سیستم‌های فازی و کاربردها
سال پنجم، شماره اول (بهار و تابستان ۱۴۰۱)
صص. ۱۸۷ تا ۲۱۰

شاپای چاپی: ۴۴۰۹-۲۷۱۷
شاپای الکترونیکی: ۳۹۸۴-۲۷۱۷
DOI:10.22034/JFSA.2022.335327.1120

برخی ویژگی‌های مجموعه بردارهای نَرم روی ابرفضاهای برداری

امیدرضا دهقان

گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه بجنورد، بجنورد، ایران

تاریخ دریافت: ۱۴۰۱/۱/۷ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۱/۶/۸

نوع مقاله: علمی-پژوهشی

چکیده

هدف این مقاله مطالعه ساختار جبری مجموعه بردارهای نَرم $SE(V)$ روی یک ابرفضای برداری V است. در این راستا ابتدا با معرفی یک عمل طبیعی و یک ابرعمل خارجی مناسب، به مجموعه یادشده ساختار یک ابرفضای برداری داده شده است. سپس با استفاده از مفهوم تبدیل خطی، به طور مختصر، ارتباط بین ابرفضاهای برداری و مجموعه بردارهای نَرم متناظر با آن‌ها مورد مطالعه قرار گرفته است. در ادامه با ارائه مفهوم نُرمِ نَرم روی ابرفضای برداری به دست آمده، ارتباط متقابل آن با نُرم معمولی و مترِ نَرم روی V بررسی شده است.

۱ مقدمه

بسیاری از مسائل مربوط به اقتصاد، مهندسی، محیط زیست، علوم اجتماعی، علوم پزشکی و ... را نمی‌توان با استفاده از روش‌های ریاضی کلاسیک حل نمود، زیرا در این‌گونه مسائل با انواع مختلف عدم قطعیت مواجه هستیم. در طول سالیان گذشته برای برطرف کردن این مشکل، نظریه‌های مشهوری با نام‌های نظریه احتمال، نظریه

عبارات و کلمات کلیدی: ابرفضای برداری، مجموعه نَرم، بردار نَرم، نُرم، تبدیل خطی.

Email(s): dehghan@ub.ac.ir.

Mathematics Subject Classification: 20N20; 06D72

مجموعه‌های فازی و نظریه مجموعه‌های ناهموار معرفی شدند که برای مواجهه با عدم قطعیت‌ها بکار گرفته شدند. مولودسوف [1] [۲۰] در سال ۱۹۹۹ اشکالاتی برای نظریه‌های یادشده بیان کرد و مفهوم مجموعه‌های نَرم را برای حل مسائلی که با عدم قطعیت سر و کار دارند ارائه نمود. او اعلام کرد نظریه مجموعه‌های نَرم به اندازه کافی پارامتر دارد تا بتواند توصیف تقریبی اولیه از شیء ارائه کند و لذا مشکل نظریه‌های قبلی را ندارد و در عمل آسان و قابل اجرا است. لازم به ذکر است این نظریه نیز عاری از مشکلات روش‌های قبلی نیست و نظریه‌های جدیدتری آن را تکمیل کرده‌اند. پس از آن مطالعه نظریه مجموعه‌های نَرم به سرعت پیشرفت کرد. ماجی [2] و همکاران [۱۸] کاربرد این نظریه را در مسائل تصمیم‌گیری توصیف کرد و در مقاله‌ای دیگر [۱۷] چند عمل جبری روی مجموعه‌های نَرم تعریف کرد. پی [3] و همکاران [۲۲] رابطه بین مجموعه‌های نَرم و سیستم‌های اطلاعاتی را مورد بحث قرار داد. اکتاس [4] و کاگمن [5] [۲] در سال ۲۰۰۷ مجموعه‌های نَرم را با مجموعه‌های فازی و مجموعه‌های ناهموار مقایسه کردند. آن‌ها همچنین گروه‌های نَرم را معرفی کرده و ویژگی‌های اصلی آن را بررسی کردند و بدین ترتیب مطالعه مجموعه‌های نَرم از دیدگاه جبری آغاز گردید. در این راستا به عنوان نمونه حلقه‌های نَرم توسط آکار [6] [۱] و فضاهای برداری نَرم توسط سزگین [7] [۲۸] مطالعه شده‌اند.

نظریه ابرساختارهای جبری با تعمیم مفهوم عمل S ‏ $\cdot : S \times S \to S$ به ابرعمل $\circ : S \times S \to P^*(S)$ توسط مارتی [8] [۱۹] در سال ۱۹۳۴ بنیان‌گذاری شد. هر عمل دوتایی روی مجموعه S تابعی دوتایی است که به هر دو عضو S عضوی از آن را نسبت می‌دهد در حالی که یک ابرعمل روی S تابعی دوتایی است که به هر دو عضو S یک زیرمجموعه ناتهی از S را نسبت می‌دهد. تأثیر این ایده روی ساختارهای جبری منجر به تولید مقالات متعدد و چند کتاب در زمینه‌های محض و کاربردی شده است که

---
[1] Molodtsov
[2] Maji
[3] Pei
[4] Aktas
[5] Cogman
[6] Acar
[7] Sezgin
[8] Marty

بخشی از آن‌ها را می‌توان در کتاب‌های کرسینی [9] [۷] و دواز [۱۰] و [۱۱] مشاهده کرد. یک نوع از ابرفضاهای برداری (انواع دیگری نیز وجود دارند) در سال ۱۹۹۰ توسط اسکافاتی-تالینی [10] [۲۵] در چهارمین کنگره بین‌المللی ابرساختارهای جبری و کاربردها ارائه گردید و سپس وی [۲۶]، عامری [۳]، [۴] و [۵]، نویسنده [۱۲] و [۱۳]، صدقی [۲۷]، رجا [۲۳] و تقوی [۲۹] ابرفضاهای برداری را از جنبه‌های مختلف بررسی نمودند.

در دهه اخیر مطالعه تأثیر نظریه مجموعه‌های نَرم روی ابرساختارهای جبری مورد توجه پژوهش‌گران بسیاری قرار گرفته است (برای نمونه مراجع [۶]، [۱۶]، [۲۱] و [۳۰] را ببینید). به ویژه رنجبر و همکاران [۲۴] ابرفضای برداری نَرم و ابرفضای برداری نَرم فازی را معرفی و برخی ویژگی‌های اولیه آن را بررسی کردند. نویسنده [۱۴] اخیرا ویژگی‌های دیگری از ابرفضاهای برداری نَرم را بر حسب اعمال شناخته‌شده اشتراک، اجتماع، AND، OR، ضرب و جمع مطالعه کرده و رفتار آن‌ها را تحت تبدیلات خطی مورد پژوهش قرار داده است. حال در این مقاله با استفاده از مفهوم بردار نَرم روی ابرفضاهای برداری، که توسط نویسنده [۱۵] معرفی شده است، ساختار جبری مجموعه‌های نَرم روی ابرفضاهای برداری را مورد مطالعه قرار می‌دهیم و در بخش ۳ نشان می‌دهیم مجموعه تمام بردارهای نَرم روی یک ابرفضای برداری همراه با یک ابرعمل مناسب تشکیل یک ابرفضای برداری می‌دهد. لازم به ذکر است در حالت کلی گردایه تمام مجموعه‌های نَرم روی ابرفضاهای برداری با عمل جمع و ابرعمل خارجی متناظر تشکیل یک ابرفضای برداری نمی‌دهد. همچنین به طور مختصر ارتباط بین ابرفضاهای برداری و مجموعه بردارهای نَرم متناظر آن‌ها را با استفاده از مفهوم تبدیل خطی بررسی می‌کنیم. در بخش ۴ مفهوم نُرم نَرم روی ابرفضای برداری $SE(V)$ متشکل از بردارهای نَرم را معرفی کرده و نشان می‌دهیم هر خانواده پارامتری از نُرم‌ها روی ابرفضای برداری V یک نُرم نَرم روی ابرفضای برداری $SE(V)$ القا می‌کند، همان طوری که هر نُرم روی V یک نُرم نَرم روی $SE(V)$ القا می‌کند. در پایان ثابت می‌کنیم هر ابرفضای برداری نُرم‌دار نَرم به طور طبیعی یک فضای متریک نَرم است. شکل ۱ را ببینید.

