سیستم‌های فازی و کاربردها
شاپای چاپی: ۲۷۱۷-۴۴۰۹
سال ششم، شماره اول (بهار و تابستان ۱۴۰۲)
شاپای الکترونیکی: ۲۷۱۷-۳۹۸۴
صص. ۱ تا ۲۱
DOI:10.22034/JFSA.2023.380927.1158

روشی برای حل مسئله برنامه‌ریزی خطی دوترازه با پارامترهای فازی شهودی

نیلوفر داودی و فرهاد حمیدی*

گروه ریاضی، دانشکده ریاضی، دانشگاه سیستان و بلوچستان، زاهدان، ایران

تاریخ دریافت: ۱۴۰۱/۱۰/۲۴ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۱/۱۱/۲۸
نوع مقاله: علمی-پژوهشی

چکیده

در بسیاری از مسائل بهینه‌سازی همه تصمیم‌گیرنده‌ها در یک تراز قرار ندارند بلکه در ساختار سلسله مراتبی هستند. همچنین ممکن است پارامترهای مسئله به صورت قطعی بیان نشده باشند بلکه به صورت انواع مختلفی از فازی یا بازه‌ای مطرح شوند. در این مقاله دو حالت خاص مسئله برنامه‌ریزی خطی دوترازه را در نظر می‌گیریم. در یکی از مسائل، همه پارامترهای مسئله به صورت اعداد فازی شهودی ذوزنقه‌ای و در دیگری به صورت اعداد فازی شهودی مثلثی در نظر گرفته می‌شوند. با استفاده از روش رتبه‌بندی مطرح شده، مسئله برنامه‌ریزی خطی دوترازه قطعی متناظر با هر حالت را بدست می‌آوریم که با روش‌های معمول حل می‌گردد.

۱ سرآغاز

مسئله برنامه‌ریزی خطی دوترازه یکی از انواع مسائل بهینه‌سازی است که تاکنون مورد بررسی قرار گرفته است. این دسته از مسائل ابتدا توسط استکلبرگ [1] [۴۶] برای حل

[1] Stackelberg

عبارات و کلمات کلیدی: مسئله برنامه‌ریزی دوترازه، مجموعه فازی شهودی، عدد فازی شهودی ذوزنقه‌ای، عدد فازی شهودی مثلثی

Email(s): davoudiniloufar@pgs.usb.ac.ir and f_hamidi@math.usb.ac.ir.

Mathematics Subject Classification: 90C70

مسائل غیرمتمرکز با ساختار سلسله مراتبی در نظریه بازی مطرح شد. سپس بارد [۲] [۱۰] و دمپ [۳] [۱۷] مسئله برنامه‌ریزی خطی دوترازه را فرمول بندی کردند. در [۹، ۱۳، ۱۵، ۲۴، ۲۵، ۲۷، ۲۸] چند روش برای حل این نوع مسائل ارائه شده است.
در سال ۱۹۶۵ زاده [۴] [۵۰] نظریه مجموعه‌های فازی را ارائه کرد. مجموعه‌های فازی شهودی توسط آتاناسف [۵] [۵، ۶، ۷، ۸] مطرح شد. دبویس [۶] و پراد [۷] [۱۹] اعداد فازی شهودی را معرفی کردند. با توجه به اینکه رتبه‌بندی یکی از موضوعات مهم برای اعداد فازی شهودی است، محققان زیادی تاکنون بر روی این موضوع کار کرده‌اند. گرزوسکی [۸] [۲۲] دو متر برای اعداد فازی شهودی معرفی کرد و با استفاده از آنها یک روش برای رتبه‌بندی اعداد فازی شهودی ارائه داد. میشل [۹] [۳۳] یک روش رتبه‌بندی برای اعداد فازی شهودی با استفاده از دیدگاه آماری بیان کرد. همچنین برای رتبه‌بندی اعداد فازی شهودی لی [۱۰] [۲۹] نسبت شاخص ارزش به شاخص ابهام و وی [۱۱] و تانگ [۱۲] [۴۸] درجه امکان را معرفی کردند. میش مست نهی [۱۳] [۳۶] با استفاده از معکوس تابع عضویت و تابع عدم عضویت اعداد فازی شهودی را رتبه‌بندی کرد. ناگورگانی [۱۴] و پونالاگو [۱۵] [۳۵] با استفاده از تابع امتیاز روشی برای رتبه‌بندی اعداد فازی شهودی ارائه کردند. رضوانی [۱۶] [۴۱] برای رتبه‌بندی بندی اعداد فازی شهودی شاخص ارزش توابع عضویت و عدم عضویت را معرفی کرد.

[2] Bard
[3] Demp
[4] Zadeh
[5] Atanassov
[6] Dubois
[7] Prade
[8] Grzegorzewski
[9] Mitchell
[10] Li
[11] Wei
[12] Tong
[13] Mishmast Nehi
[14] Nagoorgani
[15] Ponnalagu
[16] Rezvani

پژوهشگران زیادی مانند احمد [17] [۱]، علی [18] و همکاران [۳]، آنجلو [19] [۴]، باسو [20] و موخرجی [21] [۱۱]، بهاراتی [22] [۱۲]، چوتیا [23] [۱۶]، دوبی [24] و همکاران [۱۸]، اینگین اوغلو [25] و ارسلان [26] [۲۰]، فتحی [27] [۲۱]، گوپتا [28] و همکاران [۲۳]، ماهاجان [29] و گوپتا [30] [۳۱]، ماهاپاترا [31] و همکاران [۳۲]، ناگورگانی [32] [۳۴]، نیو [33] و همکاران [۳۷]، پرز-کاندو [34] و کانسپشن-مورالس [35] [۳۸]، پلامن [36] [۳۹]، روی [37] و میدیا [38] [۴۲]، ساهو [39] و همکاران [۴۳]، سورش [40] و همکاران [۴۷] و یو [41] و لی [42] [۴۹] بر روی مسائل بهینه‌سازی در فضای فازی شهودی مطالعه کرده‌اند. لیو [43] و همکاران [۳۰] روش بهینه‌سازی ازدحام ذرات را برای مسائل برنامه‌ریزی خطی دوترازه فازی، غیرخطی و صحیح معرفی کردند. شاچی [44] و همکاران [۴۴] حالت خاصی از مسئله برنامه‌ریزی دوترازه را حل کردند که هر تراز آن شامل چند تابع هدف بود و ضرایب تکنولوژیکی

