

تشابه در L -منطق‌ها

سعیده ظهیری

بخش ریاضی، مرکز آموزش عالی اقلید، اقلید، ایران

تاریخ دریافت: ۱۴۰۱/۱/۲۷

تاریخ پذیرش: ۱۴۰۱/۳/۲۵

نوع مقاله: علمی-پژوهشی

چکیده

در این مقاله، مفهوم L -جبرهای متشابه را معرفی می‌کنیم و خواص این جبر جدید را بررسی می‌نماییم. یک L -جبر متشابه یک L -جبر است که به یک عملگر دوتایی S (تشابه) مجهز شده است. وجود عملگر تشابه، باعث بوجود آمدن خواص ویژه در این ساختار جبری می‌شود. در ادامه مطالعه این ساختار جبری، خواصی از این جبر بدست می‌آوریم و به این صورت، این جبر را طبقه بندی می‌کنیم. برای هر L -جبر X زیر مجموعه های X -فازی را تعریف می‌کنیم و ارتباط این زیر مجموعه ها را با L -جبرهای متشابه بررسی می‌کنیم. علاوه بر این، ایدال‌های متشابه (S -ایدال) در L -جبرهای متشابه را تعریف می‌کنیم. با ارایه چند گزاره، قضیه و مثال، ویژگی‌های آن را بررسی می‌نماییم. سپس، L -جبر قابل عرضه را تعریف کرده و با بررسی خواص این نوع از ساختارهای جبری ارتباط آن‌ها را با ایدال‌های اول مینیمال بدست می‌آوریم. علاوه بر این، منطق L -متشابه (SL) را به عنوان یک منطق فازی جدید معرفی می‌کنیم. برای ارایه این منطق فازی، ابتدا با بیان مقدماتی، فرمول‌های این منطق را معرفی کرده و اصول موضوعه را بیان می‌کنیم و با ارایه قواعد استنتاج این منطق را ارایه می‌دهیم. سپس قضیه صحت و تمامیت را برای این منطق فازی اثبات می‌کنیم.

عبارات و کلمات کلیدی: منطق فازی، L -منطق، L -جبر، ایدال، L -جبر متشابه.

Email(s): saeede.zahiri@yahoo.com, s.zahiri@eghlid.ac.ir.

۱۴۰۱ انجمن سیستم‌های فازی ایران

Mathematics Subject Classification: 08B50, 03G25, 03C05

۱ سرآغاز

یکی از محبوب‌ترین نظریه‌هایی که تاکنون ارایه شده، نظریه مجموعه‌های فازی است. پرفسور لطفی زاده در سال ۱۹۶۵ برای اولین بار با معرفی نظریه مجموعه‌های فازی مقدمات مدل‌سازی اطلاعات نادقیق و استدلال تقریبی با معادله‌های ریاضی را فراهم نمود که در نوع خود تحولی عظیم در ریاضیات و منطق کلاسیک بوجود آورد. ایده نظریه مجموعه‌های فازی با این عبارت توسط پرفسور لطفی زاده مطرح شد: ”ما نیازمند یک نوع دیگری از ریاضیات هستیم تا بتوانیم ابهامات و عدم دقت رویدادها را مدل‌سازی نماییم، مدلی که متفاوت از نظریه احتمالات است.“ لذا نظریه فازی برای بیان و تشریح عدم قطعیت و عدم دقت در رویدادها به کار می‌رود که براساس منطق چند ارزشی بوجود آمده است. پرفسور زاده مفهوم مجموعه‌های فازی را روی بازه $[۰,۱]$ معرفی کردند.

برای اولین بار در سال ۱۹۲۰ لوکاسیویچ^۱ سیستم منطق‌های چند ارزشی را معرفی کرد. این منطق ابزاری قدرتمند برای مطالعه و شناخت مجموعه‌های فازی و منطق‌های فازی شد. جبرهای منطقی مختلف یک سیستم معنایی از منطق‌های غیرکلاسیک می‌باشند که کاربردهای مختلفی در سایر علوم از جمله علوم کامپیوتر داشته‌اند. به طور مثال، شبکه‌های مانده، BL -جبرها، MV -جبرها و

مفاهیم هم‌ارزی، تشابه، ترتیب جزئی و ترتیب خطی نقش اساسی در علوم محض و کاربردی بازی می‌کنند. این نوع جبرها، توسیعی از روابط فازی هستند. در بکارگیری زبان روزمره و طبیعی برای تبادل دانش و اطلاعات، مقدار زیادی عدم دقت، ابهام یا فازی یافت می‌شود. هدف اصلی ما مدل‌سازی، نمایش و ترسیم راه‌های استنتاج و استدلال با این گونه ساختارهای جبری می‌باشد. ساختارهای جبری برای طیف وسیعی از برنامه‌های کاربردی از جمله کنترل فازی، خوشه بندی، منطق فازی، برنامه نویسی‌ها و تمام مفاهیم مربوط به آن‌ها کاربرد دارند. به وضوح لازم است که سیستم‌های منطقی جدید ایجاد شود تا به عنوان یک پایگاه منطقی برای پردازش اطلاعات غیرقطعی و فازی از آن استفاده شود. به همین دلیل انواع سیستم‌های منطقی غیرکلاسیک معرفی و مورد مطالعه قرار گرفته‌اند. منطق‌های غیرکلاسیک ابزاری قوی در علوم کامپیوتر و مجموعه‌های فازی می‌باشند. لذا تعریف و بررسی خواص جبری- L منطقی همچون L -جبرها به

بدست آوردن خواص بیشتری از جبرهای فازی و پیشبرد کاربردهای مجموعه های فازی خواهد شد. به علاوه، بررسی و شناخت خواص این مدل جبری منجر به توسیع خواص منطق های غیر کلاسیک خواهد شد.

