سیستم های فازی و کاربردها
شاپای چاپی: ۲۷۱۷_۴۴۰۹
سال ششم، شماره دوم (پائیز و زمستان ۱۴۰۲)
شاپای الکترونیکی: ۲۷۱۷_۳۹۸۴
صص. ۲۱۵ تا ۲۳۵
DOI:10.22034/JFSA.2024.430619.1192

شمارش زیرگروه‌های فازی گروه شبه_دووجهی در حالت‌های خاص

لیلی کمالی اردکانی*
دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه اردکان، اردکان، ایران

تاریخ دریافت: ۱۴۰۲/۹/۲۳ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۳/۳/۲۱

نوع مقاله: علمی_پژوهشی

چکیده. یکی از مسائل مورد توجه در نظریه‌ی گروه‌های فازی، طبقه‌بندی و شمارش تعداد زیرگروه‌های فازی متمایز گروه‌های متناهی است. هدف اصلی این مقاله، شمارش زیرگروه‌های فازی متمایز گروه شبه_دووجهی از مرتبه‌ی $8n$ نسبت به رابطه‌ی هم‌ارزی طبیعی در دو حالت خاص $n = p^m$ و $n = pq$ است، جایی که p, q اعداد اول متمایز هستند. با توجه به اینکه تعداد زیرگروه‌های فازی متمایز گروه شبه_دووجهی نسبت به رابطه‌ی هم‌ارزی طبیعی برابر است با تعداد زنجیرها از زیرگروه‌های گروه شبه_دووجهی که به خودش ختم می‌شوند، ابتدا ساختار مشبکه‌ی زیرگروه‌های گروه شبه_دووجهی در این دو حالت خاص مورد مطالعه قرار می‌گیرد. سپس با استفاده از ساختار زیرگروه‌های بیشینه و اصل شمول_عدم شمول روابط بازگشتی حاصل می‌گردد که با حل آن‌ها تعداد دقیق زیرگروه‌های فازی گروه شبه_دووجهی در حالت‌های ذکر شده ارائه می‌شود. در انتها به کمک نتایج به دست آمده در مقاله، تعداد زیرگروه‌های فازی همه‌ی گروه‌های شبه_دووجهی از مرتبه‌ی کمتر از ۱۰۰ محاسبه می‌گردد.

۱. مقدمه

مفهوم مجموعه با ضابطه‌ی ناخوش‌تعریف برای اولین بار در سال ۱۹۶۵ توسط پرفسور زاده[1] مورد بحث قرار گرفت و وی آن را مجموعه‌ی فازی نامید [۱۹]. واژه‌ی فازی به معنی

2010 *Mathematics Subject Classification.* 20N25, 20E28
* Corresponding author
E-mails: l.kamali@ardakan.ac.ir.
عبارات و کلمات کلیدی. گروه شبه_دووجهی، زیرگروه فازی، زیرمجموعه‌ی تراز، رابطه‌ی هم‌ارزی.
[1]Zadeh

غیردقیق، ناواضح و مبهم است. نظریه‌ی مجموعه‌های فازی دارای کاربردهای فراوانی است که برای نمونه می‌توان به نقش موثر آن در صنعت اتومبیل‌سازی، طراحی برخی از ریزپردازنده‌ها، کاوش‌های معدن‌شناسان و حفاری‌های زمین، سنجش میزان پایداری و فرسایش زمین‌ها، کنترل سامانه‌های حمل و نقل شهری و ترافیک، اتوماسیون‌های صنعتی، ربات‌های هوشمند، دستگاه‌های تهویه و سیستم‌های کنترل دما و رطوبت اشاره نمود.

در سال ۱۹۷۱، روزنفیلد[۱] با تعریف زیرگروه فازی مفهوم زیرمجموعه‌ی فازی را به نظریه‌ی گروه‌ها گسترش داد. از آنجایی که گروه‌های فازی تعمیمی از مفهوم گروه هستند، بسیاری از نتایج نظریه‌ی گروه قابلیت گسترش به گروه‌های فازی را دارند اما واضح است که تمامی قضایای نظریه‌ی گروه در مورد گروه‌های فازی برقرار نیست که جزئیات آن در [۱۴] آمده است.

زیرمجموعه‌های تراز به عنوان ابزاری مفید و کارآمد، پل ارتباطی بین نظریه‌ی گروه فازی و کلاسیک هستند. به طور واضح‌تر در [۵]، داز[۲] ثابت کرد مجموعه‌ی تمام زیرمجموعه‌های تراز از یک زیرگروه فازی تشکیل زنجیر می‌دهند. سپس وی ثابت کرد زیرمجموعه‌ی فازی از گروه G، زیرگروه فازی است اگر و تنها اگر هر زیرمجموعه‌ی تراز ناتهی آن زیرگروه G باشد. این موضوع نشان‌دهنده‌ی ارتباط نزدیک و تنگاتنگ نظریه‌ی گروه‌های فازی و کلاسیک است، بدین صورت که جواب برخی از مسائل در نظریه‌ی گروه فازی مستلزم حل مسئله‌ای در نظریه‌ی گروه‌ها است.

بدون هیچ رابطه‌ی هم‌ارزی، تعداد زیرگروه‌های فازی هر گروه متناهی، حتی گروه تک عضوی بدیهی، نامتناهی است. بنابراین با استفاده از رابطه‌های هم‌ارزی بر روی مجموعه شامل تمام زیرگروه‌هاي فازي گروه G به رده‌بندی زیرگروه‌های فازی پرداخته می‌شود [۲۰]. این موضوع مورد توجه و استقبال تعداد زیادی از پژوهشگران قرار گرفت و برخی مقاله‌ها به مقایسه‌ی بین کلاس‌های هم‌ارزی حاصل از رابطه‌های هم‌ارزی متفاوت پرداخته‌اند [۲، ۳، ۷، ۸، ۱۰، ۱۲، ۱۳، ۱۸].

در [۱۱]، نویسندگان رابطه‌ی هم‌ارزی $\sim_M$ را بر روی مجموعه‌ی همه‌ی زیرگروه‌های فازی گروه G به صورت زیر تعریف نمودند: دو زیرگروه فازی μ و η از گروه G نسبت به رابطه‌ی $\sim_M$ هم‌ارز هستند اگر و تنها اگر برای هر $x, y \in G$، $\mu(x) > \mu(y) \iff \eta(x) > \eta(y)$ و $\mu(x) = ۰ \iff \eta(x) = ۰$. همچنین آن‌ها شرایط لازم و کافی برای این که زیرگروه‌های فازی توسط زیرمجموعه‌های ترازشان مشخص شوند را ارائه نمودند و سپس به رده‌بندی

[1] Rosenfeld
[2] Das

زیرگروه‌های فازی گروه‌های دوری نسبت به رابطه‌ی هم‌ارزی $\sim_M$ در برخی حالت‌های خاص پرداختند.

در [۱۸]، نویسندگان رابطه‌ی هم‌ارزی جدیدی برای رده‌بندی زیرگروه‌های فازی متناهی به نام رابطه‌ی هم‌ارزی طبیعی تعریف کردند که تعمیم‌دهنده‌ی رابطه‌ی هم‌ارزی $\sim_M$ است. رابطه‌ی هم‌ارزی طبیعی تاکنون برای شمارش زیرگروه‌های فازی برخی گروه‌ها از جمله گروه‌های دوری، pـ گروه‌های آبلی مقدماتی، گروه‌های ناآبلی از مرتبه‌ی $p^۳$، گروه‌های دووجهی و هامیلتونی به کار برده شده است [۱، ۴، ۶، ۹، ۱۶، ۱۷]. در این مقاله به شمارش زیرگروه‌های فازی گروه شبه‌ـ دووجهی نسبت به رابطه‌ی هم‌ارزی طبیعی در برخی از حالت‌های خاص پرداخته می‌شود.

۲. پیش‌نیازها

در این بخش، تعاریف و قضایای مورد نیاز در سرتاسر مقاله بیان می‌گردد.

تعریف ۱.۲. [۱۴] فرض کنید μ زیرمجموعه‌ی فازی گروه G است. μ را زیرگروه فازی G گویند در صورتی که برای هر $x, y \in G$ در دو شرط $\min\{\mu(x), \mu(y)\} \leq \mu(xy)$ و $\mu(x) \leq \mu\left(x^{-۱}\right)$ صدق کند.