---

[17] Ahmad
[18] Ali
[19] Angelov
[20] Basu
[21] Mukherjee
[22] Bharati
[23] Chutia
[24] Dubey
[25] Enginoğlu
[26] Arslan
[27] Fathy
[28] Gupta
[29] Mahajan
[30] Gupta
[31] Mahapatra
[32] Nagoorgani
[33] Niu
[34] Perez-Canedo
[35] Concepcion-Morales
[36] Plamen
[37] Roy
[38] Midya
[39] Sahoo
[40] Suresh
[41] Yu
[42] Li
[43] Liu
[44] Shashi

و منابع مسئله اعداد فازی شهودی بودند. هانگ [45] و همکاران [۲۶] از مجموعه‌های فازی شهودی برای حل مسئله برنامه‌ریزی چندترازه استفاده کردند. اما تاکنون مسئله برنامه‌ریزی دوترازه با پارامترهای فازی شهودی ذوزنقه‌ای مورد مطالعه قرار نگرفته است. در این مقاله ابتدا مفاهیم اساسی مجموعه‌های فازی شهودی و مسئله برنامه‌ریزی دوترازه را شرح می‌دهیم. سپس حالت خاصی از مسئله برنامه‌ریزی دوترازه که در آن همه پارامترهای مسئله (ضرایب توابع هدف، ضرایب تکنولوژیکی و منابع) اعداد فازی شهودی ذوزنقه‌ای یا اعداد فازی شهودی مثلثی هستند، را در نظر می‌گیریم و روشی برای حل آنها ارائه می‌دهیم. در بخش بعدی چند مثال عددی را با استفاده از روش ارائه شده حل خواهیم کرد.

۲ پیش گفتار

در این بخش مفاهیم کلیدی و مورد نیاز یعنی مسئله برنامه‌ریزی خطی دوترازه و مجموعه های فازی شهودی را بیان می‌کنیم.

۱.۲ مسئله برنامه‌ریزی خطی دوترازه

یکی از مدل‌های مشهور مسائل بهینه‌سازی چندترازه، مسئله بهینه‌سازی خطی دوترازه است که فرم کلی آن به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} &\max_{\mathbf{x}_1 \in X_1} F_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \mathbf{c}^T \mathbf{x}_1 + \mathbf{d}^T \mathbf{x}_2 \\ &\quad s.t. \max_{\mathbf{x}_2 \in X_2} F_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \mathbf{c}'^T \mathbf{x}_1 + \mathbf{d}'^T \mathbf{x}_2 \\ &\quad s.t. \quad \mathbf{A}_i^T \mathbf{x}_1 + \mathbf{B}_i^T \mathbf{x}_2 \le b_i \quad i = 1, 2, ..., l \end{aligned} \tag{1}$$

که $\mathbf{x}_1 \in X_1 \subset \mathbb{R}^n$، $\mathbf{x}_2 \in X_2 \subset \mathbb{R}^m$، $F_1, F_2 : X_1 \times X_2 \to \mathbb{R}$، $\mathbf{c}, \mathbf{c}' \in \mathbb{R}^n$، $\mathbf{d}, \mathbf{d}' \in \mathbb{R}^m$، $\mathbf{A}_i \in \mathbb{R}^n$ و $\mathbf{B}_i \in \mathbb{R}^m, i = 1, 2, ..., l$. به ازای $\mathbf{x}_1$ انتخاب شده توسط پیشرو، جمله $\mathbf{c}'\mathbf{x}_1$ در تابع هدف دنباله‌رو مقداری ثابت است که می‌تواند حذف شود.

[45] Haung

پیشرو بر بردار $\mathbf{x}_۱ \in X_۱ \subset \mathbb{R}^n$ و دنباله‌رو بر بردار $\mathbf{x}_۲ \in X_۲ \subset \mathbb{R}^m$ کنترل دارند. ابتدا پیشرو با انتخاب $\mathbf{x}_۱$ سعی می‌کند $F(\mathbf{x}_۱, \mathbf{x}_۲)$ را احتمالا تحت تعدادی قید بهینه کند. دنباله‌رو با مشاهده تصمیم پیشرو با انتخاب $\mathbf{x}_۲$ تابع هدفش یعنی $F_۲(\mathbf{x}_۱, \mathbf{x}_۲)$ را تحت تعدادی قید برای مقادیر خاص $\mathbf{x}_۱$ مینیمم سازی می‌کند. توجه شود که تصمیم پیشرو بر هدف و فضای تصمیم دنباله‌رو تاثیر دارد.

ناحیه قیدی مسئله برنامه‌ریزی دوترازه به صورت
$S = \{(\mathbf{x}_۱, \mathbf{x}_۲) : \mathbf{x}_۱ \in X_۱, \mathbf{x}_۲ \in X_۲, \mathbf{A}_i^T \mathbf{x}_۱ + \mathbf{B}_i^T \mathbf{x}_۲ \leq b_i,\ i = ۱, ۲, ..., l\}$ و مجموعه شدنی دنباله‌رو برای مقدار مشخص$\mathbf{x}_۱ \in X$ به صورت

$$S(\mathbf{x}_۱) = \{\mathbf{x}_۲ \in X_۲ : \mathbf{B}_i^T \mathbf{x}_۲ \leq b_i - \mathbf{A}_i^T \mathbf{x}_۱,\ i = ۱, ۲, ..., l\}$$

تعریف می‌شوند.

$$S(X_۱) = \{\mathbf{x}_۱ \in X_۱ : \exists \mathbf{x}_۲ \in X_۲, \mathbf{A}_i^T \mathbf{x}_۱ + \mathbf{B}_i^T \mathbf{x}_۲ \leq b_i,\ i = ۱, ۲, ..., l\},$$

تصویر S روی فضای تصمیم پیشرو و

$$P(\mathbf{x}_۱) = \{\mathbf{x}_۲ \in X_۲ : \mathbf{x}_۲ \in \arg\min\{F_۲(\mathbf{x}_۱, \hat{\mathbf{x}}_۲) : \hat{\mathbf{x}}_۲ \in S(\mathbf{x}_۱)\}\},$$

واکنش منطقی دنباله‌رو برای $\mathbf{x}_۱ \in S(X_۱)$ نامیده می‌شوند. مجموعه

$$IR = \{(\mathbf{x}_۱, \mathbf{x}_۲) : (\mathbf{x}_۱, \mathbf{x}_۲) \in S; \mathbf{x}_۲ \in P(\mathbf{x}_۱)\}$$

ناحیه القاپذیر مسئله برنامه‌ریزی خطی دوترازه را نشان می‌دهد.

