

اندازه فاصله و شباهتی نوین برای مجموعه های فازی شهودی بازه ای-مقدار

غلام حسن شیردل، مدینه فرنام و مجید دره میرکی

گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم، قم، ایران
گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم، قم، ایران
گروه ریاضی و آمار، دانشگاه صنعتی خاتم الانبیاء بهبهان

تاریخ دریافت: ۱۴۰۲/۱۱/۸

تاریخ پذیرش: ۱۴۰۳/۳/۲۱

نوع مقاله: علمی-پژوهشی

چکیده. اندازه فاصله، اندازه شباهت و اندازه آنتروپی دستاوردهای مفیدی در اختیار تصمیم گیرندگان تصمیم گیری در مورد مسائلی با داده های غیرقطعی قرار می دهد. تمرکز اصلی این پژوهش بر معرفی یک اندازه جدید برای اعداد فازی شهودی بازه ای-مقدار است. بسیاری از اندازه های تعریف شده دارای نواقصی همچون جامع نبودن، حجم بالای محاسبات و کاربرد در موارد محدود هستند. از این رو هدف اصلی این پژوهش معرفی یک اندازه فاصله و شباهت با رویکردی نوین و کاهش یافته برای اعداد فازی شهودی بازه ای مقدار می باشد. پس از ارائه ساختار و شاخص های موثر در اندازه پیشنهادی، مشاهده می شود که در اندازه فاصله تعریف شده حجم محاسبات به وضوح کاهش یافته است. علاوه بر این، اثبات برقراری خواص اندازه برای آن، به درستی نشان داده شده است. ساختار اندازه ارائه شده قابلیت ترکیب با فرآیند مربوط به مسائل تصمیم گیری چندمعیاره و تشخیص پزشکی را دارد. برای این منظور ضمن ارائه الگوریتم هایی ترکیبی، با ذکر چندین مثال مطرح کاربردهایی کارا از آن آورده شده است.

۱. مقدمه

در بسیاری از مسائل دنیای پیرامون ما، اطلاعات ناقص و نادقیق بخشی جدا نشدنی از مسئله اصلی است. از این رو تعصب و تداوم استدلال برای پاسخ دهی به آنها بدون ابزارهای تکامل یافته و سازگار می تواند منجر به استدلال نادرست شود. در روش های کلاسیک تجزیه و تحلیل تنها منطبق بر تکنیک های عددی است، در حالی که فهم و دانش بشری در اعماق بینش خود، بیشتر بر دریافت اطلاعاتی غیر از اعداد دقیق تمرکز دارد. برای تطابق سازنده بین فهم و الگوهای حل، تئوری مجموعه فازی (FS) [۳۹] توسط زاده به عنوان ابزاری کارآمد برای رفع نوعی از ابهام و عدم قطعیت، به کار گرفته شده است. کاربردهای فراوانی از این موضوع در زمینه های مختلف مدیریتی، اقتصادی، صنعتی و مهندسی آشکار شده است. مهم ترین شاخص و ویژگی در هر مجموعه فازی، تخصیص مقداری به نام درجه عضویت به هر یک از عناصر مجموعه است. در دهه های اخیر، توسعه هایی نظری و کاربردی گوناگونی از روی مجموعه های فازی اولیه ارائه شده اند. یکی از پر اهمیت ترین این نوع از تعمیم های مطرح برای مجموعه فازی، مجموعه فازی شهودی (IFS) است که توسط آتاناسوف (۱۹۸۶) [۴] عرضه شد. عناصر این نوع از مجموعه ها، با مشخصه های درجه تعلق، درجه عدم تعلق و درجه تردید شناسایی می شوند. آتاناسوف و گارگوف [۵] این موضوع را به مفهوم مجموعه های فازی شهودی بازه ای مقدار (IVIFS) تعمیم دادند، جایی که درجه عضویت و درجه غیر عضویت به عنوان اعداد بازه ای ارائه می شود. با گسترش عملگرهای مربوط به این نوع از اعداد و به دلیل تنوع مناسب شاخص ها در این نوع از مجموعه ها و بازه ای بودن آنها، پژوهشگران بسیاری، مسائل پیرامون این گسترش را بررسی کرده اند و به نتایجی معنادار رسیده اند [۶، ۲۶].

یکی از اولین موضوعات بحث برانگیز در بین اعداد فازی نحوه مقایسه، رتبه بندی و تعیین مقدار فاصله و میزان تشابه آنها است. به عنوان نمونه، رجب زاده و همکاران [۲۹] با طراحی یک سیستم خبره فازی به منظور انتخاب سرمایه گذاری صنعتی مناسب و اولویت بندی پروژه ها از یک روش رتبه بندی مبتنی بر مرکز ثقل در محیط فازی بهره بردند تا بتوانند خطرات ناشی از انتخاب نامطلوب را کاهش دهند. به طور کلی تئوری اندازه ها، با معرفی معیارهایی متنوع برای اندازه ها، امکان مقایسه اطلاعات موجود در مجموعه های فازی، فازی شهودی و فازی شهودی بازه ای مقدار را فراهم کرده است. اندازه های فاصله، تشابه و آنتروپی به عنوان ابزار کارآمدی در فرآیند حل کاربردهای بسیاری مسائل تصمیم گیری، تشخیص پزشکی، شناسایی الگو، یادگیری ماشین، و پردازش تصویر شناخته می شوند.

بوران و آکای (۲۰۱۴) [۸] نوع جدیدی از اندازه شباهت IFS را ابداع کردند که شامل دو پارامتر است. معیار تشابه بین مجموعه های فازی شهودی با ساختاری شهودی توسط لی و دنگ (۲۰۱۲) [۲۳] تعریف شد. علاوه بر این ارتباط بین آنترویی و معیار تشابه IFS به طور کامل در مطالعه فوق مورد بررسی قرار گرفت. آنچه به نظر می رسد این است که معیار تشابه و آنترویی می توانند با استفاده از تعاریفی بدیهی به یکدیگر تبدیل شوند. گارگ و رانی (۲۰۲۱) [۱۴] معیار شباهت جدیدی را بر اساس مثلث های قائم الزاویه اصلاح شده در بین IFS ها طراحی کردند.

لیو [۲۴] مجموعه ای از تعاریف آغازین را برای اندازه‌گیری های آنترویی بین مجموعه های فازی شهودی بازه ای مقدار (IVIFS) پیشنهاد کرد، که توسعه کار اسمیت و کاپریک برای آنترویی بین مجموعه های فازی شهودی بود. خو [۳۸] برخی از فرمول های اندازه گیری شباهت برای مجموعه های فازی شهودی را به مجموعه های فازی شهودی بازه ای مقدار تعمیم داد. وی و همکاران [۳۷] یک معیار شباهت جدید برای مجموعه های فازی شهودی بازه ای مقدار پیشنهاد کرد و آن را برای حل مسائل مربوط به تشخیص الگو، تصمیم‌گیری فازی چند معیاره و تشخیص پزشکی به کار برد. سینگ [۳۵] معیار تشابه کسینوس جدیدی را برای مجموعه های فازی شهودی بازه ای مقدار معرفی کرد و آن را برای تشخیص الگو به کار برد. خلاف [۲۱] یک رویکرد جدید برای تشخیص پزشکی با داده های فازی شهودی بازه ای مقدار ارائه کرد که گسترشی از تئوری مجموعه های فازی بازه ای مقدار بود. در پژوهش دیگری، دیویا [۱۰] یک معیار تشابه جدید بر اساس نقاط میانی اعداد فازی مثلثی ارائه کرد.

