سیستم‌های فازی و کاربردها
شاپای چاپی: ۲۷۱۷-۴۴۰۹
سال پنجم، شماره اول (بهار و تابستان ۱۴۰۱)
شاپای الکترونیکی: ۲۷۱۷-۳۹۸۴
صص. ۲۶۹ تا ۲۹۳
DOI:10.22034/JFSA.2022.347887.1137

زیرمجموعه‌های S-بسته و اشباع شده در MV-مدول‌ها

جواد مقدری*، **سمیه معتمد و آرشام برومند سعید**

گروه ریاضی، دانشگاه هرمزگان، بندرعباس، ایران
گروه ریاضی، واحد بندرعباس، دانشگاه آزاد اسلامی، بندرعباس، ایران
گروه ریاضی محض، دانشکده ریاضی و کامپیوتر، دانشگاه شهید باهنر کرمان، کرمان، ایران

تاریخ دریافت: ۱۴۰۱/۳/۲۹ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۱/۶/۱۵
نوع مقاله: علمی-پژوهشی

چکیده

در این مقاله ابتدا (با مفاهیم تعریف شده،) خصوصیات و ویژگی‌های جدیدی برای MV -مدول‌ها بدست می آوریم. نشان می دهیم تناظر یک‌به‌یکی بین A-ایده‌آل‌های P-اول از A-مدول M و A_S-ایده‌آل‌های P_S-اول از M_S وجود دارد؛ که در آن S زیرمجموعه بسته ضربی A و P ایده‌آل اولی از A است به‌طوری‌که $P \cap S = \emptyset$. بعد از آن، مفاهیم جدیدی مانند زیر مجموعه های $(N :_M a)$ و $(N :_M I)$ را معرفی کرده و با کمک آن‌ها ویژگی‌های جدیدی برای A-ایده‌آل‌های اول بدست می آوریم. نشان می دهیم A-ایده‌آل سره N از A-مدول M اول است اگروتنهااگر برای هر $a \in A \backslash (N :_A M)$، $(N :_M a) = N$. هم‌چنین مفاهیم S-بسته و زیر مجموعه اشباع شده از A-مدول‌ها را معرفی کرده و ویژگی‌هایی برای آن‌ها بدست می آوریم. نشان می دهیم برای زیرمجموعه بسته ضربی S از A و زیرمجموعه S-بسته S^* از A-مدول با تولید متناهی M اگر N، A-ایده آلی از M باشد که (ادامه دارد)

عبارات و کلمات کلیدی: $(\mathrm{PMV}, \mathrm{MV})$-جبر، MV-مدول، A-ایده‌آل، زیرمجموعه S-بسته و اشباع شده

Email(s): j.moghaderi@hormozgan.ac.ir, s.motamed63@yahoo.com and arsham@uk.ac.ir.

Mathematics Subject Classification: 16D80 ; 06D35 ; 06F35

در $M\backslash S^*$ بیشین است و اگر ایده‌آل $(N :_A M)$ در $A\backslash S$ بیشین باشد؛
آن‌گاه N، A-ایده‌آل اولی از M است به‌طوری‌که $(N_S :_{A_S} M_S) = (N :_A M)_S$.

۱ مقدمه

دی نولا [1] و همکاران مفهوم MV-جبر ضربی (PMV) را با اضافه کردن عملگر ضرب روی MV-جبر (که دارای خاصیت شرکت‌پذیری و توزیع‌پذیری چپ و راست روی جمع بود؛) تعریف کردند [۲]. آن‌ها هم‌چنین ۰-ایده‌آل‌ها را در MV-جبرها معرفی نمودند. دی نولا و همکاران مفهوم MV-مدول روی PMV-جبر (به‌طور خلاصه A-مدول) و A-ایده‌آل‌ها در MV-مدول‌ها را نیز معرفی نمودند [۳]. این ها ساختارهایی هستند که به طور طبیعی با lu-مدول‌ها روی lu-حلقه ها مطابقت دارند. آن‌ها ثابت کردند که رسته lu-مدول‌ها روی lu-حلقه (R, v)، معادل رسته MV-مدول‌ها روی $\Gamma(R, v)$ هستند. علاوه براین، آن‌ها نشان دادند رسته MV-جبرهای حاصل ضربی، معادل رسته l-حلقه های شرکت پذیر یکدار است. آن‌ها هم‌چنین MVF-جبرها را معرفی و مطالعه کردند و ۰-ایده‌آل ها در PMV-جبرها را معرفی نمودند. سرانجام نشان دادند که هر MVF-جبر، زیر حاصل ضربی از MVF-جبرهای تحویل ناپذیر است. بنابراین به این نتیجه رسیدند که یک MV-جبر حاصل ضربی، یک MVF-حلقه است اگروتنهااگر یک زیرحاصل ضربی از MV-جبرهای خطی حاصل ضربی باشد. فروزش و همکاران مفهوم A-ایده‌آل اول از یک A-مدول را تعریف نمودند و شرایط معادلی برای اول بودن یک A-ایده‌آل در یک A-مدول را ذکر کردند [۵]. آن‌ها هم‌چنین مفهوم A-ایده‌آل اولیه از یک A-مدول و تجزیه اولیه یک A-ایده‌آل در یک A-مدول را معرفی نمودند [۶]. فروزش هم‌چنین مفهوم زیرمجموعه بسته ضربی از یک PMV-جبر را معرفی و ضمن به‌دست آوردن برخی ویژگی‌ها، در ادامه مفاهیم A-مدول‌های نوتری و آرتینی را نیز تعریف کرد [۴]. در ادامه، سعیدی گراغانی و همکاران، ویژگی‌های بیشتری از A-مدول‌ها را مورد مطالعه و بررسی قرار دادند [۷].
در این مقاله ویژگی‌های دیگری از MV-مدول‌ها را بدست می آوریم. در بخش سوم، با

[1] Di Nola

معرفی دو مجموعه جدید $(N:_M a)$ و $(N:_M I)$، شرایط معادل جدیدی برای اول بودن A-ایده‌آل سره N از M را بدست می آوریم. نشان می دهیم برای A-ایده‌آل سره N از M، N یک A-ایده‌آل اول است اگروتنهااگر $N=\{m\in M: \exists t\notin P;\ tm\in N\}$؛ که در آن $P=(N:_A M)$. هم‌چنین نشان می دهیم A-ایده‌آل سره N از M اول است اگروتنهااگر برای هر $a\in A\backslash(N:_A M)$، $(N:_M a)=N$. علاوه براین ثابت می کنیم A-ایده‌آل سره N از M اول است اگروتنهااگر برای هر زیرمجموعه ناتهی I از A که $I\nsubseteq (N:_A M)$، $(N:_M I)=N$. دربخش چهارم، مفاهیم S-بسته و S-اشباع شده را برای زیرمجموعه ناتهی دلخواهی از A-مدول M معرفی کرده و با کمک آن‌ها ویژگی‌های جدیدی را برای MV-مدول‌ها بدست می آوریم. نشان می دهیم اگر P ایده‌آل اولی از A، $S=A\backslash P$ و S^* یک زیرمجموعه S-بسته از A-مدول با تولید متناهی M باشد که $P=(N:_A M)$ و N در $M\backslash S^*$ بیشین است؛ آن‌گاه N، یک A-ایده‌آل اولی از M است.

۲ پیش‌نیازها

برای اولین بار لوکاسیویچ در سال ۱۹۲۰، منطق چند ارزشی را معرفی کرد. این منطق ها ابزاری قدرتمند برای مطالعه و شناخت عدم قطعیت و عدم دقت در رویدادها بکار می رود. نظریه مجموعه های فازی، تعمیمی از منطق های چند ارزشی است. جبرهای منطقی یک سیستم، معنایی از منطق های کلاسیک می باشند که کاربردهای مختلفی در سایر علوم از جمله علوم کامپیوتر دارند. به طور مثال مشبکه های مانده و MV-جبرها و .... اولین بارMV-جبرها، بوسیله چانگ در سال ۱۹۵۸ معرفی شدند. در واقع آن‌ها یک ساختار جبري از منطق بینهایت ارزشی لوکاسیویچ هستند و نظریه آن‌ها بعد از سال ۱۹۸۶ توسعه داده شد. نظریه ایده آل ها یک نقش اصلی درMV-جبرها بازي می کند و براي مشخص کردن MV-جبرها بسیار مفید هستند.