تاکنون روش‌های زیادی مانند بهترین k-ام [۱۳]، شاخه و کران [۹] و [۲۴]، تابع جریمه [۲۵]، محورگیری مکمل [۲۷] و الگوریتم‌های ابتکاری [۱۵]، [۲۸] برای حل مسئله برنامه‌ریزی خطی دوترازه معرفی شده‌اند.

۲.۲ مجموعه‌های فازی شهودی

تعریف ۱.۲. [۷] فرض کنید Xمجموعه مرجع باشد. مجموعه فازی شهودی A در X را به صورت زیر نمایش می‌دهند:

$$A = \{(x, \mu_A(x), \nu_A(x)) | x \in X\}$$

که در آن $\mu_A(x), \nu_A(x) : X \to [۰, ۱]$ توابعی هستند که به ازای هر $x \in X$، $۰ \leq \mu_A(x) + \nu_A(x) \leq ۱$. $\mu_A(x)$ و $\nu_A(x)$ به ترتیب درجه عضویت و درجه عدم عضویت یک عضو x در A نامیده می‌شوند.

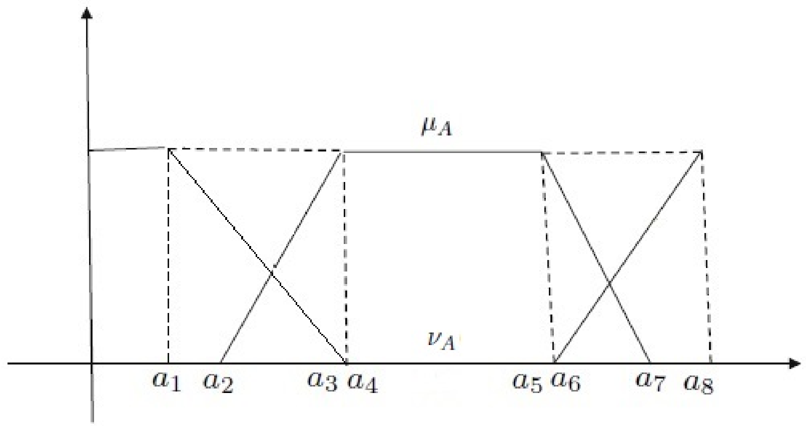
تعریف ۲.۲. [۳۶] $A = (a_۱, a_۲, a_۳, a_۴, a_۵, a_۶, a_۷, a_۸)$ با $a_۱ \leq a_۲ \leq a_۳ \leq a_۴ \leq a_۵ \leq a_۶ \leq a_۷ \leq a_۸$ یک عدد فازی شهودی ذوزنقه‌ای نامیده می‌شود هرگاه توابع عضویت و عدم عضویت آن به ترتیب به صورت زیر تعریف شوند:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} ۰ & x < a_۲, \\ \frac{x - a_۲}{a_۴ - a_۲} & a_۲ \leq x \leq a_۴, \\ ۱ & a_۴ \leq x \leq a_۵, \\ \frac{x - a_۷}{a_۵ - a_۷} & a_۵ \leq x \leq a_۷, \\ ۰ & a_۷ \leq x. \end{cases}$$

$$\nu_A(x) = \begin{cases} ۱ & x < a_۱, \\ \frac{x - a_۱}{a_۳ - a_۱} & a_۱ \leq x \leq a_۳, \\ ۰ & a_۳ \leq x \leq a_۶, \\ \frac{x - a_۸}{a_۶ - a_۸} & a_۶ \leq x \leq a_۸, \\ ۱ & a_۸ \leq x. \end{cases}$$

شکل ۱ یک عدد فازی شهودی ذوزنقه‌ای را نشان می‌دهد.

تعریف ۳.۲. [۳۶] هرگاه در تعریف ۲.۲، $a_۳ = a_۴ = a_۵ = a_۶$، یک عدد فازی شهودی



شکل ۱: *عدد فازی شهودی ذوزنقه‌ای*

مثلثی خواهیم داشت.

تاکنون روش‌های مختلفی برای رتبه‌بندی اعداد فازی شهودی ارائه شده است. یکی از روش‌های رتبه‌بندی اعداد فازی شهودی که توسط پراکاش [۴۶] و همکاران [۴۰] پیشنهاد شده است، براساس مفهوم مرکز هندسی و متر اقلیدسی برای اعداد فازی شهودی ذوزنقه‌ای و مثلثی بیان شده است. در این مقاله از این روش رتبه‌بندی استفاده می‌کنیم.

۳ مسئله برنامه‌ریزی خطی دوترازه با پارامترهای فازی شهودی

در این بخش ابتدا با استفاده از یکی از روش‌های رتبه‌بندی اعداد فازی شهودی، به هر عدد فازی شهودی ذوزنقه‌ای یک عدد نسبت می‌دهیم و سپس روشی برای حل مسئله برنامه‌ریزی خطی دوترازه با اعداد فازی شهودی ذوزنقه‌ای ارائه می‌دهیم.
همچنین تابع رتبه‌بندی را برای اعداد فازی شهودی مثلثی بدست آورده و با استفاده از آن، مسئله برنامه‌ریزی خطی دوترازه با پارامترهای فازی شهودی مثلثی را حل می‌کنیم.

