

$$\omega^1(p_1, z_1) = \omega^1(p_2, z_2) = \omega^1(p_3, z_1) = \omega^1(p_4, z_1) = (\circ/4, \circ/9, \circ/1),$$

$$\text{و } \tilde{R}^1 = \{(p_1, \circ/4, \circ/4, \circ/5), (p_3, \circ/3, \circ/4, \circ/1)\}$$

$$\delta^1(p_1, a, p_1) = (\circ/3, \circ/4, \circ/9), \quad \delta^1(p_1, a, p_2) = (\circ/6, \circ/4, \circ/1),$$

$$\delta^1(p_1, a, p_3) = (\circ/3, \circ/4, \circ/9), \quad \delta^1(p_1, a, p_4) = (\circ/6, \circ/4, \circ/1),$$

$$\delta^1(p_2, a, p_1) = (\circ/9, \circ/6, \circ/4), \quad \delta^1(p_2, a, p_2) = (\circ/6, \circ/4, \circ/2),$$

$$\delta^1(p_2, a, p_3) = (\circ/9, \circ/6, \circ/4), \quad \delta^1(p_2, a, p_4) = (\circ/4, \circ/1, \circ/2),$$

$$\delta^1(p_3, a, p_1) = (\circ/3, \circ/4, \circ/9), \quad \delta^1(p_3, a, p_2) = (\circ/6, \circ/4, \circ/1),$$

$$\delta^1(p_3, a, p_3) = (\circ/3, \circ/4, \circ/9), \quad \delta^1(p_3, a, p_4) = (\circ/6, \circ/4, \circ/1),$$

$$\delta^1(p_4, a, p_1) = (\circ/9, \circ/6, \circ/4), \quad \delta^1(p_4, a, p_2) = (\circ/4, \circ/1, \circ/2),$$

$$\delta^1(p_4, a, p_3) = (\circ/9, \circ/6, \circ/4), \quad \delta^1(p_4, a, p_4) = (\circ/4, \circ/1, \circ/2),$$

$$Z^2 = \{z\}, Q_2 = \{q_1, q_2\}$$

$$\delta^1(q_1, a, q_1) = (\circ/3, \circ/4, \circ/9), \quad \delta^1(q_1, a, q_2) = (\circ/6, \circ/4, \circ/1),$$

$$\delta^1(q_2, a, q_1) = (\circ/9, \circ/6, \circ/4), \quad \delta^1(q_2, a, q_2) = (\circ/4, \circ/1, \circ/2),$$

$\tilde{R}^2 = \{(q_1, \circ/2, \circ/4, \circ/5)\}$ ، $\omega^2(q_1, z) = \omega^2(q_2, z) = (\circ/4, \circ/9, \circ/1)$ با توجه به الگوریتم داده شده، به راحتی می‌توان دید که $p_4 \simeq q_2$ ، $p_3 \simeq q_1$ ، $p_2 \simeq q_2$ ، $p_1 \simeq q_1$ لذا، یک همگون سازی بین دو اتوماتای نوتروسوفیک عمومی $\mathcal{M}_1$ و $\mathcal{M}_2$ وجود دارد.

تعریف ۵.۳. فرض کنید $\mathcal{M}$ یک اتوماتای نوتروسوفیک عمومی باشد. $\mathcal{M}$ را کمینه گوئیم، هرگاه برای هر اتوماتای نوتروسوفیک عمومی $\mathcal{M}'$ که $\mathcal{M} \simeq \mathcal{M}'$ داشته باشیم $|\mathcal{M}| \leq |\mathcal{M}'|$ ، که در آن $|\mathcal{M}|$ نشان‌دهنده تعداد حالت‌های اتوماتای نوتروسوفیک عمومی $\mathcal{M}$ است.

مثال ۶.۳. اتوماتای نوتروسوفیک عمومی $\mathcal{M}_1$ و $\mathcal{M}_2$ ارایه شده در مثال ۴.۳، را در نظر بگیرید. در مثال ۴.۳، نشان دادیم که یک رابطه‌ی همگون‌سازی بین $\mathcal{M}_1$ و $\mathcal{M}_2$ برقرار است. به وضوح دیده می‌شود که $|\mathcal{M}_2| \leq |\mathcal{M}_1|$. در نتیجه، $\mathcal{M}_2$ یک اتوماتای مینیمال است.