با فرض آن که e عضو همانی گروه G است، روابط $\mu\left(x^{-۱}\right) = \mu(x)$ و $\mu(e) \geq \mu(x)$، برای هر $x \in G$، برقرار است. مجموعه‌ی همه‌ی زیرگروه‌های فازی گروه G با نماد $FL(G)$ نشان داده می‌شود که همراه با شمول مجموعه‌های فازی تشکیل مشبکه می‌دهد.

به ازای هر $t \in [۰, ۱]$، مجموعه‌ی $U(\mu, t) = \{x \in G \mid \mu(x) \geq t\}$ را زیرمجموعه‌ی تراز μ نامند [۱۹]. زیرمجموعه‌های تراز نقش به سزایی در تعیین زیرگروه‌های فازی دارند، بدین صورت که فرض کنید μ زیرگروه فازی از گروه G است بطوری که $Im(\mu) = \{t_۱, t_۲, \cdots, t_r\}$ و $t_۱ > t_۲ > \cdots > t_r$. از آنجایی که هر زیرمجوعه‌ی تراز، زیرگروه G است، با توجه به μ می‌توان زنجیر زیر از زیرگروه‌های G که به G ختم می‌شود را تعیین نمود [۵]:

$$U(\mu, t_۱) \subset U(\mu, t_۲) \subset \cdots \subset U(\mu, t_r) = G. \tag{۱.۲}$$

همان‌طور که گفته شد برای رده‌بندی زیرگروه‌های فازی گروه G نیاز به تعریف رابطه‌ی هم‌ارزی بر روی $FL(G)$ است که در این مقاله رابطه‌ی هم‌ارزی طبیعی $\sim$ تعریف شده در [۱۸] به کار برده می‌شود. فرض کنید μ و η دو زیرگروه فازی از G هستند، در این صورت

$\mu \sim \eta$ اگر و تنها اگر (برای هر $x, y \in G$، $\eta(x) > \eta(y) \iff \mu(x) > \mu(y)$).

دو زیرگروه فازی μ و η از G را متمایز گویند در صورتی که $\mu \nsim \eta$.

رابطه‌ی هم‌ارزی طبیعی ارتباط نزدیکی با مفهوم زیرمجموعه‌ی تراز دارد بدین صورت که دو زیرگروه فازی μ و η هم‌ارز نسبت به رابطه‌ی هم‌ارزی طبیعی هستند اگر و تنها اگر آن‌ها زنجیرهای یکسان از نوع (۱.۲) تعیین کنند [۱۸]. بنابراین رابطه‌ی دوسویی بین کلاس‌های هم‌ارزی از زیرگروه‌های فازی G و مجموعه‌ی زنجیرها از زیرگروه‌های G که به G ختم می‌شوند، وجود دارد. بطور دقیق‌تر برای شمارش زیرگروه‌های فازی متمایز گروه G نسبت به رابطه‌ی هم‌ارزی طبیعی کافی است تعداد زنجیرها از زیرگروه‌های G که به G ختم می‌شوند، محاسبه گردد.

در ادامه تعداد زیرگروه‌های فازی متمایز گروه G نسبت به رابطه‌ی هم‌ارزی طبیعی $\sim$ با نماد $F(G)$ نشان داده می‌شود. بزرگترین دسته از گروه ها که مسئله ي شمارش زیرگروهاي فازي نسبت به رابطه‌ی هم‌ارزی طبیعی $\sim$ براي آن ها بطور کامل حل شده است، گروه هاي دوري متناهي هستند.

قضیه ۲.۲. [۱۶] *فرض کنید G گروه دوری متناهی از مرتبه‌ی n است ($G \cong \mathbb{Z}_n$). اگر تجزیه‌ی n به حاصل‌ضرب عوامل اول به صورت $n = p_1^{m_1} p_2^{m_2} \ldots p_s^{m_s}$ باشد، آن‌گاه تعداد زیرگروه‌های فازی متمایز G نسبت به رابطه‌ی هم‌ارزی $\sim$ از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:*

$$F(\mathbb{Z}_n) = 2^{\sum_{\alpha=1}^{s} m_\alpha} \sum_{i_2=0}^{m_2} \sum_{i_3=0}^{m_3} \ldots \sum_{i_s=0}^{m_s} (-1/2)^{\sum_{\alpha=2}^{s} i_\alpha} \prod_{\alpha=2}^{s} \binom{m_\alpha}{i_\alpha} \binom{m_1 + \sum_{\beta=2}^{\alpha} (m_\beta - i_\beta)}{m_\alpha}.$$

برای $s = 1$، جمع‌های متوالی فوق برابر ۱ در نظر گرفته می‌شود.

بخصوص تعداد زیرگروه‌های فازی متمایز گروه دوری متناهی G از مرتبه‌ی $p^n q^m$ (که در آن p, q اعداد اول هستند) از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$F(G) = 2^{n+m} \sum_{r=0}^{m} (1/2^r) \binom{n}{r} \binom{m}{r},$$

جایی که برای $r > n$ حاصل $\binom{n}{r}$ برابر صفر در نظر گرفته می‌شود.

زیرگروه‌های مینیمال از $\mathbb{Z}_n$ نقش قابل توجهی در اثبات قضیه‌ی ۲.۲ دارند، اما در [۱۷] رابطه‌ی جدیدی مبتنی بر زیرگروه‌های بیشینه برای شمارش زیرگروه‌های فازی مجزا به صورت زیر ارائه شد.

قضیه ۳.۲. [۱۷] *فرض کنید $M_۱, M_۲, \dots, M_k$ زیرگروه‌های بیشینه از گروه G هستند. در این صورت مقدار $F(G)$ از تساوی زیر به دست می‌آید:*

$$F(G) = ۲\left(\sum_{i=۱}^{k} F(M_i) - \sum_{۱\leq i_۱ < i_۲ \leq k} F(M_{i_۱} \cap M_{i_۲}) + \cdots + (-۱)^{k-۱} F(\bigcap_{i=۱}^{k} M_i)\right).$$

با توجه به قضیه‌ی ۳.۲، اولین قدم برای محاسبه‌ی تعداد زیرگروه‌های فازی متمایز گروه G نسبت به رابطه‌ی هم‌ارزی طبیعی شناخت ساختار زیرگروه‌های بیشینه گروه G است. در [۴، ۶، ۱۷] با استفاده از قضیه‌ی ۳.۲ به محاسبه‌ی تعداد زیرگروه‌های فازی گروه‌های متناهی دووجهی و دودوری پرداخته شده است که نتایج حاصل در قضیه‌ی زیر آمده است.

قضیه ۴.۲. [۴] *تعداد زیرگروه‌های فازی متمایز نسبت به رابطه‌ی هم‌ارزی $\sim$ در*

(الف) *گروه دووجهی متناهی* $D_{۲n} =< x, y \mid x^n = y^۲ = e, y^{-۱}xy = x^{-۱} >$، *از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:*

$$F(D_{۲n}) = n - (۲n-۱)F(\mathbb{Z}_n) + \sum_{k|n} \frac{n}{k} F(\mathbb{Z}_{\frac{n}{k}})\,(k + F(\mathbb{Z}_k)).$$

(ب) *گروه دودوری متناهی* $T_{۴n} =< x, y \mid x^{۲n} = e, y^۲ = x^n, y^{-۱}xy = x^{-۱} >$، *که در آن* $n = ۲^k m$ *و* $(m, ۲) = ۱$، *از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:*

$$F(T_{۴n}) = F(D_{۲n}) + \sum_{d|m} F(\mathbb{Z}_d) F(D_{\frac{۲n}{d}}).$$

در این مقاله نیز با استفاده از قضیه‌ی ۳.۲ و مطالعه‌ی زیرگروه‌های بیشینه گروه شبه‌ـدووجهی $SD_{۸n}$، به محاسبه‌ی تعداد زیرگروه‌های فازی متمایز گروه $SD_{۸n}$ نسبت به رابطه‌ی هم‌ارزی طبیعی پرداخته می‌شود.