حال به بیان مفاهیم مقدماتی و ذکر برخی خواص اساسی MV-مدول‌ها، که در سرتاسر مقاله به آن‌ها نیاز داریم می‌پردازیم.

تعریف ۱.۲. ([۱]). یک MV-جبر یک ساختار جبری $(M,\bigoplus,^*,0)$ است (که در آن

$\bigoplus$ عملگر دوتایی، * عملگر یک‌تایی و $\circ$ مقداری ثابت است) و برای هر $a, b \in M$، در شرایط زیر صدق می‌کنند:

(MV۱) $(M, \oplus, \circ)$ یک تکگون آبلی است.

(MV۲) $(a^*)^* = a$.

(MV۳) $\circ^* \oplus a = \circ^*$.

(MV۴) $(a^* \oplus b)^* \oplus b = (b^* \oplus a)^* \oplus a$.

مقدار ۱ و عملگرهای $\bigodot$، $\bigvee$ و $\bigwedge$ را به‌صورت زیر در نظر بگیرید:

$$
\begin{aligned}
&۱ = \circ^*,\\
&a \odot b = (a^* \oplus b^*)^*,\\
&a \vee b = a \oplus (b \odot a^*),\\
&a \wedge b = a \odot (b \oplus a^*),\\
&a \ominus b = a \odot b^*.
\end{aligned}
$$

آن‌گاه $(M, \bigodot, ۱)$ یک تکگون آبلی و جبر $(M, \bigvee, \bigwedge, \circ, ۱)$ یک مشبکه توزیع‌پذیر کران‌دار است.

تعریف ۲.۲. ([۱]). یک ایده‌آل در MV-جبر M، یک زیرمجموعه ناتهی I از M است که در شرایط زیر صدق می‌کند:

(I۱) اگر $x \in I$، $y \in M$ و $y \leq x$، آن‌گاه $y \in I$؛

(I۲) اگر $x, y \in I$، آن‌گاه $x \oplus y \in I$.

تعریف ۳.۲. ([۲]). یک MV-جبر حاصل‌ضربی (یا به‌طور مختصر PMV-جبر) جبر $(A, \bigoplus, *, \cdot, \circ)$ است که در آن $(A, \bigoplus, *, \circ)$ یک MV-جبر بوده و عملگر $\cdot$ یک عملگر شرکت‌پذیر روی A می‌باشد که در شرط زیر صدق می‌کند:

اگر $x + y$ تعریف شده باشد؛ آن‌گاه $x \cdot z + y \cdot z$ و $z \cdot x + z \cdot y$ تعریف می‌شوند و داریم

$$(x + y) \cdot z = (x \cdot z) + (y \cdot z), \quad z \cdot (x + y) = (z \cdot x) + (z \cdot y),$$

که در آن عملگر $+$ روی MV-جبر A به‌صورت زیر عمل می‌کند:
برای هر $x,y \in M$، $x+y$ تعریف می‌شود اگروتنهااگر $x \leq y^*$ و در این حالت $x+y := x \oplus y$. هم‌چنین قانون حذف برقرار است؛ یعنی اگر $z+x \leq z+y$، آن‌گاه $x \leq y$.

اگر A یک PMV-جبر باشد؛ عنصر $e \in A$ عنصر یکه تحت ضرب است، اگر برای هر $x \in A$، داشته باشیم $e \cdot x = x \cdot e = x$. یک PMV-جبر که عنصر یکه تحت ضرب داشته باشد را یکدار نامند.

لم ۴.۲. *([۲]). اگر A یک PMV-جبر یکدار باشد، آن‌گاه*
(الف) عنصر یکه $e = ۱$ است.
(ب) برای هر $x,y \in A$، $x \cdot y \leq x \wedge y$.

تعریف ۵.۲. ([۷]). PMV-جبر A را جابجایی گویند، اگر برای هر $a,b \in A$، داشته باشیم $a \cdot b = b \cdot a$.

تعریف ۶.۲. ([۲]). یک ایده‌آل I از PMV-جبر A، ایده‌آلی از MV-جبر A است که برای هر $a \in A$ و هر $b \in I$ داشته باشیم $a \cdot b \in I$ و $b \cdot a \in I$.

تعریف ۷.۲. ([۵]). فرض کنید P یک A-ایده‌آل از PMV-جبر A باشد. P را اول نامند؛ اگر سره بوده و برای هر $a,b \in A$، اگر $a \cdot b \in P$، آن‌گاه $a \in P$ یا $b \in P$.

لم ۸.۲. *([۲]). اگر A یک PMV-جبر باشد، آن‌گاه برای هر $a,b \in A$:*
(الف) $a \cdot ۰ = ۰ = ۰ \cdot a$.
(ب) اگر $a \leq b$، آن‌گاه برای هر $c \in A$، $a \cdot c \leq b \cdot c$ و $c \cdot a \leq c \cdot b$.

تعریف ۹.۲. ([۳]). فرض کنید $(A, \bigoplus, ^*, \cdot, ۰)$ یک PMV-جبر و $(M, \bigoplus, ^*, ۰)$ یک MV-جبر باشد. M را یک MV-مدول (چپ) روی A (یا به‌طور ساده A-مدول) گویند؛ اگر عملگر

$$\varphi : A \times M \to M, \quad \varphi(\alpha, x) = \alpha x,$$

موجود باشد به‌طوری‌که برای هر $x, y \in M$ و $\alpha, \beta \in A$:

(۱) اگر $x + y$ در M تعریف شده باشد، آن‌گاه $\alpha x + \alpha y$ نیز تعریف شده است و $\alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y$؛

(۲) اگر $\alpha + \beta$ در A تعریف شده باشد، آن‌گاه $\alpha x + \beta x$ نیز تعریف شده است و $(\alpha+\beta)x = \alpha x + \beta x$؛

(۳) $(\alpha \cdot \beta)x = \alpha(\beta x)$.

M یک MV-مدول یکانی است؛ اگر A یک PMV-جبر یکدار باشد و M روی A یک MV-مدول باشد به‌طوری‌که برای هر $x \in M$، $1_A \cdot x = x$.

تعریف ۱۰.۲. ([۲]). فرض کنید M و N دو MV-مدول روی PMV-جبر A باشند. یک همریختی MV-مدولی، یک همریختی MV-جبری $h : M \to N$ است به‌طوری‌که برای هر $x \in M$ و $\alpha \in A$، $h(\alpha x) = \alpha h(x)$.

تعریف ۱۱.۲. ([۲]). فرض کنید M یک A-مدول باشد. ایده‌آل I از M را یک A-ایده‌آل می‌نامند؛ اگر برای هر $x \in I$ و $\alpha \in A$، داشته باشیم $\alpha x \in I$.

گزاره ۱۲.۲. *فرض کنید M یک A-مدول و X زیرمجموعه ناتهی از آن باشد. در این صورت ایده آل با تولید متناهی توسط X که با $(X]$ نمایش داده می شود برابر است با*

$$(X] = \{x \in M : x \leq x_1 \oplus \cdots \oplus x_n \oplus r_1 y_1 \oplus \cdots \oplus r_m y_m;\ x_i, y_j \in X,\ r_i \in A\}.$$

تعریف ۱۳.۲. ([۵]). فرض کنید M یک A-مدول و N یک ایده‌آل از M باشد. در این‌صورت

$$(N : M) = (N :_A M) := \{r \in A \ : \ rM \subseteq N\},$$

که در آن $rM = \{rm \ : \ m \in M\}$.

تذکر: در این مقاله برای زیرمجموعه ناتهی N از M، $(N :_A M)$ را دقیقاً همان مجموعه تعریف ۱۳.۲ در نظر می‌گیریم.