[46]Prakash

۱.۳ مسئله برنامه‌ریزی خطی دوترازه با پارامترهای فازی شهودی ذوزنقه‌ای

تعریف ۱.۳. [۴۰] عدد فازی شهودی ذوزنقه‌ای $A=(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7,a_8)$ را در نظر بگیرید. پراکاش و همکاران نقطه مرکزی $(x_\mu(A),y_\mu(A))$ را برای تابع عضویت و $(x_\nu(A),y_\nu(A))$ را برای تابع عدم عضویت به صورت زیر بیان کردند:

$$x_\mu(A)=\frac{1}{3}\left[\frac{a_5^2+a_7^2-a_2^2-a_4^2-a_2a_4+a_5a_7}{a_7+a_5-a_4-a_2}\right] \tag{2}$$

$$y_\mu(A)=\frac{1}{3}\left[\frac{a_2+2a_4-2a_5-a_7}{a_2+a_4-a_5-a_7}\right] \tag{3}$$

$$x_\nu(A)=\frac{1}{3}\left[\frac{2a_8^2-2a_1^2-2a_3^2+2a_6^2+a_1a_3-a_6a_8}{a_6+a_8-a_1-a_3}\right] \tag{4}$$

$$y_\nu(A)=\frac{1}{3}\left[\frac{2a_1+a_3-a_6-2a_8}{a_1+a_3-a_6-a_8}\right] \tag{5}$$

سپس با استفاده از متر اقلیدسی تابع رتبه‌بندی را به صورت زیر تعریف کردند:

$$\begin{aligned} R(A)&=\sqrt{\frac{1}{2}([x_\mu(A)-y_\mu A)]^2+[x_\nu(A)-y_\nu(A)]^2)}= \\ &\Big(\frac{1}{6}\Big(\Big[\frac{a_5^2+a_7^2-a_2^2-a_4^2-a_2a_4+a_5a_7}{a_7+a_5-a_4-a_2}-\frac{a_2+2a_4-2a_5-a_7}{a_2+a_4-a_5-a_7}\Big]^2+ \\ &\Big[\frac{2a_8^2-2a_1^2-2a_3^2+2a_6^2+a_1a_3-a_6a_8}{a_6+a_8-a_1-a_3}-\frac{2a_1+a_3-a_6-2a_8}{a_1+a_3-a_6-a_8}\Big]^2\Big)\Big)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \tag{6}$$

بنابراین با استفاده از رابطه (۶) می‌توانیم به هر عدد فازی شهودی ذوزنقه‌ای عدد $R(.)$ را نسبت دهیم.

حال مسئله برنامه‌ریزی خطی دوترازه زیر را در نظر بگیرید که در آن همه پارامترها (

ضرایب توابع هدف، ضرایب تکنولوژیکی و مقادیر سمت راست) اعداد فازی شهودی ذوزنقه‌ای هستند:

$$\max_{\mathbf{x}_1 \in X_1} F_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \mathbf{c}^T\mathbf{x}_1 + \mathbf{d}^T\mathbf{x}_2$$
$$s.t. \max_{\mathbf{x}_2 \in X_2} F_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \mathbf{c}'^T\mathbf{x}_1 + \mathbf{d}'^T\mathbf{x}_2 \tag{7}$$
$$s.t.\ \mathbf{A}_i^T\mathbf{x}_1 + \mathbf{B}_i^T\mathbf{x}_2 \leq b_i \quad i = 1, 2, ..., l$$

که $c_i = (c_{i1}, c_{i2}, c_{i3}, c_{i4}, c_{i5}, c_{i6}, c_{i7}, c_{i8}), \quad i = 1, 2, ..., n$،
$d_i = (d_{i1}, d_{i2}, d_{i3}, d_{i4}, d_{i5}, d_{i6}, d_{i7}, d_{i8}), \quad i = 1, 2, ..., m$،
$c'_i = (c'_{i1}, c'_{i2}, c'_{i3}, c'_{i4}, c'_{i5}, c'_{i6}, c'_{i7}, c'_{i8}), \quad i = 1, 2, ..., n$،
$d'_i = (d'_{i1}, d'_{i2}, d'_{i3}, d'_{i4}, d'_{i5}, d'_{i6}, d'_{i7}, d'_{i8}), \quad i = 1, 2, ..., m$،
$A_{ij} = (A_{ij1}, A_{ij2}, A_{ij3}, A_{ij4}, A_{ij5}, A_{ij6}, A_{ij7}, A_{ij8})$،
$i = 1, 2, ..., l, \quad j = 1, 2, ..., n$،
$B_{ij} = (B_{ij1}, B_{ij2}, B_{ij3}, B_{ij4}, B_{ij5}, B_{ij6}, B_{ij7}, B_{ij8})$،
$i = 1, 2, ..., l, \quad j = 1, 2, ..., m$
و $b_i = (b_{i1}, b_{i2}, b_{i3}, b_{i4}, b_{i5}, b_{i6}, b_{i7}, b_{i8}), \quad i = 1, 2, ..., l,$
اعداد فازی شهودی ذوزنقه‌ای هستند.

با استفاده از (۶)، مسئله (۷) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\max_{\mathbf{x}_1 \in X_1} R(\mathbf{c})\mathbf{x}_1 + R(\mathbf{d})\mathbf{x}_2$$
$$s.t. \max_{\mathbf{x}_2 \in X_2} R(\mathbf{c}')\mathbf{x}_1 + R(\mathbf{d}')\mathbf{x}_2 \tag{8}$$
$$s.t.\ R(A_i^T)\mathbf{x}_1 + R(B_i^T)\mathbf{x}_2 \leq R(b_i), \quad i = 1, 2, ..., l$$

(۸) یک مسئله برنامه‌ریزی خطی دوترازه قطعی است و به راحتی می‌توان آن را حل کرد.
بر طبق مطالب بالا می‌توانیم الگوریتم زیر را برای حل مسئله (۷) با پارامترهای فازی شهودی ذوزنقه‌ای بیان کنیم:
گام (۱). ابتدا پارامترهای مسئله را به صورت اعداد فازی شهودی ذوزنقه‌ای دریافت کنید.

سپس با استفاده از (۶)، $R(.)$ را برای هر عدد فازی شهودی ذوزنقه‌ای بدست آورید.
گام (۲). در مسئله برنامه‌ریزی دوترازه با پارامترهای فازی شهودی ذوزنقه‌ای به ازای هر عدد فازی شهودی ذوزنقه‌ای $R(.)$ متناظر با آن را قرار دهید و مسئله برنامه‌ریزی دوترازه را بدست آورید.
گام (۳). مسئله برنامه‌ریزی دوترازه بدست آمده را با یکی از روش‌های حل مسئله برنامه‌ریزی دوترازه حل کنید و مقادیر بهینه را برای توابع هدف پیشرو و دنباله رو بدست آورید.