نتیجه ۷.۳. رابطه‌ی همگون‌سازی روی کلاس همه‌ی اتوماتاهای نوتروسوفیک عمومی دارای خواص انعکاسی، تقارنی و تعدی است.

اثبات. با توجه به الگوریتم همگون‌سازی دو اتوماتای نوتروسوفیک عمومی اثبات واضح است. $\square$

قضیه ۸.۳. دو اتوماتای نوتروسوفیک عمومی

$$\mathcal{M}_k = (Q_k, \Sigma, \tilde{\delta}^k, Z^k, \tilde{R}^k, \omega^k, E_1, E_2, E_3), k = 1, 2,$$

را در نظر بگیرید. آنگاه اجتماع هر خانواده ناتهی از همگون‌سازی‌های بین $\mathcal{M}_1$ و $\mathcal{M}_2$ خود یک همگون‌سازی بین آنهاست.

اثبات. فرض کنید $\{\simeq_i \mid i \in I\}$ یک خانواده ناتهی از همگون‌سازی‌های بین دو اتوماتای نوتروسوفیک عمومی $\mathcal{M}_1$ و $\mathcal{M}_2$ باشد. فرض کنید $\simeq = \cup_{i \in I} \simeq_i$. پس داریم: $q_1 \simeq q_2$ اگر و تنها اگر $i \in I$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $q_1 \simeq_i q_2$. فرض کنید $q_1 \simeq q_2$. پس، برای بعضی

$q_1 \simeq_i q_2, i \in I$. در نتیجه، $q_1 \in \tilde{R}^1$ اگر و فقط اگر $q_2 \in \tilde{R}^2$ و همچنین، اگر $T^{t^*}(q_1) = k_1, I^{t^*}(q_1) = k_2, F^{t^*}(q_1) = k_3$ ، آنگاه $F^{t^*}(q_2) \leq k_3, I^{t^*}(q_2) \geq k_2, T^{t^*}(q_2) \geq k_1$ ، حال، فرض کنید برای

بعضی $p_1 \in Q_1$ و $a \in \Sigma$ داشته باشیم: $\delta_1^1(q_1, a, p_1) = k_1$ ، آنگاه $p_2, p'_2, p''_2 \in Q_2$ وجود دارد به طوری که $\delta_2^1(q_2, a, p_2) \geq k_1$ ، $\delta_2^1(q_2, a, p'_2) \geq k_2$ ، $\delta_2^1(q_2, a, p''_2) \leq k_3$ و $p_1 \simeq_i p_2, p_1 \simeq_i p'_2, p_1 \simeq_i p''_2$ در نتیجه، برای بعضی $p_1 \in Q_1$ و اگر $a \in \Sigma$ و $\delta_1^1(q_1, a, p_1) = k_3$ ، $\delta_1^1(q_1, a, p_1) = k_2$ ، $\delta_1^1(q_1, a, p_1) = k_1$ آنگاه $p_2, p'_2, p''_2 \in Q_2$ وجود دارد به طوری که $\delta_2^1(q_2, a, p_2) \geq k_1$ ، $\delta_2^1(q_2, a, p'_2) \geq k_2$ ، $\delta_2^1(q_2, a, p''_2) \leq k_3$ پس $q_1 \simeq q_2$ فرض کنید حال فرض کنید $q_1 \simeq_i q_2$ وجود دارد به طوری که $z \in Z^1$ و $i \in I$ $\omega_1^1(q_1, z) = l_1$ و $\omega_1^1(q_1, z) = l_2$ در نتیجه، $\omega_1^1(q_1, z) = l_3$ وجود دارد به طوری که $z' \in Z^2$ و $z' \simeq z$ وجود دارد به طوری که $\omega_1^1(q_1, z) \geq l_1$ بنا براین، ادعا برقرار است و $\simeq$ یک همگون سازی بین M_1 و M_2 است. $\square$

تعریف ۹.۳. فرض کنید $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \tilde{\delta}, Z, \tilde{R}, \omega, E_1, E_2, E_3)$ یک اتوماتای نوتروسوفیک عمومی باشد. زبان پذیرش شده توسط $\mathcal{M}$ ، یک زیرمجموعه از Σ^* است که به صورت زیر تعریف می شود:

$$\mathcal{L}(\mathcal{M}) = \{x \in \Sigma^* | \tilde{\delta}_1((q, T^{t_*}(q), I^{t_*}(q), F^{t_*}(q)), x, p) \wedge \tilde{\omega}_1((p, T^{t_*+|x|}(p), I^{t_*+|x|}(p), F^{t_*+|x|}(p)), z) \geq \circ, \\ p \in Q, z \in Z\}.$$