لم ۱۴.۲. *([۵]). فرض کنید N یک A-ایده‌آل از M باشد. در این‌صورت $(N : M)$ یک ایده‌آل از A است.*

تعریف ۱۵.۲. ([۵]). فرض کنید M یک A-مدول باشد. A-ایده‌آل P از M را یک A-ایده‌آل اول گویند؛ اگر سره بوده و برای هر $x \in M$ و $\alpha \in A$، اگر $\alpha x \in P$، آن‌گاه $x \in P$ یا $\alpha \in (P : M)$.

اگر $q = (P : M)$ که در آن q یک ایده‌آل $\cdot$-اول از PMV-جبر A است، آن‌گاه P را A-ایده‌آل q-اول از M می‌نامند. مجموعه تمام A-ایده‌آل q-اول از M را با $\mathrm{Spec}_q(M)$ نمایش می‌دهند.

تعریف ۱۶.۲. ([۶]). فرض کنید M یک A-مدول باشد. A-ایده‌آل N از M را یک A-ایده‌آل اولیه گویند؛ اگر سره بوده و برای هر $x \in M$ و $\alpha \in A$، اگر $\alpha x \in N$ آن‌گاه $x \in N$ یا $\alpha^n \in (N : M)$، برای $n \in \mathbb{N}$.

تعریف ۱۷.۲. ([۴]). زیرمجموعه ناتهی S از PMV-جبر A را $\cdot$-بسته در A (یا به‌طور مختصر بسته ضربی در A) گویند؛ اگر $1 \in S$ و برای هر $x, y \in S$ نتیجه بگیریم $x \cdot y \in S$.

تعریف ۱۸.۲. ([۴]). فرض کنید S زیرمجموعه بسته ضربی از PMV-جبر A بوده و M یک A-مدول باشد. رابطه θ_S برای هر $x, y \in M$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:
$(x, y) \in \theta_S$ اگروتنهااگر $e \in S \cap B(A)$ موجود باشد به‌طوری‌که $ex = ey$.

لم ۱۹.۲. *([۴]). با فرضیات تعریف قبل، θ_S یک رابطه هم‌ارزی بوده و $M_S = M/\theta_S = \{x/S \ : \ x \in M\}$ با عمل‌های زیر یک A-مدول است:*

$$\alpha(x/S) := (\alpha x)/S, \quad (x/S)^* := x^*/S, \quad x/S \oplus y/S := (x \oplus y)/S,$$

که در آن $x, y \in M$ و $\alpha \in A$.

در ادامه این مقاله همواره A یک PMV-جبر و M یک A-مدول در نظر گرفته می‌شوند.

۳ نتایجی در MV-مدول‌ها

در این بخش ویژگی‌های جدیدی از A-ایده‌آل‌ها در MV-مدول‌ها را ذکر می‌کنیم.

گزاره ۱.۳. *فرض کنید N و L زیرمجموعه‌هایی ناتهی از A-مدول M باشند. در این‌صورت (الف) $(N:M)M \subseteq N$.*
(ب) اگر $N \subseteq L$، آن‌گاه $(N:M) \subseteq (L:M)$.
(ج) $((N:M)M:M) = (N:M)$.
(د) $(N \cap L:M) = (N:M) \cap (L:M)$.

در گزاره زیر شرایطی را بدست می آوریم که تحت آن‌ها، موضعی سازی یک A-ایده‌آل سره، سره است.

گزاره ۲.۳. *فرض کنید N، A-ایده‌آلی سره از M بوده و S زیرمجموعه بسته ضربی از PMV-جبر جابجایی A باشد به‌طوری‌که $(N:M) \cap S = \varnothing$. در این‌صورت تحت هر کدام از شرایط زیر داریم $N_S \neq M_S$.*
(الف) M یک A-مدول با تولید متناهی باشد.
(ب) N یک A-ایده آلی اول (اولیه) از M باشد.

اثبات. (الف) فرض کنید $M = (x_1, \ldots, x_n]$. در این‌صورت به‌وضوح $M_S = (x_1/S, \ldots, x_n/S]$. حال اگر $N_S = M_S$، آن‌گاه $n_i \in N$ ($1 \leq i \leq n$) وجود دارند به‌طوری‌که برای هر i، $x_i/S = n_i/S$. در نتیجه برای هر i، $e_i \in S \cap B(A)$ وجود دارند به‌طوری‌که برای هر i، $e_i x_i = e_i n_i \in N$. لذا برای هر i، $ex_i \in N$ که در آن $e = e_1 \ldots . e_n$. لذا $e \in (N:M)$ و در نتیجه $e \in (N:M) \cap S$ که تناقض است.
(ب) فرض کنید $N_S = M_S$. در این‌صورت برای $x \in M \backslash N$ داریم $x/S \in N_S$ و لذا $e \in S \cap B(A)$ وجود دارد به‌طوری‌که $ex \in N$. حال چون N اول (اولیه) است و $x \notin N$، لذا $e \in (N:M) \cap S$ ($e^n \in (N:M) \cap S$ برای $n \in \mathbb{N}$) که تناقض است. بنابراین $N_S \neq M_S$. □

اکنون مثالی برای درک بهتر گزاره قبل ذکر می کنیم.

مثال ۳.۳. (مثال ۲ . ۵ [۳]) فرض کنید $M = \Gamma(\mathbb{R}^۲, u) = [(\circ, \circ), (۱, ۱)]$ که در آن $u = (۱, ۱)$ و $A = \Gamma(M_۲(\mathbb{R}), v) = [\circ, \begin{bmatrix} ۱ & \circ \\ \circ & ۱ \end{bmatrix}]$ که در آن $v = \begin{bmatrix} ۱ & \circ \\ \circ & ۱ \end{bmatrix}$.
دراین‌صورت M یک A-مدول است. در نظر بگیرید $S = \{ \begin{bmatrix} a & \circ \\ \circ & ۱ \end{bmatrix} : \circ \leq a \leq ۱\}$
که یک زیرمجموعه بسته ضربی از A است و $N = \{(a, \circ) : \circ \leq a \leq ۱\}$ که یک A-ایده‌آل سره از M است. دراین‌صورت $(\circ, ۱)/S \in M_S \backslash N_S$.

گزاره ۴.۳. *فرض کنید M یک A-مدول، N، A-ایده‌آلی اول از M و S زیرمجموعه بسته ضربی از A باشد به‌طوری‌که $(N : M) \cap S = \varnothing$. در این‌صورت $(N :_A M)_S = (N_S :_{A_S} M_S)$.*

اثبات. بنا به اول بودن N و $(N : M) \cap S = \varnothing$، نتیجه می‌گیریم که

$$\begin{aligned} a/S \in (N :_A M)_S &\Longleftrightarrow aM \subseteq N \\ &\Longleftrightarrow a/SM_S \subseteq N_S \\ &\Longleftrightarrow a/S \in (N_S :_{A_S} M_S). \end{aligned}$$

□

در گزاره بعد، ارتباط بین A-ایده‌آل‌های اول یک مدول و A_S-ایده‌آل‌های اول موضعی سازی آن را بیان می کنیم.

گزاره ۵.۳. *فرض کنید M یک A-مدول، S زیرمجموعه بسته ضربی از A و P ایده‌آل اولی از A باشد که $P \cap S = \varnothing$. در این‌صورت تناظر یک‌به‌یکی بین A-ایده‌آل‌های P-اول M و A_S-ایده‌آل‌های P_S-اول M_S وجود دارد.*

اثبات. در نظر بگیرید:

$$\varphi : U = \{Q \ : \ Q \in \mathrm{Spec}_P(M)\} \to V = \{W \ : \ W \in \mathrm{Spec}_{P_S}(M_S)\},$$
$$Q \mapsto Q_S$$

و

$$\psi : V = \{W \;:\; W \in \mathrm{Spec}_{P_S}(M_S)\} \to U = \{Q \;:\; Q \in \mathrm{Spec}_P(M)\},$$
$$W \mapsto f^{-1}(W),$$

که در آن

$$f : M \to M_S,$$
$$m \mapsto m/S.$$

در این‌صورت به‌سادگی دیده می‌شود که φ و ψ تابع هستند و هم‌چنین $\varphi o \psi = I_V$ و $\psi o \varphi = I_U$. لذا گزاره ثابت می‌شود. $\square$

در قضیه زیر، شرط لازم و کافی برای A-ایده‌آل اول بودن یک A-ایده‌آل سره را بدست می آوریم.