برای $n = ۱$، گروه $SD_۸$ یکریخت با $\mathbb{Z}_۴ \times \mathbb{Z}_۲$ است و $F(SD_۸) = F(\mathbb{Z}_۴ \times \mathbb{Z}_۲) = ۲۴$ [۹]. برای $n \geq ۲$، گروه $SD_{۸n}$ دارای نمایش $< a, b \mid a^{۴n} = b^۲ = e,\ bab = a^{۲n-۱} >$ است که با توجه به آن $a^i b = ba^{i(۲n-۱)}$، $o(a^{۲i}b) = ۲$ و $o(a^{۲i+۱}b) = ۴$. گروه $SD_{۸n}$ زبرحل‌پذیر بوده و در نتیجه هر زیرگروه بیشینه آن دارای شاخص اول است [۱۵]. زیرگروه‌های بیشینه از شاخص ۲ گروه $SD_{۸n}$ عبارتند از:

$$M_۱ =< a > \cong \mathbb{Z}_{۴n}, \quad M_۲ =< a^۲, b > \cong D_{۴n}, \quad M_۳ =< a^۲, ab > \cong T_{۴n}.$$

در بخش بعدی با توجه به ساختار زیرگروه‌های بیشینه گروه SD_{8n}، به محاسبه‌ی تعداد زیرگروه‌های فازی آن در برخی حالت‌های خاص پرداخته می‌شود. در جدول ۱ با در نظر گرفتن رابطه‌ی هم‌ارزی طبیعی، تعداد دقیق زیرگروه‌های فازی برخی از گروه‌ها که در بخش بعدی مورد نیاز خواهد بود، آمده است.

جدول ۱: تعداد زیرگروه‌های فازی متمایز برخی از گروه‌ها نسبت به رابطه‌ی هم‌ارزی طبیعی

گروه G	$F(G)$	مرجع
$\mathbb{Z}_{2^m}$	2^m	قضیه‌ی ۲.۲
$\mathbb{Z}_{2p^m}$	$2^m(m+2)$	
$\mathbb{Z}_{4p^m}$	$2^{m-1}(m^2+7m+8)$	
$\mathbb{Z}_{8p}$	۴۰	
$\mathbb{Z}_{2pq}$	۲۶	
$\mathbb{Z}_{4pq}$	۸۸	
$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$	۸	قضیه‌ی ۹ از [۱۶]
D_{2^m}	2^{2m-1}	قضیه‌ی ۴.۲
D_{4p}	$16p+20$	
D_{8p}	$96p+88$	
D_{4pq}	$64pq+36p+36q+76$	
T_{2^m}	4^{m-1}	قضیه‌ی ۴.۲
T_{4p}	$4p+12$	
T_{8p}	$32p+56$	
T_{4pq}	$12pq+12p+12q+52$	

۳. شمارش زیرگروه‌های فازی متمایز گروه شبه‌ـ‌دووجهی از مرتبه‌های $8p^m$ و $8pq$

در این بخش به شمارش زیرگروه‌های فازی متمایز گروه شبه‌ـ‌دووجهی SD_{8p^m} نسبت به رابطه‌ی هم‌ارزی طبیعی در دو حالت خاص $n=p^m$ و $n=pq$ پرداخته می‌شود، جایی که p, q اعداد اول متمایز هستند. سپس، به کمک نتایج به دست آمده تعداد زیرگروه‌های فازی گروه شبه‌ـ‌دووجهی از مرتبه‌ی کمتر از ۱۰۰ محاسبه شده و در جدولی ارائه می‌گردد.

۱.۳. شمارش زیرگروه‌های فازی متمایز گروه SD_{8p^m}. در فرآیند تعیین تعداد زیرگروه‌های فازی متمایز SD_{8p^m} نسبت به رابطه‌ی هم‌ارزی طبیعی، دو حالت p فرد و زوج را در نظر بگیرید.

۱.۱.۳. p عدد اول فرد است. فرض کنید $m=1$ و $W=<a^{2p}>\cong \mathbb{Z}_2$. لذا W زیرگروه نرمال SD_{8p} بوده و گروه خارج قسمتی $SD_{8p}/W=<a+W,b+W>$ یکریخت با D_{4p} است.

هر زنجیر از زیرگروه‌های SD_{8p} که به SD_{8p} ختم می‌شود به یکی از صورت‌های زیر است: در نوع اول، همه‌ی زیرگروه‌های زنجیر شامل W هستند. اگر تعداد زنجیرهای نوع اول با $|\mathcal{C}_1|$ نشان داده شود، آنگاه $|\mathcal{C}_1|$ برابر است با تعداد زنجیرها از زیرگروه‌های SD_{8p}/W که به SD_{8p}/W ختم می‌شوند. در نتیجه، $|\mathcal{C}_1|=F(SD_{8p}/W)=F(D_{4p})=16p+20$.

در نوع دوم حداقل یکی از زیرگروه‌های زنجیر شامل W نیست. بطور دقیق‌تر اگر مجموعه زنجیرهای نوع دوم با $\mathcal{C}_2$ نشان داده شود، آنگاه هر زنجیر در $\mathcal{C}_2$ به صورت زیر خواهد بود

$$\cdots\subset H\subset\cdots\subset SD_{8p},$$

که در آن

$$H\in\{e,<a^4>\cong\mathbb{Z}_p,<a^{2i}b>\cong\mathbb{Z}_2,<a^4,a^{2i}b>\cong D_{2p}\ \mid\ 0\leq i\leq 2p-1\}.$$

بدون از دست دادن کلیت، می‌توان فرض کرد که H در بین زیرگروه‌هایی زنجیر که شامل W نیستند، بیشینه است. در نتیجه هر زنجیر در $\mathcal{C}_2$ به یکی از صورت‌های زیر است:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{C}_{21}:\ \{e\}\subset\cdots\subset SD_{8p},\\
&\mathcal{C}_{22}:\ \cdots\subset<a^4>\subset\cdots\subset SD_{8p},\\
&\mathcal{C}_{23}:\ \cdots\subset<a^{2i}b>\subset\cdots\subset SD_{8p},\\
&\mathcal{C}_{24}:\ \cdots\subset<a^4,a^{2i}b>\subset\cdots\subset SD_{8p}.
\end{aligned}$$

اگر تعداد زنجیرها از نوع $\mathcal{C}_2$ و $\mathcal{C}_{2i}$، $1\leq i\leq 4$، به ترتیب با نمادهای $|\mathcal{C}_2|$ و $|\mathcal{C}_{2i}|$ نشان داده شود، آنگاه $|\mathcal{C}_2|=|\mathcal{C}_{21}|+|\mathcal{C}_{22}|+|\mathcal{C}_{23}|+|\mathcal{C}_{24}|$ که به صورت زیر محاسبه می‌گردد.

زنجیرهای دسته‌ی $\mathcal{C}_{21}$، با اضافه کردن $\{e\}$ به هر یک از زنجیرهای دسته‌ی $\mathcal{C}_1$ به دست می‌آیند و در نتیجه $|\mathcal{C}_{21}|=|\mathcal{C}_1|=F(D_{4p})=16p+20$.

برای تعیین $|\mathcal{C}_{22}|$، هشت زنجیر زیر که از زیرگروه $< a^4 >$ آغاز شده و به SD_{8p} ختم می‌شوند را در نظر بگیرید.

$$
\begin{array}{ll}
< a^4 >\subset SD_{8p}, & < a^4 >\subset< a >\subset SD_{8p},\\
< a^4 >\subset< a^2 >\subset SD_{8p}, & < a^4 >\subset< a^2 >\subset< a >\subset SD_{8p},\\
< a^4 >\subset< a^2, a^ib >\subset SD_{8p}, & < a^4 >\subset< a^2 >\subset< a^2, a^ib >\subset SD_{8p},
\end{array}
$$

که در آن $i = 0, 1$. با توجه به این که $F(< a^4 >) = F(\mathbb{Z}_p) = 2$، به دست می‌آید

$$|\mathcal{C}_{22}| = F(< a^4 >) \times 8 = 16.$$

تعداد زنجیرها از زیرگروه‌های SD_{8p} که عضو ابتدایی آن $H =< a^{2i}b >\cong \mathbb{Z}_2$، برای $0 \leq i \leq 2p-1$، بوده و به SD_{8p} ختم می‌شوند برابر ۶ است که عبارتند از:

$$
\begin{array}{ll}
H \subset SD_{8p}, & H \subset< a^{2p}, a^{2i}b >\subset SD_{8p},\\
H \subset< a^p, a^{2i}b >\subset SD_{8p}, & H \subset< a^{2p}, a^{2i}b >\subset< a^p, a^{2i}b >\subset SD_{8p},\\
H \subset< a^2, b >\subset SD_{8p}, & H \subset< a^{2p}, a^{2i}b >\subset< a^2, b >\subset SD_{8p}.
\end{array}
$$

در نتیجه، $|\mathcal{C}_{23}| = 6\left(2pF(< a^{2i}b >)\right) = 12pF(\mathbb{Z}_2) = 24p$.