[9]Corsini

[10]Scafati-Tallini

۲ تعاریف اولیه

در این بخش تعاریف اولیه، مثال‌ها و قضایای اثبات‌شده قبلی که در ادامه مقاله مورد نیاز است، آورده شده است.

تعریف ۱.۲. [۲۰] فرض کنید U مجموعه مرجع، E مجموعه‌ای از پارامترهای ممکن نسبت به U و $F : E \to P(U)$ یک نگاشت باشد ($P(U)$ مجموعه تمام زیرمجموعه‌های U است). در این صورت جفت (F, E) یک مجموعه نَرم روی U نامیده می‌شود؛ به عبارت دیگر مجموعه نَرم (F, E) یک خانواده پارامتری‌شده از زیرمجموعه‌های U است و

$$(F, E) = \{(e, F(e)) : e \in E, F(e) \subseteq U\}.$$

مثال ۲.۲. [۲۰] فرض کنید $U = \{h_۱, h_۲, h_۳, h_۴, h_۵, h_۶\}$ مجموعه‌ای از شش خانه و $E = \{e_۱, e_۲, e_۳, e_۴, e_۵\}$ یک مجموعه از پارامترهای مرتبط با خرید خانه شامل گران، زیبا، چوبی، ارزان و ویلایی است. فرض کنید $F(e_۱) = \{h_۲, h_۴\}$، $F(e_۲) = \{h_۱, h_۳\}$، $F(e_۳) = \{h_۳, h_۴, h_۵\}$، $F(e_۴) = \{h_۱, h_۳, h_۵\}$ و $F(e_۵) = \{h_۱\}$. در این صورت مجموعه نَرم

$$\begin{aligned}(F, E) &= \{(e_۱, \{h_۲, h_۴\}), (e_۲, \{h_۱, h_۳\}), (e_۳, \{h_۳, h_۴, h_۵\})\\ &\quad , (e_۴, \{h_۱, h_۳, h_۵\}), (e_۵, \{h_۱\})\}\end{aligned}$$

مجموعه‌ای از توصیف‌های تقریبی است که به خرید خانه کمک می‌کند.

تعریف ۳.۲. [۸] فرض کنید U یک مجموعه ناتهی دلخواه و E مجموعه‌ای ناتهی از پارامترها باشد. در این صورت تابع $f : E \to U$ یک عنصر نَرم از U نامیده می‌شود. گوییم عنصر نَرم f از U متعلق به مجموعه نَرم (F, E) از U است اگر $f(e) \in F(e)$، برای هر $e \in E$. در این حالت می‌نویسیم $f\tilde{\in}F$. اگر (F, E) یک مجموعه نَرم باشد به طوری که $F(e) \neq \emptyset$ برای هر $e \in E$، آنگاه گردایه تمام عنصرهای نَرم متعلق به (F, E) با $SE(F, E)$ نمایش داده می‌شود. در این حالت مجموعه نَرم (F, E) از U را می‌توان به

صورت زیر بیان کرد:

$$F(e) = \{f(e);\ f\widetilde{\in} F\}, \quad \forall e \in E.$$

توجه کنید که هر مجموعه نَرم تک‌عضوی روی U (مجموعه نَرم (F,E) تک‌عضوی نامیده می‌شود اگر برای هر $e \in E$، $F(e)$ یک زیرمجموعه تک‌عضوی $\{u_e\}$ از U باشد) را می‌توان یک عنصر نَرم از U در نظر گرفت، هرگاه مجموعه تک‌عضوی $\{u_e\}$ را با عنصرش u_e یکسان در نظر بگیریم.

نمادگذاری. مجموعه تمام عناصر نَرم روی مجموعه U با مجموعه پارامتر E (مستقل از تعلق به مجموعه نَرم (F,E)) را با $SE_E(U)$، و در جایی که ابهام نداشته باشد برای سادگی با $SE(U)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۴.۲. [۸] فرض کنید E یک مجموعه ناتهی از پارامترها باشد. در این صورت هر مجموعه نَرم (F,E) روی $\mathbb{R}$، یعنی تابع $F : E \to P(\mathbb{R})$، یک مجموعه حقیقی نَرم نامیده می‌شود اگر برای هر $e \in E$، $F(e)$ یک زیرمجموعه ناتهی کراندار از $\mathbb{R}$ باشد. مجموعه حقیقی نَرم (F,E) روی $\mathbb{R}$ یک عدد حقیقی نَرم نامیده می‌شود هرگاه یک مجموعه نَرم تک‌عضوی باشد؛ در این حالت (F,E) با عنصر نَرم متناظرش یکسان در نظر گرفته می‌شود، به عبارت دیگر هر تابع $F : E \to \mathbb{R}$ یک عدد حقیقی نَرم است. اعداد حقیقی نَرم معمولا با $\widetilde{r}$، به ازای $r \in \mathbb{R}$ نمایش داده می‌شود. رابطه $\leq$ بین اعداد حقیقی نَرم $\widetilde{r}$ و $\widetilde{s}$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\widetilde{r} \leq \widetilde{s} \Leftrightarrow \widetilde{r}(e) \leq \widetilde{s}(e),\ \forall e \in E.$$

$\overline{r}$ یک نوع خاص از اعداد حقیقی نَرم است که در آن $\overline{r}(e) = r$، برای هر $e \in E$.
عدد حقیقی نَرم $\widetilde{r}$ نامنفی نامیده می‌شود اگر $\widetilde{r}(e) \geq ۰$، برای هر $e \in E$.

مجموعه تمام اعداد حقیقی نَرم و اعداد حقیقی نَرم نامنفی به ترتیب با $\mathbb{R}(E)$ و $\mathbb{R}^+(E)$ نمایش داده می‌شوند. مثال‌های متنوعی از مجموعه‌های حقیقی نَرم و اعداد حقیقی نَرم در مرجع [۸] آورده شده است.

تعریف ۵.۲. [۹] فرض کنید X یک مجموعه ناتهی دلخواه و E یک مجموعه ناتهی از پارامترها باشد. در این صورت تابع

$$d : SE(X) \times SE(X) \to \mathbb{R}^{+}(E)$$

یک متر نَرم روی $SE(X)$ نامیده می‌شود اگر برای هر $\widetilde{x}, \widetilde{y}, \widetilde{z} \in SE(X)$ شرایط زیر برقرار باشند:

۱. $d(\widetilde{x}, \widetilde{y}) \geq \overline{\circ}$؛

۲. $d(\widetilde{x}, \widetilde{y}) = \overline{\circ} \Leftrightarrow \widetilde{x} = \widetilde{y}$؛

۳. $d(\widetilde{x}, \widetilde{y}) = d(\widetilde{y}, \widetilde{x})$؛

۴. $d(\widetilde{x}, \widetilde{z}) \leq d(\widetilde{x}, \widetilde{y}) + d(\widetilde{y}, \widetilde{z})$.

در این حالت $(SE(X), d)$ یک فضای متریک نَرم نامیده می‌شود.