قضیه ۶.۳. *فرض کنید N، A-ایده‌آلی سره از M باشد و $(N : M) = P$. در این‌صورت N یک A-ایده‌آل اول از M است اگروتنهااگر*

$$N = \{m \in M \;:\; \exists\, t \notin P;\;\; tm \in N\}.$$

اثبات. ابتدا فرض کنید N یک A-ایده‌آل اول از M باشد و $tm \in N$، برای $m \in M$ و $t \in A\backslash P$. با استفاده از اول بودن N و $t \notin P$، داریم $m \in N$. پس

$$N = \{m \in M \;:\; \exists\, t \notin P;\;\; tm \in N\}$$

(عکس شمول به وضوح برقرار است). حال فرض کنید

$$N = \{m \in M \;:\; \exists\, t \notin P;\;\; tm \in N\}.$$

هم‌چنین فرض کنید $tm \in N$، برای $m \in M$ و $t \in A\backslash P$. لذا بنا به فرض، $m \in N$ و

در نتیجه N یک A-ایده‌آل اول از M است. $\square$

در قضیه زیر، شرط لازم و کافی برای A-ایده‌آل اولیه بودن یک A-ایده‌آل سره را بدست می آوریم.

قضیه ۷.۳. *فرض کنید N، A-ایده‌آلی از M باشد به‌طوری‌که $P = (N : M)$ ایده‌آل اولی از A است. در این‌صورت N یک A-ایده‌آل اولیه از M است اگروتنهااگر*

$$N = \{m \in M \ : \ \exists\, t \notin P; \ \ tm \in N\}.$$

اثبات. ابتدا فرض کنید N یک A-ایده‌آل اولیه از M باشد و $tm \in N$، برای $m \in M$ و $t \in A\backslash P$. با کمک اولیه بودن N و $t \notin P$ (بنا به اول بودن P، $t^n \notin P$ برای هر $n \in \mathbb{N}$)، داریم $m \in N$. پس $N = \{m \in M \ : \ \exists\, t \notin P; \ \ tm \in N\}$ (عکس شمول به‌وضوح برقرار است). حال فرض کنید $N = \{m \in M \ : \ \exists\, t \notin P; \ \ tm \in N\}$. بنا به سره بودن P، N نیز سره است. پس فرض کنید $tm \in N$، برای $m \in M$ و $t \in A$. اگر $t \in P$، که مسأله حل است و اگر $t \notin P$، آن‌گاه بنا به تساوی فرض برگشت، $m \in N$. در نتیجه N یک A-ایده‌آل اولیه از M است. $\square$

از قضیه‌های ۶.۳ و ۷.۳، نتیجه زیر به‌دست می‌آید.

نتیجه ۸.۳. *فرض کنید N، A-ایده‌آلی از M باشد به‌طوری‌که $P = (N : M)$ ایده‌آل اولی از A است. در این‌صورت N یک A-ایده‌آل اول از M است اگروتنهااگر N یک A-ایده‌آل اولیه از M باشد.*

در ادامه مفاهیم جدیدی را در MV-مدول‌ها تعریف کرده و با کمک آن‌ها ویژگی‌های دیگری از MV-مدول‌ها را ذکر می‌کنیم.

تعریف ۹.۳. فرض کنید N زیرمجموعه‌ای ناتهی از A-مدول M باشد و $a \in A$. تعریف می‌کنیم

$$(N :_M a) = \{y \in M \ : \ ay \in N\}.$$

مثال ۱۰.۳. (مثال ۳ ۰ ۵ [۵]) درنظر بگیرید $M = A = \{۰, ۱, ۲\}$ که یک مجموعه مرتب شده خطی است. A با اعمال $\wedge = min$، $x \bigoplus y = min\{۲, x + y\}$ و

$x \cdot y = max\{۰, x + y - ۲\}$، برای هر $x, y \in A$، یک MV-جبر است. همچنین A با اعمال زیر یک PMV-جبر می باشد.

$\bigoplus$	۰	۱	۲
۰	۰	۱	۲
۱	۱	۲	۲
۲	۲	۲	۲

$\cdot$	۰	۱	۲
۰	۰	۰	۰
۱	۰	۰	۰
۲	۰	۰	۱

$*$	۰	۱	۲
	۲	۱	۰

M با عمل $yx = y \cdot x$، برای هر $y \in A$ و هر $x \in M$ یک A-مدول می باشد. دراین‌صورت برای $N = \{۲\}$، $L = \{۰, ۱\}$، $U = \{۱\}$، $b = ۲$ و $a = ۱$ داریم

$$(N :_M a) = \{y \in M : ay \in N\} = \emptyset.$$

$$(N :_M b) = \{y \in M : by \in N\} = \emptyset.$$

$$(L :_M a) = \{y \in M : ay \in L\} = M.$$

$$(L :_M b) = \{y \in M : by \in L\} = M.$$

$$(U :_M a) = \{y \in M : ay \in U\} = \emptyset.$$

$$(U :_M b) = \{y \in M : by \in U\} = \{۲\}.$$

گزاره ۱۱.۳. *فرض کنید A یک PMV-جبر جابجایی، $a \in A$ و N، A-ایده‌آلی از M باشد. دراین‌صورت $(N :_M a)$، A-ایده‌آلی از M و شامل N است.*

با استفاده از تعریف ۹.۳، داریم:

گزاره ۱۲.۳. *فرض کنید N و L زیرمجموعه‌هایی ناتهی از A-مدول M باشند و $a, b \in A$. در این‌صورت*

(الف) $a \in (N :_A M)$ *اگروتنهااگر* $(N :_M a) = M$.

(ب) اگر $N \subseteq L$*، آن‌گاه* $(N :_M a) \subseteq (L :_M a)$.

(ج) اگر $a \le b$، آن‌گاه $(N :_M a) \subseteq (N :_M b)$.
(د) $(N \cap L :_M a) = (N :_M a) \cap (L :_M a)$.
(ه) اگر N، A-ایده‌آلی از M باشد، آن‌گاه $N \subseteq (N :_M a)$.
اگر A جابجایی باشد، آن‌گاه
(و) $((N :_M a) :_A M) = (N :_A aM)$.
(ز) $((N :_M a) :_M b) = ((N :_M b) :_M a) = (N :_M ab)$.

در قضیه زیر، با کمک تعریف ۹.۳، شرط لازم و کافی جدیدی برای A-ایده‌آل اول بودن یک A-ایده‌آل سره را بدست می آوریم.

قضیه ۱۳.۳. *فرض کنید N، A-ایده‌آل سره‌ای از M باشد. در این‌صورت N، A-ایده‌آلی اول از M است اگروتنهااگر برای هر $a \in A\backslash(N :_A M)$، داشته باشیم $(N :_M a) = N$.*

اثبات. فرض کنید N، A-ایده‌آلی اول از M باشد و $a \in A\backslash(N :_A M)$. کافیست نشان دهیم $(N :_M a) \subseteq N$. فرض کنید $x \in (N :_M a)$. در این‌صورت $ax \in N$ و در نتیجه با استفاده از اول بودن N و این که $a \notin (N :_A M)$ داریم $x \in N$. بنابراین $(N :_M a) = N$. حال فرض کنید برای هر $a \in A\backslash(N :_A M)$، داشته باشیم $(N :_M a) = N$ و $ax \in N$ برای $x \in M$ و $a \in A$. اگر $a \notin (N :_A M)$، آن‌گاه طبق فرض $x \in (N :_M a) = N$ و لذا N، A-ایده‌آلی اول از M است. □

در قضیه زیر، با کمک تعریف ۹.۳، شرط لازم و کافی جدیدی برای A-ایده‌آل اولیه بودن یک A-ایده‌آل سره را ذکر می کنیم.