حال گروه $H =< a^4, a^{2i}b >\cong D_{2p}$، که در آن $i = 0, 1$، را در نظر بگیرید. تنها دو زنجیر از زیرگروه‌های SD_{8p} وجود دارند که از $< a^4, a^{2i}b >\cong D_{2p}$ آغاز شده و به SD_{8p} ختم می‌شوند. این دو زنجیر عبارتند از $< a^4, a^{2i}b >\subset SD_{8p}$ و $< a^4, a^{2i}b >\subset< a^2, b >\subset SD_{8p}$. پس $|\mathcal{C}_{24}| = 2\left(2F(< a^4, a^{2i}b >)\right) = 4F(D_{2p}) = 8p + 16$.

بنابراین $|\mathcal{C}_2| = |\mathcal{C}_{21}| + |\mathcal{C}_{22}| + |\mathcal{C}_{23}| + |\mathcal{C}_{24}| = 48p + 52$ و در نتیجه

$$F(SD_{8p}) = |\mathcal{C}_1| + |\mathcal{C}_2| = 64p + 72.$$

همان‌طور که مشاهده می‌شود استفاده از روش فوق برای محاسبه‌ی $F(SD_{8p^m})$ در حالت کلی $m \geq 1$ دارای محاسبات پیچیده است و بنابراین در ادامه با استفاده از قضیه‌ی ۳.۲ به محاسبه‌ی $F(SD_{8p^m})$ پرداخته می‌شود. بدین منظور ابتدا ساختار زیرگروه‌های بیشینه گروه SD_{8p^m}، با فرض آن که $m \geq 1$ و p عدد اول فرد است، مورد مطالعه قرار می‌گیرد.

باتوجه به نمایش $SD_{8p^m} =< a, b \mid a^{4p^m} = b^2 = e,\ bab = a^{2p^{m-1}} >$، $p + 3$ زیرگروه بیشینه وجود دارند که عبارتند از M_1، M_2 و M_3 از شاخص ۲ و از شاخص

p، $G_i =< a^p, a^{۲i}b >\cong SD_{۸p^{m-۱}}$ جایی که $۰ \le i \le p-۱$. اعضای هر یک از زیرگروه‌های بیشینه به صورت زیر است:

$$
\begin{aligned}
M_۱ &=< a >= \{a^k \mid ۰ \le k \le ۴p^m - ۱\},\\
M_۲ &=< a^۲, b >= \{a^{۲k}, a^{۲k}b \mid ۰ \le k \le ۲p^m - ۱\},\\
M_۳ &=< a^۲, ab >= \{a^{۲k}, a^{۲k+۱}b \mid ۰ \le k \le ۲p^m - ۱\},\\
G_i &=< a^p, a^{۲i}b >= \{a^{pk}, a^{pk+۲i}b \mid ۰ \le k \le ۴p^{m-۱} - ۱\}.
\end{aligned}
$$

با فرض آن که $i_r \in \{۰, \cdots, p-۱\}$، اشتراک دلخواه از زیرگروه‌های بیشینه فوق به صورت زیر است:

$$
\begin{aligned}
&M_۱ \cap M_۲ = M_۱ \cap M_۳ = M_۲ \cap M_۳ = M_۱ \cap M_۲ \cap M_۳ =< a^۲ >\cong \mathbb{Z}_{۲p^m};\\
&M_۲ \cap G_i =< a^{۲p}, a^{۲i}b >\cong D_{۴p^{m-۱}},\ ۰ \le i \le p-۱;\\
&M_۳ \cap G_i =< a^{۲p}, a^{p+۲i}b >\cong T_{۴p^{m-۱}},\ ۰ \le i \le p-۱;\\
&M_۱ \cap M_۲ \cap G_{i_۱} \cap G_{i_۲} \cap \cdots G_{i_r} =< a^{۲p} >\cong \mathbb{Z}_{۲p^{m-۱}},\ ۱ \le r \le p;\\
&M_۱ \cap M_۳ \cap G_{i_۱} \cap G_{i_۲} \cap \cdots G_{i_r} =< a^{۲p} >\cong \mathbb{Z}_{۲p^{m-۱}},\ ۱ \le r \le p;\\
&M_۲ \cap M_۳ \cap G_{i_۱} \cap G_{i_۲} \cap \cdots G_{i_r} =< a^{۲p} >\cong \mathbb{Z}_{۲p^{m-۱}},\ ۱ \le r \le p;\\
&M_۱ \cap M_۲ \cap M_۳ \cap G_{i_۱} \cap G_{i_۲} \cap \cdots G_{i_r} =< a^{۲p} >\cong \mathbb{Z}_{۲p^{m-۱}},\ ۱ \le r \le p;\\
&M_۱ \cap G_{i_۱} \cap G_{i_۲} \cap \cdots G_{i_r} =< a^p >\cong \mathbb{Z}_{۴p^{m-۱}},\ ۱ \le r \le p;\\
&M_۲ \cap G_{i_۱} \cap G_{i_۲} \cap \cdots G_{i_r} =< a^{۲p} >\cong \mathbb{Z}_{۲p^{m-۱}},\ ۲ \le r \le p;\\
&M_۳ \cap G_{i_۱} \cap G_{i_۲} \cap \cdots G_{i_r} =< a^{۲p} >\cong \mathbb{Z}_{۲p^{m-۱}},\ ۲ \le r \le p;\\
&G_{i_۱} \cap G_{i_۲} \cap \cdots G_{i_r} =< a^p >\cong \mathbb{Z}_{۴p^{m-۱}},\ ۲ \le r \le p.
\end{aligned}
$$

بنابراین با توجه به قضیه‌ی ۳.۲،

$$\begin{aligned} F(SD_{8p^m}) = 2\Bigg(& F(\mathbb{Z}_{4p^m}) + F(D_{4p^m}) + F(T_{4p^m}) + pF(SD_{8p^{m-1}}) - 2F(\mathbb{Z}_{2p^m}) \\ & - pF(D_{4p^{m-1}}) - pF(T_{4p^{m-1}}) + \sum_{r=1}^{p}(-1)^r \binom{p}{r} F(\mathbb{Z}_{4p^{m-1}}) \\ & + \sum_{r=2}^{p}(-1)^{r-1}\binom{p}{r} F(\mathbb{Z}_{4p^{m-1}}) + 2\sum_{r=2}^{p}(-1)^r \binom{p}{r} F(\mathbb{Z}_{2p^{m-1}}) \\ & + 3\sum_{r=1}^{p}(-1)^{r-1}\binom{p}{r} F(\mathbb{Z}_{2p^{m-1}}) + \sum_{r=1}^{p}(-1)^r \binom{p}{r} F(\mathbb{Z}_{2p^{m-1}}) \Bigg) \\ = 2 \big(& F(\mathbb{Z}_{4p^m}) + F(D_{4p^m}) + F(T_{4p^m}) + pF(SD_{8p^{m-1}}) - 2F(\mathbb{Z}_{2p^m}) \\ & - pF(\mathbb{Z}_{4p^{m-1}}) - pF(D_{4p^{m-1}}) - pF(T_{4p^{m-1}}) + 2pF(\mathbb{Z}_{2p^{m-1}}) \big). \end{aligned}$$

با حل رابطه‌ی بازگشتی فوق به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} F(SD_{8p^m}) = {} & 2\left(F(\mathbb{Z}_{4p^m}) + F(D_{4p^m}) + F(T_{4p^m}) - 2F(\mathbb{Z}_{2p^m}) - 2^m p^m F(\mathbb{Z}_4)\right. \\ & \left. - 2^{m-1}p^m F(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2) + 2^m p^m F(\mathbb{Z}_2) + 2^{m-1}p^m F(\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2)\right) \\ & + \sum_{i=1}^{m-1} 2^i p^i \left(F(\mathbb{Z}_{4p^{m-i}}) + F(D_{4p^{m-i}}) + F(T_{4p^{m-i}}) - 2F(\mathbb{Z}_{2p^{m-i}})\right). \end{aligned}$$

حال با استفاده از جدول ۱، می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} F(SD_{8p^m}) = {} & 2F(\mathbb{Z}_{4p^m}) + 2F(D_{4p^m}) + 2F(T_{4p^m}) - 4F(\mathbb{Z}_{2p^m}) + 3 \times 2^{m+2}p^m \\ & + \sum_{i=1}^{m-1} 2^i p^i \left(F(\mathbb{Z}_{4p^{m-i}}) + F(D_{4p^{m-i}}) + F(T_{4p^{m-i}}) - 2F(\mathbb{Z}_{2p^{m-i}})\right). \end{aligned} \tag{1.3}$$

از رابطه‌ی فوق قضیه‌ی زیر حاصل می‌شود.