مثال ۶.۲. [۹] ۱. فرض کنید X یک مجموعه ناتهی و E یک مجموعه ناتهی از پارامترها باشد. قرار دهید

$$d(\widetilde{x}, \widetilde{y}) = \begin{cases} \overline{\circ} & \widetilde{x} = \widetilde{y}, \\ \overline{1} & \widetilde{x} \neq \widetilde{y}. \end{cases}$$

در این صورت d یک متر نَرم روی $SE(X)$ است که متر نَرم گسسته نامیده می‌شود.

۲. فرض کنید E یک مجموعه ناتهی از پارامترها و $\{d_e\}_{e\in E}$ خانواده‌ای از مترها روی مجموعه X باشد. قرار دهید

$$d(\widetilde{x}, \widetilde{y})(e) = d_e(\widetilde{x}(e), \widetilde{y}(e)), \quad \forall e \in E.$$

در این صورت d یک متر نَرم روی $SE(X)$ است.

تعریف ۷.۲. [۲۵] فرض کنید K یک میدان و $(V, +)$ یک گروه آبلی باشد. در این صورت چهارتایی $(V, +, \circ, K)$ یک ابرفضای برداری روی K نامیده می‌شود

هرگاه $\circ : K \times V \to P^*(V)$ یک ابرعمل خارجی باشد ($P^*(V)$ مجموعه تمام زیرمجموعه‌های ناتهی V است) به طوری که برای هر $x, y \in V$ و $a, b \in K$ شرایط زیر برقرار باشند:

۱. $a \circ (x + y) \subseteq a \circ x + a \circ y$؛

۲. $(a + b) \circ x \subseteq a \circ x + b \circ x$؛

۳. $a \circ (b \circ x) = (ab) \circ x$؛

۴. $a \circ (-x) = (-a) \circ x = -(a \circ x)$؛

۵. $x \in 1 \circ x$.

جایی‌که در (۱)، $a\circ x+a\circ y = \{p+q : p \in a\circ x, q \in a\circ y\}$. مجموع سمت راست تساوی (۲) بطور مشابه تعریف می‌شود. همچنین در (۳)، $a \circ (b \circ x) = \bigcup\limits_{t \in b\circ x} a \circ t$.
ابرفضای برداری V توزیع‌پذیر راست قوی نامیده می‌شود هرگاه در (۱) تساوی برقرار باشد. ابرفضای برداری توزیع‌پذیر چپ قوی بطور مشابه تعریف می‌شود. ابرفضای برداری V توزیع‌پذیر قوی نامیده می‌شود هرگاه توزیع‌پذیر چپ و راست قوی باشد.

مثال ۸.۲. [۱۵] اگر K یک میدان باشد، آن‌گاه $(K^n, +, \circ, K)$ یک ابرفضای برداری است که در آن ابرعمل خارجی $\circ : K \times K^n \to P^*(K^n)$ با ضابطه $a \circ x = \{ax, -ax\}$ تعریف شده است.

مثال ۹.۲. [۳] فضای اقلیدسی $(\mathbb{R}^2, +)$ را به عنوان یک گروه آبلی در نظر بگیرید. ابرعمل خارجی $\circ : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to P^*(\mathbb{R}^2)$ را چنین تعریف کنید که به هر $a \in \mathbb{R}$ و $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ پاره‌خط بین مبدأ مختصات و نقطه (ax, ay) در $\mathbb{R}^2$ را نسبت دهد. در این صورت $(\mathbb{R}^2, +, \circ, \mathbb{R})$ یک ابرفضای برداری است.

تعریف ۱۰.۲. [۳] یک تبدیل خطی بین ابرفضاهای برداری $(V_1, +_1, \circ_1, K)$ و $(V_2, +_2, \circ_2, K)$ عبارت است از یک تابع $T : V_1 \to V_2$ که برای هر $x, y \in V_1$ و $a \in K$ در شرایط زیر صدق می‌کند:

۱. $T(x +_1 y) = T(x) +_2 T(y)$؛

۲. $T(a \circ_۱ x) \subseteq a \circ_۲ T(x)$.

مثال ۱۱.۲. [۱۳] فرض کنید $(V, +, \circ, K)$ یک ابرفضای برداری باشد و

$$V^n = \left\{ \begin{bmatrix} x_۱ \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} : x_i \in V \right\}.$$

در این صورت $(V^n, \oplus_n, \odot_n, K)$ همراه با عمل " $\oplus_n$ " و ابرعمل خارجی " $\odot_n$ " با تعاریف زیر یک ابرفضای برداری است:

$$\begin{bmatrix} x_۱ \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \oplus_n \begin{bmatrix} y_۱ \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_۱ + y_۱ \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{bmatrix}$$

و

$$a \odot_n \begin{bmatrix} x_۱ \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} x'_۱ \\ \vdots \\ x'_n \end{bmatrix} : x'_i \in a \circ x_i, ۱ \leq i \leq n \right\}.$$

حال اگر $(V^m, \oplus_m, \odot_m, K)$ و $(V^n, \oplus_n, \odot_n, K)$ دو ابرفضای برداری توزیع پذیر قوی با تعریف فوق باشند به طوری که $m < n$، آن گاه $T : V^m \longrightarrow V^n$ با ضابطه زیر یک تبدیل خطی است:

$$T\left(\begin{bmatrix} x_۱ \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_۱ + x_۲ \\ x_۲ + x_۳ \\ \vdots \\ x_{m-۱} + x_m \\ x_۱ + x_۲ \\ \vdots \\ x_۱ + x_۲ \end{bmatrix}$$

۳ ساختار جبری مجموعه تمام بردارهای نَرم روی یک ابرفضای برداری

مفهوم بردار نَرم روی یک ابرفضای برداری متعلق به یک ابرفضای برداری نَرم توسط دهقان و نوروزی [۱۵] معرفی شده است. در این بخش بردار نَرم روی ابرفضای برداری را مستقل از تعلق به یک ابرفضای برداری نَرم تعریف می‌کنیم و نشان می‌دهیم مجموعه تمام بردارهای نَرم روی یک ابرفضای برداری همراه با یک ابرعمل مناسب تشکیل یک ابرفضای برداری می‌دهد. همچنین ارتباط بین ابرفضاهای برداری و مجموعه بردارهای نَرم متناظر آن‌ها را با استفاده از مفهوم تبدیل خطی بررسی می‌کنیم.

تعریف ۱.۳. فرض کنید V یک ابرفضای برداری روی میدان K و E مجموعه‌ای ناتهی از پارامترها باشد. در این صورت هر عنصر نَرم روی V یک بردار نَرم روی V نامیده می‌شود؛ به بیان دیگر یک بردار نَرم عبارت است از یک تابع $f : E \to V$ که به هر پارامتر $e \in E$ برداری از V نسبت می‌دهد. بردارهای نَرم را معمولا با $\widetilde{x}$، $\widetilde{y}$ و $\widetilde{z}$ نمایش می‌دهیم. همچنین $\overline{x}$ نمایشگر یک بردار نَرم است که در آن $\overline{x}(e) = x$، برای هر $e \in E$. بردار نَرم $\widetilde{x}$ پوچ نامیده می‌شود اگر $\overline{x}(e) = \underline{\circ}$، برای هر $e \in E$، که در آن $\underline{\circ}$ صفر ابرفضای برداری V است. بردار نَرم پوچ با θ نمایش داده می‌شود.

مثال ۲.۳. ابرفضای برداری $(\mathbb{R}^n, +, \circ, \mathbb{R})$ با ابرعمل تعریف‌شده در مثال ۸.۲ را در نظر بگیرید و فرض کنید $E = \{۱, \ldots, n\}$ مجموعه‌ای از پارامترها باشد. در این صورت تابع $f : E \to \mathbb{R}^n$ با ضابطه $f(i) = (t_۱, \ldots, t_n)$، که در آن $t_i = ۰$ و $t_j = ۱$ برای $j \in E \backslash \{i\}$، یک بردار نَرم روی $\mathbb{R}^n$ است.