تصمیم‌گیری چند معیاره یکی از پرکاربردترین و مهمترین مسائل پیش روی مدیران برای انتخاب بهترین گزینه با توجه به ارزش گزینه ها نسبت به معیارها می باشد. به عنوان نمونه، سراجی و همکاران [۳۳] مسئله روش تصمیم‌گیری چند معیاره MCDM را برای انتخاب تکنیک های آموزشی مناسب تحت مجموعه‌های فازی مورد ارائه کردند. در پژوهش دیگری، آلکان و قهرمان [۳] روش IF-TOPSIS را به منظور تعیین محل بیمارستان در شرایط همه گیری معرفی کردند. در مقایسه میان روش های حل رویکرد تقریب مبتنی بر اندازه فاصله وزنی به دلیل سادگی ساختار فرمولی معمولاً عملکردی بهتر از روش تاپسیس دارد [۱۱]. عملکرد موفق این تکنیک برای فرآیندهای انتخاب مرتبط با مسائل MCDM استفاده شده است [۱۹]. واضح است که برای انتخاب بهترین گزینه در شرایط عدم قطعیت، نیاز به ابزار مقایسه ای مناسب از نظریه اندازه ها محسوس است. سلیمیان و موسوی [۳۲] از تصمیم‌گیری چند

معیاره با داده‌های فازی شهودی بازه ای مقدار برای ارزیابی استراتژی‌های تکنولوژی دیجیتال در شرایط همه گیری بیماری کورنا بهره بردند. آنها، یک روش وزن دهی توسعه یافته جدید بر اساس تقریب مبتنی بر فاصله وزنی، همین طور یک رویکرد رتبه بندی ترکیبی جدید برای تعیین وزن‌های تکنولوژیهای دیجیتال و رتبه بندی گزینه‌ها پیشنهاد دادند. روش وزن دهی توسعه یافته ایشان بر اساس محاسبه وزن تکنولوژی‌های دیجیتال با وزن معیارهای عینی ساخته شده است. علاوه بر این، با به دست آوردن دو شاخص رتبه بندی جداگانه، رویکرد رتبه بندی جدیدی ارائه دادند. نتایج مدل پیشنهادی آنها نشان دهنده اولین جایگزین به عنوان بهترین استراتژی است. برخی معیارهای آنتروپی و شباهت توسط سعید و همکاران [۳۱] در سال ۲۰۲۱ پیشنهاد و برای حل مسئله MCDM اعمال شدند. به همین ترتیب، گانی و سینگ (۲۰۲۱) [۱۳] یک معیار شباهت فازی تصویری را به دلیل عملیات مستقیم و همچنین مکانیسم تصمیم‌گیری چند شاخصه جدید تشکیل دادند. بکباک و اولوکی [۷] معیارهای تشابه جدیدی را بر اساس اعداد چندگانه فازی دوزنقه ای توصیه کردند که برای حل مسائل MCDM استفاده شده است. تاو و چو (۲۰۲۲) [۳۶] (۲۰۲۲) یک معیار مشابهت و آنتروپی جدید برای مجموعه های فازی شهودی مطرح و استفاده از آن در ارزیابی کیفیت نرم افزار را اعلام کردند. با توجه به سنجش شباهت وزنی و روش توسعه یافته TOPSIS، لی و همکاران (۲۰۲۱) [۲۲] یک طرح ترکیبی در مسئله MCDM ارائه کردند. علاوه بر این، تاو و دونگ (۲۰۱۹) [۳۶]، انتخاب بازار هدف را بر اساس معیارهای مشابه برای مجموعه های فازی شهودی بازه ای مقدار توصیه کردند. میسرا و همکاران (۲۰۲۱) [۲۸] یک چارچوب ارزیابی برای مجموعه های فازی شهودی بازه ای مقدار بر اساس اندازه های تشابه در حوزه گردشگری ایجاد کردند.

یکی دیگر از کاربردهای مهم اندازه ها مربوط به فرآیند تشخیص بیماری می باشد. از ضروری ترین وظایف پزشکان تشخیص به هنگام بیماری برای شروع درمان موثر است. به دلیل تعیین بیماری‌های اکتسابی افراد بیمار به کمک علامت‌های آنها، تشخیص پزشکی به عنوان یکی از فرآیندهای اساسی در پزشکی بالینی مورد توجه قرار دارد. تشخیص اغلب به معنای احتمال یا ریسک مبتلا شدن یک فرد به وضعیت خاصی از سلامتی در مدت زمانی مشخص و بر مبنای ویژگی‌های بالینی و غیر بالینی او شناخته میشود. فرآیندی که برای به کاهش خطر عوارض مربوط به سلامتی همچون پوکی استخوان، انواع سرطان‌ها از جمله سرطان معده، روده و همین طور سایر بیماری‌های خود ایمنی بسیار موثر است.

جمع آوری اطلاعات و تشکیل پایگاه داده به منظور مدیریت دانش می تواند فرآیند تشخیص بیماری را بهبود و تسریع بخشد. اگر چه اطلاع از میزان دقیق نشانه های بیماری می تواند به

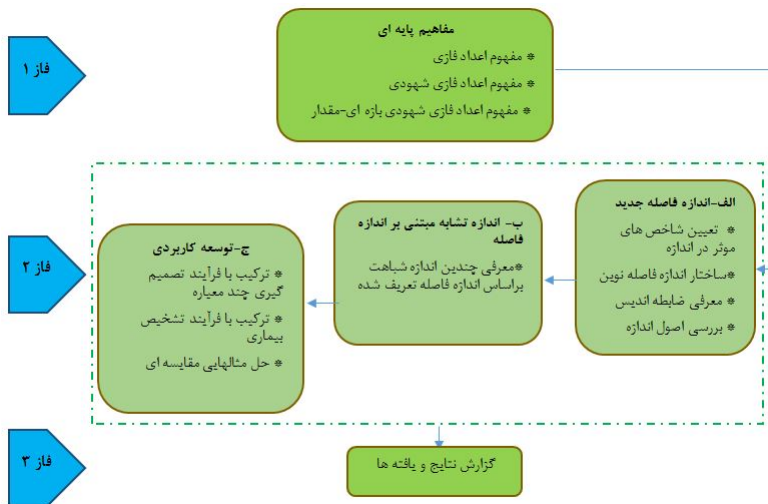
تشخیص دقیق‌تر بیماری منجر شود. با این حال، واضح است که داده‌های مربوط به نشانه‌های بیماری در دنیای حقیقی الزاماً از دقت کافی برخوردار نیستند. علاوه بر این، نشانه‌های فرد مراجعه‌کننده (بیمار)، نیز اغلب کمیت‌هایی نسبی و نادقیق هستند. این مطلب که رابطه بین هر بیمار و نشانه‌های بیماری‌ها اغلب وضعیتی مبهم و نامعین دارد، به این معنا است که به عنوان مثال امکان دارد پزشکان با بیمارانی برخورد کنند که پس‌زمینه مشکلات شخصی و یا اختلالات عصبی تاثیر گذار بر تشخیص داشته باشند، به گونه‌ای که نشانه‌های اصلی بیماران نامشخص و مبهم باشد، در این صورت حتی اگر پیشینه سوابق پزشکی، آزمایشگاهی و فیزیکی بیماران موجود باشد، تشخیص بیماری به آسانی میسر نخواهد بود. با این حال، حتی زمانی که پشتوانه اطلاعاتی مناسبی از پرونده بیمار به وضوح در اختیار باشد، نحوه ارزیابی کارا با توجه به نشانه‌های بیماری چالش دیگری است که به پزشکانی کارآزموده و حاذق نیاز دارد. عدم قطعیت ذاتی داده‌ها تبیین‌کننده نیاز به استفاده از مجموعه‌های فازی یا سایر تعمیم‌های آن به همراه توسعه مدل‌سازی و تعیین ساختار برای به‌تکنیک‌هایی افزایش‌دهنده دقت تشخیص است. نمونه‌هایی از این نوع اقدامات را در منابع [۱۸، ۲۷، ۴۰] می‌توان بررسی کرد.