قضیه ۱.۳. *فرض کنید p عدد اول فرد است. در این صورت تعداد زیرگروه‌های فازی متمایز SD_{8p^m} نسبت به رابطه‌ی هم‌ارزی طبیعی $\sim$ از تساوی زیر به دست می‌آید:*

$$
\begin{aligned}
F(SD_{8p^m}) = {}& 2^m(m^2+3m+12p^m) \\
&+ 2^{m+1}\left((2m+8)\left(p^m+p^{m-1}+\cdots+p\right)+(4m+12)\right) \\
&+ \frac{2^{m-1}}{(p-1)^3}\Big((2m^2+14m-16)p^{m+3}-(4m^2+28m-48)p^{m+2} \\
&+ (2m^2+14m-58)p^{m+1}+24p^m-(m^2+7m+8)p^3 \\
&+ (2m^2+16m+24)p^2-(m^2+9m+14)p\Big).
\end{aligned}
$$

اثبات. با توجه به قضیه‌ی ۴.۲ روابط زیر برقرار است:

$$
\begin{aligned}
F(D_{4p^m}) ={}& \frac{2^m}{(p-1)^3}((2m+6)p^{m+3}-(4m+13)p^{m+2}+(2m+7)p^{m+1} \\
&+ (m+2)p^3-(4m+11)p^2+(5m+17)p-(2m+8)),
\end{aligned}
$$

و

$$
F(T_{4p^m}) = \frac{2^m}{(p-1)^2}((m+2)(p^2+2)-(3m+7)p+(2p-1)p^{m+1}).
$$

همچنین، با توجه به جدول ۱، تساوی‌های

$$
F(\mathbb{Z}_{4p^m}) = 2^{m-1}(m^2+7m+8) \quad \text{و} \quad F(\mathbb{Z}_{2p^m}) = 2^m(m+2)
$$

برقرار است. حال رابطه‌ی (۱.۳)، نتیجه می‌دهد:

$$
\begin{aligned}
F(SD_{8p^m}) = {}& 2^m(m^2+3m+12p^m)+2^{m+1}(4m+12) \\
&+ 2^{m+1}\left((2m+8)p^m+(2m+8)p^{m-1}+\cdots+(2m+8)p\right) \\
&+ \sum_{i=1}^{m-1} 2^{m-1}((m-i)^2+3(m-i))p^i \\
&+ \frac{2^{m-1}}{p-1}\sum_{i=1}^{m-1}(4(m-i)+16)p^{m+1}+(4(m-i)+8)p^{i+1} \\
&- \frac{2^{m-1}}{p-1}\sum_{i=1}^{m-1}(8(m-i)+24)p^i.
\end{aligned}
$$

با محاسبه‌ی مجموع سری‌های فوق، حکم مورد نظر به دست می‌آید. □

اگر در قضیه‌ی ۱.۳، $m = 1$ قرار داده شود، تعداد زیرگروه‌های فازی SD_{8p} برابر با $64p + 72$ به دست می‌آید که همان مقداری است که قبلا دیده شد.

۲.۱.۳. p عدد اول زوج است. فرض کنید $m \geq 4$. با جاگذاری 2^{m-3} به جای n در نمایش SD_{8n}، به دست می‌آید

$$SD_{2^m} =< a, b \mid a^{2^{m-1}} = b^2 = e,\ bab = a^{2^{m-2}-1} > .$$

گروه SD_{2^m} تنها دارای سه زیرگروه بیشینه است که عبارتند از $M_1 \cong \mathbb{Z}_{2^{m-1}}$، $M_2 \cong D_{2^{m-1}}$ و $M_3 \cong T_{2^{m-1}}$ [۱۵]. واضح است که

$$M_1 \cap M_2 = M_1 \cap M_3 = M_2 \cap M_3 = M_1 \cap M_2 \cap M_3 =< a^2 > \cong \mathbb{Z}_{2^{m-2}}.$$

بنابراین با توجه به قضیه‌ی ۳.۲،

$$F(SD_{2^m}) = 2\left(F(\mathbb{Z}_{2^{m-1}}) + F(D_{2^{m-1}}) + F(T_{2^{m-1}}) - 2F(\mathbb{Z}_{2^{m-2}})\right). \qquad (۲.۳)$$

بر اساس جدول ۱، $F(\mathbb{Z}_{2^{m-1}}) = 2^{m-1}$، $F(\mathbb{Z}_{2^{m-2}}) = 2^{m-2}$، $F(D_{2^{m-1}}) = 2^{2m-3}$ و $F(T_{2^{m-1}}) = 4^{m-2}$. در نتیجه با استفاده از رابطه‌ی (۲.۳) قضیه‌ی زیر به دست می‌آید.

قضیه ۲.۳. *تعداد زیرگروه‌های فازی متمایز SD_{2^m}، $m \geq 4$، نسبت به رابطه‌ی هم‌ارزی طبیعی $\sim$ برابر است با* $3 \cdot 2^{2m-3}$.

لازم به ذکر است که تعداد به دست آمده در قضیه‌ی ۲.۳ با مقدار محاسبه شده با استفاده از نرم‌افزار گپ[1] در [۱] برابر است.

۲.۳. شمارش زیرگروه‌های فازی متمایز گروه SD_{8pq}. در این قسمت به شمارش تعداد زیرگروه‌های فازی متمایز گروه SD_{8pq} نسبت به رابطه‌ی هم‌ارزی $\sim$ پرداخته می‌شود.

۱.۲.۳. p, q اعداد اول فرد مجزا هستند. فرض کنید $n = pq$، که در آن p و q اعداد اول فرد مجزا هستند. با توجه به نمایش SD_{8pq}، این گروه دارای $p + q + 3$ زیرگروه بیشینه است که عبارتند از M_1، M_2، M_3، $G_i =< a^p, a^{2i}b > \cong SD_{8q}$ و $H_j =< a^q, a^{2j}b > \cong SD_{8p}$، جایی که $0 \leq i \leq p-1$ و $0 \leq j \leq q-1$. اعضای

---
[1] GAP

هر یک از زیرگروه‌های بیشینه به صورت زیر است:

$$M_۱ =< a >= \{a^k \mid ۰ \leq k \leq ۴pq - ۱\},$$
$$M_۲ =< a^۲, b >= \{a^{۲k}, a^{۲k}b \mid ۰ \leq k \leq ۲pq - ۱\},$$
$$M_۳ =< a^۲, ab >= \{a^{۲k}, a^{۲k+۱}b \mid ۰ \leq k \leq ۲pq - ۱\},$$
$$G_i =< a^p, a^{۲i}b >= \{a^{pk}, a^{pk+۲i}b \mid ۰ \leq k \leq ۴q - ۱\},$$
$$H_j =< a^q, a^{۲j}b >= \{a^{qk}, a^{qk+۲j}b \mid ۰ \leq k \leq ۴p - ۱\}.$$

اشتراک زیرگروه‌های بیشینه فوق به صورت زیر هستند، که در آن $۱ \leq r \leq p$، $۱ \leq s \leq q$، $i_r \in \{۰, \cdots, p-۱\}$ و $j_s \in \{۰, \cdots, q-۱\}$، مگر آن که خلاف آن ذکر شده باشد.