مثال ۱۰.۳. اتوماتای نوتروسوفیک عمومی ارائه شده در مثال ۲.۳، را در نظر بگیرید. با در نظر گرفتن $Z = \{b\}$ ، $\omega(p_2, b) = (\circ, \circ, \circ)$ ، $\omega(p_1, b) = (\circ, \circ, \circ)$ داریم:

$$\tilde{\delta}_1((p_1, T^{t_*}(p_1), I^{t_*}(p_1), F^{t_*}(p_1)), a, p_2) \wedge \tilde{\omega}_1((p_2, T^{t_*+|x|}(p_2), I^{t_*+|x|}(p_2), F^{t_*+|x|}(p_2)), b) > \circ.$$

همچنین، به وضوح دیده می شود که $L(\mathcal{M}) = a^+$.

قضیه ۱۱.۳. فرض کنید $\mathcal{M}_i = (Q_i, \Sigma, \tilde{\delta}^i, Z^i, \tilde{R}^i, \omega^i, E_1, E_2, E_3), i = 1, 2$ دو اتوماتای نوتروسوفیک عمومی باشند و $\simeq$ یک رابطه‌ی همگون‌سازی بین دو اتوماتای $\mathcal{M}_1$ و $\mathcal{M}_2$ باشد. آنگاه $\mathcal{L}(\mathcal{M}_1) = \mathcal{L}(\mathcal{M}_2)$.

اثبات. فرض کنید $\simeq$ یک همگون‌سازی بین $\mathcal{M}_1$ و $\mathcal{M}_2$ باشد. فرض کنید $x \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_1)$ پس وجود دارد $p, q \in Q_1$ به‌قسمی‌که

$$\begin{aligned} & \tilde{\delta}_1((q, T^{t_0}(q), I^{t_0}(q), F^{t_0}(q)), x, p) \\ & \wedge \tilde{\omega}_1(p, T^{t_0+|x|}(p), I^{t_0+|x|}(p), F^{t_0+|x|}(p), z) \geq 0. \end{aligned}$$

فرض کنید $x = a_1 a_2 \dots a_n$ پس داریم:

$$\begin{aligned} & \tilde{\delta}_1((q, T^{t_0}(q), I^{t_0}(q), F^{t_0}(q)), a_1 \dots a_n, p) \\ & \wedge \tilde{\omega}_1(p, T^{t_n}(p), I^{t_n}(p), F^{t_n}(p), z) \geq 0. \end{aligned}$$

پس وجود دارد $p_0 = p, p_1, p_2, \dots, p_n = p'$ به‌قسمی‌که

$$\tilde{\delta}_1((p_0, T^{t_0}(p_0), I^{t_0}(p_0), F^{t_0}(p_0)), a_1, p_1) \geq 0,$$

$$\tilde{\delta}_1((p_1, T^{t_1}(p_1), I^{t_1}(p_1), F^{t_1}(p_1)), a_2, p_2) \geq 0,$$

.

.

.

$$\tilde{\delta}_1((p_{n-1}, T^{t_{n-1}}(p_{n-1}), I^{t_{n-1}}(p_{n-1}), F^{t_{n-1}}(p_{n-1})), a_n, p_n) \geq 0,$$

همچنین، $T^n(p) \geq 0$ و $\omega_1(p, z) \geq 0$ بنابراین، $T^{t_0}(p_0) \geq 0$. $\delta_1^1(p_1, a_2, p_2) \geq 0, \dots, \delta_1^1(p_{n-1}, a_n, p_n) \geq 0, \delta_1^1(p_0, a_1, p_1) \geq 0$ پس وجود دارد $q_0 \in \tilde{R}^2$ به‌طوری‌که، $p_0 \simeq q_0$ و $T^{t_0}(q_0) \geq 0$ چون $p_0 \simeq q_0$ و $\delta_1^1(p_0, a_1, p_1) \geq 0$ پس وجود دارد $q_1 \in Q_2$ به‌طوری‌که $\delta_1^1(q_0, a_1, q_1) \geq 0$ و