قضیه ۳.۳. *اگر $(V, +, \circ, K)$ یک ابرفضای برداری و E یک مجموعه ناتهی از پارامترها باشد، آن‌گاه $(SE(V), \oplus, \odot, K)$ همراه با عمل و ابرعمل خارجی زیر یک ابرفضای برداری است:*

$$\left[\begin{array}{l} \oplus : SE(V) \times SE(V) \to SE(V) \\ \quad (\widetilde{x} \oplus \widetilde{y})(e) = \widetilde{x}(e) + \widetilde{y}(e), \end{array}\right.$$

و

$$\left[\begin{array}{l}\odot : K \times SE(V) \to P^*(SE(V)) \\ \quad a \odot \widetilde{x} = \{\widetilde{y} \in SE(V);\ \widetilde{y}(e) \in a \circ \widetilde{x}(e),\ \forall e \in E\}\,.\end{array}\right.$$

اثبات. به آسانی دیده می‌شود $(SE(V), \oplus)$ یک گروه آبلی است که در آن $\circ_{SE(V)} = \theta$ و

$$\left[\begin{array}{l}-\widetilde{x} : E \to V \\ (-\widetilde{x})(e) = -\widetilde{x}(e).\end{array}\right.$$

حال شرایط تعریف ۷.۲ را بررسی می‌کنیم. فرض کنید $\widetilde{x}, \widetilde{y} \in SE(V)$ و $a, b \in K$. در این صورت

۱. اگر $\widetilde{z} \in a \odot (\widetilde{x} \oplus \widetilde{y})$ و $e \in E$، آن‌گاه

$$\begin{aligned}\widetilde{z}(e) &\in a \circ (\widetilde{x} \oplus \widetilde{y})(e) \\ &= a \circ (\widetilde{x}(e) + \widetilde{y}(e)) \\ &\subseteq a \circ \widetilde{x}(e) + a \circ \widetilde{y}(e).\end{aligned}$$

لذا $\widetilde{z}(e) = t_e + s_e$ برای برخی $t_e \in a \circ \widetilde{x}(e)$ و $s_e \in a \circ \widetilde{y}(e)$. قرار دهید

$$\left[\begin{array}{l}\widetilde{z}_1 : E \to V \\ \widetilde{z}_1(e) = t_e.\end{array}\right. \quad \text{و} \quad \left[\begin{array}{l}\widetilde{z}_2 : E \to V \\ \widetilde{z}_2(e) = s_e,\end{array}\right.$$

در این صورت $\widetilde{z}_1$ و $\widetilde{z}_2$ بردارهای نَرم روی V هستند به طوری که

$$\widetilde{z}(e) = \widetilde{z}_1(e) + \widetilde{z}_2(e) = (\widetilde{z}_1 \oplus \widetilde{z}_2)(e),$$

$\widetilde{z}_1(e) \in a \circ \widetilde{x}(e)$ و $\widetilde{z}_2(e) \in a \circ \widetilde{y}(e)$، برای هر $e \in E$. از این رو $\widetilde{z} = \widetilde{z}_1 \oplus \widetilde{z}_2$ به طوری که $\widetilde{z}_1 \in a \odot \widetilde{x}$ و $\widetilde{z}_2 \in a \odot \widetilde{y}$، که نتیجه می‌دهد $\widetilde{z} \in (a \odot \widetilde{x}) \oplus (a \odot \widetilde{y})$. بنابراین

$$a \odot (\widetilde{x} \oplus \widetilde{y}) \subseteq (a \odot \widetilde{x}) \oplus (a \odot \widetilde{y})\,.$$

۲. مشابه قسمت (۱) ثابت می‌شود $(a + b) \odot \widetilde{x} \subseteq (a \odot \widetilde{x}) \oplus (b \odot \widetilde{x})$.

۳. $a \odot (b \odot \widetilde{x}) = (ab) \odot \widetilde{x}$ زیرا

$$\begin{aligned}\widetilde{y} \in a \odot (b \odot \widetilde{x}) &\Leftrightarrow \exists\, \widetilde{z} \in b \odot \widetilde{x},\, \widetilde{y} \in a \odot \widetilde{z}\\ &\Leftrightarrow \forall e \in E,\ \widetilde{z}(e) \in b \circ \widetilde{x}(e),\, \widetilde{y}(e) \in a \circ \widetilde{z}(e)\\ &\Leftrightarrow \forall e \in E,\ \widetilde{y}(e) \in a \circ (b \circ \widetilde{x}(e)) = (ab) \circ \widetilde{x}(e)\\ &\Leftrightarrow \widetilde{y} \in (ab) \odot \widetilde{x}.\end{aligned}$$

۴. $\widetilde{y} \in a \odot (-\widetilde{x})$ اگر و تنها اگر برای هر $e \in E$،

$$\widetilde{y}(e) \in a \circ (-\widetilde{x})(e) = a \circ (-\widetilde{x}(e)) = (-a) \circ \widetilde{x}(e),$$

اگر و تنها اگر $\widetilde{y} \in (-a) \odot \widetilde{x}$. لذا $a \odot (-\widetilde{x}) = (-a) \odot \widetilde{x}$. حال اگر $\widetilde{y} \in -(a \odot \widetilde{x})$، آن‌گاه

$$\begin{aligned}&\exists \widetilde{z} \in a \odot \widetilde{x},\ \widetilde{y} = -\widetilde{z},\\ \Rightarrow\ & \forall e \in E,\, \widetilde{z}(e) \in a \circ \widetilde{x}(e),\ \widetilde{y} = -\widetilde{z},\\ \Rightarrow\ & \forall e \in E,\, \widetilde{y}(e) = (-\widetilde{z})(e) = -\widetilde{z}(e) \in -(a \circ \widetilde{x}(e)) = (-a) \circ \widetilde{x}(e),\\ \Rightarrow\ & \widetilde{y} \in (-a) \odot \widetilde{x}.\end{aligned}$$

لذا $-(a \odot \widetilde{x}) \subseteq (-a) \odot \widetilde{x}$. از طرف دیگر اگر $\widetilde{y} \in (-a) \odot \widetilde{x}$، آن‌گاه

$$\widetilde{y}(e) \in (-a) \circ \widetilde{x}(e) = -(a \circ \widetilde{x}(e)),$$

برای هر $e \in E$. در نتیجه برای هر $e \in E$، $t_e \in a \circ \widetilde{x}(e)$ وجود دارد به طوری که $\widetilde{y}(e) = -t_e$. قرار دهید

$$\left[\begin{array}{l}\widetilde{z} : E \to V\\ \widetilde{z}(e) = t_e,\end{array}\right.$$

در این صورت $\widetilde{z}(e) \in a \circ \widetilde{x}(e)$ و $\widetilde{y}(e) = -\widetilde{z}(e)$ برای هر $e \in E$. از این رو

$\widetilde{x} \odot a \in \widetilde{z}$ و $\widetilde{y} = -\widetilde{z}$. پس $\widetilde{y} \in -(a \odot \widetilde{x})$ و لذا $(-a) \odot \widetilde{x} \subseteq -(a \odot \widetilde{x})$.
بنابراین $(-a) \odot \widetilde{x} = -(a \odot \widetilde{x})$.

۵. برای هر $e \in E$، $\widetilde{x}(e) \in ۱ \circ \widetilde{x}(e)$. در نتیجه $\widetilde{x} \in ۱ \odot \widetilde{x}$.