$$M_۱ \cap M_۲ = M_۱ \cap M_۳ = M_۲ \cap M_۳ = M_۱ \cap M_۲ \cap M_۳ =< a^۲ >\cong \mathbb{Z}_{۲pq};$$
$$M_۲ \cap G_i =< a^{۲p}, a^{۲i}b >\cong D_{۴q},\ ۰ \leq i \leq p-۱;$$
$$M_۳ \cap G_i =< a^{۲p}, a^{p+۲i}b >\cong T_{۴q},\ ۰ \leq i \leq p-۱;$$
$$M_۲ \cap H_j =< a^{۲q}, a^{۲j}b >\cong D_{۴p},\ ۰ \leq j \leq q-۱;$$
$$M_۳ \cap H_j =< a^{۲q}, a^{q+۲j}b >\cong T_{۴p},\ ۰ \leq j \leq q-۱;$$
$$G_i \cap H_j \cong \mathbb{Z}_۴ \times \mathbb{Z}_۲,\ ۰ \leq i \leq p-۱,\ ۰ \leq j \leq q-۱;$$
$$G_{i_۱} \cap G_{i_۲} \cap \cdots \cap G_{i_r} =< a^p >\cong \mathbb{Z}_{۴q},\ ۲ \leq r \leq p;$$
$$H_{j_۱} \cap H_{j_۲} \cap \cdots \cap H_{j_s} =< a^q >\cong \mathbb{Z}_{۴p},\ ۲ \leq s \leq q;$$
$$M_۱ \cap G_{i_۱} \cap G_{i_۲} \cap \cdots \cap G_{i_r} =< a^p >\cong \mathbb{Z}_{۴q};$$
$$M_k \cap G_{i_۱} \cap G_{i_۲} \cap \cdots \cap G_{i_r} =< a^{۲p} >\cong \mathbb{Z}_{۲q},\ ۲ \leq r \leq p,\ k = ۲, ۳;$$
$$M_۱ \cap H_{j_۱} \cap H_{j_۲} \cap \cdots \cap H_{j_s} =< a^q >\cong \mathbb{Z}_{۴p};$$
$$M_k \cap H_{j_۱} \cap H_{j_۲} \cap \cdots \cap H_{j_s} =< a^{۲q} >\cong \mathbb{Z}_{۲p},\ ۲ \leq s \leq q,\ k = ۲, ۳;$$
$$M_k \cap M_l \cap G_{i_۱} \cap G_{i_۲} \cap \cdots \cap G_{i_r} =< a^{۲p} >\cong \mathbb{Z}_{۲q},\ k \neq l,\ ۱ \leq k, l \leq ۳;$$

$$M_k \cap M_l \cap H_{j_1} \cap H_{j_2} \cap \cdots \cap H_{j_s} =< a^{2q} >\cong \mathbb{Z}_{2p},\ k \neq l,\ 1 \leq k,l \leq 3;$$

$$M_1 \cap M_2 \cap M_3 \cap G_{i_1} \cap G_{i_2} \cap \cdots \cap G_{i_r} =< a^{2p} >\cong \mathbb{Z}_{2q};$$

$$M_1 \cap M_2 \cap M_3 \cap H_{j_1} \cap H_{j_2} \cap \cdots \cap H_{j_s} =< a^{2q} >\cong \mathbb{Z}_{2p};$$

$$G_{i_1} \cap \cdots \cap G_{i_r} \cap H_{j_1} \cap \cdots \cap H_{j_s} =< a^{pq} >\cong \mathbb{Z}_{4},\ rs \neq 1;$$

$$M_1 \cap G_{i_1} \cap \cdots \cap G_{i_r} \cap H_{j_1} \cap \cdots \cap H_{j_s} =< a^{pq} >\cong \mathbb{Z}_{4};$$

$$M_k \cap M_l \cap G_{i_1} \cap \cdots \cap G_{i_r} \cap H_{j_1} \cap \cdots \cap H_{j_s} =< a^{2pq} >\cong \mathbb{Z}_{2},$$
$$k \neq l,\ 1 \leq k,l \leq 3;$$

$$M_1 \cap M_2 \cap M_3 \cap G_{i_1} \cap \cdots \cap G_{i_r} \cap H_{j_1} \cap \cdots \cap H_{j_s} =< a^{2pq} >\cong \mathbb{Z}_{2};$$

$$M_k \cap G_{i_1} \cap \cdots \cap G_{i_r} \cap H_{j_1} \cap \cdots \cap H_{j_s} =< a^{2pq} >\cong \mathbb{Z}_{2},\ rs \neq 1,\ k = 2,3;$$

$$M_2 \cap G_i \cap H_j \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2,\ 0 \leq i \leq p-1,\ 0 \leq j \leq q-1;$$

$$M_3 \cap G_i \cap H_j \cong \mathbb{Z}_4,\ 0 \leq i \leq p-1,\ 0 \leq j \leq q-1.$$

در این صورت با توجه به قضیه‌ی ۳.۲ به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} F(SD_{8pq}) = 2\Bigg(& F(\mathbb{Z}_{4pq}) + F(D_{4pq}) + F(T_{4pq}) - 2F(\mathbb{Z}_{2pq}) \\ & - pqF(\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2) + 2pqF(\mathbb{Z}_4) + pF(SD_{8q}) \\ & - pF(D_{4q}) - pF(T_{4q}) + qF(SD_{8p}) - qF(D_{4p}) \\ & - qF(T_{4p}) + pqF(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2) - 2pqF(\mathbb{Z}_2) \\ & + \sum_{r=1}^{p} (-1)^r \binom{p}{r} (F(\mathbb{Z}_{4q}) - 2F(\mathbb{Z}_{2q})) \\ & + \sum_{s=1}^{q} (-1)^s \binom{q}{s} (F(\mathbb{Z}_{4p}) - 2F(\mathbb{Z}_{2p})) \\ & + \sum_{r=2}^{p} (-1)^r \binom{p}{r} (2F(\mathbb{Z}_{2q}) - F(\mathbb{Z}_{4q})) \\ & + \sum_{s=2}^{q} (-1)^s \binom{q}{s} (2F(\mathbb{Z}_{2p}) - F(\mathbb{Z}_{4p}))\Bigg). \end{aligned}$$

با حل رابطه‌ی بازگشتی فوق، تساوی زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned}F(SD_{8pq}) = 2\Bigg(& F(\mathbb{Z}_{4pq}) + F(D_{4pq}) + F(T_{4pq}) - 2F(\mathbb{Z}_{2pq}) \\ & - pqF(\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2) + 2pqF(\mathbb{Z}_4) + pF(SD_{8q}) \\ & - pF(D_{4q}) - pF(T_{4q}) - pF(\mathbb{Z}_{4q}) + 2pF(\mathbb{Z}_{2q}) \\ & + qF(SD_{8p}) - qF(D_{4p}) - qF(T_{4p}) - qF(\mathbb{Z}_{4p}) \\ & + 2qF(\mathbb{Z}_{2p}) + pqF(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2) - 2pqF(\mathbb{Z}_2)\Bigg).\end{aligned}$$

بنابراین با استفاده از رابطه‌ی فوق، قضیه‌ی ۱.۳ و جدول ۱، قضیه‌ی زیر برقرار است.