$q_1 \simeq p_1$. همین روند را ادامه می دهیم تا $q_{n-1} \in Q_2$ به دست آید به طوری که $q_{n-1} \simeq p_{n-1}$. چون $\delta_1^1(p_{n-1}, a_n, p_n) \geq 0$ پس وجود دارد $q_n \in Q_2$ به طوری که $q_n \simeq p_n$ و $\delta_1^2(q_{n-1}, a_n, q_n) \geq 0$. بنابراین، $x \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_2)$. $\square$

تعریف ۱۲.۳. فرض کنید $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \tilde{\delta}, Z, \tilde{R}, \omega, E_1, E_2, E_3)$ یک اتوماتای نوتروسوفیک عمومی باشد. گوییم $q \in Q$ یک حالت قابل دسترس است اگر و فقط اگر $x \in \Sigma^*$ وجود داشته باشد به طوری که $\tilde{\delta}_1((p, T^{t^*}(p), I^{t^*}(p), F^{t^*}(p)), x, q) > 0$ هر $p \in \tilde{R}$.

مثال ۱۳.۳. اتوماتای نوتروسوفیک عمومی ارائه شده در مثال ۴.۳ را در نظر بگیرید. همه ی حالت های آن قابل دسترس هستند.

تعریف ۱۴.۳. دو اتوماتای نوتروسوفیک عمومی

$$\mathcal{M}_i = (Q_i, \Sigma, \tilde{\delta}^i, Z^i, \tilde{R}^i, \omega^i, E_1, E_2, E_3), i = 1, 2,$$

را در نظر بگیرید. یک هم ریخت از $\mathcal{M}_1$ به $\mathcal{M}_2$ ، یک تابع پوشایی مانند f از Q_1 به Q_2 است به طوری که برای هر $q, q' \in Q_1$ ، $a \in \Sigma$ و $b_1, b_2 \in Z$ شرایط زیر برقرار باشد:

$$1. \quad T^{t^*}(q) > 0, I^{t^*}(q) > 0, F^{t^*}(q) < 0, \text{ اگر و فقط اگر } T^{t^*}(f(q)) > 0, I^{t^*}(f(q)) > 0, F^{t^*}(f(q)) < 0.$$

$$2. \quad \delta_1^1(q, a, q') > 0, \delta_1^2(f(q), a, f(q')) > 0, \text{ اگر و فقط اگر } \delta_1^1(q, a, q') > 0, \delta_1^2(f(q), a, f(q')) > 0 \text{ و } \delta_1^1(q, a, q') < 1 \text{ و } \delta_1^2(f(q), a, f(q')) < 1.$$

$$3. \quad \omega_1^1(q, z_1) > 0, \omega_1^2(f(q), z_1) > 0, \text{ اگر } \omega_1^1(q, z_2) > 0, \omega_1^2(f(q), z_2) > 0 \text{ و همچنین, اگر } \omega_1^1(q, z_3) < 1 \text{ آنگاه } \omega_1^2(f(q), z_3) < 1.$$

برای بعضی $z_1, z_2, z_3 \in Z$.

از طرفی f را یکریخت گوییم اگر و فقط اگر f هم ریخت و یک به یک باشد و برای

بعضی $z_1, z_2, z_3 \in Z$ داشته باشیم: $\omega_1(q, z_1) > 0, \omega_2(q, z_2) > 0, \omega_3(q, z_3) < 1$
اگر و فقط اگر $\omega_1(f(q), z_1) > 0, \omega_2(f(q), z_2) > 0, \omega_3(f(q), z_3) < 1$.

تعریف ۱۵.۳. اتوماتای نوتروسوفیک عمومی $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \tilde{\delta}, Z, \tilde{R}, \omega, E_1, E_2, E_3)$ که همه‌ی حالت‌های آن قابل دسترس باشند را در نظر بگیرید. فرض کنید $\simeq$ اجتماع همه‌ی همگون‌سازی‌های روی $\mathcal{M}$ باشد. در این صورت اتوماتای نوتروسوفیک عمومی خارج‌قسمتی $\mathcal{M}'$ را به صورت زیر داریم: $\mathcal{M}' = (Q', \Sigma, \tilde{\delta}', Z, \tilde{R}', \omega', E_1, E_2, E_3)$ که در آن $Q' = \{[q] | q \in Q\}$ ، $[q] = \{p \in Q | q \simeq p\}$ و $\tilde{R}' = \{[q] | q \in \tilde{R}\}$ و همچنین، تعریف می‌کنیم $\tilde{\delta}' = (Q' \times [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]) \times \Sigma \times Q \rightarrow [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$ به‌طوری‌که