□

قضیه ۴.۳. *فرض کنید E یک مجموعه ناتهی از پارامترها و $\{T_e : V_۱ \to V_۲\}_{e \in E}$ یک گردایه پارامتری از تبدیلات خطی بین ابرفضاهای برداری $(V_۱, +_۱, \circ_۱, K)$ و $(V_۲, +_۲, \circ_۲, K)$ باشد. در این صورت $T : SE(V_۱) \to SE(V_۲)$ یک تبدیل خطی است هرگاه:*

$$\left[\begin{array}{l} T(\widetilde{x}) : E \to V_۲ \\ T(\widetilde{x})(e) = T_e(\widetilde{x}(e)). \end{array}\right.$$

اثبات. به آسانی دیده می‌شود T خوش تعریف است. همچنین

۱. برای هر $\widetilde{x}, \widetilde{y} \in SE(V_۱)$ و $e \in E$،

$$\begin{aligned} T(\widetilde{x} \oplus_۱ \widetilde{y})(e) &= T_e\left((\widetilde{x} \oplus_۱ \widetilde{y})(e)\right) \\ &= T_e\left(\widetilde{x}(e) +_۱ \widetilde{y}(e)\right) \\ &= T_e\left(\widetilde{x}(e)\right) +_۲ T_e\left(\widetilde{y}(e)\right) \\ &= T(\widetilde{x})(e) +_۲ T(\widetilde{y})(e) \\ &= \left(T(\widetilde{x}) \oplus_۲ T(\widetilde{y})\right)(e). \end{aligned}$$

از این رو $T(\widetilde{x} \oplus_۱ \widetilde{y}) = T(\widetilde{x}) \oplus_۲ T(\widetilde{y})$.

۲. برای هر $\widetilde{x} \in SE(V_۱)$ و $a \in K$، اگر $\widetilde{y} \in T(a \odot_۱ \widetilde{x})$، آن‌گاه $\widetilde{t} \in a \odot_۱ \widetilde{x}$ وجود

دارد به طوری که $\widetilde{y} = T(\widetilde{t})$. لذا برای هر $e \in E$، داریم:

$$\begin{aligned}\widetilde{y}(e) &= T(\widetilde{t})(e)\\ &= T_e(\widetilde{t}(e))\\ &\in T_e(a \odot_1 \widetilde{x}(e))\\ &\subseteq a \odot_2 T_e(\widetilde{x}(e))\\ &= a \odot_2 T(\widetilde{x})(e).\end{aligned}$$

در نتیجه $\widetilde{y} \in a \odot_2 T(\widetilde{x})$. بنابراین $T(a \odot_1 \widetilde{x}) \subseteq a \odot_2 T(\widetilde{x})$.

□

قضیه ۵.۳. *فرض کنید V و W ابرفضای برداری روی میدان K، E یک مجموعه ناتهی از پارامترها و $T : SE(V) \to SE(W)$ یک تبدیل خطی باشد به طوری که برای هر $v \in V$ و $e \in E$،*

$$\{T(\widetilde{x})(e);\ \widetilde{x} \in SE(V),\ \widetilde{x}(e) = v\}$$

یک زیرمجموعه تک‌عضوی از W باشد. در این صورت $\{T_e : V \to W\}_{e\in E}$ یک خانواده از تبدیلات خطی است که در آن برای هر $e \in E$، $T_e(v) = T(\widetilde{x})(e)$، برای هر $\widetilde{x} \in SE(V)$ که $\widetilde{x}(e) = v$.

اثبات. طبق فرضیات قضیه، برای هر $e \in E$، نگاشت $T_e : V \to W$ خوش تعریف است. حال اگر $e \in E$، $v_1, v_2 \in V$ و $\widetilde{x}, \widetilde{y} \in SE(V)$ به طوری که $\widetilde{x}(e) = v_1$ و $\widetilde{y}(e) = v_2$، آن‌گاه $(\widetilde{x} \oplus \widetilde{y})(e) = \widetilde{x}(e) + \widetilde{y}(e) = v_1 + v_2$ و لذا

$$\begin{aligned}T_e(v_1 + v_2) &= T(\widetilde{x} \oplus_V \widetilde{y})(e)\\ &= \left(T(\widetilde{x}) \oplus_W T(\widetilde{y})\right)(e)\\ &= T(\widetilde{x})(e) +_W T(\widetilde{y})(e)\\ &= T_e(v_1) + T_e(v_2).\end{aligned}$$

همچنین اگر $e \in E$، $a \in K$، $v \in V$، $y \in T_e(a \circ_V v)$ و $\widetilde{x} \in SE(V)$ به طوری که $\widetilde{x}(e) = v$، آن‌گاه $y = T_e(v')$ برای برخی $v' \in a \circ_V v$. فرض کنید $\widetilde{x'} \in SE(V)$ به طوری که $\widetilde{x'}(e) = v'$. در این صورت $\widetilde{x'}(e) \in a \circ_V \widetilde{x}(e)$ و در نتیجه

$$T\left(\widetilde{x'}\right) \in T\left(a \odot_V \widetilde{x}\right) \subseteq a \odot_W T\left(\widetilde{x}\right).$$

پس

$$y = T_e(v') = T\left(\widetilde{x'}\right)(e) \in a \circ_W T\left(\widetilde{x}\right)(e) = a \circ_W T_e(v).$$

بنابراین $T_e(a \circ_V v) \subseteq a \circ_W T_e(v)$ و اثبات کامل است. □

۴ ابرفضاهای برداری نُرم‌دار نَرم

در این بخش مفهوم نُرم نَرم روی ابرفضای برداری $SE(V) = (SE(V), \oplus, \odot, K)$ متشکل از بردارهای نَرم معرفی و ارتباط متقابل آن با نُرم معمولی روی ابرفضای برداری $V = (V, +, \circ, K)$ بررسی می‌شود. همچنین ثابت می‌شود به طور طبیعی هر ابرفضای برداری نُرم‌دار نَرم یک فضای متریک نَرم است.

تابع $|\cdot| : K \to \mathbb{R}$ یک ارزیابی روی میدان K نامیده می‌شود اگر برای هر $a, b \in K$، $|a| \geq ۰$، $|a| = ۰$ اگر و تنها اگر $a = ۰$، $|a + b| \leq |a| + |b|$ و $|ab| \leq |a|\,|b|$. در این حالت K را یک میدان ارزیابی می‌نامند.

تعریف ۱.۴. فرض کنید $(V, +, \circ, K)$ یک ابرفضای برداری روی میدان ارزیابی K و E یک مجموعه ناتهی از پارامترها باشد. در این صورت نگاشت

$$\|\cdot\| : SE(V) \to \mathbb{R}^+(E)$$

یک نُرم نَرم روی ابرفضای برداری $(SE(V), \oplus, \odot, K)$ نامیده می‌شود اگر برای هر $\widetilde{x}, \widetilde{y} \in SE(V)$ و $a \in K$ شرایط زیر برقرار باشند:

۱. $\|\widetilde{x}\| \geq \overline{۰}$، و $\|\widetilde{x}\| = \overline{۰}$ اگر و تنها اگر $\widetilde{x} = \theta$؛

۲. $\|\widetilde{x} \oplus \widetilde{y}\| \leq \|\widetilde{x}\| + \|\widetilde{y}\|$؛

۳. $\sup \|a \odot \widetilde{x}\| = \sup\limits_{\widetilde{y} \in a \odot \widetilde{x}} \|\widetilde{y}\| = |a| \, \|\widetilde{x}\|$، یعنی

$$\forall e \in E; \quad \sup_{\widetilde{y}(e) \in a \circ \widetilde{x}(e)} \|\widetilde{y}\|(e) = |a| \, \|\widetilde{x}\|(e).$$