در سال ۲۰۰۸، L -جبرها توسط رامپ^۲ معرفی شدند [۸]. برای هر مجموعه X با یک عملگر دوتایی که $X \times X \rightarrow X$ ، $M(X)$ یک مونوئید آزاد روی X نامیده می شود. رامپ ثابت کرد اگر تساوی

$$(x \cdot y) \cdot (x \cdot z) = (y \cdot x) \cdot (y \cdot z) \quad (L)$$

برای هر $x, y, z \in X$ برقرار باشد، می توان آن را به $M(X)$ منتقل نمود. رامپ ارتباط L -جبرها و گروه ها را بررسی و کاربرد آن ها را در جبر، آنالیز و هندسه بیان کرد. مفهوم تشابه اولین بار توسط زاده معرفی شد و تمرکز آن بر روی مفاهیم هم ارزی بود. از آن زمان، شباهت برای طیف وسیعی از کاربردها استفاده شده است، مانند خوشه بندی، کنترل فازی و برنامه نویسی منطق فازی و ... [۳، ۶، ۷]. تشابه برای اولین بار توسط کاسترو^۳ روی منطق های فازی اساسی t -نرم معرفی شد [۲]. این مفهوم به منطق های فازی اساسی t -نرم مختلف همچون MV -جبرها [۴]، BL -جبرهای تکین [۱۴]، جبرهای مثلثی توسیع داده شده است [۱۳]. گرلا^۴ و همکارش تشابه را روی MV -جبرها به این صورت تعریف کردند که یک عملگر دوتایی S را به زبان MV -جبرها اضافه کردند و ویژگی هایی اساسی در مورد تشابه ها در این ساختار بدست آوردند. علاوه بر این، گرلا و همکارش، یک زبان منطقی از این ساختار تهیه کردند. منطق معرفی شده، معادل معنایی این ساختار هست، در ادامه، قضیه صحت و تمامیت برای این منطق جدید اثبات کردند. سپس ونگ و همکارانش مفهوم تشابه را به MTL -جبرها توسعه دادند و این ساختار جبری را مورد مطالعه قرار دادند. همچنین منطق این جبر را معرفی و قضیه صحت و تمامیت را برای این منطق فازی اثبات کردند [۱۱]. ظهیری و همکارش جبرهای مثلثی و BL -جبرهای تکین را به تشابه مجهز کردند و ویژگی های جدیدی برای این ساختارها بدست آوردند و با معرفی منطق مثلثی تشابه و منطق اساسی تشابه، به اثبات قضایایی اساسی در این منطق ها پرداختند. ایشان در این مقالات، خواص

Rump^۲

Castro^۳

Gerla^۴

جدیدی در منطق های فازی ارایه کردند [۱۳، ۱۴]. رویکردهای مختلف توسعه یافته برای مدل سازی تشابه، رویکردهای مبتنی بر ویژگی، شبکه محور و هندسی هستند.

مفهوم تشابه از روانشناسی سرچشمه گرفته است و به تعیین اینکه چرا و چگونه موجودیت ها به دسته ها طبقه بندی می شوند و چرا برخی دسته ها با یکدیگر قابل مقایسه هستند و برخی قابل مقایسه نیستند، می پردازد. مقایسه معانی، چالش اصلی در سنجش تشابه معنایی است. قضاوت انسان در مورد شباهت بیش از پنجاه سال در تحقیقات روانشناسی مورد بررسی قرار گرفته است [۵].

بسیاری از مسایل و سوالات مربوط به مهندسی، علوم اجتماعی، علوم پزشکی، اقتصاد و ... را بهتر میتوان با علوم جدید پاسخ داد. زیرا در این گونه مسایل با انواع مختلف عدم قطعیت مواجه هستیم. در سالهای اخیر برای نظریه هایی همچون نظریه مجموعه های فازی، نظریه احتمال و نظریه مجموعه های ناهموار جهت برخورد با عدم قطعیت ها کاربردی بوده اند. نظریه مجموعه های فازی از آن دسته از نظریه هایی است که به سرعت پیشرفت کرد و تاکنون کاربردهای فراوانی در سایر علوم داشته است.

با در نظر گرفتن این پیشینه، پژوهش حاضر با هدف آماده سازی L -جبر هایی که به عملگر دوتایی تشابه مجهز شدند و L -جبر تشابه نام گرفتند، تهیه شده است. ما برخی از خواص ویژه این جبرها را معرفی و اثبات کردیم. علاوه بر آن، S -ایدال ها را تعریف کردیم و با استفاده از این مفهوم توانستیم خواص بیشتری از این ساختارها را بدست آوریم و این جبر جدید را طبقه بندی کنیم. در ادامه، منطق این ساختار جبری (L -منطق یا SL) را به عنوان یک منطق فازی معرفی کردیم. برای معرفی این منطق فازی، ابتدا با بیان مقدماتی، فرمول های این منطق را معرفی کرده و اصول موضوعه را بیان می کنیم و با ارایه قواعد استنتاج این منطق، خواصی از L -منطق را بدست می آوریم. در نتیجه، با استفاده از این خواص قضیه صحت و تمامیت در این منطق اثبات شد. همچنین ثابت کردیم که SL توسیعی از L می باشد.

۲ مقدمات و پیش نیازها

در این بخش به طور خلاصه مفاهیم پایه ای و نتایجی از L -جبرها که در ادامه استفاده خواهیم کرد را بیان می کنیم.

تعریف ۱.۰۲. [۸] یک L -جبر یک جبر $(X, \rightarrow, 1)$ از نوع $(2, 0)$ است، به طوریکه برای هر $x, y, z \in L$ داشته باشیم:

$$x \rightarrow x = x \rightarrow 1 = 1, 1 \rightarrow x = x \quad (L_1)$$

$$(x \rightarrow y) \rightarrow (x \rightarrow z) = (y \rightarrow x) \rightarrow (y \rightarrow z) \quad (L_2)$$

$$x = y \iff x \rightarrow y = y \rightarrow x = 1 \quad (L_3)$$

شرط (L_1) بیان می کند که ۱ یک منطقی است و منحصر بفرد است. ترتیب به صورت زیر تعریف می شود:

$$x \leq y \iff x \rightarrow y = 1 \quad (L_4)$$

به طوریکه ۱ بزرگترین عضو از L است. گوئیم عناصر L -جبر X دارای عضو وارون هستند اگر دارای کوچکترین عضو 0 باشد و $x \mapsto x'$ یک تناظر یک به یک باشد بطوری که $x' = x \rightarrow 0$.