ژوها و همکاران [۲۰] ساختاری گروهی برای تصمیم‌گیری در مورد تشخیص بیماری با تعیین وزن‌ها توسط متخصصان و بر مبنای معیار اندازه شباهتی بهبودیافته و مبتنی بر میانگین بونفرونی فازی شهودی گسترش دادند. آنها در ادامه ضمن بررسی خواص اندازه شباهت، در مطالعه‌ای موردی و مقایسه‌ای عملکرد اندازه تشابه ساختار یافته را نشان دادند. لازم به ذکر است در روش آنها وزن پارامترها بر اساس ماکسیمم انحراف محاسبه شده است. حبیب و همکاران در سال ۲۰۲۱ [۱۷]، هشت علامت موثر در تشخیص بیماری قلبی و به همراه شش سطح از آن را برای تشخیص زود هنگام در زنان باردار به منظور شروع نوع درمان و داشتن پیش‌آگاهی در محیطی غیرقطعی در نظر گرفتند. معرفی و تجزیه و تحلیل دسته‌ای از اندازه‌های فاصله و تشابه وزندار برای مجموعه‌های فازی مردد دوگان و نرمال توسط علی و نعیم در سال ۲۰۲۲ [۱] انجام شد. آنها به ارزیابی فاصله و شباهت مابین هر گزینه و گزینه ایده‌آل توجه ویژه‌ای داشتند و بر اساس این مطلب گزینه مناسبتر، یعنی بهترین تشخیص بیماری را مورد تایید قرار دادند. در پژوهش دیگری، برومی و همکاران [۹] با بیان بعضی از اپراتورهای مربوط به اعداد فازی نوتروسوفیک، طی فرآیندهایی تشخیص پزشکی مناسب برای انواع مختلفی از اعداد فازی نوتروسوفیک را تبیین کردند. به عنوان نمونه‌ای دیگر، آلیاس و همکاران [۲] با بهره‌گیری از یک اندازه هاسدروف توسعه یافته، تحلیلی مقایسه‌ای برای روش خود در قیاس با برخی از اندازه‌های شناخته شده در فرآیند تشخیص بیماری داشتند.

ویژگی مشترک در اغلب موارد مربوط به تشخیص بیماری استفاده از اندازه‌هایی متمایز برای فرآیند مذکور است. واضح است که برخی از این نوع اندازه‌ها حجم محاسبات بیشتری بر مبنای ضابطه شان دارند و بعضی نیز جامعیت کاربردی کافی را برای پوشش هر نوع از مسائل ندارند. انگیزه اصلی ما در این مقاله، رویکردی نوین بر تعریف اندازه فاصله به منظور کاهش حجم عملیات و در عین حال با جامعیتی کارا برای مسائل تصمیم‌گیری چند شاخصه و فرآیند تشخیص بیماری است.

پژوهش حاضر از نوع نظری و کاربردی و با داده‌های فازی شهودی بازه‌ای مقدار می‌باشد. هدف اصلی پژوهش ارائه یک اندازه فاصله و تشابه متناظر برای این نوع اعداد است که ضمن کاهش حجم عملیات قابلیت ترکیب با مسائل متنوعی همچون تصمیم‌گیری چندمعیاره و تشخیص پزشکی را داشته باشد. برای روشن ساختن مسیر تحقیق، طرح پرسش‌های زیر راهگشا بوده است.

- ۱) چگونه می‌توان اندازه فاصله یا شباهتی نوین با عملیات کاهش یافته تعریف کرد؟
- ۲) اندازه فاصله یا شباهت تعریف شده چه ویژگی‌هایی دارد؟
- ۳) آیا امکان ترکیب اندازه تعریف شده با فرآیندهای پرکاربردی همچون تصمیم‌گیری چند معیاره، شناسایی الگو و تشخیص پزشکی وجود دارد؟



شکل ۱: مدل پژوهش

برای پاسخ به پرسش‌های ذکر شده، ساختار کلی پژوهش مطابق شکل ۱ ارائه شده است. در فاز مفاهیم اساسی، به مطالعه مفاهیم پایه ای، ویژگی‌های اعداد فازی شهودی بازه ای- مقدار و اصول اندازه برای این نوع از اعداد پرداخته ایم. در مرحله اول از فاز تبیین مدل به تعیین شاخص‌های مهم، معرفی اندازه جدید و بررسی اصول اندازه برای آن اشاره کرده ایم. در مرحله دوم از همین فاز معرفی برخی اندازه‌های شباهت از روی اندازه فاصله مورد توجه قرار گرفته است. در مرحله سوم نیز زمینه‌های توسعه کاربردی اندازه بیان شده با مسائل مطرحی همچون تصمیم‌گیری چندمعیاره و تشخیص پزشکی آورده شده است. فاز پایانی نیز شامل گزارشی از نتایج و یافته‌های ارائه شده است.

۲. مفاهیم مقدماتی

در این بخش، مواردی همچون مفاهیم پایه ای، اندازه فاصله نوین و اندازه شباهت مبتنی بر اندازه فاصله تنظیم و تشریح شده است.

۱.۲. مفاهیم پایه‌ای. در این قسمت، تعاریف ضروری از مجموعه‌های فازی، فازی شهودی و فازی شهودی بازه ای- مقدار شهودی به همراه برخی عملگرها به اختصار آورده شده است.