مثال ۲.۳. مسئله برنامه‌ریزی خطی دوترازه زیر را در نظر بگیرید:

$$
\begin{aligned}
&\max_{\mathbf{x}_۱ \in X_۱} \ Z = \mathbf{c}^T\mathbf{x}_۱ + \mathbf{d}^T\mathbf{x}_۲ \\
&\qquad s.t. \max_{\mathbf{x}_۲ \ \in X_۲} z = \mathbf{c}'^T\mathbf{x}_۱ + \mathbf{d}'^T\mathbf{x}_۲ \\
&\qquad s.t. \ \mathbf{A}_i^T\mathbf{x}_۱ + \mathbf{B}_i^T\mathbf{x}_۲ \le b_i, \quad i = ۱,۲,۳
\end{aligned}
\tag{۹}
$$

که $c = (۴,۵,۶,۷,۸,۹,۱۰,۱۱)$، $d = (۱/۵,۲,۲/۵,۳,۳/۵,۴,۴/۵,۵)$، $c' = (۱,۲/۵,۴,۵/۵,۷,۸/۵,۱۰,۱۱/۵)$، $d' = (۳,۳/۵,۴,۴/۵,۵,۵/۵,۶,۶/۵)$، $A_۱ = (۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷,۸)$، $B_۱ = (۲,۲/۲۵,۲/۵,۲/۷۵,۳,۳/۲۵,۳/۵,۳/۷۵)$، $b_۱ = (۱,۳,۵,۷,۹,۱۱,۱۳,۱۵)$، $A_۲ = (۲,۲/۷۵,۳/۵,۴/۲۵,۵,۵/۷۵,۶/۵,۷/۲۵)$، $B_۲ = (۱/۵,۲,۲/۵,۳,۳/۵,۴,۴/۵,۵)$، $b_۲ = (۴,۵,۶,۷,۸,۹,۱۰,۱۱)$، $A_۳ = (۱,۱/۵,۲,۲/۵,۳,۳/۵,۴,۴/۵)$، $B_۳ = (۲,۳,۴,۵,۶,۷,۸,۹)$ و $b_۳ = (۳,۴/۵,۶,۷/۵,۹,۱۰/۵,۱۲,۱۳/۵)$ اعداد فازی شهودی دوزنقه‌ای هستند.
با استفاده از روش پیشنهادی، (۹) به مسئله برنامه‌ریزی خطی دوترازه قطعی (۱۰) تبدیل

می‌شود:

$$\max_{x_۱\in X_۱} ۷/۰۲۲۷۸۵x_۱ + ۲/۷۷۳۶۴۷x_۲$$
$$\text{s.t.} \max_{x_۲\in X_۲} ۵/۷۷۲۹۰۷x_۱ + ۴/۲۷۳۱۴۷x_۲ \tag{۱۰}$$
$$\text{s.t.} ۴/۰۲۳۲۰۴x_۱ + ۲/۳۹۸۸۷x_۲ \leq ۷/۵۲۲۷۴۷$$
$$۴/۱۴۸۱۷۵x_۱ + ۲/۷۷۳۶۴۷x_۲ \leq ۷/۰۲۲۷۸۵$$
$$۲/۲۷۳۹۶x_۱ + ۵/۰۲۳۰۰۹x_۲ \leq ۷/۷۷۲۷۳۱$$

با حل (۱۰)، $x_۱ = ۱/۶۹۲۹۸۲$، $x_۲ = ۰$، $Z = ۱۱/۸۸۹۴۵$ و $z = ۹/۷۷۳۴۲۷$ بدست می‌آید.

مثال ۳.۳. یک کارخانه تولیدی و بخش الف از آن را در نظر بگیرید. هیئت مدیره کارخانه می‌خواهد سود را بیشینه کند در حالیکه هیئت مدیره بخش الف می‌خواهد تولید را بیشینه کند. با توجه به تجربیات گذشته و مشورت با اعضا، پارامترهای مسئله به صورت عدد فازی شهودی ذوزنقه ای زیر بیان شده‌است:

$c = (۴, ۴/۴, ۵, ۵/۵, ۶, ۶/۲, ۶/۴, ۶/۸)$،

$d = (۱, ۱/۲, ۱/۴, ۱/۸, ۲, ۲/۵, ۳, ۳/۲)$،

$c' = (۲, ۲/۵, ۲/۷, ۳, ۳/۲, ۳/۵, ۳/۸, ۴)$،

$d' = (۵, ۵/۳, ۵/۵, ۵/۷, ۵/۹, ۶/۲, ۶/۴, ۶/۵)$،

$A_۱ = (۱/۵, ۲, ۲/۲, ۲/۵, ۲/۸, ۳, ۳/۲, ۳/۴)$،

$B_۱ = (۳, ۳/۱, ۳/۳, ۳/۵, ۳/۷, ۳/۹, ۴, ۴/۱)$،

$b_۱ = (۷, ۷/۴, ۷/۵, ۸, ۸/۲, ۸/۵, ۸/۷, ۹)$،

$A_۲ = (۲/۵, ۲/۷, ۳, ۴, ۴/۲, ۴/۴, ۴/۵, ۵)$،

$B_۲ = (۰/۵, ۰/۸, ۱/۱, ۱/۵, ۱/۸, ۲, ۲/۲, ۲/۵)$ و

$b_۲ = (۶, ۶/۱, ۶/۳, ۷, ۷/۲, ۷/۴, ۷/۶, ۷/۸)$.

در این مثال دو تصمیم‌گیرنده وجود دارد که در یک تراز نیستند. بنابراین یک مسئله برنامه‌ریزی دوترازه با پارامترهای فازی شهودی ذوزنقه‌ای خواهیم داشت که با استفاده از

روش پیشنهادی برای حل آن داریم:

$$\begin{aligned}
&\max_{x_1 \in X_1} 5.0052x_1 + 1.704334x_2 \\
&\qquad \text{s.t. } \max_{x_2 \in X_2} \ 2.602729x_1 + 5.328941x_2 \\
&\qquad \text{s.t. } 2.069045x_1 + 3.095802x_2 \leq 7.568783 \\
&\qquad 3.305153x_1 + 1.062070x_2 \leq 6.458694
\end{aligned} \tag{11}$$

با حل (۱۱)، $x_1 = 1.621298$، $x_2 = 1.03558$، $Z = 9.880221$ و $z = 9.739750$ بدست می‌آیند.