قضیه ۳.۳. *فرض کنید p, q اعداد اول فرد مجزا هستند. در این صورت تعداد زیرگروه‌های فازی متمایز SD_{8pq} نسبت به رابطه‌ی هم‌ارزی طبیعی $\sim$ برابر است با*

$$F(SD_{8pq}) = 304pq + 168p + 168q + 328.$$

۲.۲.۳. p عدد اول فرد و $q = 2$ است. گروه SD_{16p} با نمایش

$$< a, b \mid a^{8p} = b^2 = e,\ bab = a^{4p-1} >,$$

دارای $p+3$ زیرگروه بیشینه M_1، M_2، M_3 است و $G_i =< a^p, a^{2i}b >\cong SD_{16}$، جایی که $0 \leq i \leq p-1$. با فرض آن که $i_r \in \{1, \cdots, p\}$، اشتراک زیرگروه‌های بیشینه فوق عبارتند از:

$$M_1 \cap M_2 = M_1 \cap M_3 = M_2 \cap M_3 = M_1 \cap M_2 \cap M_3 =< a^2 >\cong \mathbb{Z}_{4p};$$

$$M_2 \cap G_i =< a^{2p}, a^{2i}b >\cong D_8,\ 0 \leq i \leq p-1;$$

$$M_3 \cap G_i =< a^{2p}, a^{p+2i}b >\cong T_8,\ 0 \leq i \leq p-1;$$

$$G_{i_1} \cap G_{i_2} \cap \cdots \cap G_{i_r} =< a^p >\cong \mathbb{Z}_8,\ 2 \leq r \leq p;$$

$$M_1 \cap G_{i_1} \cap G_{i_2} \cap \cdots \cap G_{i_r} =< a^p >\cong \mathbb{Z}_8,\ 1 \leq r \leq p;$$

$$M_k \cap G_{i_1} \cap G_{i_2} \cap \cdots \cap G_{i_r} =< a^{2p} >\cong \mathbb{Z}_4,\ 2 \leq r \leq p,\ k = 2, 3;$$

$$M_k \cap M_l \cap G_{i_1} \cap G_{i_2} \cap \cdots \cap G_{i_r} =< a^{2p} >\cong \mathbb{Z}_4,\ 1 \leq r \leq p,\ k \neq l,\ 1 \leq k, l \leq 3;$$

$$M_1 \cap M_2 \cap M_3 \cap G_{i_1} \cap G_{i_2} \cap \cdots \cap G_{i_r} =< a^{2p} >\cong \mathbb{Z}_4,\ 1 \leq r \leq p;$$

بنابراین باتوجه به قضیه‌ی ۳.۲، به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} F(SD_{16p}) = 2\Bigg(& F(\mathbb{Z}_{8p}) + F(D_{8p}) + F(T_{8p}) - 2F(\mathbb{Z}_{4p}) \\ & - pF(D_8) - pF(T_8) + pF(SD_{16}) \\ & + \sum_{r=1}^{p} (-1)^r \binom{p}{r} (F(\mathbb{Z}_8) - 2F(\mathbb{Z}_4)) \\ & + \sum_{r=2}^{p} (-1)^r \binom{p}{r} (2F(\mathbb{Z}_4) - F(\mathbb{Z}_8)) \Bigg). \end{aligned}$$

پس

$$\begin{aligned} F(SD_{16p}) = 2\Bigg(& F(\mathbb{Z}_{8p}) + F(D_{8p}) + F(T_{8p}) - 2F(\mathbb{Z}_{4p}) - pF(D_8) \\ & - pF(T_8) + pF(SD_{16}) - pF(\mathbb{Z}_8) + 2pF(\mathbb{Z}_4) \Bigg). \end{aligned}$$

با بکارگیری جدول ۱ و قضیه‌ی ۲.۳ در رابطه‌ی فوق، قضیه‌ی زیر حاصل می‌شود.

قضیه ۴.۳. *فرض کنید p عدد اول فرد است. در این صورت تعداد زیرگروه‌های فازی متمایز SD_{16p} نسبت به رابطه‌ی هم‌ارزی طبیعی $\sim$ برابر با $352p + 304$ است.*

۳.۳. شمارش زیرگروه‌های فازی گروه شبه‌ـ دووجهی از مرتبه‌ی کمتر از ۱۰۰. هدف از این قسمت شمارش زیرگروه‌های فازی گروه شبه‌ـ دووجهی از مرتبه‌ی کمتر از ۱۰۰ است که با استفاده از قضایای به دست آمده محاسبه‌ی تعداد زیرگروه‌های فازی تمامی آن‌ها به جز

SD_{96} به راحتی امکان‌پذیر است. بنابراین در ادامه به محاسبه‌ی تعداد زیرگروه‌های فازی گروه شبه‌ـ دووجهی SD_{96} نسبت به رابطه‌ی هم‌ارزی طبیعی پرداخته می‌شود.

گروه شبه‌ـ دووجهی SD_{96} با نمایش $< a, b \mid a^{48} = b^{2} = e,\ bab = a^{23} >$ دارای شش زیرگروه بیشینه از شاخص‌های ۲ و ۳ است که عبارتند از

$$M_1 =< a >\cong \mathbb{Z}_{48},\ M_2 =< a^2, b >\cong D_{48},\ M_3 =< a^2, ab >\cong T_{48}$$

و $G_i =< a^3, a^{2i}b >\cong SD_{32}$، جایی که $0 \leq i \leq 2$.

با فرض آن که $i \in \{0, 1, 2\}$، اشتراک دلخواه از زیرگروه‌های بیشینه فوق به صورت زیر است:

$$M_1 \cap M_2 = M_1 \cap M_3 = M_2 \cap M_3 = M_1 \cap M_2 \cap M_3 =< a^2 >\cong \mathbb{Z}_{24};$$
$$M_1 \cap G_i =< a^3 >\cong \mathbb{Z}_{16};$$
$$M_2 \cap G_i =< a^6, a^{2i}b >\cong D_{16};$$
$$M_3 \cap G_i =< a^6, a^{3+2i}b >\cong T_{16};$$
$$G_i \cap G_j =< a^3 >\cong \mathbb{Z}_{16}, 0 \leq j \leq 2,\ i \neq j;$$
$$M_1 \cap G_i \cap G_j =< a^3 >\cong \mathbb{Z}_{16}, 0 \leq j \leq 2,\ i \neq j;$$
$$G_0 \cap G_1 \cap G_2 = M_1 \cap G_0 \cap G_1 \cap G_2 =< a^3 >\cong \mathbb{Z}_{16};$$

سایر اشتراک‌های باقی‌مانده از زیرگره‌های بیشینه برابر با گروه $< a^6 >$ یکریخت با $\mathbb{Z}_8$ است.
حال با توجه به قضیه‌ی ۳.۲، به دست می‌آید:

$$F(SD_{96}) = 2\Big(F(\mathbb{Z}_{48}) + F(D_{48}) + F(T_{48}) + 3F(SD_{32}) - 2F(\mathbb{Z}_{24})$$
$$- 3F(D_{16}) - 3F(T_{16}) - 3F(\mathbb{Z}_{16}) + 6F(\mathbb{Z}_8)\Big) \tag{۳.۳}$$

با استفاده از قضیه‌ی ۲.۳، $F(SD_{32}) = 3 \times 2^7 = 384$ و با توجه به جدول ۱ به دست می‌آید:

$$F(D_{16}) = 128,\ F(T_{16}) = 64,\ F(\mathbb{Z}_{24}) = 40, F(\mathbb{Z}_{16}) = 16, F(\mathbb{Z}_8) = 8.$$

حال با به کارگیری قضیه‌های ۲.۲ و ۴.۲ و جدول ۱ روابط زیر حاصل می‌شود:

$$F(\mathbb{Z}_{48}) = 2^4 \sum_{r=0}^{1} \frac{1}{2^r}\binom{3}{r}\binom{1}{r} = 96,$$

$$F(D_{48}) = 24 - 47F(\mathbb{Z}_{24}) + \sum_{k|24} \frac{24}{k} F(\mathbb{Z}_{\frac{24}{k}})\left(k + F(\mathbb{Z}_k)\right) = 1904,$$

$$F(T_{48}) = F(D_{24}) + \sum_{d|3} F(\mathbb{Z}_d)F(D_{\frac{24}{d}}) = 816.$$

با جاگذاری مقادیر به دست آمده در رابطه‌ی (۳.۳)، تعداد زیرگروه‌های فازی گروه SD_{96} حاصل می‌شود که برابر با ۶۶۲۴ است.

حال تعداد زیرگروه‌های فازی هر گروه شبه‌ـدووجهی از مرتبه‌ی کمتراز ۱۰۰ نسبت به رابطه‌ی هم‌ارزی طبیعی قابل محاسبه است که در جدول ۲ آمده است.