تعریف ۱.۲. مجموعه فازی \tilde{A} با فرض در نظر داشتن مجموعه جهانی X نمایشی به صورت زیر دارد [۳۹]:

$$(۱.۲) \quad \tilde{A} = \{ \langle x, \mu_{\tilde{A}}(x) \rangle \mid 0 \leq \mu_{\tilde{A}}(x) \leq 1, x \in X \},$$

که در آن $\mu_{\tilde{A}}(x)$ مقدار عضویت هر عنصر از مجموعه مرجع را نسبت به مجموعه فازی \tilde{A} نشان می‌دهد و طبق رابطه زیر تعریف می‌شود:

$$(۲.۲) \quad \mu_{\tilde{A}} : X \rightarrow [0, 1], \quad (x \in X, \mu_{\tilde{A}}(x) \in [0, 1]).$$

تعریف ۲.۲. مجموعه فازی شهودی \tilde{A} با فرض در نظر داشتن مجموعه جهانی X نمایشی به صورت زیر دارد [۴]:

$$(۳.۲) \quad \tilde{A} = \{ \langle x, \mu_{\tilde{A}}(x), \nu_{\tilde{A}}(x) \rangle \mid 0 \leq \mu_{\tilde{A}}(x) + \nu_{\tilde{A}}(x) \leq 1, x \in X \},$$

که در آن $\mu_{\tilde{A}}(x)$ و $\nu_{\tilde{A}}(x)$ به ترتیب متناظر با مقدارهای عضویت و عدم عضویت می باشند و مطابق با روابط (۴.۲) و (۵.۲) تعریف می شوند:

$$(۴.۲) \quad \mu_{\tilde{A}} : X \rightarrow [0, 1], \quad (x \in X, \mu_{\tilde{A}}(x) \in [0, 1]).$$

$$(۵.۲) \quad \nu_{\tilde{A}} : X \rightarrow [0, 1], \quad (x \in X, \nu_{\tilde{A}}(x) \in [0, 1]).$$

تابعی به نام تابع تردید را برای هر $x \in X$ ، میتوان با رابطه (۶.۲) تعریف کرد:

$$(۶.۲) \quad \pi_{\tilde{A}}(x) = 1 - (\mu_{\tilde{A}}(x) + \nu_{\tilde{A}}(x)),$$

واضح است که مقدار $\pi_{\tilde{A}}(x)$ عددی بین صفر و یک می باشد.

تعریف ۳.۲. مجموعه فازی شهودی بازه ای مقدار \tilde{A} با فرض در نظر داشتن مجموعه جهانی X نمایشی به صورت زیر دارد [۵]:

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= \{ \langle x, \mu_{\tilde{A}}(x), \nu_{\tilde{A}}(x) \rangle \mid x \in X \} \\ (۷.۲) \quad &= \left\{ \left\langle x, \left[\mu_{\tilde{A}}^-(x), \mu_{\tilde{A}}^+(x) \right], \left[\nu_{\tilde{A}}^-(x), \nu_{\tilde{A}}^+(x) \right] \right\rangle \mid x \in X \right\}, \end{aligned}$$

که در آن $\nu_{\tilde{A}}(x) \subseteq [0, 1]$ و $\mu_{\tilde{A}}(x) \subseteq [0, 1]$ به ترتیب متناظر با بازه های مربوط به مقدارهای عضویت و عدم عضویت می باشند. علاوه براین رابطه $0 \leq \mu_{\tilde{A}}(x), \nu_{\tilde{A}}(x) \leq 1$ نیز در اینجا برقرار است. آشکار است که تابع تردید بر اساس مقادیر عضویت و عدم عضویت به صورت بازه ای زیر نمایش داده می شود:

$$(۸.۲) \quad \pi_{\tilde{A}}(x) = [\pi_{\tilde{A}}^-(x), \pi_{\tilde{A}}^+(x)] = [1 - \mu_{\tilde{A}}^+(x) - \nu_{\tilde{A}}^+(x), 1 - \mu_{\tilde{A}}^-(x) - \nu_{\tilde{A}}^-(x)].$$

تعریف ۴.۲. عملیات جمع برای دو مجموعه فازی شهودی بازه ای مقدار \tilde{A} و \tilde{B} به صورت زیر تعریف می شود:

$$\begin{aligned} \tilde{A} + \tilde{B} &= \{ \langle x, [\mu_{\tilde{A}}^-(x) + \mu_{\tilde{B}}^-(x) - \mu_{\tilde{A}}^-(x)\mu_{\tilde{B}}^-(x), \mu_{\tilde{A}}^+(x) + \mu_{\tilde{B}}^+(x) - \mu_{\tilde{A}}^+(x)\mu_{\tilde{B}}^+(x)] \\ &\quad, [\mu_{\tilde{A}}^-(x)\mu_{\tilde{B}}^-(x), \mu_{\tilde{A}}^+(x)\mu_{\tilde{B}}^+(x)] \rangle \mid x \in X \} \end{aligned}$$

در ادامه تعریف اندازه فاصله و ارتباط آن با شباهت به عنوان دو مفهوم مهم از نظریه اطلاعات، به همراه مروری بر برخی از اندازه های شناخته شده برای مجموعه های فازی شهودی آورده می شود.

۲.۲. اندازه فاصله، اندازه شباهت و مروری بر برخی از اندازه‌ها برای مجموعه های فازی شهودی بازه‌ای مقدار. از جمله مفاهیم نظری و کاربردی مهم در نظریه اندازه‌ها مفهوم اندازه فاصله و شباهت می‌باشد. زیرا به کمک این نوع از اندازه‌ها می‌توان میزان تفاوت و فاصله یا نزدیکی و شباهت بین مجموعه‌ها را تخمین زد. در این قسمت پس از بیان برخی مفاهیم کلیدی، مروری بر برخی از اندازه‌های مهم و مطرح داریم.

اگر \tilde{A} ، \tilde{B} و \tilde{C} سه مجموعه فازی شهودی بازه ای مقدار در X باشند، اندازه فاصله بین دو مجموعه \tilde{A} و \tilde{B} را با $D(\tilde{A}, \tilde{B})$ نشان می‌دهیم که این اندازه در اصول موضوعی زیر صدق می‌کند [۱۶]:

$$0 \leq D(\tilde{A}, \tilde{B}) \leq 1 \quad (\text{اصل ۱})$$

$$D(\tilde{A}, \tilde{B}) = 0 \iff \tilde{A} = \tilde{B} \quad (\text{اصل ۲})$$

$$D(\tilde{A}, \tilde{B}) = D(\tilde{B}, \tilde{A}) \quad (\text{اصل ۳})$$

$$D(\tilde{A}, \tilde{C}) \leq D(\tilde{A}, \tilde{B}) + D(\tilde{B}, \tilde{C}) \quad (\text{اصل ۴})$$