۲.۳ مسئله برنامه‌ریزی خطی دوترازه با پارامترهای فازی شهودی مثلثی

تعریف ۴.۳. با توجه به اینکه هر عدد فازی شهودی مثلثی حالت خاصی از عدد فازی شهودی ذوزنقه‌ای است که در آن $a_3 = a_4 = a_5 = a_6$، بنابراین نقطه مرکزی $(x_\mu(A), y_\mu(A))$ برای تابع عضویت و $(x_\nu(A), y_\nu(A))$ برای تابع عدم عضویت که توسط پراکاش و همکاران تعریف شده، برای اعداد فازی شهودی مثلثی به صورت زیر خواهند بود:

$$x_\mu(A) = \frac{a_2 + a_4 + a_5}{3} \tag{12}$$

$$y_\mu(A) = \frac{1}{3} \tag{13}$$

$$x_\nu(A) = \frac{2a_1 - a_3 + 2a_8}{3} \tag{14}$$

$$y_\nu(A) = \frac{2}{3} \tag{15}$$

بنابراین تابع رتبه‌بندی پراکاش و همکاران بر پایه متر اقلیدسی برای عدد فازی شهودی مثلثی A به صورت زیر بدست می‌آید:

$$R(A)=\sqrt{\frac{۱}{۲}([x_\mu(A)-y_\mu(A)]^۲+[x_\nu(A)-y_\nu(A)]^۲)}= \qquad (۱۶)$$

$$\sqrt{\frac{۱}{۶}([a_۲+a_۴+a_۵-۱]^۲+[۲a_۱-a_۳+۲a_۸-۲]^۲)}$$

اکنون مسئله برنامه‌ریزی خطی دوترازه (۷) را در نظر بگیرید که در آن

$c_i=(c_{i۱},c_{i۲},c_{i۳},c_{i۴},c_{i۵})\ \ i=۱,...,n$،

$d_i=(d_{i۱},d_{i۲},d_{i۳},d_{i۴},d_{i۵})\ \ i=۱,...,m$،

$c'_i=((c'_{i۱},c'_{i۲},c'_{i۳},c'_{i۴},c'_{i۵})\ \ i=۱,...,n$،

$d'_i=(d'_{i۱},d'_{i۲},d'_{i۳},d'_{i۴},d'_{i۵})\ \ i=۱,...,m$،

$A_{ij}=(A_{ij۱},A_{ij۲},A_{ij۳},A_{ij۴},A_{ij۵}),\ \ i=۱,۲,...,l,\ \ j=۱,۲,...,n$،

$B_{ij}=(B_{ij۱},B_{ij۲},B_{ij۳},B_{ij۴},B_{ij۵}),\ \ i=۱,۲,...,l,\ \ j=۱,۲,...,m$

و $b_i=(b_{i۱},b_{i۲},b_{i۳},b_{i۴},b_{i۵}),\ \ i=۱,۲,...,l,$ اعداد فازی شهودی مثلثی هستند. با استفاده از تعریف ۴.۳، به هر عدد فازی شهودی مثلثی یک عدد نسبت می‌دهیم. بنابراین مسئله (۷) به یک مسئله برنامه‌ریزی خطی دوترازه قطعی تبدیل می‌شود.

مثال ۵.۳. مسئله زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned}
&\max_{\mathbf{x}_۱\in X_۱}\ Z=\mathbf{c}^T\mathbf{x}_۱+\mathbf{d}^T\mathbf{x}_۲\\
&\quad s.t.\ \max_{\mathbf{x}_۲\ \in X_۲}\ z=\mathbf{c}'^T\mathbf{x}_۱+\mathbf{d}'^T\mathbf{x}_۲\\
&\quad s.t.\ \mathbf{A}_i^T\mathbf{x}_۱+\mathbf{B}_i^T\mathbf{x}_۲\le b_i\quad i=۱,۲,۳
\end{aligned}\qquad (۱۷)$$

که در آن $c=(۶,۶/۵,۷,۷/۲۵,۸)$، $d=(۳,۳/۵,۴,۵,۶)$، $c'=(۰/۵,۱/۵,۳,۴,۶)$، $d'=(۲,۳,۵,۶,۷)$، $A_۱=(۰/۲,۰/۴,۰/۵,۰/۷,۱)$، $B_۱=(۱,۱/۲۵,۱/۵,۲,۲/۵)$، $b_۱=(۲,۳,۴,۵,۶)$، $A_۲=(۰/۳,۰/۵,۱,۱/۵,۲)$، $B_۲=(۰/۵,۱,۱/۲۵,۲,۳)$، $b_۲=(۱,۲,۲/۵,۳,۴)$، $A_۳=(۲,۲/۵,۳/۵,۴,۵)$، $B_۳=(۳,۳/۲۵,۳/۷۵,۴,۴/۵)$ و

$b_{۳} = (۵, ۵/۵, ۶, ۶/۲۵, ۷)$ اعداد فازی شهودی مثلثی هستند.
با استفاده از روش پیشنهادی، مسئله (۱۷) به مسئله (۱۸) تبدیل می‌شود:

$$\begin{aligned} &\max_{x_۱ \in X_۱} ۶/۴۵۹۵۴۳x_۱ + ۳/۵۹۲۰۴۴x_۲ \\ &\quad \text{s.t.} \max_{x_۲ \in X_۲} ۲/۵۸۴۶۷۷x_۱ + ۴/۰۱۳۸۶۵x_۲ \\ &\quad \text{s.t.}\ ۰/۱۴۳۳۲۷x_۱ + ۱/۲۰۹۰۵۲x_۲ \leq ۳/۵۰۳۹۶۶ \\ &\quad ۰/۶۰۳۶۹۲x_۱ + ۱/۱۶۹۶۳۹x_۲ \leq ۲/۰۰۶۹۳۲ \\ &\quad ۲/۹۱۷۸۵۷x_۱ + ۳/۲۱۰۷۶۷x_۲ \leq ۵/۴۵۹۷۶۴ \end{aligned} \tag{۱۸}$$

با حل مسئله برنامه‌ریزی خطی دوترازه (۱۸)، $x_۱ = ۱/۸۷۱۱۵۵$، $x_۲ = ۰$، $Z = ۱۲/۰۸۶۸۱$ و $z = ۴/۸۳۶۳۳۲$ بدست می‌آیند.