مثال ۲.۴. فرض کنید $(\mathbb{R}^۲, +, \circ, \mathbb{R})$ ابرفضای برداری معرفی‌شده در مثال ۹.۲، E یک مجموعه ناتهی دلخواه از پارامترها و $|\cdot| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ تابع قدر مطلق به عنوان ارزیابی معمولی روی $\mathbb{R}$ باشد. نگاشت $\|\cdot\| : SE(\mathbb{R}^۲) \to \mathbb{R}^+(E)$ را با ضابطه زیر تعریف می‌کنیم:

$$\left[\begin{array}{l} \|\widetilde{x}\| : E \to \mathbb{R}^+ \\ \|\widetilde{x}\|(e) = \|\widetilde{x}(e)\|, \end{array}\right.$$

که در آن $\|\widetilde{x}(e)\|$ نُرم اقلیدسی روی $\mathbb{R}^۲$ است. در این صورت $\|\cdot\|$ یک نُرم نَرم روی ابرفضای برداری $(SE(\mathbb{R}^۲), \oplus, \odot, \mathbb{R})$ است.

مثال ۳.۴. ابرفضای برداری $(\mathbb{R}, +, \circ, \mathbb{R})$ با ابرعمل تعریف‌شده در مثال ۸.۲ را در نظر بگیرید و فرض کنید E مجموعه‌ای ناتهی از پارامترها و $|\cdot| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ تابع قدر مطلق به عنوان ارزیابی معمولی روی $\mathbb{R}$ باشد. نگاشت $\|\cdot\| : \mathbb{R}(E) \to \mathbb{R}^+(E)$ را با ضابطه زیر تعریف می‌کنیم:

$$\left[\begin{array}{l} \|\widetilde{x}\| : E \to \mathbb{R}^+ \\ \|\widetilde{x}\|(e) = |\widetilde{x}(e)|. \end{array}\right.$$

در این صورت $\|\cdot\|$ یک نُرم نَرم روی ابرفضای برداری $(\mathbb{R}(E), \oplus, \odot, \mathbb{R})$ است.

قضیه ۴.۴. *اگر $\|\cdot\|$ یک نُرم نَرم روی ابرفضای برداری $(SE(V), \oplus, \odot, K)$ باشد، آن‌گاه*

$$\forall a \in K, \ \forall \widetilde{x} \in a \odot \theta, \ \ \|\widetilde{x}\| = \widetilde{۰}.$$

اثبات. طبق تعریف ۱.۴، داریم:

$$\sup \|a \odot \theta\| = \sup_{\widetilde{y}(e)\in a\circ\theta(e)} \|\widetilde{y}\|(e) = |a| \, \|\theta\|(e) = \circ.$$

لذا اگر $\widetilde{x} \in a \odot \theta$، آن‌گاه

$$\forall e \in E,\ \|\widetilde{x}\|(e) \leq \sup_{\widetilde{y}(e)\in a\odot\theta(e)} \|\widetilde{y}\|(e) = \circ,$$

و در نتیجه $\|\widetilde{x}\|(e) = \circ$. از این رو $\|\widetilde{x}\| = \overline{\circ}$. □

در قضیه بعد نشان می‌دهیم هر خانواده پارامتری از نُرم‌ها روی یک ابرفضای برداری $(V, +, \circ, K)$ یک نُرم نَرم روی ابرفضای برداری $(SE(V), \oplus, \odot, K)$ القا می‌کند.

قضیه ۵.۴. *فرض کنید $(V, +, \circ, K)$ یک ابرفضای برداری، E یک مجموعه ناتهی از پارامترها و $\{\|\cdot\|_e\}_{e\in E}$ خانواده‌ای از نُرم‌ها روی V باشد. در این صورت نگاشت $\|\cdot\| : SE(V) \to \mathbb{R}^+(E)$ یک نُرم نَرم روی ابرفضای برداری $(SE(V), \oplus, \odot, K)$ است هرگاه*

$$\left[\begin{array}{l} \|\widetilde{x}\| : E \to \mathbb{R}^+ \\ \|\widetilde{x}\|(e) = \|\widetilde{x}(e)\|_e . \end{array}\right.$$

اثبات. شرایط تعریف ۱.۴ را بررسی می‌کنیم:

۱. برای هر $e \in E$، $\overline{\circ}(e) = \circ \leq \|\widetilde{x}(e)\|_e = \|\widetilde{x}\|(e)$، پس $\overline{\circ} \leq \|\widetilde{x}\|$؛ همچنین $\|\widetilde{x}\| = \overline{\circ}$ اگر و تنها اگر برای هر $e \in E$، $\|\widetilde{x}\|(e) = \|\widetilde{x}(e)\|_e = \circ = \overline{\circ}(e)$، اگر و تنها اگر برای هر $e \in E$، $\widetilde{x}(e) = \underline{\circ}$، اگر و تنها اگر $\widetilde{x} = \theta$.

۲. برای هر $e \in E$، با استفاده از شرط دوم نُرم روی ابرفضای برداری نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned}\|\widetilde{x} \oplus \widetilde{y}\|(e) &= \|(\widetilde{x} \oplus \widetilde{y})(e)\|_e \\ &= \|\widetilde{x}(e) + \widetilde{y}(e)\|_e \\ &\leq \|\widetilde{x}(e)\|_e + \|\widetilde{y}(e)\|_e \\ &= \|\widetilde{x}\|(e) + \|\widetilde{y}\|(e) \\ &= (\|\widetilde{x}\| + \|\widetilde{y}\|)(e).\end{aligned}$$

لذا $\|\widetilde{x} \oplus \widetilde{y}\| \leq \|\widetilde{x}\| + \|\widetilde{y}\|$.

۳. با توجه به شرط سوم نُرم روی ابرفضای برداری داریم:

$$\begin{aligned}\sup_{\widetilde{y} \in a \odot \widetilde{x}, e \in E} \|\widetilde{y}\|(e) &= \sup_{\widetilde{y}(e) \in a \circ \widetilde{x}(e), e \in E} \|\widetilde{y}(e)\|_e \\ &= |a| \, \|\widetilde{x}(e)\|_e \\ &= |a| \, \|\widetilde{x}\|(e).\end{aligned}$$

بنابراین $\|\cdot\|$ یک نُرم نَرم روی $(SE(V), \oplus, \odot, K)$ است. □

هر نُرم روی یک ابرفضای برداری $(V, +, \circ, K)$ یک نُرم نَرم روی ابرفضای برداری $(SE(V), \oplus, \odot, K)$ القا می‌کند:

قضیه ۶.۴. *فرض کنید $\|\cdot\|_V$ یک نُرم روی ابرفضای برداری $(V, +, \circ, K)$ و E یک مجموعه ناتهی از پارامترها باشد. در این صورت نگاشت $\|\cdot\| : SE(V) \to \mathbb{R}^+(E)$ با ضابطه زیر یک نُرم نَرم روی ابرفضای برداری $(SE(V), \oplus, \odot, K)$ است:*

$$\left[\begin{array}{l}\|\widetilde{x}\| : E \to \mathbb{R}^+ \\ \|\widetilde{x}\|(e) = \|\widetilde{x}(e)\|_V .\end{array}\right.$$

اثبات. مشابه اثبات قضیه ۵.۴ است. □

هر ابرفضای برداری نُرمدار نَرم یک فضای متریک نَرم است:

قضیه ۷.۴. *فرض کنید $(SE(V), \oplus, \odot, K, \|\cdot\|)$ یک ابرفضای برداری نُرم‌دار نَرم و $|\cdot|$ یک ارزیابی روی میدان K باشد. قرار دهید*

$$\left[\begin{array}{l} d : SE(V) \times SE(V) \to \mathbb{R}^{+}(E) \\ \qquad d(\widetilde{x}, \widetilde{y}) = \|\widetilde{x} - \widetilde{y}\| \,. \end{array}\right.$$

در این صورت d یک متر نَرم روی $SE(V)$ است.