گزاره ۲.۰۲. [۱۰] فرض کنید $(X, \rightarrow, 1)$ یک L -جبر باشد. آنگاه موارد زیر معادل هستند، برای هر $x, y, z \in X$:

$$y \leq x \rightarrow y \quad (1)$$

$$z \rightarrow y \leq x \rightarrow y \iff x \leq z \quad (2)$$

تعریف ۳.۰۲. [۸] فرض کنید $(X, \rightarrow, 1)$ یک L -جبر باشد. زیر مجموعه $I \subseteq X$ را یک ایدال می نامیم اگر برای هر $x, y \in X$ داشته باشیم:

$$1 \in I \quad (I_1)$$

$$y \in I \iff x, x \rightarrow y \in I \quad (I_2)$$

$$(x \rightarrow y) \rightarrow y \in I \iff x \in I \quad (I_3)$$

$$y \rightarrow x, y \rightarrow (x \rightarrow y) \in I \iff x \in I \quad (I_4)$$

شرط (I_4) را می توان با شرط زیر جایگزین کرد:

$$x \rightarrow (y \rightarrow x) = 1$$

اگر L ایدالی از L -جبر $(X, \rightarrow, 1)$ باشد، می توان یک رابطه دوتایی $\equiv_I$ روی X به این صورت تعریف کرد که برای هر $x, y \in X$ ، $x, y \in X$ اگر و تنها اگر

$x \rightarrow y, y \rightarrow x \in I$. آنگاه $\equiv_I$ یک رابطه همنهشتی روی X است. بویژه، ایدآل $\{1\}$ رابطه همنهشتی زیر را تعریف می کند.

$$x \equiv_{\{1\}} y \Leftrightarrow x \rightarrow y = y \rightarrow x = 1.$$

گزاره ۴.۲. [۱۲] فرض کنید $(X, \rightarrow, 1)$ یک L -جبر همراه با $\circ$ و $\circ = x \rightarrow x'$ باشد. آنگاه شرایط زیر معادل هستند، در صورتیکه $\wedge$ و $\vee$ وجود داشته باشند:

$$y \rightarrow x = x' \rightarrow y' \Leftarrow x \leq y \quad (1)$$

$$((y \rightarrow x) \rightarrow y') \rightarrow x' = x \rightarrow y \quad (2)$$

$$x \rightarrow (x \wedge y) = x \rightarrow y \text{ و } (y' \vee x') \rightarrow x' = x \rightarrow y \quad (3)$$

$$(x' \rightarrow y') \rightarrow x = x' \rightarrow (x' \rightarrow y')' \quad (4)$$

اگر یکی از شرایط بالا برقرار باشد، آنگاه X یک مشبکه است که $\vee$ و $\wedge$ به صورت زیر تعریف میشوند:

$$x \wedge y := ((x \rightarrow y) \rightarrow x')', x \vee y := (x' \rightarrow y') \rightarrow x.$$

ملاحظه ۵.۲. فرض کنید $(X, \rightarrow, 1)$ یک L -جبر باشد. در اینصورت عملگر $\leftrightarrow$ را به صورت زیر در نظر میگیریم:

$$x \leftrightarrow y = (x \rightarrow y) \wedge (y \rightarrow x)$$

لم ۶.۲. [۱۲] فرض کنید $(X, \rightarrow, 1)$ یک L -جبر باشد. آنگاه برای هر $x, y \in X$ شرایط زیر برقرار است:

$$x \leq y \rightarrow x \Leftarrow x \leq y \quad (1)$$

$$x \vee y \leq (x \rightarrow y) \rightarrow y \quad (2)$$

۳ L -جبر های متشابه

در طول مقاله، $(X, \rightarrow, 1)$ یا به طور خلاصه X یک L -جبر است.

تعریف ۱.۳. یک L -جبر متشابه یک جفت (X, S) است به طوری که $S : X \times X \rightarrow X$ یک عملگر دوتایی روی X است که در شرایط زیر صدق کند، برای هر $x, y, z \in X$

$$S(x, x) = 1 \quad (s_1)$$

$$S(x, y) = S(y, x) \quad (s_2)$$

$$S(x \leftrightarrow y, 1) \leq S(x, z) \leftrightarrow S(y, z) \quad (s_3)$$

$$S(x, y) \wedge S(y, z) \leq S(x, z) \quad (s_4)$$

عملگر S که در شرایط $(s_1) - (s_4)$ صدق کند، عملگر تشابه روی X (یا به طور مختصر تشابه روی X) نامیده می شود.

اگر S و T دو تشابه روی X باشند، آنگاه برای هر $x, y \in X$ تعریف می کنیم:

$$S(x, y) \leq T(x, y) \text{ اگر و تنها اگر } S \leq T$$

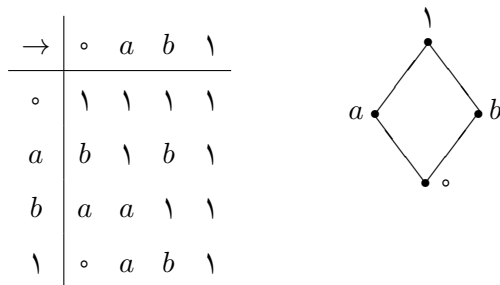
ملاحظه ۲.۳. (۱) فرض کنید X یک L -جبر باشد و $S : X \times X \rightarrow X$ برای هر $x, y \in X$ به صورت زیر تعریف شده باشد

$$S(x, y) := \begin{cases} 1 & x = y \\ 0 & x \neq y \end{cases}$$

آنگاه S یک عملگر تشابه روی X است.

(۲) فرض کنید X یک L -جبر دلخواه باشد و $E(x, y) := x \leftrightarrow y$ ، آنگاه E یک عملگر تشابه روی X است. اصول موضوعه $S_1 - S_3$ به وضوح دیده می شود. اگر S یک عملگر تشابه دلخواه روی X باشد، آنگاه $S(x, y) \leq E(x, y)$.

مثال ۳.۳. فرض کنید $X = \{0, a, b, 1\}$ یک شبکه با نمودار و جدول زیر باشد:



واضح است که $(X, \rightarrow, 1)$ یک L -جبر است. اگر تعریف کنیم:

$$S(x, y) = E(x, y) = x \leftrightarrow y.$$

آنگاه بدیهی است که (X, E) یک L -جبر متشابه است.