$$\delta'_1([q], a, [p]) = \vee \{\delta_1(q, a, p') | p' \simeq p\},$$

$$\delta'_2([q], a, [p]) = \vee \{\delta_2(q, a, p') | p' \simeq p\},$$

$$\delta'_3([q], a, [p]) = \wedge \{\delta_3(q, a, p') | p' \simeq p\},$$

$F^{t*}([q]) = I^{t*}([q]) = \vee \{I^{t*}(q') | q \simeq q'\}$ ، $T^{t*}([q]) = \vee \{T^{t*}(q') | q \simeq q'\}$
 $\tilde{\omega}' : (Q' \times [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]) \times Z \rightarrow [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$ و $\wedge \{F^{t*}(q') | q \simeq q'\}$
[۰, ۱] که در آن

$$\omega'_1([q], z) = \vee \{\omega_1(q', z) | q' \simeq q\}$$

$$\omega'_2([q], z) = \vee \{\omega_2(q', z) | q' \simeq q\}$$

$$\omega'_3([q], z) = \wedge \{\omega_3(q', z) | q' \simeq q\}.$$

واضح است که $\tilde{\delta}'$ و $\tilde{\omega}'$ خوش‌تعریف هستند.

مثال ۱۶.۳. اتوماتای نوتروسوفیک عمومی $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \tilde{\delta}, Z, \tilde{R}, \omega, E_1, E_2, E_3)$ را در نظر بگیرید که در آن $Q = \{q_0, q_1, q_2\}$ ، $\Sigma = \{\sigma\}$ ، $Z = \{z_1, z_2, z_3\}$

$$\omega(q_0, z_1) = \omega(q_1, z_1) = \omega(q_2, z_1) = (\circ/2, \circ/7, \circ/4)$$

$$\delta(q_0, \sigma, q_0) = (\circ/6, \circ/8, \circ/2), \quad \delta(q_0, \sigma, q_1) = (\circ/5, \circ/8, \circ/7),$$

$$\delta(q_0, \sigma, q_2) = (\circ/6, \circ/8, \circ/2), \quad \delta(q_1, \sigma, q_0) = (\circ/6, \circ/9, \circ/2),$$

$$\delta(q_1, \sigma, q_1) = (\circ/8, \circ/9, \circ/3), \quad \delta(q_1, \sigma, q_2) = (\circ/6, \circ/9, \circ/2),$$

$$\delta(q_2, \sigma, q_0) = (\circ/6, \circ/8, \circ/2), \quad \delta(q_2, \sigma, q_1) = (\circ/5, \circ/8, \circ/7),$$

$$\delta(q_2, \sigma, q_2) = (\circ/6, \circ/8, \circ/2).$$

همچنین، $\tilde{R} = \{q_0, q_2\}$ ، که در آن $F^{t_0}(q_0) = \circ/6, I^{t_0}(q_0) = \circ/5, T^{t_0}(q_0) = \circ/4$ ، $F^{t_0}(q_2) = \circ/6, I^{t_0}(q_2) = \circ/5, T^{t_0}(q_2) = \circ/4$ ، $[q] = [q_2]$ ، با توجه به تعریف ۱۲.۳، $\mathcal{M}' = (Q', \Sigma, \tilde{\delta}', Z, \tilde{R}', \omega', E_1, E_2, E_3)$ اتوماتای نوتروسوفیک عمومی را به صورت زیر داریم: $I^{t_0}([q_0]) = \circ/5, T^{t_0}([q_0]) = \circ/4, Q' = \{[q_0], [q_1]\}$ ، $F^{t_0}([q_0]) = \circ/6$

$$\delta([q_0], \sigma, [q_0]) = (\circ/6, \circ/8, \circ/2), \quad \delta([q_0], \sigma, [q_1]) = (\circ/5, \circ/8, \circ/7),$$

$$\delta([q_1], \sigma, [q_0]) = (\circ/6, \circ/9, \circ/2), \quad \delta([q_1], \sigma, [q_1]) = (\circ/8, \circ/9, \circ/3),$$

$$\omega([q_0], z_1) = (\circ/2, \circ/7, \circ/4) = \omega([q_1], z_1) \text{ و}$$

در ادامه مقاله، اجتماع همه‌ی همگون سازی‌های روی اتوماتای نوتروسوفیک عمومی $\mathcal{M}$ را بزرگترین همگون سازی روی $\mathcal{M}$ گوئیم.