قضیه ۱۴.۳. *فرض کنید N، A-ایده‌آل سره‌ای از M باشد. در این‌صورت N، A-ایده‌آلی اولیه از M است اگروتنهااگر برای هر $a \in A$ که $a^n \notin (N :_A M)$ (برای هر $n \in \mathbb{N}$)، $(N :_M a) = N$.*

اثبات. فرض کنید N، A-ایده‌آلی اولیه از M باشد و $a \in A$ به‌طوری‌که برای هر $n \in \mathbb{N}$، $a^n \notin (N :_A M)$. کافیست نشان دهیم $(N :_M a) \subseteq N$. فرض کنید $x \in (N :_M a)$. در این‌صورت $ax \in N$ و در نتیجه بنا به اولیه بودن N و این‌که برای هر $n \in \mathbb{N}$،

$a^n \notin (N :_A M)$ داریم $x \in N$. بنابراین $N = (N :_M a)$. حال فرض کنید برای هر $a \in A$ که $a^n \notin (N :_A M)$ (برای هر $n \in \mathbb{N}$)، $(N :_M a) = N$ و $ax \in N$ برای $x \in M$ و $a \in A$. اگر برای هر $n \in \mathbb{N}$، $a^n \notin (N :_A M)$، آن‌گاه طبق فرض، $x \in (N :_M a) = N$ و لذا N، A-ایده‌آلی اولیه از M است. □

گزاره ۱۵.۳. *فرض کنید N، A-ایده‌آلی سره از M بوده و برای هر $a \in A \backslash (N :_A M)$، aM یک A-ایده آلی از M باشد و از با تولید متناهی بودن $N + aM$ و $(N :_M a)$، نتیجه بگیریم که N نیز با تولید متناهی است. دراین‌صورت اگر N با تولید متناهی نباشد و در بین تمام A-ایده‌آل‌هایی از M که با تولید متناهی نیستند؛ بیشین باشد، آن‌گاه N، A-ایده‌آل اولی از M است.*

اثبات. فرض کنید برای $a \in A \backslash (N : M)$ و $x \in M$، $ax \in N$. لذا $N \subset N + aM$. اگر $N \subset (N :_M a)$، آن‌گاه طبق فرض $N + aM$ و $(N :_M a)$ با تولید متناهی می‌باشند. پس N نیز با تولید متناهی است که تناقض است. لذا $N = (N :_M a)$ و از آن‌جایی‌که $ax \in N$، نتیجه می‌گیریم $x \in N$. بنابراین N، A-ایده‌آلی اول از M است. □

نکته: یادآوری می‌کنیم که بنا به [۴]، A-مدول M نوتری است، اگر هر A-ایده‌آل آن با تولید متناهی باشد.

قضیه زیر (تحت شرایطی) بیان می‌کند که نوتری بودن یک A-مدول، معادل با تولید متناهی بودن A-ایده‌آل‌های اولش است.

قضیه ۱۶.۳. *فرض کنید برای هر A-ایده‌آل سره N از A-مدول با تولید متناهی M، برای هر $a \in A \backslash (N : M)$، aM، A-ایده‌آلی از M بوده و از با تولید متناهی بودن $N + aM$ و $(N :_M a)$، با تولید متناهی بودن N نیز نتیجه شود. در این‌صورت M نوتری است اگروتنهااگر هر A-ایده‌آل اول M، با تولید متناهی باشد.*

اثبات. فرض کنید هر A-ایده‌آل اول M، با تولید متناهی باشد. مجموعه Δ را متشکل از Nهایی در نظر می‌گیریم که N، A-ایده‌آل سره‌ای

از M است که با تولید متناهی نیست. اگر $\Delta \neq \varnothing$، آن‌گاه بنا به لم زورن، Δ دارای عضو بیشینی مانند L خواهد بود که بنا به گزاره ۱۵.۳، A-ایده‌آل اولی از M است و این متناقض با تولید متناهی بودن A-ایده‌آل‌های اول، طبق فرض است. بنابراین $\Delta = \varnothing$ و حکم ثابت می‌شود. اثبات برعکس قضیه، واضح است. $\square$

تعریف ۱۷.۳. فرض کنید N زیرمجموعه‌ای ناتهی از A-مدول M و I زیرمجموعه‌ای ناتهی از A باشد. تعریف می‌کنیم

$$(N :_M I) = \{y \in M \ : \ Iy \subseteq N\},$$

که در آن $Iy = \{iy \ : \ i \in I\}$.

مثال ۱۸.۳. (مثال ۲ ۰ ۵ [۳]) فرض کنید $M = \Gamma(\mathbb{R}^۲, u) = [(۰,۰),(۱,۱)]$ که در آن $u = (۱,,۱)$ و $A = \Gamma(M_۲(\mathbb{R}), v) = [۰, \begin{bmatrix} ۱/۲ & ۱/۲ \\ ۱/۲ & ۱/۲ \end{bmatrix}]$ که در آن $v = \begin{bmatrix} ۱/۲ & ۱/۲ \\ ۱/۲ & ۱/۲ \end{bmatrix}$. دراین‌صورت M یک A-مدول است. برای $N = \{(۱/۴, ۱/۲), (۰, ۱/۲), (۰, ۱)\}$ و $I = \{\begin{bmatrix} ۰ & ۱/۴ \\ ۰ & ۱/۲ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۱/۲ & ۱/۲ \end{bmatrix}\}$ داریم

$$(N :_M I) = \{y \in M : Iy \subseteq N\} = \{(۰,۱),(۱,۱)\}.$$

گزاره ۱۹.۳. *فرض کنید A یک PMV-جبر جابجایی، I زیرمجموعه‌ای ناتهی از A و N، A-ایده‌آلی از M باشد. در این‌صورت $(N :_M I)$، A-ایده‌آلی از M و شامل N است.*

از تعریف ۱۷.۳، می توانیم خواص زیر را بدست آوریم.

گزاره ۲۰.۳. *فرض کنید N و L زیرمجموعه‌هایی ناتهی از A-مدول M و I و J زیرمجموعه‌هایی ناتهی از A باشند. در این‌صورت*

(الف) $I \subseteq (N :_A M)$ *اگروتنهااگر* $(N :_M I) = M$.

(ب) اگر $N \subseteq L$*، آن‌گاه* $(N :_M I) \subseteq (L :_M I)$.

(ج) اگر $I \subseteq J$*، آن‌گاه* $(N :_M J) \subseteq (N :_M I)$.

(د) $(N \cap L :_M I) = (N :_M I) \cap (L :_M I)$.

(ه) اگر N*،* A*-ایده‌آلی از* M *باشد، آن‌گاه* $N \subseteq (N :_M I)$.

اگر A *جابجایی باشد، آن‌گاه*

(و) $((N :_M I) :_A M) = (N :_A IM)$.

(ز) $((N :_M I) :_M J) = ((N :_M J) :_M I) = (N :_M IJ)$ *کـه در آن* $Ij = \{ij \ : \ i \in I, \ j \in J\}$.

در قضیه زیر، با کمک تعریف ۱۷.۳، شرط لازم و کافی جدیدی برای A-ایده‌آل اول بودن یک A-ایده‌آل سره را بدست می آوریم.

قضیه ۲۱.۳. *فرض کنید* N*،* A*-ایده‌آل سره‌ای از* M *باشد. در این‌صورت* N*،* A*-ایده‌آلی اول از* M *است اگروتنهااگر برای هر زیرمجموعه ناتهی* I *از* A *که* $I \nsubseteq (N :_A M)$*،* $(N :_M I) = N$.

اثبات. فرض کنید N، A-ایده‌آل اولی از M باشد و $I \nsubseteq (N :_A M)$. کافیست نشان دهیم $(N :_M I) \subseteq N$. فرض کنید $x \in (N :_M I)$. در این‌صورت $Ix \subseteq N$ و در نتیجه بنا به اول بودن N و همچنین با استفاده از $I \nsubseteq (N :_A M)$ و قضیه ۶۰۳ [۵]، $x \in N$. بنابراین $N = (N :_M I)$. برعکس، فرض کنید برای هر زیرمجموعه ناتهی I از A که $I \nsubseteq (N :_A M)$، داشته باشیم $(N :_M I) = N$ و $ax \in N$ برای $x \in M$ و $a \in A$. اگر $a \notin (N :_A M)$، آن‌گاه $\{a\} \nsubseteq (N :_A M)$ و لذا طبق فرض داریم $x \in (N :_M a) = (N :_M \{a\}) = N$. بنابراین N، A-ایده‌آلی اول از M است. □

در قضیه زیر، با کمک تعریف ۱۷.۳، شرط لازم و کافی جدیدی برای A-ایده‌آل اولیه بودن یک A-ایده‌آل سره را ذکر می کنیم.