گزاره ۴.۳. فرض کنید (X, E) یک L -جبر تشابه باشد. آنگاه برای هر x, y, z, t موارد زیر برقرار است:

$$(1) \quad E(x, y) = 1 \text{ اگر و تنها اگر } x = y.$$

$$(2) \quad \text{اگر } x, y \in [z, t] \text{، آنگاه } E(z, t) \leq E(x, y).$$

$$(3) \quad E(1, x) = x \text{ و } E(o, x) = x \rightarrow o.$$

اثبات. اثبات قسمت های (۱) و (۳) واضح است.

$$(2) \quad \text{اگر } x, y \in [z, t] \text{، آنگاه}$$

$$y \rightarrow x \geq y \rightarrow t \geq z \rightarrow t.$$

و

$$x \rightarrow y \geq x \rightarrow t \geq z \rightarrow t.$$

$$\text{آنگاه } E(x, y) \geq z \rightarrow t \geq E(z, t).$$

□

تعریف ۵.۳. فرض کنید A یک مجموعه باشد. یک زیر مجموعه X -فازی از A یک تابع $f: A \rightarrow X$ و یک X تشابه روی A یک زیر مجموعه فازی $E: A \times A \rightarrow X$ از $A \times A$ به طوری که خواص زیر برای هر $x, y \in X$ برقرار باشد:

$$E(x, x) = 1 \quad (E_1)$$

$$E(x, y) = E(y, x) \quad (E_2)$$

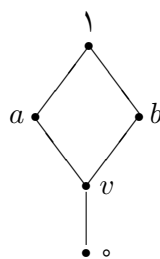
گوییم یک زیر مجموعه X -فازی $f: A \rightarrow X$ یک توسیع از E است اگر برای هر $x, y \in A$ داشته باشیم:

$$f(x) \wedge E(x, y) \leq f(y) \quad (E_3)$$

مثال ۶.۳. در مثال ۳.۳، اگر $A = \{a, b, 1\}$ ، آنگاه $f: A \rightarrow X$ به طوری که $f(x) = x$ یک زیر مجموعه X -فازی از A است. همچنین برای هر $x, y \in A$ داریم $f(x) \wedge E(x, y) \leq f(y)$ بنابراین f یک توسیع از E است.

مثال ۷.۳. فرض کنید $X = \{0, v, a, b, 1\}$. اگر عملگر $\rightarrow$ به صورت زیر تعریف شود:

$\rightarrow$	0	v	a	b	1
0	1	1	1	1	1
v	0	1	1	1	1
a	0	b	1	b	1
b	0	a	a	1	1
1	0	v	a	b	1



آنگاه $(X, \rightarrow, 1)$ یک L -جبر است. اگر $A = \{v, a, b, 1\}$ و $E(x, y) = x \leftrightarrow y$ آنگاه

$$f: A \rightarrow X$$

$$f(x) := \begin{cases} 1 & x = a, 1 \\ v & x = v, b \end{cases}$$

در اینصورت چون داریم $f(a) \wedge E(a, b) \not\leq f(b)$ ، پس f یک توسیع از E نیست.

ملاحظه ۸.۳. فرض کنید (X, S) یک L -جبر تشابه باشد و A یک مجموعه و $d f : A \rightarrow X$ یک زیر مجموعه X -فازی از A باشد. اگر تعریف کنیم:

$$E(x, y) := S(f(x), f(y)) \text{ و } E : A \times A \rightarrow X.$$

آنگاه، به وضوح E یک X -تشابه روی A است.

واضح است که مجموعه زیر مجموعه های فازی از X^A یک L -جبر با عملگرهای القایی است.

گزاره ۹.۳. فرض کنید $S_A = \{S_A : x \in A\}$ خانواده ای از تشابه ها روی X باشد. آنگاه یک تناظر یک به یک بین S_A و یک خانواده از تشابه ها روی X^A موجود است.

اثبات. فرض کنید $S_A = \{S_A : x \in A\}$ یک خانواده از تشابه ها روی X باشد. آنگاه یک تشابه روی X^A به این صورت تعریف می کنیم $S_{S_A}(f, g)(x) := S_x(f(x), g(x))$ برای هر $x \in A$ و $f, g \in X^A$. به وضوح (X^A, S_{S_A}) یک L -جبر تشابه است. برعکس، اگر $K : X^A \times X^A \rightarrow X^A$ یک تشابه روی L -جبر X^A باشد، آنگاه برای هر $a \in X$ زیر مجموعه فازی f_a را به صورت $f_a(x) = a$ نشان می دهیم، برای هر $x \in A$. بنابراین می توانیم یک K_A تشابه روی X برای هر $x \in A$ به این صورت تعریف کنیم

$$K_x : X \times X \rightarrow X, K_x(a, b) := K(f_a, f_b)(x).$$

پس می توانیم خانواده ای از تشابه ها $\{K_x : x \in A\}$ را بدست آوریم. بنابراین یک تناظر یک به یک بین مجموعه ای از تشابه ها روی X^A و خانواده ای از تشابه ها روی X وجود دارد. $\square$

گزاره ۱۰.۳. فرض کنید (X, S) یک L -جبر تشابه باشد. $S(x, 1) = x$ اگر و تنها اگر $S(x, y) = x \leftrightarrow y$ ، برای هر $x, y \in X$. اثبات. به وضوح، اگر $S(x, y) = x \leftrightarrow y$ ، آنگاه $S(x, 1) = x$.

برعکس، با استفاده از (S_1) و (S_3) داریم:

$$x \leftrightarrow y = S(x \leftrightarrow y, 1) \leq S(x, y) \leftrightarrow S(y, y) = S(x, y) \leftrightarrow 1 = S(x, y).$$

از طرفی با استفاده از (S_2) داریم $S(x, y) \leq x \leftrightarrow y$ بنابراین $S(x, y) = x \leftrightarrow y$ $\square$

تعریف ۱۱.۳. فرض کنید (X, S) یک L -جبر تشابه باشد. I یک S ایدآل از X نامیده می شود اگر I یک ایدآل از X باشد و برای هر $x, y \in I$

$$S(x, y) \in I.$$

یک S ایدآل را اول می نامیم اگر $x \rightarrow y \in I$ یا $y \rightarrow x \in I$ (یا هر دو)، برای هر x و y در X .

مثال ۱۲.۳. در مثال ۳.۳، اگر تعریف کنیم

$$S(x, y) := \begin{cases} 1 & x = y \\ 0 & x \neq y \end{cases}$$

آنگاه (X, S) یک L -جبر تشابه است و $I = \{1\}$ یک S -ایدآل از X می باشد، اما این ایدآل اول نیست.

مثال ۱۳.۳. در مثال ۷.۳، ایدآل $I = \{v, a, b, 1\}$ یک S -ایدآل اول می باشد.