با توجه به این مفهوم که هرچه تفاوت و فاصله بیشتر باشد شباهت و نزدیکی کمتر می‌شود و بالعکس، برخی از اندازه های شباهت را می‌توان بر اساس اندازه های فاصله تعریف کرد. بعضی از این روابط به صورت زیر بیان می‌شوند [۱۲]:

$$(۹.۲) \quad S_1 = 1 - D$$

$$(۱۰.۲) \quad S_2 = \sqrt{1 - D^2}$$

$$(۱۱.۲) \quad S_3 = \frac{1 - D}{1 + D}$$

$$(۱۲.۲) \quad S_4 = \cos\left(\frac{\pi D}{2}\right)$$

$$(۱۳.۲) \quad S_5 = \frac{e^{-D} - e^{-1}}{1 - e^{-1}}$$

۳.۲. مروری بر برخی از اندازه‌ها برای مجموعه های فازی شهودی بازه ای مقدار. در این قسمت ضابطه مربوط به برخی از اندازه های شباهت معرفی شده در مقالات را می‌آوریم. فرض کنید $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ یک مجموعه مرجع ناتهی باشد. علاوه بر این دو

مجموعه فازی شهودی بازه ای مقدار و دلخواه زیر را در نظر بگیرید:

$$\tilde{A} = \left\{ \langle x_i, [\mu_{\tilde{A}}^-(x_i), \mu_{\tilde{A}}^+(x_i)], [\nu_{\tilde{A}}^-(x_i), \nu_{\tilde{A}}^+(x_i)] \rangle \mid x_i \in X \right\},$$

$$\tilde{B} = \left\{ \langle x_i, [\mu_{\tilde{B}}^-(x_i), \mu_{\tilde{B}}^+(x_i)], [\nu_{\tilde{B}}^-(x_i), \nu_{\tilde{B}}^+(x_i)] \rangle \mid x_i \in X \right\}.$$

سینگ [۳۵] در سال ۲۰۱۲ اندازه شباهت زیر را برای دو عدد \tilde{A} و \tilde{B} ارائه داد:

$$(14.2) \quad S_{\gamma}(\tilde{A}, \tilde{B}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_{\gamma} \beta_{\gamma} + \delta_{\gamma} \gamma_{\gamma}}{\sqrt{\alpha_{\gamma}^2 + \delta_{\gamma}^2} \sqrt{\beta_{\gamma}^2 + \gamma_{\gamma}^2}}$$

که در آن

$$\alpha_{\gamma} = \left(\mu_{\tilde{A}}^-(x_i) + \mu_{\tilde{A}}^+(x_i) \right), \quad \beta_{\gamma} = \left(\mu_{\tilde{B}}^-(x_i) + \mu_{\tilde{B}}^+(x_i) \right)$$

$$\delta_{\gamma} = \left(\nu_{\tilde{A}}^-(x_i) + \nu_{\tilde{A}}^+(x_i) \right), \quad \gamma_{\gamma} = \left(\nu_{\tilde{B}}^-(x_i) + \nu_{\tilde{B}}^+(x_i) \right)$$

ژو و چن [۳۸] دو اندازه زیر را مطرح کردند:

$$S_r(\tilde{A}, \tilde{B}) = 1 -$$

(16.2)

$$\sqrt[p]{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(|\mu_{\tilde{A}}^-(x_i) - \mu_{\tilde{B}}^-(x_i)|^p + |\mu_{\tilde{A}}^+(x_i) - \mu_{\tilde{B}}^+(x_i)|^p + |\nu_{\tilde{A}}^-(x_i) - \nu_{\tilde{B}}^-(x_i)|^p + |\nu_{\tilde{A}}^+(x_i) - \nu_{\tilde{B}}^+(x_i)|^p \right)}$$

و

$$S_r(\tilde{A}, \tilde{B}) = 1 -$$

(17.2)

$$\sqrt[p]{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \max \left\{ |\mu_{\tilde{A}}^-(x_i) - \mu_{\tilde{B}}^-(x_i)|^p, |\mu_{\tilde{A}}^+(x_i) - \mu_{\tilde{B}}^+(x_i)|^p, |\nu_{\tilde{A}}^-(x_i) - \nu_{\tilde{B}}^-(x_i)|^p, |\nu_{\tilde{A}}^+(x_i) - \nu_{\tilde{B}}^+(x_i)|^p \right\}}$$

وی و همکاران [۳۷] در سال ۲۰۱۱ اندازه شباهتی بر اساس می نیمم و ماکسیمم های مقادیر

بازه ای به صورت زیر ارائه دادند:

$$(18.2) \quad S_{\gamma}(\tilde{A}, \tilde{B}) = \sum_{i=1}^n \frac{\gamma - \min(\mu_i^-, \nu_i^-) - \min(\mu_i^+, \nu_i^+)}{\gamma + \max(\mu_i^-, \nu_i^-) + \max(\mu_i^+, \nu_i^+)}$$

که در آن

$$\mu_i^- = \left| \mu_{\tilde{A}}^-(x_i) - \mu_{\tilde{B}}^-(x_i) \right|, \quad \mu_i^+ = \left| \mu_{\tilde{A}}^+(x_i) - \mu_{\tilde{B}}^+(x_i) \right|$$

$$\nu_i^- = \left| \nu_{\tilde{A}}^-(x_i) - \nu_{\tilde{B}}^-(x_i) \right|, \quad \nu_i^+ = \left| \nu_{\tilde{A}}^+(x_i) - \nu_{\tilde{B}}^+(x_i) \right|$$

در سال ۲۰۱۸، دیویا و سردیوی [۱۰] اندازه شباهت زیر را بیان کردند:

$$S_{\delta}(\tilde{A}, \tilde{B}) = 1 - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left\{ \left(\frac{1}{2} \left| \rho_{\tilde{A}}^{-}(x_i) - \rho_{\tilde{B}}^{-}(x_i) \right| + \left| \rho_{\tilde{A}}^{+}(x_i) - \rho_{\tilde{B}}^{+}(x_i) \right| \right) \right. \\ \left. \left(1 - \frac{\sigma_{\tilde{A}}(x_i) + \sigma_{\tilde{B}}(x_i)}{2} \right) + \left| \sigma_{\tilde{A}}(x_i) + \sigma_{\tilde{B}}(x_i) \right| \left(\frac{\sigma_{\tilde{A}}(x_i) + \sigma_{\tilde{B}}(x_i)}{2} \right) \right\} \quad (19.2)$$

که در آن

$$\rho_{\tilde{A}}^{-} = \frac{\mu_{\tilde{A}}^{-}(x_i) + 1 - \nu_{\tilde{A}}^{-}(x_i)}{2}, \quad \rho_{\tilde{A}}^{+} = \frac{\mu_{\tilde{A}}^{+}(x_i) + 1 - \nu_{\tilde{A}}^{+}(x_i)}{2}, \\ \rho_{\tilde{B}}^{-} = \frac{\mu_{\tilde{B}}^{-}(x_i) + 1 - \nu_{\tilde{B}}^{-}(x_i)}{2}, \quad \rho_{\tilde{B}}^{+} = \frac{\mu_{\tilde{B}}^{+}(x_i) + 1 - \nu_{\tilde{B}}^{+}(x_i)}{2}$$

$$\sigma_{\tilde{A}} = 1 - \frac{1}{2} \left(\mu_{\tilde{A}}^{-}(x_i) + \mu_{\tilde{A}}^{+}(x_i) + \nu_{\tilde{A}}^{-}(x_i) + \nu_{\tilde{A}}^{+}(x_i) \right), \\ \sigma_{\tilde{B}} = 1 - \frac{1}{2} \left(\mu_{\tilde{B}}^{-}(x_i) + \mu_{\tilde{B}}^{+}(x_i) + \nu_{\tilde{B}}^{-}(x_i) + \nu_{\tilde{B}}^{+}(x_i) \right)$$