۴ تحلیل مقایسه‌ای

تا کنون چند پژوهشگر بر روی مسئله برنامه‌ریزی خطی دوترازه در محیط فازی شهودی مطالعه کرده‌اند. به عنوان مثال ژائو [۴۷] و همکاران [۵۱] سه روش فازی شهودی تعاملی را برای توصیف مقاصد مختلف تصمیم‌گیرندگان در مسئله برنامه‌ریزی خطی چندترازه پیشنهاد کردند. آلسا [۴۸] [۲] رویکرد تعاملی برای حل مسئله برنامه‌ریزی خطی کسری دوترازه بیان کرد. شاچی و همکاران [۴۴] روش حلی برای مسئله برنامه‌ریزی دوترازه چندهدفه با ضرایب تکنولوژیکی و منابع اعداد فازی شهودی ارائه دادند. هانگ [۴۹] و همکاران [۲۶] برای حل مسئله برنامه‌ریزی چندترازه، مجموعه‌های فازی شهودی را به کار بردند.
یکی از روش‌های رایج برای حل مسائل بهینه‌سازی با پارامترهای غیر قطعی استفاده از توابع رتبه‌بندی است. به این صورت که با استفاده از توابع رتبه‌بندی به هر عدد غیر قطعی

[47] Zhao
[48] Alessa
[49] Haung

یک عدد قطعی نسبت می‌دهند، سپس مسئله را حل می‌کنند. سینگ [۵۰] و همکاران [۴۵] از تابع دقت برای حل مسئله برنامه‌ریزی دوترازه چند هدفه با پارامترهای فازی شهودی مثلثی استفاده کردند. همچنین بیسواس [۵۱] و دی [۵۲] [۱۴] ابتدا روشی را برای رتبه‌بندی اعداد فازی شهودی مثلثی ارائه کردند. سپس مسئله برنامه‌ریزی خطی دوترازه فازی شهودی با پارامترهای فازی مثلثی را با استفاده از رتبه‌بندی پیشنهادی حل کردند. در این مقاله دو مسئله برنامه‌ریزی خطی دوترازه با پارامترهای فازی شهودی ذوزنقه‌ای و پارامترهای فازی شهودی مثلثی را در نظر گرفتیم و با استفاده از تابع رتبه‌بندی برای هر حالت راه حلی ارائه کردیم.

۵ نتیجه گیری

در این مقاله دو نوع خاص از مسئله برنامه‌ریزی دوترازه را در نظر گرفتیم که همه پارامترهای آن اعداد فازی شهودی ذوزنقه‌ای یا اعداد فازی شهودی مثلثی بودند. سپس با استفاده از یک تابع رتبه‌بندی، الگوریتمی برای حل آن ارائه دادیم. مثال‌هایی برای نشان دادن کارایی روش پیشنهادی ارائه گردید.
به عنوان ایده‌هایی برای مطالعات دیگر، پژوهش بر روی مسائل برنامه‌ریزی دوترازه یا چندترازه با ابهام‌هایی از انواع دیگر فازی را پیشنهاد می‌کنیم.

مراجع

[1] Ahmad, F., (2021) Robust neutrosophic programming approach for solving intuitionistic fuzzy multiobjective optimization problems. Complex Intell Syst 7(4), 1–20.

[2] Alessa, N. A. (2021) Bi-Level linear programming of intuitionistic fuzzy. Soft Comput 25, 8635–8641.

[50] Singh
[51] Biswas
[52] De

[3] Ali, I., Gupta, S., Ahmed, A. (2019) Multi-objective linear fractional inventory problem under intuitionistic fuzzy environment. International Journal of System Assurance Engineering and Management, 10, 173–189.

[4] Angelov, P. P. (1997) Optimization in an intuitionistic fuzzy environment. Fuzzy Sets System, 86, 299–306.

[5] Atanassov, K. T. (2008) 25 years of intuitionistic fuzzy sets, or the most important results and mistakes of mine. in: 7 th International Workshop on Intuitionistic Fuzzy Sets and Generalized Nets, Warsaw.

[6] Atanassov, K. T. (1999) Intuitionistic Fuzzy Sets: Theory and Applications. Physica-Verlag, Heidelberg.

[7] Atanassov, K. T. (1986) Intutionistic fuzzy sets. Fuzzy Sets System, 20, 87–96.

[8] Atanassov, K. T., Pasi, G. R. Yager, R. (2005) Intuitionistic fuzzy interpretations of multi-criteria multi-person and multi-measurement tool decision making. International Journal of Systems Science, 36, 859–868.

[9] Bard, J. (1990) A branch and bound algorithm for the bilevel programming problem. SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing, 11, 281–292.

[10] Bard, J. (1988) Practical bilevel optimizaton: algorithms and applications. Kluver Academic Publishers, Netherlands.

[11] Basu, K., Mukherjee, S. (2012) Solution of a class of intuitionistic fuzzy assignment problem by using similarity measures. Knowledge-Base Systems, 27, 170-179.

[12] Bharati, S. K., Singh, S. R. (2015) A Note on Solving a Fully Intuitionistic Fuzzy Linear Programming Problem based on Sign Distance. International Journal of Computer Applications, 119, 30–35.

[13] Bialas, W., Karwan, M. (1984) Two level linear programming. Management Science, 30, 1004–1020.

[14] Biswas, A., De, AK., (2016) An efficient ranking technique for intuitionistic fuzzy numbers with its application in chance constrained bilevel programming, Adv Fuzzy Syst, 1, 1–12.

[15] Calvete, H. I., Gal, C., Mateo, M. (2008) A new approach for solving Linear bilevel programs using genetic algorithms. European Journal of Operational Research, 188, 14–28.

[16] Chutia, R. A. (2021) A novel method of ranking intuitionistic fuzzy numbers using value and θ multiple of ambiguity at flexibility parameters. Soft Computing, 25, 13297–13314.

[17] Dempe, S. (2002) Foundations of bilevel programming. Springer, Berlin.

[18] Dubey, D., Chandra, S., Mehra, A. (2012) Fuzzy linear programming under interval uncertainty based on IFS representation. Fuzzy sets and systems, 188, 98–78.

[19] Dubois, D., Prade, H. (1980) Fuzzy Sets and Systems. Academic Press, New York.