اثبات. نشان می‌دهیم d در شرایط تعریف ۵.۲ صدق می‌کند:

۱. $d(\widetilde{x}, \widetilde{y}) = \|\widetilde{x} - \widetilde{y}\| \geq \overline{0}$؛

۲. $d(\widetilde{x}, \widetilde{y}) = \overline{0}$ اگر و تنها اگر $\|\widetilde{x} - \widetilde{y}\| = \overline{0}$ اگر و تنها اگر $\widetilde{x} = \widetilde{y}$.

۳. می‌دانیم در هر میدان ارزیابی $|1| = |-1|$. لذا

$$\begin{aligned} d(\widetilde{x}, \widetilde{y}) &= \|\widetilde{x} - \widetilde{y}\| \\ &= |-1| \, \|\widetilde{x} - \widetilde{y}\| \\ &= \sup \|(-1) \odot (\widetilde{x} - \widetilde{y})\| \\ &= \sup \|1 \odot (\widetilde{y} - \widetilde{x})\| \\ &= |1| \, \|\widetilde{y} - \widetilde{x}\| \\ &= \|\widetilde{y} - \widetilde{x}\| \,. \end{aligned}$$

۴. $d(\widetilde{x}, \widetilde{y}) + d(\widetilde{y}, \widetilde{z}) = \|\widetilde{x} - \widetilde{y}\| + \|\widetilde{y} - \widetilde{z}\| \geq \|\widetilde{x} - \widetilde{z}\| = d(\widetilde{x}, \widetilde{z})$.

□

متر نَرم d در قضیه ۷.۴، متر نَرم القاشده توسط نُرم نَرم $\|\cdot\|$ نامیده می‌شود.
هر متر نَرم روی ابرفضای برداری $SE(V)$ یک متر معمولی روی آن القا می‌کند.

قضیه ۸.۴. *اگر $(SE(V), d)$ یک ابرفضای برداری متریک نَرم باشد، آن‌گاه*

$$d' : SE(V) \times SE(V) \to \mathbb{R}^{+}$$

با ضابطه

$$d'(\widetilde{x},\widetilde{y}) = \sup_{e\in E} d(\widetilde{x},\widetilde{y})(e)$$

یک متر روی $SE(V)$ است.

اثبات. نشان می‌دهیم d' در شرایط متر معمولی صدق می‌کند:

۱. واضح است که $d'(\widetilde{x},\widetilde{y}) \geq 0$؛

۲. $d'(\widetilde{x},\widetilde{y}) = 0$ اگر و تنها اگر برای هر $e \in E$، $d(\widetilde{x},\widetilde{y})(e) = 0$ اگر و تنها اگر $d(\widetilde{x},\widetilde{y}) = \overline{0}$ اگر و تنها اگر $\widetilde{x} = \widetilde{y}$.

۳.

$$\begin{aligned} d'(\widetilde{x},\widetilde{y}) &= \sup_{e\in E} d(\widetilde{x},\widetilde{y})(e) \\ &= \sup_{e\in E} d(\widetilde{y},\widetilde{x})(e) \\ &= d'(\widetilde{y},\widetilde{x}). \end{aligned}$$

۴.

$$\begin{aligned} d'(\widetilde{x},\widetilde{z}) &= \sup_{e\in E} d(\widetilde{x},\widetilde{z})(e) \\ &\leq \sup_{e\in E} \left(d(\widetilde{x},\widetilde{y})(e) + d(\widetilde{y},\widetilde{z})(e) \right) \\ &= \left(\sup_{e\in E} d(\widetilde{x},\widetilde{y})(e) \right) + \left(\sup_{e\in E} d(\widetilde{y},\widetilde{z})(e) \right) \\ &= d'(\widetilde{x},\widetilde{y}) + d'(\widetilde{y},\widetilde{z}). \end{aligned}$$

□

قضیه ۹.۴. *فرض کنید d متر نَرم القاشده توسط نُرم نَرم $\|\cdot\|$ روی $SE(V)$ باشد. در این صورت برای هر $\widetilde{x},\widetilde{y} \in SE(V)$ و $a,b \in K$ شرایط زیر برقرارند:*

۱. $d(\widetilde{x}+\widetilde{z},\widetilde{y}+\widetilde{z}) = \|\widetilde{x}-\widetilde{y}\|$؛

۲. $d(a\odot\widetilde{x}, b\odot\widetilde{y}) \leq |a|\,\|\widetilde{x}\| + |b|\,\|\widetilde{y}\|$.

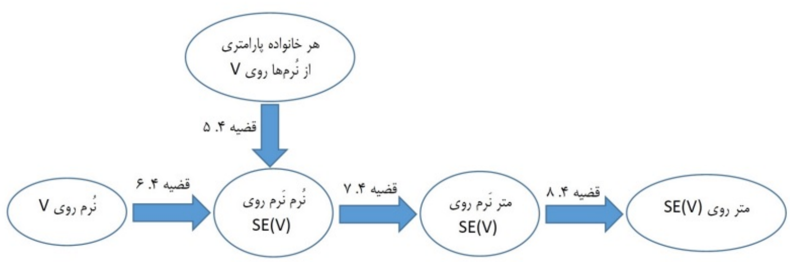
اثبات. ۱) $d(\widetilde{x}+\widetilde{z},\widetilde{y}+\widetilde{z}) = \|(\widetilde{x}+\widetilde{z})-(\widetilde{y}+\widetilde{z})\| = \|\widetilde{x}-\widetilde{y}\| = d(\widetilde{x},\widetilde{y})$.

۲)

$$\begin{aligned} d(a\odot\widetilde{x}, b\odot\widetilde{y}) &= \sup_{\widetilde{x'}\in a\odot\widetilde{x}, \widetilde{y'}\in a\odot\widetilde{y}} d(\widetilde{x'},\widetilde{y'}) \\ &= \sup_{\substack{\left\|\widetilde{x'}\right\| \le \sup\|a\odot\widetilde{x}\|, \\ \left\|\widetilde{y'}\right\| \le \sup\left\|a\odot\widetilde{y'}\right\|}} \left\|\widetilde{x'}-\widetilde{y'}\right\| \\ &\le \sup_{\|\widetilde{x'}\|\le|a|\|\widetilde{x}\|, \|\widetilde{y'}\|\le|a|\|\widetilde{y}\|} \left\|\widetilde{x'}\right\| + \left\|\widetilde{y'}\right\| \\ &\le |a|\,\|\widetilde{x}\| + |b|\,\|\widetilde{y}\|. \end{aligned}$$

□

ارتباط بین مفاهیم مطالعه‌شده در این بخش در شکل ۱ نمایش داده شده است:



شکل ۱: *رابطه بین مفاهیم نُرم، متر، نُرم نَرم و متر نَرم*

۵ نتیجه گیری

استفاده از مفاهیم مجموعه‌های نَرم، مجموعه‌های فازی و مجموعه‌های ناهموار، برخی از راه حل‌های مسائلی هستند که با عدم قطعیت سر و کار دارند. تأثیر ایده مجموعه‌های نَرم بر ساختارهای جبری منجر به پیدایش انواع مختلف ساختارهای جبری نَرم شده است که توسط افراد زیادی مورد مطالعه قرار گرفته‌اند. به ویژه، در دهه اخیر ابرساختارهای جبری نَرم مورد توجه برخی پژوهشگران بوده که به تعدادی از آن‌ها در مراجع اشاره شده است.