قضیه ۱۷.۳. فرض کنید $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \tilde{\delta}, Z, \tilde{R}, \omega, E_1, E_2, E_3)$ یک اتوماتای نوتروسوفیک عمومی باشد به طوری که همه‌ی حالت‌های آن قابل دسترس باشند. فرض کنید $\simeq$ بزرگترین همگون سازی روی Q باشد. اتوماتای نوتروسوفیک عمومی خارج قسمتی $\mathcal{M}'$ تعریف شده در تعریف ۱۵.۳، روی $\mathcal{M}$ ، با $\mathcal{M}$ هم ریخت است.

اثبات. تعریف کنید $f: Q \rightarrow Q'$ که در آن $f(q) = [q]$ و $[q] = \{p \in Q | p \simeq q\}$.
۱. فرض کنید $I^{t_0}(q) > \circ, T^{t_0}(q) > \circ, F^{t_0}(q) < 1$. با توجه به تعریف $I^{t_0}([q]) > \circ, T^{t_0}([q]) > \circ, F^{t_0}([q]) < 1$ و $I^{t_0}([q]) > \circ$ حال فرض کنید که $I^{t_0}([q]) > \circ$

• $I^{t^*}([q]) > ۱$ و $F^{t^*}([q]) < ۱$ آن‌گاه وجود دارد $q' \in [q]$ به‌طوری‌که $T^{t^*}(q') > ۰$.
 • $I^{t^*}(q) > ۰$ و $F^{t^*}(q) < ۱$ به‌طور مشابه.

۲. واضح است که اگر $\delta_1(q, a, q') > ۰$ ، $\delta_2(q, a, q') > ۰$ و $\delta_3(q, a, q') < ۱$ ،
 آن‌گاه $\delta'_1(f(q), a, f(q')) > ۰$ ، $\delta'_2(f(q), a, f(q')) > ۰$ و $\delta'_3(f(q), a, f(q')) < ۱$.
 درنتیجه، $\delta'_1([q], a, [q']) > ۰$ ، $\delta'_2([q], a, [q']) > ۰$ و $\delta'_3([q], a, [q']) < ۱$. حال
 فرض کنید $\delta'_1([q], a, [q']) > ۰$ ، $\delta'_2([q], a, [q']) > ۰$ و $\delta'_3([q], a, [q']) < ۱$. لذا
 وجود دارد $q' \simeq q''_1 \simeq q''_2 \simeq q''_3$ به‌طوری‌که $\delta_1(q, a, q'') > ۰$ ، $\delta_2(q, a, q'') > ۰$ و $\delta_3(q, a, q'') > ۰$.
 بنابراین، ادعا برقرار است.

۳. حال فرض کنید $\omega_1(q, z_1) > ۰$ ، $\omega_2(q, z_2) > ۰$ و $\omega_3(q, z_3) < ۱$.
 آن‌گاه باتوجه به تعریف داریم: $\omega'_1([q], z_1) > ۰$ ، $\omega'_2([q], z_2) > ۰$ و $\omega'_3([q], z_3) < ۱$.
 به‌وضوح دیده می‌شود که f یک تابع پوشاست.
 درنتیجه، f یک هم‌ریخت از M به M' است. $\square$

قضیه ۱۸.۳. تنها همگون‌سازی روی اتوماتای نوتروسوفیک عمومی خارج‌قسمتی M'
 بیان شده در تعریف ۱۵.۳، خودش است.