ملاحظه ۱۴.۳. اگر (X, S) یک L -جبر متشابه باشد و I یک S -ایدآل از X باشد، آنگاه با استفاده از (s_4) داریم $S(x, 1) \wedge S(y, 1) \leq S(x, y)$. بنابراین I یک S -ایدآل است اگر و تنها اگر $S(x, 1) \in I$ ، به طوریکه $x \in I$.

گزاره ۱۵.۳. فرض کنید (X, S) یک L -جبر باشد و I یک S -ایدآل از X باشد. آنگاه $\equiv_I$ یک رابطه همنهستی روی (X, S) است.

اثبات. فرض کنید $x_1, x_2, y_1, y_2 \in X$ به طوری که $x_1 \equiv_I x_2$ و $y_1 \equiv_I y_2$. آنگاه $x_1 \leftrightarrow x_2 \in I$ و $y_1 \leftrightarrow y_2 \in I$ از آنجایی که I یک S -ایدال است، داریم

$$S(y_1 \leftrightarrow y_2, 1) \in I \text{ و } S(x_1 \leftrightarrow x_2, 1) \in I.$$

بنابراین $S(x_1 \leftrightarrow x_2, 1) \wedge S(y_1 \leftrightarrow y_2, 1) \in I$. با استفاده از (s_4) و (s_2) و تعریف S -ایدال، $S(x_1 \leftrightarrow x_2, y_1 \leftrightarrow y_2) \in I$. بنابراین طبق (s_3) داریم

$$(x_1 \leftrightarrow y_1) \leftrightarrow (x_2 \leftrightarrow y_2) \in I.$$

در نتیجه $(x_1 \leftrightarrow y_1) \equiv_I (x_2 \leftrightarrow y_2)$.

□

ملاحظه ۱۶.۳. فرض کنید (X, S) یک L -جبر باشد و $I \subseteq X$ یک S -ایدال از X باشد. آنگاه $X/\equiv_I$ یک ساختار از L -جبر X است اگر برای هر $x, y \in X$ تعریف کنیم:

$$S_I : X/\equiv_I \times X/\equiv_I \rightarrow X/\equiv_I.$$

$$S_I([x]_I, [y]_I) := [S(x, y)]_I.$$

به وضوح $(X/\equiv_I, S_I F)$ یک L -جبر متشابه است. همچنین، یک نگاشت دوسویی کانونی $x \mapsto [x]_I$ یک همومورفیسم L -جبر متشابه است.

تعریف ۱۷.۳. یک L -جبر متشابه را قابل عرضه می نامیم اگر به صورت حاصلضرب مستقیم از L -زنجیرهای متشابه باشد.

مثال ۱۸.۳. فرض کنید $X = \{a, b, c, 1\}$ به طوری که $a, b \leq c \leq 1$ اگر تعریف کنیم:

$\rightarrow$	v	a	b	1
a	1	b	1	1
b	a	1	1	1
c	a	b	1	1
1	a	b	c	1

آنگاه $(X, \rightarrow, 1)$ یک L -جبر است. به وضوح (X, E) یک L -جبر متشابه است که به صورت حاصلضرب مستقیم زنجیرهای متشابه $(\{a, c, 1\}, E)$ و $(\{b, c, 1\}, E)$ می باشد. بنابراین X یک L -جبر متشابه قابل عرضه می باشد.

قضیه ۱۹.۳. فرض کنید (X, S) یک L -جبر متشابه باشد. آنگاه شرایط زیر معادلند:

(i) (X, S) قابل عرضه ست،

(ii) $S((x, y), 1) \vee (y \rightarrow x) = 1$ برای هر $x, y \in X$ ،

(iii) $x \vee y = 1$ نتیجه میدهد $x \vee S(y, 1) = 1$ برای هر $x, y \in X$ ،

(iv) هر ایدآل اول مینیمال یک S -ایدآل از X است.

اثبات. $(i) \Rightarrow (ii)$ از آنجایی که در هر L -زنجیر متشابه داریم

$$S(x, y), 1) \vee (y \rightarrow x) = 1.$$

بنابراین (ii) برقرار است.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ اگر $x \vee y = 1$ آنگاه با استفاده از لم ۶.۲(۲)، داریم

$$x \rightarrow y = y, y \rightarrow x = x.$$

با بکارگیری (ii) داریم $x \vee S(y, 1) = 1$.

$(iii) \Rightarrow (iv)$ اگر $I \subseteq X$ یک ایدآل اول مینیمال از X و $x, y \in I$ ، آنگاه

وجود دارد $z \in X$ بطوریکه $x \wedge z = 1$ و $z \notin I$. با استفاده از (iii)، داریم

$S(x, 1) \vee z = 1 \in I$. از آنجایی که $z \notin I$ و I یک ایدآل اول است، $S(x, 1) \in I$.

$(iv) \Rightarrow (i)$ فرض کنید (X, S) یک L -جبر باشد و θ مجموعه ای از تمام ایدآل

های اول مینیمال از X باشد. به وضوح X یک حاصلضرب مستقیم از خانواده ای از

$\{X/\equiv_I : I \in \theta\}$ است. فرض کنید $\Pi_{I \in \theta} X/\equiv_I$: $X \rightarrow \varphi$ قابل عرضه باشد. با استفاده از (iv) ، هر $I \in \theta$ یک S ایدآل از (X, S) است. بنابراین با استفاده از نکته ۳، $(X/\equiv_I, S_I)$ یک L -جبر متشابه است. واضح است که φ یک قابل عرضه از (X, S) به عنوان یک خانواده از حاصلضرب مستقیم از $\{(X/\equiv_I, S_I) : I \in \theta\}$ است.

□

گزاره ۲۰.۳. L -جبر متشابه (X, S) ، قابل عرضه است اگر و تنها اگر X یک L -جبر خطی باشد به طوری که:

$$S(x, y) := \begin{cases} 1 & x = y \\ 0 & x \neq y \end{cases}$$

اثبات. فرض کنید (X, S) یک قابل عرضه باشد و $x, y \in X$. اگر $x \not\leq y$ ، آنگاه $x \rightarrow y \neq 1$ ، بنابراین $S(x \rightarrow y, 1) = 0$. با استفاده از قضیه ۱۹.۳، داریم $y \rightarrow x = 1$ پس $y \leq x$ در نتیجه X یک L -جبر خطی است.

□

برعکس، واضح است.