قضیه ۲۲.۳. *فرض کنید* N*،* A*-ایده‌آل سره‌ای از* M *باشد که* $(N :_A M)$ *ایده‌آل اولی از* A *است. در این‌صورت* N*،* A*-ایده‌آلی اولیه از* M *است اگروتنهااگر برای هر زیرمجموعه ناتهی* I *از* A *و برای هر* $n \in \mathbb{N}$ *که* $I^n \cap (N :_A M) = \varnothing$ *(*$I^n = \{a^n \ : \ a \in I\}$*)، داشته باشیم* $(N :_M I) = N$.

اثبات. فرض کنید N، A-ایده‌آلی اولیه از M و I زیرمجموعه ناتهی از A باشد به‌طوری‌که برای هر $n \in \mathbb{N}$، $I^n \cap (N :_A M) = \varnothing$. کافیست نشان دهیم $N \subseteq (N :_M I)$. فرض کنید $x \in (N :_M I)$. در این‌صورت $Ix \subseteq N$ و در نتیجه بنا به اولیه بودن N و این‌که برای هر $n \in \mathbb{N}$، $I^n \cap (N :_A M) = \varnothing$، نتیجه می‌گیریم که $x \in N$. بنابراین $N = (N :_M I)$. حال فرض کنید برای هر زیرمجموعه ناتهی I از A و برای هر $n \in \mathbb{N}$ که $I^n \cap (N :_A M) = \varnothing$، داشته باشیم $(N :_M I) = N$. همچنین فرض کنید $ax \in N$، برای $x \in M$ و $a \in A$. اگر برای هر $n \in \mathbb{N}$، داشته باشیم $a^n \notin (N :_A M)$، آنگاه برای هر $n \in \mathbb{N}$، داریم $\{a\}^n \cap (N :_A M) = \varnothing$ و طبق فرض، $x \in (N :_M a) = (N :_M \{a\}) = N$. بنابراین N، A-ایده‌آلی اولیه از M است. □

۴ زیرمجموعه‌های S-اشباع شده

در این بخش، مفاهیم زیرمجموعه اشباع شده در PMV-جبرها و زیرمجموعه S-بسته و S-اشباع شده در A-مدول‌ها را تعریف کرده و ویژگی‌های آن‌ها را ذکر می‌کنیم.

تعریف ۱.۴. فرض کنید A یک PMV-جبر و S یک زیرمجموعه بسته ضربی از A باشد. گوییم S یک زیرمجموعه اشباع شده از A است، اگر برای هر $a, b \in A$، $a \cdot b \in S$ نتیجه دهد $a \in S$ و $b \in S$.

مثال ۲.۴. (الف) مثال ۳.۳ (الف)، را در نظر بگیرید. دراین‌صورت
$S = \{\begin{bmatrix} a & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} : ۰ \leq a \leq ۱\}$ یک زیرمجموعه اشباع شده از A است.

(ب) مثال ۱۰.۳، را در نظر بگیرید. دراین‌صورت $S = \{۰, ۱\}$ یک زیرمجموعه بسته است؛ ولی اشباع شده از A نیست ($S \ni ۱ = ۲ \cdot ۲$؛ اما $۲ \notin S$).

تعریف ۳.۴. فرض کنید S یک زیرمجموعه بسته ضربی از PMV-جبر A بوده و M یک A-مدول باشد.

(الف) زیرمجموعه غیرتهی S^* از M را S-بسته گوییم، اگر برای هر $s \in S^*$ و $e \in S$، داشته باشیم $e \cdot s \in S^*$.
(ب) زیرمجموعه S-بسته S^* را اشباع شده گوییم، اگر برای $a \in A$ و $e \in M$، $a \cdot e \in S^*$ نتیجه دهد $a \in S$ و $e \in S^*$.

مثال ۴.۴. (الف) مثال ۲.۴ (ب) را در نظر بگیرید. در این‌صورت $S^* = \{۲\}$ یک زیرمجموعه $S = \{۰, ۱\}$-بسته از M نیست ($۰ \cdot ۲ = ۰ \notin S^*$).
(ب) مثال ۲.۴ (الف) را در نظر بگیرید. فرض کنید $M = \Gamma(\mathbb{R}^۲, u) = [(۰, ۰), (۱, ۱)]$ که در آن $u = (۱, ۱)$. دراین‌صورت M یک A-مدول است و $S^* = \{(۰, a) : ۰ \leq a \leq ۱\}$ یک زیرمجموعه S-بسته از M است؛ ولی اشباع شده نیست (به عنوان مثال $\begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱/۲ \end{bmatrix} \cdot (۱, ۱) = (۰, ۱/۲) \in S^*$ ؛ ولی $(۱, ۱) \notin S^*$ و $\begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱/۲ \end{bmatrix} \notin S$).
(ج) مثال قسمت (ب)، را در نظر بگیرید. دراین‌صورت $S^* = \{(a, ۱) : ۰ \leq a \leq ۱\}$ یک زیرمجموعه S-بسته اشباع شده از M است.

در گزاره بعدی، مفاهیم بسته و اشباع شده یک زیر مجموعه را تحت همریختی A-مدولی، مورد بررسی قرار می دهیم.

گزاره ۵.۴. *فرض کنید $h : M \to M'$ یک همریختی A-مدولی و S زیرمجموعه بسته ضربی از A باشد. دراین‌صورت*
الف) اگر S^* زیرمجموعه S-بسته از M باشد، آن‌گاه $h(S^*)$ زیرمجموعه S-بسته از M' است.
ب) اگر S^* زیرمجموعه S-بسته (اشباع شده) از M' باشد، آن‌گاه $h^{-۱}(S^*)$ زیرمجموعه S-بسته (اشباع شده) از M است.

در چند گزاره ی بعدی، خواصی از زیرمجموعه‌های بسته و اشباع شده را بدست می آوریم.

لم ۶.۴. *فرض کنید M یک A-مدول و S زیرمجموعه بسته ضربی از A باشد. اگر S^* یک زیرمجموعه اشباع شده S-بسته از M باشد، آن‌گاه S اشباع شده است.*

اثبات. فرض کنید $a, b \in A$ به‌طوری‌که $ab \in S$. در این‌صورت برای هر $e \in S^*$، $abe \in S^*$ و چون S^* اشباع شده است، لذا $a \in S$ و $be \in S^*$. در نتیجه $a \in S$ و $b \in S$. $\square$

در مثال زیر نشان می دهیم که عکس لم قبل، در حالت کلی برقرار نیست.

مثال ۷.۴. مثال ۲.۴ (الف)، را در نظر بگیرید. دراین‌صورت S زیرمجموعه اشباع شده A است؛ ولی بنابه مثال ۴.۴(ب)، S^*، S-اشباع شده نیست.