اثبات. فرض کنید $\sim$ یک همگون‌سازی روی اتوماتای M' باشد.
 فرض کنید $[p] \neq [q]$ و از طرفی $[p] \sim [q]$. پس داریم: $p \simeq [p] \sim [q] \simeq q$.
 بنابراین، $p \sim q$. درنتیجه، $[p] = [q]$ که این یک تناقض است. لذا $\sim$
 یک رابطه‌ی همانی است. $\square$

قضیه ۱۹.۳. فرض کنید M یک اتوماتای نوتروسوفیک عمومی باشد به‌قسمتی که همه‌ی
 حالت‌های آن قابل‌دسترس باشند. فرض کنید $\simeq$ بزرگترین همگون‌سازی روی Q باشد.
 آن‌گاه اتوماتای نوتروسوفیک عمومی خارج‌قسمتی M' ، یک اتوماتای نوتروسوفیک
 عمومی کمینه است.

اثبات. با توجه به قضیه ۱۱.۳، واضح است که M' یک اتوماتای
 نوتروسوفیک عمومی کمینه است. $\square$

قضیه ۲۰.۳. فرض کنید $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \tilde{\delta}, Z, \tilde{R}, \omega, E_1, E_2, E_3)$ یک اتوماتای نوتروسوفیک عمومی باشد به طوری که همه ی حالت های آن قابل دسترس باشند و $\mathcal{M}'$ اتوماتای نوتروسوفیک عمومی خارج قسمتی $\mathcal{M}$ باشد. آنگاه زبان هر دو اتوماتا یکسان است.

اثبات. فرض کنید $x = a_1 a_2 \dots a_n \in \mathcal{L}(\mathcal{M})$ پس $p, q \in Q$ و $z \in Z$ وجود دارد به طوری که

$$\tilde{\delta}_1^*((p, T^{t_0}(p), I^{t_0}(p), F^{t_0}(p)), x, q) \wedge \tilde{\omega}_1(q, T^{t_n}(q), I^{t_n}(q), F^{t_n}(q), z) > \circ.$$

پس وجود دارد $p_1, \dots, p_{n-1} \in Q$ به طوری که

$$\tilde{\delta}_1((p, T^{t_0}(p), I^{t_0}(p), F^{t_0}(p)), a_1, p_1) > \circ,$$

$$\tilde{\delta}_1((p_1, T^{t_1}(p_1), I^{t_1}(p_1), F^{t_1}(p_1)), a_2, p_2) > \circ, \dots,$$

$$\tilde{\delta}_1((p_{n-1}, T^{t_{n-1}}(p_{n-1}), I^{t_{n-1}}(p_{n-1}), F^{t_{n-1}}(p_{n-1})), a_n, q) > \circ,$$

$\delta'_1([p], a_1, [p_1]) > \circ$ و $T^{t_0}([p]) > \circ$ با توجه به تعریف، $T^{t_n}(q) > \circ$ ، $\omega_1(q, z) > \circ$ ، $\delta'_1([p_1], a_2, [p_2]) > \circ, \dots, \delta'_1([p_{n-1}], a_n, [q]) > \circ$ ، در نتیجه، $x \in \mathcal{L}(\mathcal{M}')$ حال، فرض کنید $x = a_1 a_2 \dots a_n \in \mathcal{L}(\mathcal{M}')$ آنگاه وجود دارد $z \in Z$ و $[p], [q] \in Q'$ به قسمی که

$$\tilde{\delta}_1^*(([p], T^{t_0}([p]), I^{t_0}([p]), F^{t_0}([p])), a_1 a_2 \dots a_n, [q])$$

$$\wedge \tilde{\omega}_1([q], T^{t_n}([q]), I^{t_n}([q]), F^{t_n}([q]), z) > \circ.$$

پس وجود دارد $[p_1], [p_2], \dots, [p_n] \in Q$ به قسمی که

$$\tilde{\delta}'_*((([p], T^{t_*}([p]), I^{t_*}([p]), F^{t_*}([p])), a_1, [p_1])) > \circ$$

$$\tilde{\delta}'_*((([p_1], T^{t_*}([p_1]), I^{t_*}([p_1]), F^{t_*}([p_1])), a_2, [p_2])) > \circ$$

.

.