نتیجه ۲۱.۳. فرض کنید (X, S) یک L -جبر متشابه قابل عرضه باشد. آنگاه موارد زیر معادل هستند:

$$(i) \text{ اگر } x \leq y \text{ باشد، آنگاه } S(x, 1) \leq S(y, 1).$$

$$(ii) S(x \vee y, 1) = S(x, 1) \vee S(y, 1).$$

۴ منطق L -جبرهای متشابه

در این بخش، حساب گزاره های منطق L را بررسی می کنیم. ما حساب گزاره هایی را توسیع می دهیم که L -جبرهای متشابه مدلی از این منطق است و با نماد $\mathcal{SL}$ نمایش می دهیم.

زبان $\mathcal{SL}$ شامل موارد زیر است:

• متغیرهای گزره ای $v_1, v_2, \dots$ ،

• رابط های منطقی از $\mathcal{L}$: $\rightarrow$ و $\neg$ ،

• پرانتزها (و).

فرمولهای $\mathcal{SL}$ به صورت زیر تعریف میشوند:

(۱) متغیرهای گزاره ای فرمول هستند، $\circ$ یک فرمول است،

(۲) اگر φ و ψ فرمول باشند، آنگاه $\psi \rightarrow \varphi$ و $\neg \varphi$ فرمول هستند،

(۳) رشته ای از نمادها، فرمولی از $\mathcal{SL}$ است اگر و تنها اگر بتوانیم آن ها را به صورت

(۱) و (۲) بنویسیم.

رابط های بیشتری را در این منطق به طریق زیر قرارداد می کنیم:

$\neg \neg \varphi \rightarrow \varphi$ ،

$\neg \varphi \rightarrow \neg \neg \varphi$ ،

$\psi \wedge \varphi \rightarrow \varphi$ برای $\neg((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \neg \varphi)$ ،

$\psi \vee \varphi \rightarrow \varphi$ برای $(\neg \varphi \rightarrow \neg \psi)$ و

$\psi \Leftrightarrow \varphi$ برای $(\psi \rightarrow \varphi) \wedge (\varphi \rightarrow \psi)$

که φ و ψ فرمول هستند.

برای جلوگیری از پرانتزهای های غیر ضروری، ما اولویت های زیر را در نظر می

گیریم:

• رابط های تکی همیشه بر رابط های دوتایی اولویت دارند، • رابط های $\wedge$ و $\vee$ بر

$\rightarrow$ اولویت دارند،

• بیرونی ترین پرانتز ها نوشته نشده اند.

اصول موضوعه $\mathcal{SL}$ به صورت زیر تعریف می شوند:

(۱) هر اصل موضوعی از $\mathcal{L}$ یک اصل موضوع از $\mathcal{SL}$ می باشد، منطق $\mathcal{L}$ در [۹]

معرفی شده است.

(۲) فرمول های زیر اصل موضوعه می باشند، که φ ، ψ و χ فرمول های دلخواه

هستند:

$(S_1) \varphi \Leftrightarrow \varphi$ ،

$(S_2) (\varphi \Leftrightarrow \psi) \rightarrow (\psi \Leftrightarrow \varphi)$ ،

$$((\varphi \leftrightarrow \psi) \leftrightarrow (\varphi \rightarrow \psi)) \rightarrow ((\varphi \leftrightarrow \chi) \leftrightarrow (\psi \leftrightarrow \chi)) \quad (S_3)$$

$$(\varphi \leftrightarrow \psi) \rightarrow ((\psi \leftrightarrow \chi) \rightarrow (\varphi \leftrightarrow \chi)) \quad (S_4)$$

قواعد استنتاج (SL) به صورت زیر می باشد:

• قاعده قیاس استثنایی (MP): از φ و $\varphi \rightarrow \psi$ داریم ψ .

• تشابه (Sim): از φ, ψ داریم $\varphi \leftrightarrow \psi$.

مفهوم اثبات در SL طبق معمول منطق کلاسیک تعریف می شود، یعنی یک اثبات برای فرمول φ دنباله ای متناهی از فرمول ها مانند $\varphi_1 \dots \varphi_n$ است که $\varphi_n = \varphi$ و برای هر $1 \leq i \leq n$ یک اصل موضوع است یا اینکه از فرمول های قبل از خودش با قواعد استنتاج بدست آمده باشد. اگر چنین دنباله ای برای φ وجود داشته باشد، φ را قابل اثبات در SL گوئیم و n را طول اثبات می نامیم. اگر مجموعه ای از فرمول ها مانند Γ داده شده باشند، گوئیم φ قابل اثبات از Γ است. اگر دنباله ای از فرمول ها مانند $\varphi_n = \varphi_1 \dots \varphi_n$ وجود داشته باشد که برای هر $1 \leq i \leq n$ یا φ_i یا عضوی از Γ یا یک اصل موضوع از فرمول های قبل با قواعد استنتاج بدست آمده باشد. در این حالت می نویسیم $\Gamma \vdash_{SL} \varphi$ و در حالتی که $\Gamma = \emptyset$ می نویسیم $\vdash_{SL} \varphi$.

ملاحظه ۱.۴. حساب گزاره های SL توسیعی از L می باشد. واضح است که $Form_L \subseteq Form_{SL}$. اگر $\Gamma \subseteq Form_L$ و $\varphi \in Form_L$ به طوری که $\Gamma \vdash_L \varphi$ ، آنگاه $\Gamma \vdash_{SL} \varphi$. همچنین هر قضیه از L یک قضیه از SL می باشد.

گزاره ۲.۴. با استفاده از قوانین استنتاج از SL داریم:

$$\{\varphi \leftrightarrow \psi\} \vdash (\varphi \leftrightarrow \chi) \leftrightarrow (\psi \leftrightarrow \chi).$$

اثبات. فرض کنید Γ مجموعه ای دلخواه از فرمول ها در SL باشد.

فرض کنید $\Gamma \vdash \varphi \leftrightarrow \psi$. آنگاه داریم $\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi$. با استفاده از (Sim)،

$$\Gamma \vdash (\varphi \leftrightarrow \psi) \leftrightarrow (\varphi \rightarrow \psi).$$

□

همچنین با استفاده از (S_3)، $\Gamma \vdash (\varphi \leftrightarrow \chi) \leftrightarrow (\psi \leftrightarrow \chi)$.

جبر لیندنبام تارسکی از SL .