در ادامه مطالعات قبلی، در این مقاله با کاربرد مفهوم بردار نَرم روی ابرفضاهای برداری، مجموعه‌های نَرم روی این فضاها از دیدگاه جبری مطالعه شده‌اند. برای این منظور ابتدا با استفاده از یک ابرعمل مناسب به $SE(V)$، متشکل از تمام بردارهای نَرم روی ابرفضای برداری V، ساختار یک ابرفضای برداری داده شده است. سپس به طور مختصر ارتباط بین ابرفضاهای برداری و مجموعه بردارهای نَرم متناظر آن‌ها با استفاده از مفهوم تبدیل خطی بررسی شده است. در ادامه با معرفی مفهوم نُرم نَرم روی ابرفضای برداری به دست آمده، ارتباط متقابل نُرم نَرم روی $SE(V)$ با نُرم معمولی روی V بررسی شده است. به طور خاص هر خانواده پارامتری از نُرم‌ها روی ابرفضای برداری V یک نُرم نَرم روی ابرفضای برداری $SE(V)$ القا می‌کند، همان طوری که هر نُرم روی V یک نُرم نَرم روی $SE(V)$ القا می‌کند. همچنین هر ابرفضای برداری نُرم‌دار نَرم یک فضای متریک نَرم است و هر متر نَرم روی ابرفضای برداری $SE(V)$ یک متر معمولی روی آن القا می‌کند. شکل ۱ را ببینید.

حال با داشتن ابرفضای برداری $SE(V)$ به عنوان یک ابرساختار جبری با ابرعمل خارجی مشخص و خوش‌رفتار، می‌توان بسیاری از مفاهیم اساسی مرتبط با این فضا را از دیدگاه‌های مختلف مورد پژوهش قرار داد. به عنوان نمونه مطالعه موارد زیر پیشنهاد میشود:

۱. پایه و بعد ابرفضای برداری $SE(V)$،

۲. دنباله‌ها و همگرایی آن‌ها در ابرفضای برداری $SE(V)$،

۳. زیرمجموعه‌های محدب ابرفضای برداری $SE(V)$،

۴. زیرمجموعه‌های فازی از ابرفضای برداری $SE(V)$.

مراجع

[1] U. Acar, F. Koyuncu, B. Tanay, Soft sets and soft rings, *Comput. Math. Appl.*, **59** (2010), 3458–3463.

[2] H. Aktaş, N. Çağman, Soft sets and soft groups, *Inform. Sci.*, **177** (2007), 2726–2735.

[3] R. Ameri, O. R. Dehghan, On dimension of hypervector spaces, *European Journal of Pure and Applied Mathematics*, **1** (2008), 32–50.

[4] R. Ameri, O. R. Dehghan, Fuzzy hypervector spaces based on fuzzy singletons, *Computers and Mathematics with Applications*, **61** (2011) 2933–2943.

[5] R. Ameri, O. R. Dehghan, Dimension of fuzzy hypervector spaces, *Iranian Journal of Fuzzy Systems*, **8(5)** (2011), 149–166.

[6] R. A. Borzooei, X. L. Xin, E. H. Roh, Y. B. Jun, Int-soft implicative hyper BCK-ideals in hyper BCK-algebras, *Missouri Journal of Mathematical Sciences*, **31(2)** (2019), 152–163.

[7] P. Corsini, V. Leoreanu, *Applications of Hyperstructures Theory, Advanced in Mathematics*, Kluwer Academic Publisher, 2003.

[8] S. Das, S. K. Samanta, Soft real sets، soft real numbers and their properties, *J. Fuzzy Math.*, **20(3)** (2012), 551–576.

[9] S. Das, S. K. Samanta, On soft metric spaces, *The Journal of Fuzzy Mathematics*, **21(3)** (2013), 707–734.

[10] B. Davvaz, V. Leoreanu-Fotea, *Hyperring Theory and Applications*, International Academic Press, USA, 2007.

[11] B. Davvaz, I. Cristea, *Fuzzy Algebraic Hyperstructures – An Introduction*, Springer, Switzerland, 2015.

[12] O. R. Dehghan, Balanced and absorbing fuzzy subsets of hypervector spaces, *Computational and Applied Mathematics*, **39** (2020), 53.

[13] O. R. Dehghan, R. Ameri, H. A. Ebrahimi Aliabadi, Some results on hyper-vector spaces, *Italian Journal of Pure and Applied Mathematics*, **41** (2019), 23–41.

[14] O. R. Dehghan, M. Nodehi, Some results on soft hypervector spaces, *Caspean Journal of Mathematical Sciences*, **10(2)** (2021), 224–234.

[15] O. R. Dehghan, M. Norouzi, Soft vectors in soft hypervector spaces, 8th Iranian Joint Congress on Fuzzy and Intelligent Systems (CFIS), Mashhad, Iran, (2020), 217–221.

[16] X. Ma, J. Zhan, B. Davvaz, Applications of rough soft sets to Krasner (m،n)-hyperrings and corresponding decision making methods, *Filomat*, **32(19)** (2018), 6599–6614.

[17] P. K. Maji, R. Biswas, A. R. Roy, Soft set theory, *Comput. Math. Appl.*, **45** (2003), 555–562.

[18] P. K. Maji, A. R. Roy, R. Biswas, An application of soft sets in a decision making problem, *Comput. Math. Appl.*, **44** (2002), 1077–1083.

[19] F. Marty, Sur une generalization de la notion de group, in: Proc. 8th Congress Mathematics Scandenaves, Stockholm, (1934), 45–49.

[20] D. Molodtsov, Soft set theory first results, *Comput. Math. Appl.*, **37** (1999), 19–31.

[21] S. Ostadhadi-Dehkordi, K. P. Shum, Regular and strongly regular relations on soft hyperrings, *Soft Computing*, **23(10)** (2019), 3253–3260.

[22] D. W. Pei, D. Miao, From soft sets to information systems, IEEE International conference on granular Computing, (2005), 617–621.

[23] P. Raja, S. M. Vaezpour, On ۲–strong homomorphisms and ۲–normed hypersets in hypervector spaces, *J. Nonlinear Sci. Appl.*, **1(4)** (2008), 213–223.

[24] E. Ranjbar-Yanehsari, M. Asghari-Larimi, R. Ameri, Soft hypervector space and fuzzy soft hypervector space, *European Journal of Pure and Applied Mathematics*, **2(1)** (2019), 118–134.

[25] M. Scafati Tallini, Hypervector spaces, Proceeding of 4th International Congress on Algebraic Hyperstructures and Applications, Xanthi, Greece, (1990), 167–174.

[26] M. Scafatti-Tallini, Weak hypervector spaces and norms in such spaces, Proc. of 5th International Congress on Algebraic Hyperstructres and Applications, Iasi, Romania, (1994), 199–206.

[27] M. Sedghi, O. R. Dehghan, M. Norouzi, n–Normed hypervector spaces, *Journal of Mathematical Sciences, Advances and Applications*, **45** (2017), 41–59.

[28] A. Sezgin Sezer, A. O. Atagun, A new kind of vector space: soft vector space, *Southeast Asian Bulletin of Mathematics*, **40** (2016), 753–770.

[29] A. Taghavi, R. Hosseinzadeh, Hahn–Banach theorem for functionals on hypervector spaces, *The Journal of Mathematics and Computer Sciences*, **2(4)** (2011), 682–690.

[30] J. Wang, M. Yin, W. Gu, Soft hyperrings and their (fuzzy) isomorphism theorems, *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, **44(6)** (2015), 1463–1475.