[20] Enginoğlu, S., Arslan, B. (2020) Intuitionistic fuzzy parameterized intuitionistic fuzzy soft matrices and their application in decision-making. Computational and Applied Mathematics, 39, 1–20.

[21] Fathy. E. (2022), A new method for solving the linear programming problem in an interval-valued intuitionistic fuzzy environment. Alexandria Engineering Journal, 61, 10419-10432.

[22] Grzegorzewski, P. (2003) Distance and orderings in a family of intuitionistic fuzzy numbers. In proceedings of the third conference on fuzzy logic and technology (EUSFLAT 03), 223–227.

[23] Gupta, S., Haq, A., Ali, I., Sarkar, B., (2021) Significance of multiobjective optimization in logistics problem for multi-product supply chain network under the intuitionistic fuzzy environment. Complex Intell Syst, 7(4), 2119–2139.

[24] Hansen, P., Jaumard, B., Savard, G. (1992) New branch and bound rules for linear bilevel programming. SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing, 13, 1194–1217.

[25] Hu, Y. T., Wang, G., Wan, Z. (2007) A penalty function method based on Kuhn-Tucker condition for solving linear bilevel programming. Applied mathematics and computation, 188, 808–813.

[26] Huang, C., Fnang, D., Wan, Z. (2015) An interactive intuitionistic fuzzy method for multilevel linear programming problems. Wuhan University Journal of Natural Sciences, 20, 113–118.

[27] Judice, J., Faustino, A. (1992) A sequential LCP method for bilevel linear programming. Annals of Operations Research, 34, 89–106.

[28] Kuo, R. J., Han, Y. S. (2011) A hybrid of genetic algorithm and particle swarm optimization for solving bi-level linear programming problem Acase study of supply chain model. Applied Mathematical Modelling, 35, 3905–3917.

[29] Li, D. F. (2010) A ratio ranking method of triangular intuitionistic fuzzy numbers and its applications to MADM problems. Computers and Mathmatics with Applications, 60, 1557-1570.

[30] Liu, Y., Li, W., Xu, X. l. (2008) Intuitionistic Fuzzy Bilevel programming by Particle Swarm Optimization. IEEE Pacific-Asia Workshop on Computational Intelligence and Industrial Application.

[31] Mahajan, S., Gupta, S. K. (2021) On fully intuitionistic fuzzy multiobjective transportation problems using different membership functions. Annals of Operations Research, 296, 211–241.

[32] Mahapatra, G., Mitra M., Roy, T. (2010) Intuitionistic fuzzy multiobjective mathematical programming on reliability optimization model. International Journal of Fuzzy Systems, 12, 259–266.

[33] Mitchell, H. B. (2004) Ranking - Intuitionistic Fuzzy numbers. International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems, 12, 377–386.

[34] Nagoorgani, A., Ponnalagu, K. (2012) A new approach on solving intuitionistic fuzzy linear programming problem. Applied Mathematical Sciences, 6, 3467–3474.

[35] Nagoorgani, A., Ponnalagu, K., (2013) An Approach to Solve Intuitionistic Fuzzy Linear Programming Problem Using Single Step Algorithm. International Journal of Pure and Applied Mathematics, 86, 819–832.

[36] Nehi, H. M. (2010) A new ranking method for intuitionistic fuzzy numbers. International Journal of Fuzzy Systems, 12, 80–86.

[37] Niu, L., Li, J., Li, F., Wang, Zh. (2020) Multi-criteria decision-making method with double risk parameters in interval-valued intuitionistic fuzzy environments. Complex and Intelligent Systems, 6, 669–679.

[38] Perez-Canedo, B., Concepcion-Morales E. R., (2019) On LR-type fully intuitionistic fuzzy linear programming with inequality constraints: Solutions with unique optimal values. Expert Systems with Applications, 128, 246–255.

[39] Plamen, P., Angelov, P. (1997) Optimization in an intuitionistic fuzzy environment. Fuzzy Sets and Systems, 80, 299–306.

[40] Prakash, K. A., Suresh, M., Vengataasalam, S. (2016) A new approach for ranking of intuitionistic fuzzy numbers using a centroid concept. Mathematical Sciences, 10, 177–184.

[41] Rezvani, S. (2013), Ranking method of trapezoidal intuitionistic fuzzy numbers. Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics, 10, 1–10.

[42] Roy, S. K., Midya, S. (2019) Multi-objective fixed-charge solid transportation problem with product blending under intuitionistic fuzzy environment. Applied Intelligence, 49, 3524–3538.

[43] Sahoo, D., Tripathy, A. K., Pati, J. K., (2022) Study on multi-objective linear fractional programming problem involving pentagonal intuitionistic fuzzy number. Results in Control and Optimization, 6 ,100091.

[44] Shashi, A., Chavi, G. (2013) Bi-Level Multi-Objective Linear Programming under Intuitionistic Fuzzy Environment. International Journal of Pure and Applied Sciences and Technology, 17, 45–61.

[45] Singh, V. P., Sharma, K., Chakraborty, D., Ebrahimnejad, A. (2022) A novel multi-objective bi-level programming problem under intuitionistic fuzzy environment and its application in production planning problem. Complex Intell. Syst, 8, 3263–3278.

[46] Stackelberg, H. V. (1952) Theory of the Market Economy. Oxford University Press, New York.

[47] Suresh, M., Vengataasalam, S., Arun Prakash, K. (2014) Solving intuitionistic fuzzy linear programming problems by ranking function. Journal of Intelligent and Fuzzy Systems , 27, 3081–3087.

[48] Wei, C. P., Tang, X. (2010) Possibility degree method for ranking intuitionistic fuzzy numbers. In the Proceed. Int. Confer. Web Intell. Intelligen Agent Technol.

[49] Yu, G. F., Li, D. F., (2022) A novel intuitionistic fuzzy goal programming method for heterogeneous MADM with application to regional green manufacturing level evaluation under multi-source information. Computers Industrial Engineering, 174, 108796.

[50] Zadeh, L. A. (1965), Fuzzy sets. Information and Control, 8, 338–353.

[51] Zhao, X., Zheng, Y., Wan, Zh. (2017) Interactive intuitionistic fuzzy methods for multilevel programming problems. Expert Systems with Applications, 72, 258–268.