در ادامه $\Gamma \subseteq Form_{SL}$ یک مجموعه مشخص از فرمول ها است. فرض کنید φ و

ψ یک فرمول باشد، تعریف می کنیم

$$\Gamma \vdash_{SL} \psi \rightarrow \varphi \text{ و } \Gamma \vdash_{SL} \varphi \rightarrow \psi \text{ اگر و تنها اگر } \varphi \equiv_{\Gamma} \psi.$$

واضح است که رابطه $\equiv_{\Gamma}$ یک رابطه همنهشتی روی $Form_{SL}$ است. برای هر فرمول $\varphi \in Form_{SL}$ به این صورت می نویسیم $[\varphi]_{\Gamma}$ کلاس هم ارزی از φ با توجه به $\equiv_{\Gamma}$ تعریف می شود. مجموعه $Form_{SL}/\equiv_{\Gamma} = \{[\varphi]_{\Gamma} \mid \varphi \in Form_{AF\mathcal{L}}\}$ یک خارج قسمت از $Form_{ST\mathcal{L}}$ با توجه به $\equiv_{\Gamma}$ است. روی $Form_{ST\mathcal{L}}/\equiv_{\Gamma}$ عملگرهای زیر را تعریف می کنیم:

$$[\varphi]_{\Gamma} \rightarrow [\psi]_{\Gamma} := [\varphi \Rightarrow \psi]_{\Gamma},$$

$$[\varphi]_{\Gamma} \vee [\psi]_{\Gamma} := [\varphi \sqcup \psi]_{\Gamma},$$

$$[\varphi]_{\Gamma} \wedge [\psi]_{\Gamma} := [\varphi \sqcap \psi]_{\Gamma},$$

$$\backslash_{\Gamma} := Theor_{ST\mathcal{L}}(\Gamma),$$

$$\circ_{\Gamma} := \neg \backslash_{\Gamma},$$

$$S([\varphi]_{\Gamma}, [\psi]_{\Gamma}) := [\varphi \Leftrightarrow \psi]_{\Gamma},$$

گزاره ۳.۴. ساختار $SL(\Gamma) = ((Form_{SL}/\equiv_{\Gamma}, \rightarrow, \backslash), S)$ یک L -جبر متشابه است.

اثبات. طبق نکته ۱.۴، و جبر لیندنبام تارسکی $\mathcal{L}$ یک L -جبر است، پس داریم $(Form_{SL}/\equiv_{\Gamma}, \rightarrow, \backslash)$ یک L -جبر است. طبق گزاره ۲.۴ (i) عملگر دوتایی S خوش تعریف است. طبق $(S_1)-(S_4)$ ، S یک تشابه روی $Form_{ST\mathcal{L}}/\equiv_{\Gamma}$ است. $\square$ اگر $\Gamma \subseteq Form_{SL}$ ، آنگاه L -جبر متشابه $SL(\Gamma)$ را جبر لیندنبام تارسکی از Γ می نامیم. همچنین، $\Gamma = \emptyset$ ، رابطه $\equiv_{\emptyset}$ به صورت $\equiv$ نوشته می شود. بنابراین داریم

$$\Gamma \vdash \psi \rightarrow \varphi \text{ و } \Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi \text{ اگر و تنها اگر } \varphi \equiv \psi.$$

کلاس هم ارزی از یک فرمول φ با توجه به $\equiv$ به صورت $[\varphi]$ نوشته می شود. همچنین L -جبر متشابه $SL(\emptyset)$ به صورت SL است و این یک جبر لیندنبام تارسکی از حساب گزاره ها خواهد بود SL .

تعریف ۴.۴. فرض کنید (A, S) یک L -جبر متشابه باشد و Γ مجموعه ای از فرمول ها باشد. یک (A, S) -ارزش دهی نگاشتی به صورت $e : Form_{ST\mathcal{L}} \rightarrow (A, S)$ می باشد که در شرایط زیر صدق کنید، برای هر دو فرمول φ و ψ :

$e(\bar{\varphi}) = \circ, \circ, e(\varphi \Rightarrow \psi) = e(\varphi) \rightarrow e(\psi), e(\varphi \sqcap \psi) = e(\varphi) \wedge e(\psi)$
 اگر یک (X, S) -ارزشدهی e در χ صدق کند، برای هر χ در Γ ، یک (X, S) -مدل از Γ نامیده می شود.

فرض کنید Γ مجموعه ای از فرمول ها باشد و φ یک فرمول باشد. برای یک L -جبر متشابه (X, S) ، φ یک Γ -تاتولوژی از (X, S) است اگر

$$e(\varphi) \in e(\Gamma) = \{e(\psi) \mid \psi \in \Gamma\} = \{1\}$$

با توجه به وراثت بودن L -جبر متشابه، به راحتی دیده می شود که SL صحت دارد یعنی اگر یک فرمول φ بتوانیم از Γ نتیجه بگیریم، آنگاه برای هر L -جبر متشابه (X, S) و برای هر (X, S) -مدل e از Γ ، $e(\varphi) = 1$. به وضوح صحت از اصول موضوعه جدید و قواعد استنتاج از SL بدست می آید. این واقعیت که φ یک Γ -تاتولوژی از (X, S) به صورت $\varphi \models_{(X,S)} \Gamma$ بدست می آید. اگر Γ تهی باشد، یک $\emptyset$ -تاتولوژی است. (X, S) یک تاتولوژی روی (X, S) می نامیم و واضح است که φ یک تاتولوژی روی (X, S) است که به صورت $\varphi \models_{(X,S)}$ نمایش می دهیم. و

$$\varphi \models_{(X,S)} \text{ اگر و تنها اگر } e(\varphi) = 1 \text{ برای هر } (A, S)\text{-ارزشدهی}$$

$$e : Form_{SL} \longrightarrow (X, S)$$

تمامیت SL

قضیه ۵.۴. موارد زیر معادلند:

- (i) $\Gamma \vdash \varphi$
- (ii) $\varphi \models_{(X,S)} \Gamma$ برای هر L -جبر متشابه (X, S) ،
- (iii) $[\varphi]_{\Gamma} = 1_{\Gamma}$ در $SL(\Gamma)$.