لم ۸.۴. *فرض کنید S یک زیرمجموعه بسته ضربی از PMV-جبر جابجایی A و S^* زیرمجموعه‌ای ناتهی از A باشد. در این‌صورت S^* یک زیرمجموعه S-بسته اشباع شده از A-مدول A است اگروتنهااگر $S = S^*$ و S^* یک زیرمجموعه بسته ضربی اشباع شده از A باشد.*

اثبات. ابتدا فرض کنید S^* یک زیرمجموعه S-بسته اشباع شده از A-مدول A باشد. آنگاه بنا به لم ۶.۴، S یک زیرمجموعه بسته ضربی اشباع شده از A می‌باشد. به‌علاوه برای هر $a \in S$ و $b \in S^*$، $ba \in S^*$ و لذا $b \in S$ و $a \in S^*$. بنابراین $S \subseteq S^*$، $S^* \subseteq S$ و لذا $S = S^*$. اثبات برعکس، واضح است. $\square$

گزاره ۹.۴. *فرض کنید $\{P_i\}_{i\in I}$ خانواده‌ای از A-ایده‌آل‌های اول M باشد و برای هر $i \in I$، $p_i = (P_i : M)$. در این‌صورت $S^* = M \setminus \cup_{i\in I} P_i$ یک زیرمجموعه S-بسته اشباع شده از M است که در آن $S = R - \setminus \cup_{i\in I} p_i$.*

اثبات. به‌وضوح S زیرمجموعه بسته ضربی از A است. فرض کنید برای $a \in S$ و $\alpha \in S^*$، $a\alpha \notin S^*$. آنگاه برای $j \in I$، $a\alpha \in P_j$ که بنا به اول بودن P_j، نتیجه می‌گیریم $a \in p_j$ یا $\alpha \in P_j$ که تناقض است. لذا S^* یک مجموعه S-بسته است. حال فرض کنید برای $a \in A$ و $\alpha \in M$، داشته باشیم $a\alpha \in S^*$. اگر $\alpha \notin S^*$، آنگاه برای $j \in I$، $\alpha \in P_j$ و لذا $a\alpha \in P_j$ که تناقض است. به‌طور مشابه اگر $a \notin S$، آنگاه برای $t \in I$، $a \in p_t$ و لذا $a \in (P_t : M)$ که نتیجه می‌دهد $a\alpha \in P_t$ و تناقض است.

بنابراین S^* یک زیرمجموعه S-بسته اشباع شده از M است. $\square$

گزاره ۱۰.۴. *برای هر زیرمجموعه S-بسته S^* از M، فرض کنید*

$$W = \{S_i^* \subseteq M \ : \ S \subseteq S_i,\ S^* \subseteq S_i^*,\ \text{یک } S_i\text{-بسته اشباع شده است } S_i^*\},$$

$$\overline{S^*} = \cap_{S_i^* \in W} S_i^*.$$

در این‌صورت $\overline{S^*}$ یک زیرمجموعه $\overline{S_\circ}$-بسته اشباع شده از M شامل S^* است که در آن $\overline{S_\circ} = \cap_{i\in I} S_i$.

اثبات. به‌سادگی دیده می‌شود که $\overline{S_\circ}$ زیرمجموعه بسته ضربی A است. فرض کنید $a \in \overline{S_\circ}$ و $a \in \overline{S^*}$. در این‌صورت برای هر $i \in I$، $\alpha \in S_i^*$ و $a \in S_i$ که بنا به S_i-بسته بودن S_i^*، نتیجه می‌شود $a\alpha \in S_i^*$. لذا $a\alpha \in \overline{S^*}$. پس $\overline{S^*}$ یک مجموعه $\overline{S_\circ}$-بسته است. حال فرض کنید برای $a \in A$ و $\alpha \in M$، $a\alpha \in \overline{S^*}$. در این‌صورت برای هر $i \in I$، $a\alpha \in S_i^*$ و بنا به S_i-اشباع بودن S_i^*، نتیجه می‌شود برای هر $i \in I$، $\alpha \in S_i^*$ و $a \in S_i$. بنابراین $a \in \overline{S_\circ}$ و $\alpha \in \overline{S^*}$ و لذا $\overline{S^*}$ یک زیرمجموعه $\overline{S_\circ}$-بسته اشباع شده از M است. $\square$

گزاره ۱۱.۴. *فرض کنید S^* یک زیرمجموعه S-بسته از M و N، A-ایده‌آلی از M مشمول در $M\backslash S^*$ باشد. در این‌صورت*

(الف) $(N : M) \cap S = \varnothing$ و اگر A جابجایی، M با تولید متناهی و یا N، A-ایده‌آلی اول از M باشد، آن‌گاه $N_S \neq M_S$.

(ب) اگر N در $M\backslash S^*$ بیشین باشد، آن‌گاه $N = \{m \in M \ : \ \exists\, s \in S;\ sm \in N\}$.

اثبات. (الف) فرض کنید $(N : M) \cap S \neq \varnothing$. لذا $s \in (N : M) \cap S$ وجود دارد. پس $sM \subseteq N$. بنابراین به ازای هر $e \in S^*$ خواهیم داشت $se \in S^* \cap N$ که تناقض است. بنابراین $(N : M) \cap S = \varnothing$. حال اگر M باتولید متناهی و یا N، A-ایده‌آلی

اول از M باشد؛ آن‌گاه بنا به گزاره ۲.۳، $N_S \neq M_S$.

(ب) فرض کنید N در $M\backslash S^*$ بیشین باشد. قرار می‌دهیم

$$L = \{m \in M \ : \ \exists\, s \in S;\ sm \in N\}.$$

به‌وضوح $N \subseteq L$. فرض کنید $L \neq N$. بنابراین $L \cap S^* \neq \varnothing$ و لذا $e \in L \cap S^*$ وجود دارد. پس $s \in S$ وجود دارد به‌طوری‌که $se \in N$. در نتیجه بنابه S-بسته بودن S^*، داریم $se \in N \cap S^*$ و این تناقض است. در نتیجه اثبات کامل است. □

مثال ۱۲.۴. مثال ۳.۳، را در نظر بگیرید. دراین‌صورت $N \subseteq M\backslash S^*$ و $N_S \neq M_S$.

در نتیجه زیر، شرط لازم و کافی برای A-ایده‌آل اول بودن یک A-ایده‌آل سره را متناسب با موضعی سازی آن بدست می آوریم.

نتیجه ۱۳.۴. *فرض کنید M، S و S^* همان‌هایی باشند که درگزاره ۱۱.۴ آمده‌اند. در این‌صورت N، A-ایده‌آل اول M است اگروتنهااگر N_S، A_S-ایده‌آل اول M_S باشد.*

اثبات. بنا به گزاره ۱۱.۴، $(N : M) \cap S = \varnothing$. از طرفی بنا به گزاره ۵.۳، تناظر یک‌به‌یکی بین تمام A-ایده‌آل‌های اول N از M که $(N : M) \cap S = \varnothing$ و A_S-ایده‌آل‌های اول A_S-مدول M_S وجود دارد و لذا اثبات کامل است. □

در چند گزاره پایانی، با استفاده از مفاهیم زیرمجموعه‌های بسته و اشباع شده، شرایطی را بدست می آوریم که تحت آن‌ها یک A-ایده‌آل سره، یک A-ایده‌آل اول شود.

قضیه ۱۴.۴. *فرض کنید S یک زیرمجموعه بسته ضربی از A و S^* یک زیرمجموعه S-بسته از A-مدول با تولید متناهی M باشد. همچنین فرض کنید N، A-ایده‌آلی از M باشد که در $M\backslash S^*$ بیشین است. اگر ایده‌آل $(N : M)$ در $A\backslash S$ بیشین باشد، آن‌گاه N، A-ایده‌آل اولی از M است به‌طوری‌که* $(N :_A M)_S = (N_S :_{A_S} M_S)$.