لثو و لیانگ [۲۵] اندازه تشابه ای با ساختار توانی زیر معرفی کرده اند:

$$S_{\tau}(\tilde{A}, \tilde{B}) = 1 - \frac{1}{\tau n} \\ \left\{ \sum_{i=1}^n \frac{\left| t_{\tau} \left(\mu_{\tilde{A}}^{-}(x_i) - \mu_{\tilde{B}}^{-}(x_i) \right) + \left(\mu_{\tilde{A}}^{+}(x_i) - \mu_{\tilde{B}}^{+}(x_i) \right) - \left(\nu_{\tilde{A}}^{-}(x_i) - \nu_{\tilde{B}}^{-}(x_i) \right) + \left(\nu_{\tilde{A}}^{+}(x_i) - \nu_{\tilde{B}}^{+}(x_i) \right) \right|^p}{|2(t_{\tau} + 1)|^p} \right. \\ \left. \frac{\left| t_{\tau} \left(\nu_{\tilde{A}}^{-}(x_i) - \nu_{\tilde{B}}^{-}(x_i) \right) + \left(\nu_{\tilde{A}}^{+}(x_i) - \nu_{\tilde{B}}^{+}(x_i) \right) - \left(\mu_{\tilde{A}}^{-}(x_i) - \mu_{\tilde{B}}^{-}(x_i) \right) + \left(\mu_{\tilde{A}}^{+}(x_i) - \mu_{\tilde{B}}^{+}(x_i) \right) \right|^p}{|2(t_{\tau} + 1)|^p} \right\}^{\frac{1}{p}} \quad (20.2)$$

که در آن $t_{\tau}, t_{\tau}, p \in [0, \infty)$.

در سال ۲۰۲۲ راتناساباپتی و پالانیسامی [۳۰] براساس روشی ترکیبی اندازه زیر را ارائه کردند:

$$S_{\nu}(\tilde{A}, \tilde{B}) = \frac{1}{2n} \left(\sum_{i=1}^n \frac{\alpha_1 \beta_1 + \delta_1 \gamma_1}{\sqrt{\alpha_1^2 + \delta_1^2} \sqrt{\beta_1^2 + \gamma_1^2}} + \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_2 \beta_2 + \delta_2 \gamma_2}{\sqrt{\alpha_2^2 + \delta_2^2} \sqrt{\beta_2^2 + \gamma_2^2}} \right. \\ \left. + \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_3 \beta_3 + \delta_3 \gamma_3}{\sqrt{\alpha_3^2 + \delta_3^2} \sqrt{\beta_3^2 + \gamma_3^2}} \right) \quad (21.2)$$

که در آن

$$\alpha_1 = \left(\mu_{\tilde{A}}^{-}(x_i) + \mu_{\tilde{A}}^{+}(x_i) \right), \quad \beta_1 = \left(\mu_{\tilde{B}}^{-}(x_i) + \mu_{\tilde{B}}^{+}(x_i) \right) \\ \delta_1 = \left(\nu_{\tilde{A}}^{-}(x_i) + \nu_{\tilde{A}}^{+}(x_i) \right), \quad \gamma_1 = \left(\nu_{\tilde{B}}^{-}(x_i) + \nu_{\tilde{B}}^{+}(x_i) \right)$$

$$\alpha_{\Upsilon} = \left(\frac{\mu_{\tilde{A}}^{-}(x_i) + 1 - \nu_{\tilde{A}}^{-}(x_i)}{2} + \frac{\mu_{\tilde{A}}^{+}(x_i) + 1 - \nu_{\tilde{A}}^{+}(x_i)}{2} \right),$$

$$\beta_{\Upsilon} = \left(\frac{\mu_{\tilde{B}}^{-}(x_i) + 1 - \nu_{\tilde{B}}^{-}(x_i)}{2} + \frac{\mu_{\tilde{B}}^{+}(x_i) + 1 - \nu_{\tilde{B}}^{+}(x_i)}{2} \right)$$

$$\delta_{\Upsilon} = \left(\nu_{\tilde{A}}^{-}(x_i) + \nu_{\tilde{A}}^{+}(x_i) \right), \quad \gamma_{\Upsilon} = \left(\nu_{\tilde{A}}^{-}(x_i) + \nu_{\tilde{A}}^{+}(x_i) \right)$$

$$\alpha_{\Upsilon} = \left(1 - \mu_{\tilde{A}}^{-}(x_i) + 1 - \mu_{\tilde{A}}^{+}(x_i) \right), \quad \beta_{\Upsilon} = \left(1 - \mu_{\tilde{B}}^{-}(x_i) + 1 - \mu_{\tilde{B}}^{+}(x_i) \right)$$

$$\delta_{\Upsilon} = \left(1 - \nu_{\tilde{A}}^{-}(x_i) + 1 - \nu_{\tilde{A}}^{+}(x_i) \right), \quad \beta_{\Upsilon} = \left(1 - \nu_{\tilde{B}}^{-}(x_i) + 1 - \nu_{\tilde{B}}^{+}(x_i) \right).$$

۴.۲. اندازه فاصله پیشنهادی برای مجموعه های فازی شهودی بازه ای مقدار. مهم ترین

شاخص برای ارزش گذاری یک مجموعه فازی شهودی بازه ای درجه تعلق آن در نقاط ابتدایی و انتهایی بازه است. این مقدار مسلماً باید بیشترین اثرگذاری را در تعیین ارزش هر مجموعه و در نتیجه فاصله بین مجموعه ها داشته باشد. عامل تاثیرگذار دیگری که می تواند نقش تعیین کننده ای در میزان ارزش این نوع مجموعه ها داشته باشد، درجه تردید در نقاط ابتدایی و انتهایی بازه است. ضریبی از این دو عامل کلیدی را در مشخص کردن ارزش نهایی مجموعه و فاصله بین آنها تاثیر داد. واضح است که در تردید این امکان هست که بخشی از درستی یا نادرستی روی دهد. از این رو بهتر است اثر گذاری این عوامل به صورت وزندهی شده باشد. برای تعیین ضرایب وزنی متناظر با میزان عضویت و میزان تردید از نظر تصمیم گیرندگان استفاده می شود. این ایده را شکوری و همکاران [۳۴] برای رتبه بندی اعداد فازی شهودی ذوزنقه ای به کار بردند. اکنون با بهره گیری از این ایده برای هر مجموعه فازی شهودی گسسته و بازه ای مقدار مانند $\tilde{A} = \left\{ \langle x_i, [\mu_{\tilde{A}}^{-}(x_i), \mu_{\tilde{A}}^{+}(x_i)], [\nu_{\tilde{A}}^{-}(x_i), \nu_{\tilde{A}}^{+}(x_i)] \rangle \mid x_i \in X \right\}$ دو ضابطه رتبه زیر را می توان تعریف کرد:

$$(۲۲.۲) \quad R_{\lambda}(\tilde{A}) = \sum_{i=1}^n w_i^{\mu} \{ \mu_{\tilde{A}}^{-}(x_i) + \mu_{\tilde{A}}^{+}(x_i) \} + w_i^{\pi} \{ \pi_{\tilde{A}}^{-}(x_i) + \pi_{\tilde{A}}^{+}(x_i) \}$$

به طوری که در آن $w_i^{\mu} \in [0, 0.75]$ و $w_i^{\pi} \in [0, 0.25]$.