اثبات. $(i \Rightarrow ii)$ (صحت) فرض کنید $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ یک φ -برهان برای φ در SL باشد و (X, S) یک L -جبر متشابه باشد و e یک (X, S) -ارزشدهی باشد. باید ثابت کنیم $e(\varphi_i) = 1$ برای $i \in [n]$. فرض کنید φ_i یک اصل موضوعه باشد. واضح است که $e(\varphi_i) = 1$ اگر وجود داشته باشند $j, k < i$ به طوری که $\varphi_k = \varphi_j \rightarrow \varphi_i$. با استفاده از فرض $e(\varphi_k) = e(\varphi_j) = 1$ بنابراین

اگر وجود داشته باشند $e(\varphi_i) = 1 \rightarrow e(\varphi_i) = e(\varphi_j \rightarrow \varphi_i) = e(\varphi_k) = 1$ ، $k < i, j$ به طوری که $\varphi_j \Leftrightarrow \varphi_k$ is φ_i آنگاه $e(\varphi_j) = e(\varphi_k) = 1$ بنابراین $e(\varphi) = 1$ برای $i = n$. پس داریم $e(\varphi_i) = S(e(\varphi_j), e(\varphi_k)) = S(1, 1) = 1$.
 $(ii \Rightarrow iii)$ با توجه به اینکه $SL(\Gamma)$ یک L -جبر متشابه است، حکم واضح است.
 $(iii \Rightarrow i)$ بدیهی است. $\square$

گزاره ۶.۴. SL توسیعی از L می باشد، یعنی برای هر $\Gamma \subseteq Form_L$ و هر فرمول φ از L ، داریم:

$$\Gamma \vdash_{SL} \varphi \text{ اگر و تنها اگر } \Gamma \vdash_L \varphi$$

اثبات. فرض کنید $\Gamma \vdash_{SL} \varphi$ و $\Gamma \not\vdash_L \varphi$. آنگاه یک زنجیر X وجود دارد و X -ارزشدهی $e : Form_L \rightarrow A$ به طوری که $e(\Gamma) = \{1\}$ و $e(\varphi) \neq 1$. بدیهی است که $S : X \times X \rightarrow X$ که به صورت $S(x, y) := x \leftrightarrow y$ روی X تعریف شده، یک تشابه است. پس در نظر بگیریم $es : Form_{SL} \rightarrow (X, S)$ یک (X, S) -ارزشدهی یکتا $es(x) = e(x)$ برای تمام فرمول های ψ از L می باشد. بنابراین $es(\Gamma) = e(\Gamma) = \{1\}$ و $es(\varphi) = e(\varphi) \neq 1$ که با قضیه ۵.۴ در تناقض می باشد. در نتیجه $\Gamma \vdash_L \varphi$. $\square$

نتیجه گیری

همانطور که در مقدمات اشاره کردیم، L -جبرها در قسمت های مختلف کاربرد دارد و این موضوع باعث شده که ما این ساختار جبری و منطق فازی آن را مورد مطالعه قرار دهیم. در این مقاله، به بررسی کلاس جدیدی از L -جبرها پرداختیم و L -جبرهای متشابه را معرفی کرده و به مطالعه آنها پرداختیم. برخی از خواص این جبر جدید را بدست آوردیم و چندین مثال از این نوع جدید از ساختارهای جبری را ارائه کردیم. ایدآل ها را در این ساختار جبری تعریف کردیم و با کمک این مفهوم، به بررسی ویژگی های بیشتر

L -جبرها پرداختیم. در ادامه منطق SL را معرفی کردیم و قضیه صحت و تمامیت را در این منطق اثبات کردیم. سپس ثابت کردیم که SL توسیعی از L می باشد، یعنی برای هر $\Gamma \subseteq Form_L$ و هر فرمول φ از L ، داریم:

$$\Gamma \vdash_{SL} \varphi \text{ اگر و تنها اگر } \Gamma \vdash_L \varphi$$

در تحقیقات آینده، ما پژوهش روی ساختارهای جبری و منطق های فازی را ادامه خواهیم داد و سعی در شناخت و طبقه بندی این مفاهیم خواهیم داشت. به خصوص کلاس های دیگری از L -جبرها را مورد مطالعه قرار می دهیم و به بررسی خواص و کاربردهای این ساختار جبری خواهیم پرداخت.

تشکر و قدردانی

از داوران گرامی که با نظرات مفید و ارزشمند خود در جهت بهبود مقاله ما را یاری فرمودند کمال تشکر و قدردانی را داریم.

مراجع

[۱] اسلامی، ا. (۱۳۹۱) منطق فازی و کاربردهای آن، انتشارات دانشگاه شهید باهنر کرمان.

[2] J. L. Castro, F. Klawonn, Similarity in Fuzzy Reasoning, using Fuzzy Logic., *Mathware Soft Comput.*, **2** (1995) 197-228.

[3] D. Dubois, H. Prade., Similarity-based approximate reasoning, *Computational intelligence Imitating Life*, IEEE Press, New York, (1994), 69-80.

[4] B. Gerla, I. Leustean, Similarity MV-algebras, *Fundamenta Informaticae*, **69** (2006), 287-300.

[5] R. Goldstone, J. Son, Similarity, in cambridge handbook of thinking and reasoning Cambridge University Press: Cambridge, (2005).

- [6] F. Formato, G. Gerla, M. Sessa, Similarity-based unification, *Fund. Inform.*, **41** (2000), 393-414.
- [7] F. Klawonn, Similarity-based reasoning, *Proceeding Third European Congress on Intelligent Techniques and Soft Computing, Aachen*, (1995), 34-38.
- [8] W. Rump, L-algebras, self-similarity, and l-groups. *J Algebra*, **320** (2008), 2328–2348.
- [9] W. Rump, L-algebras in logic, algebra, geometry, and topology, *Soft Computing*, DOI:10.1007/s00500-019-04616-w.
- [10] W. Rump, YC. Yang, Intervals in l-groups as L-algebras, *Algebra Univ* **67**(2012), 121-130.
- [11] J. T. Wang, A. Borumand Saeid, P. Fei He, Similarity MTL-algebras, *J. of Mult.-Valued Logic & Soft Computing*, **32** (2019), 607-628.
- [12] YL. Wu, J. Wang, YC. Yang, Lattice ordered effect algebras and L-algebras, *Fuzzy Sets Syst*, **369** (2019), 103-113.
- [13] S. Zahiri, A. Borumand Saeid, Similarity triangle logic, *Soft Computing*, **25** (2021), 6841-6849.
- [14] S. Zahiri, A. Borumand Saeid, Similarity monadic basic logic, *Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin* **27** (2020), 321-336.