اثبات. فرض کنید $P = (N :_A M)$ در $A\backslash S$ بیشین باشد. همچنین فرض کنید ایده‌آل بیشین Q_S از A_S شامل P_S موجود است. بنابراین

Q، A-ایده‌آلی اول از A است که $Q \cap S = \varnothing$. از این‌رو $P_S \subseteq Q_S$. آن‌گاه برای هر $r \in P$ داریم $r/s \in Q_S$. بنابراین عضوی مانند s' در $S \cap B(A)$ وجود دارد به‌قسمی‌که $s'r \in Q$. لذا چون $Q \cap S = \varnothing$، داریم $r \in Q$. در نتیجه $P \subseteq Q$. لذا اگر $P \subsetneq Q$، آن‌گاه با توجه به فرض، نتیجه می‌گیریم که $Q \cap S \neq \varnothing$ که تناقض است. بنابراین $P = Q$ و لذا P_S ایده‌آل بیشینی از A_S است. بنا به گزاره ۱۱.۴، $M_S \neq N_S$ بوده و چون $(N_S : M_S) \supseteq P_S = (N : M)_S \subseteq (N_S : M_S)$، لذا داریم $P_S = (N_S : M_S)$. اما بنا‌به گزاره ۳۰۴ [۵]، N_S زیرمدول اولی از M_S خواهد بود. حال بنا به گزاره ۵.۳، N، A-ایده‌آل اولی از M است. □

نتیجه ۱۵.۴. *فرض کنید P ایده‌آل اولی از A، $S = A \backslash P$ و S^* یک زیرمجموعه S-بسته از A-مدول با تولید متناهی M باشد. اگر $(N : M) = P$ و N در $M \backslash S^*$ بیشین باشد، آن‌گاه N، A-ایده‌آل اولی از M است.*

اثبات. بنا به قضیه ۱۴.۴، کافیست نشان دهیم که $(N : M)$ در $A \backslash S$ بیشین است. فرض کنید برای ایده‌آل q داشته باشیم $q \subseteq (N : M)$ و $q \cap S = \varnothing$. در این‌صورت $q \subseteq P = (N : M)$ و لذا $q = (N : M)$. □

قضیه ۱۶.۴. *فرض کنید A یک PMV-جبر جابجایی و $M = (m]$ یک A-مدول یکانی دوری باشد که برای هر ایده‌آل I از A، IM یک A-ایده‌آل از M است. فرض کنید S زیرمجموعه بسته ضربی از A و N، A-ایده‌آلی از M باشد به‌طوری‌که $N = (N : M)M$. همچنین فرض کنید S^* زیرمجموعه S-بسته از M باشد به‌طوری‌که N در $M \backslash S^*$ بیشین است. اگر S^* اشباع شده باشد، آن‌گاه ایده‌آل $(N : M)$ در $A \backslash S$ بیشین بوده و لذا N، A-ایده‌آل اولی از M خواهد بود.*

اثبات. فرض کنید $J = (N : M)$ در $A \backslash S$ بیشین نباشد. آن‌گاه ایده‌آلی مانند I مشمول در $A \backslash S$ وجود دارد به‌طوری‌که $J \subsetneq I$. اگر $JM = IM$، آن‌گاه $I(m] \subseteq J(m]$. لذا برای هر $\alpha \in I$، $\beta \in J$ وجود دارد به‌طوری‌که $\alpha m \leq \beta$.

پس $\alpha m \in N$ و در نتیجه $\alpha M \subseteq N$. لذا $\alpha \in (N : M) = J$. بنابراین $I = J$ بوده که تناقض است. در نتیجه $N = JM \subsetneq IM$. چون N در $M\backslash S^*$ بیشین است، لذا $S^* \cap IM \neq \varnothing$ بوده و در نتیجه $r \in I$ وجود دارد به‌طوری‌که $rm \in S^*$. حال چون S^* اشباع شده است؛ لذا $r \in S$ که متناقض با فرض $I \cap S = \varnothing$ است. بنابراین J در $A\backslash S$ بیشین بوده و بنا به قضیه ۱۴.۴، داریم N، A-ایده‌آل اولی از M خواهد بود. □

قضیه ۱۷.۴. *فرض کنید A یک PMV-جبر جابجایی و M یک A-مدول یکانی دوری باشد که برای هر ایده‌آل I، IM یک A-ایده‌آل از M است. همچنین فرض کنید برای هر A-ایده‌آل N از M، $N = (N : M)M$، S یک زیرمجموعه بسته ضربی از A و S^* زیرمجموعه بالایی غیرتهی از M باشد. در این‌صورت S^* یک زیرمجموعه S-بسته اشباع شده از M است اگروتنهااگر $M\backslash S^*$ اجتماعی از A-ایده‌آل‌های اول P_i $(i \in I)$ از M بوده و $A\backslash S$ اجتماعی از ایده‌آل‌های اول $p_i = (P_i : M)$ $(i \in I)$ باشد.*

اثبات. ابتدا فرض کنید S^* یک زیرمجموعه S-بسته اشباع شده از M بوده و داشته باشیم $0 \neq e \in M - S^*$. چون S^* اشباع شده است، لذا $Ae \cap S^* = \varnothing$. بنا به لم زورن، A-ایده‌آلی مانند P از M شامل Ae وجود دارد به‌طوری‌که در بین همه زیرمدول‌های شامل Ae که اشتراکی با S^* ندارند، بیشین است. حال بنا به قضیه ۱۶.۴، P، A-ایده‌آل اولی از Mخواهد بود. بنابراین $M\backslash S^* = \cup_{i\in I} P_i$، اجتماعی از A-ایده‌آل‌های اول P_i $(i \in I)$ است. قرار دهید $S_0 = A\backslash(\cup_{i\in I} p_i)$، جایی‌که برای هر $i \in I$، $p_i = (P_i : M)$. حال نشان می‌دهیم $S = S_0$. فرض کنید $s \in S$. اگر برای $i \in I$، $s \in p_i$، آنگاه $s \in (P_i : M)$ بوده و لذا برای $m \in S^*$ داریم $sm \in P_i \cap S^*$، که تناقض است. لذا $s \in S_0$ و در نتیجه $S \subseteq S_0$. از طرفی برای $s' \in S_0$، نتیجه می‌گیریم برای هر $i \in I$، $s' \notin p_i$. در نتیجه برای هر $m \in S^* = M\backslash(\cup_{i\in I} P_i)$، بنا به اول بودن P_iها داریم $s'm \in S^*$. لذا چون S^* یک زیرمجموعه S-بسته اشباع شده است؛ نتیجه می‌گیریم $s' \in S$. بنابراین $S_0 \subseteq S$. عکس این قضیه، همان گزاره ۹.۴

می‌باشد. $\square$

۵ نتیجه‌گیری

در این مقاله، با کمک مفاهیمی که در MV-مدول‌ها تعریف شده‌اند؛ ضمن به‌دست آوردن خواص جدیدی برای MV-مدول‌ها، با معرفی چندین مفهوم جدید، سعی کرده ایم ویژگی‌های بیشتری برای MV-مدول‌ها بدست آوریم. تلاش می کنیم در پژوهش های آتی این مفاهیم جدید را در دیگر مفاهیم تعریف شده در MV-مدول‌ها مانند MV-مدول‌های خارج قسمتی و کسری بررسی نموده و همچنین با تعریف مفاهیم دیگر مرتبط با این مفاهیم معرفی شده در مقاله، خصوصیات و ویژگی‌های بیشتری برای MV-مدول‌ها بدست بیاوریم. علاوه براین، این مفاهیم را در مجموعه های فازی نیز مورد مطالعه و بررسی قرار خواهیم داد.

تشکر و قدردانی
نویسندگان مایلند از داوران محترم برای نظرات و پیشنهادات سازنده خود که به طور قابل توجهی مقاله را بهبود بخشیده است؛ تشکر کنند.

مراجع

[1] Cignoli, R., D’Ottaviano, I. M. L. and Mundici, D., “Algebraic foundations of many-valued reasoning”, Kluwer Academic, Dordrecht, (2000).

[2] Di Nola, A. and Dvurecenskij, A., “Product MV-algebras”, Multiple-Valued Logic, 6 (2001), 193-215.

[3] Di Nola, A., Flondor, P. and Leustean, I., “MV-modules”, Journal of Algebra, 267 (2003), 21-40.

[4] Forouzesh, F., “Some results on MV-modules”, New Mathematics and Natural Computation, 12 (3) (2016), 251-263.

[5] Forouzesh, F., Eslami, E. and Borumand Saeid, A., “On prime A-ideals in MV-modules”, UPB Scientific Bulletin, Series A, 76 (3) (2014), 181-198.

[6] Forouzesh, F., Eslami, E. and Borumand Saeid, A., “Primary decomposition of A-ideals in MV-modules”, Journal of Intelligent and Fuzzy Systems, 28 (2015), 2621-2629.

[7] Saidi Goraghani, S. and Borzooei, A., “Most results on A-ideals in MV-modules”, Journal of Algebraic Systems, 5 (1) (2017), 1-13.