(۲۳.۲)

$$R_{\Upsilon}(\tilde{A}) = \sum_{i=1}^n w_i^{\mu^{-}} \mu_{\tilde{A}}^{-}(x_i) + w_i^{\mu^{+}} \mu_{\tilde{A}}^{+}(x_i) + w_i^{\pi^{-}} \pi_{\tilde{A}}^{-}(x_i) + w_i^{\pi^{+}} \pi_{\tilde{A}}^{+}(x_i)$$

به طوری که در آن $w_i^{\mu^{-}}, w_i^{\pi^{+}} \in [0, 0.25]$ و $w_i^{\mu^{+}}, w_i^{\pi^{-}} \in [0, 0.75]$.

تعریف ۵.۲. فرض کنید دو مجموعه فازی شهودی بازه‌ای مقدار \tilde{A} و \tilde{B} داشته باشیم. آنگاه:

$$\tilde{A} \prec_{R_1} \tilde{B} \leftrightarrow R_1(\tilde{A}) < R_1(\tilde{B}) \bullet$$

$$\tilde{A} \approx_{R_1} \tilde{B} \leftrightarrow R_1(\tilde{A}) = R_1(\tilde{B}) \bullet$$

$$\tilde{A} \succ_{R_1} \tilde{B} \leftrightarrow R_1(\tilde{A}) > R_1(\tilde{B}) \bullet$$

قضیه ۶.۲. ثابت کنید تابع رتبه ارائه شده در (۲۳.۲)، یک رابطه هم‌ارزی است.

اثبات. (۱) خاصیت انعکاسی برقرار است زیرا:

$$R_1(\tilde{A}) = R_1(\tilde{A}) \Rightarrow \tilde{A} \approx_{R_1} \tilde{B}.$$

(۲) خاصیت تقارن برقرار است. زیرا اگر: $R_1(\tilde{A}) < R_1(\tilde{B})$ و $\tilde{A} \prec_{R_1} \tilde{B}$

$$\tilde{A} \succ_{R_1} \tilde{B} \Leftrightarrow R_1(\tilde{A}) > R_1(\tilde{B})$$

$$\tilde{A} \succ_{R_1} \tilde{B} \Leftrightarrow R_1(\tilde{A}) > R_1(\tilde{B})$$

$$\tilde{A} \approx_{R_1} \tilde{B}$$

(۳) خاصیت تعدی برقرار است. زیرا اگر: $R_1(\tilde{A}) < R_1(\tilde{B})$ و $\tilde{A} \prec_{R_1} \tilde{B}$

$$\tilde{C} \succ_{R_1} \tilde{B} \Leftrightarrow R_1(\tilde{C}) > R_1(\tilde{B})$$

$$\tilde{A} \prec_{R_1} \tilde{C}$$

□

قضیه ۷.۲. برای دو مجموعه فازی شهودی بازه‌ای مقدار \tilde{A} و \tilde{B} نشان دهید:

$$R_1(\tilde{A}, \tilde{B}) > \max\{R_1(\tilde{A}), R_1(\tilde{B})\}$$

اثبات. با توجه به تعریف ۵.۲ و رابطه (۲۲.۲)، داریم:

$$\begin{aligned} R_1(\tilde{A} + \tilde{B}) &= \sum_{i=1}^n w_i^\mu \{ \mu_{\tilde{A}}^-(x_i) + \mu_{\tilde{B}}^-(x_i) - \mu_{\tilde{A}}^-(x_i) \mu_{\tilde{B}}^-(x_i) + \mu_{\tilde{A}}^+(x_i) + \mu_{\tilde{B}}^+(x_i) \\ &\quad - \mu_{\tilde{A}}^+(x_i) \mu_{\tilde{B}}^+(x_i) \} + w_i^\pi \{ 1 - \mu_{\tilde{A}}^-(x_i) - \mu_{\tilde{B}}^-(x_i) + \mu_{\tilde{A}}^-(x_i) \mu_{\tilde{B}}^-(x_i) - \nu_{\tilde{A}}^-(x_i) \nu_{\tilde{B}}^-(x_i) \\ &\quad + 1 - \mu_{\tilde{A}}^+(x_i) - \mu_{\tilde{B}}^+(x_i) + \mu_{\tilde{A}}^+(x_i) \mu_{\tilde{B}}^+(x_i) - \nu_{\tilde{A}}^+(x_i) \nu_{\tilde{B}}^+(x_i) \} \end{aligned}$$

از سوی دیگر :

$$R_{\gamma}(\tilde{A}) = \sum_{i=1}^n w_i^{\mu} \{ \mu_{\tilde{A}}^{+}(x_i) + \mu_{\tilde{A}}^{-}(x_i) \} + w_i^{\pi} \{ 1 - \mu_{\tilde{A}}^{+}(x_i) - \mu_{\tilde{A}}^{-}(x_i) + 1 - \nu_{\tilde{A}}^{+}(x_i) - \nu_{\tilde{A}}^{-}(x_i) \}$$

$$R_{\gamma}(\tilde{B}) = \sum_{i=1}^n w_i^{\mu} \{ \mu_{\tilde{B}}^{+}(x_i) + \mu_{\tilde{B}}^{-}(x_i) \} + w_i^{\pi} \{ 1 - \mu_{\tilde{B}}^{+}(x_i) - \mu_{\tilde{B}}^{-}(x_i) + 1 - \nu_{\tilde{B}}^{+}(x_i) - \nu_{\tilde{B}}^{-}(x_i) \}$$

علاوه براین، می دانیم برای اعداد در بازه $[0, 1]$ روابط زیر برقرار هستند:

$$\mu_{\tilde{A}}^{-}(x_i) \geq \mu_{\tilde{A}}^{-}(x_i) \mu_{\tilde{B}}^{-}(x_i), \mu_{\tilde{B}}^{-}(x_i) \geq \mu_{\tilde{A}}^{-}(x_i) \mu_{\tilde{B}}^{-}(x_i)$$

$$\mu_{\tilde{A}}^{+}(x_i) \geq \mu_{\tilde{A}}^{+}(x_i) \mu_{\tilde{B}}^{+}(x_i), \mu_{\tilde{B}}^{+}(x_i) \geq \mu_{\tilde{A}}^{+}(x_i) \mu_{\tilde{B}}^{+}(x_i)$$

$$-\nu_{\tilde{A}}^{-}(x_i) \leq -\nu_{\tilde{A}}^{-}(x_i) \nu_{\tilde{B}}^{-}(x_i), -\nu_{\tilde{B}}^{-}(x_i) \leq -\nu_{\tilde{A}}^{-}(x_i) \nu_{\tilde{B}}^{-}(x_i)$$

با توجه به موارد ذکر شده و بازه وزنی ضرایب:

$$R_{\gamma}(\tilde{A}, \tilde{B}) > \max\{R_{\gamma}(\tilde{A}), R_{\gamma}(\tilde{B})\}$$

□

برای R_{γ} نیز به طریقی مشابه تعریف و قضایایی. رامی توان ارائه نمود.