.

$$\tilde{\delta}'_*((([p_{n-1}], T^{t_*}([p_{n-1}]), I^{t_*}([p_{n-1}]), F^{t_*}([p_{n-1}])), a_n, [q])) > \circ$$

$$\omega_1([q], z) > \circ.$$

آنگاه با توجه به تعریف M' وجود دارد $p'_1 = p_1$ به قسمی که $\delta_1(p, a_1, p'_1) > \circ$ و $T^{t_*}(p) > \circ$ با توجه به اینکه $\tilde{\delta}'$ خوش تعریف است پس وجود دارد $p'_2 = p_2$ به قسمی که $\delta_1(p'_1, a_2, p'_2) > \circ$ همین روند را ادامه می دهیم. پس وجود دارد $q' = q$ به قسمی که $\delta_1(p'_{n-1}, a_n, q') > \circ$ از طرفی با توجه به تعریف M' ، $\omega_1(q', z) > \circ$ ، در نتیجه $x \in \mathcal{L}(M)$ و ادعا برقرار است. $\square$

۴ نتیجه گیری

در این مقاله، اتوماتای نوتروسوفیک عمومی را تعریف کرده و سپس، مفهوم همگون سازی اتوماتای نوتروسوفیک عمومی را ارائه دادیم. سپس، الگوریتمی برای تشخیص رابطه همگون سازی بین دو اتوماتا ارائه دادیم و پیچیدگی زمانی آن را محاسبه کردیم. ثابت کردیم که اجتماع همگون سازی های روی دو اتوماتای نوتروسوفیک عمومی، خود یک همگون سازی بین آنهاست. با توجه به بزرگترین همگون سازی روی اتوماتای نوتروسوفیک عمومی، اتوماتای نوتروسوفیک عمومی خارج قسمتی را ارائه دادیم و نشان دادیم که این اتوماتای

خارج قسمتی، یک اتوماتای کمینه است که زبان اتوماتا را حفظ می کند. برای کارهای آتی سعی بر آن است اتوماتای نوتروسوفیک عمومی در حالی که مجموعه حالت های آن یک گروه متناهی باشد مورد بررسی قرار گیرد. همچنین، اتوماتای نوتروسوفیک عمومی از دیدگاه توپولوژی مورد تجزیه و تحلیل قرار گیرد.

مراجع

- [1] N. C. Basak, A. Gupta, "On quotient machines of a fuzzy automaton and the minimal machine." *Fuzzy Sets and Systems* 125.2 (2002): 223-229.
- [2] W. Cheng, Z. W. Mo, "Minimization algorithm of fuzzy finite automata." *Fuzzy Sets and Systems* 141.3 (2004): 439-448.
- [3] M. Doostfatemeh, S. C. Kremer, New directions in fuzzy automata, *International Journal of Approximate Reasoning*, 38.2 (2005), 175-214.
- [4] M. R. Gary, D. S. Johnson, *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-completeness*, (1979).
- [5] M. Ghorani, S. Moghari, (2021), Decidability of the minimization of fuzzy tree automata with membership values in complete lattices, *Journal of Applied Mathematics and Computing*, in press, <https://doi.org/10.1007/s12190-021-01529-6>
- [6] A. Mateescu, et al. "Lexical analysis with a simple finite-fuzzy-automaton model." *J. UCS The Journal of Universal Computer Science*. Springer Berlin Heidelberg, 1996. 292-311.
- [7] F. Samarandche, *Neutrosophy, Neutrosophic Probability, Sets and Logic*, Amer. Res. Press, Rehoboth, 2006.
- [8] M. Shamsizadeh, M. M. Zahedi, Bisimulation of type 2 for BL- general fuzzy automata, *Soft Computing*, 23 (2019), 9843-9852.

- [9] M. Shamsizadeh, M. M. Zahedi, Kh. Abolpour, Admissible Partition for BL- general fuzzy automata, Iranian Journal of Fuzzy Systems, 15 (2018), 79-90.
- [10] M. Shamsizadeh, M. M. Zahedi, Kh. Abolpour, Bisimulation for BL-general fuzzy automata, Iranian Journal of Fuzzy Systems (2016).
- [11] S. S. Skiena, The algorithm design manual: Text. Vol. 1. Springer Science & Business Media, 1998.
- [12] W.G. Wee, (1967), On generalization of adaptive algorithm and application of the fuzzy sets concept to pattern classification. Ph.D. thesis, Purdue University, Lafayette, IN.
- [13] S. Yu, Regular languages, in: G. Rozenberg, A. Salomaa(Eds.), Hand book of Formal Languages, vol.1, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1997, 41–105.
- [14] L. A. Zadeh, Fuzzy sets, Information and control, 8 (1965), 338-353.