جدول ۲: تعداد زیرگروه‌های فازی گروه شبه‌ـدووجهی از مرتبه‌ی کمتر از ۱۰۰ نسبت به رابطه‌ی هم‌ارزی طبیعی

n	گروه G	$F(G)$	مرجع
۱	SD_8	۲۴	$F(SD_8) = F(\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2) = 24$ (مرجع [۹])
۲	SD_{16}	۹۶	با قرار دادن $m = 4$ در $3 \cdot 2^{2m-3}$ (قضیه‌ی ۲.۳)
۳	SD_{24}	۲۶۴	با قرار دادن $p = 3$ در $64p + 72$ (قضیه‌ی ۱.۳)
۴	SD_{32}	۳۸۴	با قرار دادن $m = 5$ در $3 \cdot 2^{2m-3}$ (قضیه‌ی ۲.۳)
۵	SD_{40}	۳۹۲	با قرار دادن $p = 5$ در $64p + 72$ (قضیه‌ی ۱.۳)
۶	SD_{48}	۱۳۶۰	با قرار دادن $p = 3$ در $352p + 304$ (قضیه‌ی ۴.۳)
۷	SD_{56}	۵۲۰	با قرار دادن $p = 7$ در $64p + 72$ (قضیه‌ی ۱.۳)
۸	SD_{64}	۱۵۳۶	با قرار دادن $m = 6$ در $3 \cdot 2^{2m-3}$ (قضیه‌ی ۲.۳)
۹	SD_{72}	۲۳۶۰	با قرار دادن $p = 3$ در $184p^2 + 168p + 200$ (قضیه‌ی ۱.۳)
۱۰	SD_{80}	۲۰۶۴	با قرار دادن $p = 5$ در $352p + 304$ (قضیه‌ی ۴.۳)
۱۱	SD_{88}	۷۷۶	با قرار دادن $p = 11$ در $64p + 72$ (قضیه‌ی ۱.۳)
۱۲	SD_{96}	۶۶۲۴	زیربخش ۳.۳

۴. نتیجه‌گیری

در این مقاله به شمارش زیرگروه‌های فازی متمایز گروه شبه‌ـ دووجهی SD_{8n} نسبت به رابطه‌ی هم ارزی طبیعی در دو حالت خاص $8p^m$ و pq پرداخته شده است. بدین منظور، ابتدا مشبکه‌ی زیرگروهی و ساختار زیرگروه‌های بیشینه گروه شبه‌ـ دووجهی در حالت‌های ذکر شده مورد مطالعه قرار گرفته است. با بکارگیری از اصل شمول‌ـ عدم شمول فرمول‌های بازگشتی برای شمارش زیرگروه‌های فازی حاصل شده است و سپس با استفاده از تعداد زیرگروه‌های فازی گروه‌های دوری، دووجهی و دودوری به حل فرمول‌های بازگشتی پرداخته شده است. بدین ترتیب رابطه‌ی صریحی برای تعیین تعداد زیرگروه‌های فازی متمایز گروه‌های شبه‌ـ دووجهی از مرتبه‌های $8p^m$ و $8pq$ به دست آمده است که در جدول ۳ ارائه شده است. در نهایت باتوجه به نتایج به دست آمده تعداد زیرگروه‌های فازی تمام گروه‌های شبه‌ـ دووجهی از مرتبه‌ی کمتر از ۱۰۰ محاسبه شده و در جدول ۲ ارائه شده است.

جدول ۳: تعداد زیرگروه‌های فازی گروه شبه‌ـ دووجهی نسبت به رابطه‌ی هم‌ارزی طبیعی در برخی حالت‌های خاص

گروه G	$F(G)$	مرجع
SD_{8p}	$64p+72$	قضیه‌ی ۱.۳
SD_{8p^2}	$184p^2+168p+200$	
SD_{8p^3}	$496p^3+464p^2+424p+528$	
$SD_{2^m},\ (m\geq 4)$	$3\cdot 2^{2m-3}$	قضیه‌ی ۲.۳
SD_{8pq}	$304pq+168p+168q+328$	قضیه‌ی ۳.۳
SD_{16p}	$352p+304$	قضیه‌ی ۴.۳

اگر تجزیه‌ی n به حاصل‌ضرب عوامل اول به صورت $n=2^{m_0}p_1^{m_1}p_2^{m_2}\ldots p_s^{m_s}$ باشد، آن‌گاه در این مقاله به محاسبه‌ی تعداد زیرگروه‌های فازی متمایز SD_{8n} نسبت به رابطه‌ی هم‌ارزی $\sim$ تنها در حالت‌های $n=2^{m_0}$، $n=p_1^{m_1}$، $n=2p_1$ و $n=p_1p_2$ پرداخته شده است. محاسبه‌ی تعداد زیرگروه‌های فازی در سایر حالت‌های باقی‌مانده می‌تواند موضوع تحقیقات آینده باشد. همچنین در پژوهش‌های آتی با محاسبه‌ی تعداد زنجیرها از زیرگروه‌های نرمال

SD_{8n} که به SD_{8n} ختم می‌شوند می‌توان تعداد زیرگروه‌های فازی نرمال گروه شبه‌ـ دووجهی را محاسبه نمود.

مراجع

[1] Abdulhakeem, O. and Adamu, S.B. (2017) On the number of distinct fuzzy subgroups for some elementary Abelian groups and quaternion groups. Int. J. Fuzzy Math. Arch., 13(1), 17-23.

[2] Adebisi, S.A., Ogiugo, M. and EniOluwafe, M. (2020) The fuzzy subgroups for the abelian structure $\mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_{2^n}$, $n > 2$. J. Nigerian Math. Soc., 39(2), 167-171.

[3] Bejines, C., Chasco, M.J., Elorza, J. and Montes, S. (2017) On the preservation of an equivalence relation between fuzzy subgroups. Advanc. Fuzzy Logic Techno., 641, 159-167.

[4] Darabi, H., Saeedi, F. and Farrokhi D.G., M. (2013) The number of fuzzy subgroups of some non-abelian groups. Iran. J. Fuzzy Syst., 10(6), 101-107.

[5] Das, P.S. (1981) Fuzzy groups and level subgroups. J. Math. Anal. Appl., 84, 264-269.

[6] Davvaz, B. and Kamali Ardekani, L. (2013) Classifying fuzzy subgroups of dicyclic groups. J. Mult.-Valued Logic Soft Comput., 20(5-6), 507-525.

[7] Iranmanesh, A. and Naraghi, H. (2011) The connection between some equivalence relations on fuzzy subgroups. Iran. J. Fuzzy Syst., 8(5), 69–80.

[8] Jain, A. (2006) Fuzzy subgroups and certain equivalence relations. Iran. J. Fuzzy Syst., 3(2), 75–91.

[9] Kamali Ardekani, L. and Davvaz, B. (2017) Classifying fuzzy (normal) subgroups of the group $D_{2p} \times \mathbb{Z}_q$ and finite groups of order $n \leq 20$. J. Intell. Fuzzy Syst., 33, 3615-3627.

[10] Kamali Ardekani, L. and Davvaz, B. (2020) Classifying and counting fuzzy normal subgroups by a new equivalence relation. Fuzzy Sets Syst., 382(1), 148-157.

[11] Murali, V. and Makamba, B.B. (2001) On an equivalence of fuzzy subgroups, I. Fuzzy Sets Syst., 123(2), 259-264.

[12] Ogunfolu, O.B. (2023) On the number of subgroups and distinct fuzzy subgroups of a group defined by a presentation. Ann. Fuzzy Math. Inform., 26(2), 189-198.

[13] Oh, J.M., Hwang, K.W. and Sim, I. (2020) On the number of fuzzy subgroups of $\mathbb{Z}_{p^m} \times \mathbb{Z}_{p^n} \times \mathbb{Z}_{p^\ell}$. J. Appl. Math. Inform., 40(5-6), 1181-1198.

[14] Rosenfeld, A. (1971) Fuzzy groups. J. Math. Anal. Appl., 35, 512-517.

[15] Shelash, H.B. and Ashrafi, A.R. (2019) Computing maximal and minimal subgroups with respect to a given property in certain finite groups. Quasigroups Related Syst., 27, 133-146.

[16] Tărnăuceanu, M. and Bentea, L. (2008) On the number of fuzzy subgroups of finite abelian groups. Fuzzy Sets Syst., 159(9), 1084-1096.

[17] Tărnăuceanu, M. (2012) Classifying fuzzy subgroups of finite nonabelian groups. Iran. J. Fuzzy Syst., 9(4), 31-41.

[18] Volf, A.C. (2004) Counting fuzzy subgroups and chains of subgroups. Iaši Ser. Fuzzy Syst. Artif. Intell., 10, 191-200.

[19] Zadeh, L.A. (1965) Fuzzy sets. Inform. and Control, 8, 338-353.

[20] Zhang, Y. and Zou, K. (1998) A note on an equivalence relation on fuzzy subgroups. Fuzzy Sets Syst., 95(2), 243-247.