اکنون این طرح را برای مشخص کردن اندازه فاصله بین دو عدد فازی شهودی بازه ای مقدار به کار می بریم. بعضی از محاسن بهره گیری از این ایده به طور خلاصه عبارتند از:

(۱) بسیاری از محققان، برای ارائه اندازه هایی نوین از بازه ای بودن به همراه سه شاخص

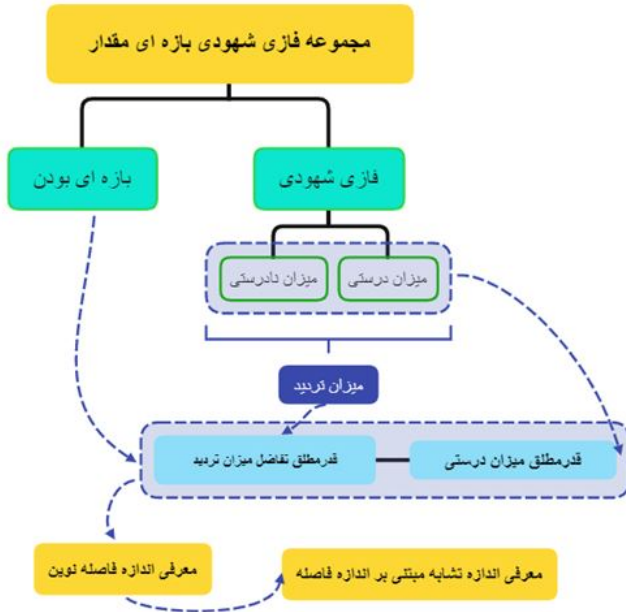
درجه عضویت، میزان عدم عضویت و تردید به صورتی همزمان در ضابطه خود استفاده کرده اند. آشکار است که بهره گیری تنها از دو مقدار مربوط به درجه عضویت و درجه تردید در نقاط ابتدایی و انتهایی نقش چشم گیری در کاهش حجم محاسبات ایفا خواهد کرد.

(۲) به علت تعیین وزن های مرتبط با میزان تعلق و تردید توسط تصمیم گیرنده انعطاف پذیری و تنوع بیشتری از پاسخ ها را در اختیار خواهیم داشت.

(۳) توسعه این ایده برای اغلب ضابطه های اندازه در ادبیات موضوعی پژوهش امکان پذیر است.

(۴) در موارد کاربردی متنوع همچون تصمیم گیری چندمعیاره و تشخیص پزشکی عملکرد مناسبی از خود نشان می دهد.

(۵) اندازه پیشنهادی در این طرح اصول کلیدی اندازه را برقرار می سازد.



شکل ۲: ساختار مفهومی برای محاسبه اندازه فاصله و شباهت بین دو عدد فازی شهودی بازه‌ای مقدار با نگرشی نوین.

شکل مفهومی ۲ نموداری توصیفی برای مقایسه دو عدد فازی شهودی بازه‌ای مقدار را به تصویر می‌کشد.

با به کارگیری مفاهیم ارائه شده در این بخش و براساس ساختار مفهومی ۲ اندازه فاصله پیشنهادی برای دو عدد فازی شهودی بازه‌ای مقدار \tilde{A} و \tilde{B} به صورت زیر پیشنهاد می‌شود:

$$D(\tilde{A}, \tilde{B}) = \frac{1}{4n} \sum_{i=1}^n w_i^{\mu^-} \left| \mu_{\tilde{A}}^-(x_i) - \mu_{\tilde{B}}^-(x_i) \right| + w_i^{\mu^+} \left| \mu_{\tilde{A}}^+(x_i) - \mu_{\tilde{B}}^+(x_i) \right| \\ + w_i^{\pi^-} \left| \pi_{\tilde{A}}^-(x_i) - \pi_{\tilde{B}}^-(x_i) \right| + w_i^{\pi^+} \left| \pi_{\tilde{A}}^+(x_i) - \pi_{\tilde{B}}^+(x_i) \right| \quad (24.2)$$

قضیه ۸.۲. رابطه (۲۴.۲) در اصول اندازه فاصله صدق می‌کند.

(۱) با توجه به کوچکتر از یک بودن هر یک از قدرمطلق ها و توجه به ساختار رابطه و این نکته که $w_i^{\mu^-} + w_i^{\mu^+} + w_i^{\pi^-} + w_i^{\pi^+} = 1$ است، اصل موضوعی ۱ نتیجه می‌شود. از این رو:

$$0 \leq D(\tilde{A}, \tilde{B}) \leq 1$$

(۲) اگر $D(\tilde{A}, \tilde{B}) = 0$ داریم:

$$\mu_{\tilde{A}}^-(x_i) = \mu_{\tilde{B}}^-(x_i), \mu_{\tilde{A}}^+(x_i) = \mu_{\tilde{B}}^+(x_i)$$

$$\pi_{\tilde{A}}^-(x_i) = \pi_{\tilde{B}}^-(x_i), \pi_{\tilde{A}}^+(x_i) = \pi_{\tilde{B}}^+(x_i)$$

در نتیجه

$$\pi_{\tilde{A}}^-(x_i) = \pi_{\tilde{B}}^-(x_i) \Rightarrow 1 - \mu_{\tilde{A}}^-(x_i) - \nu_{\tilde{A}}^-(x_i) = 1 - \mu_{\tilde{B}}^-(x_i) - \nu_{\tilde{B}}^-(x_i) \Rightarrow \nu_{\tilde{A}}^-(x_i) = \nu_{\tilde{B}}^-(x_i)$$

$$\pi_{\tilde{A}}^+(x_i) = \pi_{\tilde{B}}^+(x_i) \Rightarrow 1 - \mu_{\tilde{A}}^+(x_i) - \nu_{\tilde{A}}^+(x_i) = 1 - \mu_{\tilde{B}}^+(x_i) - \nu_{\tilde{B}}^+(x_i) \Rightarrow \nu_{\tilde{A}}^+(x_i) = \nu_{\tilde{B}}^+(x_i)$$

بنابراین $\tilde{A} = \tilde{B}$.

برعکس اصل ۲ نیز بدیهی است.

(۳) اصل موضوعی ۳ با توجه به اینکه هر یک از عبارات‌ها در قدرمطلق می باشند نتیجه می شود. از این رو:

$$D(\tilde{A}, \tilde{B}) = D(\tilde{B}, \tilde{A})$$

(۴) با شروع از سمت چپ اصل ۴ داریم:

$$\begin{aligned} D(\tilde{A}, \tilde{C}) &= \frac{1}{4n} \sum_{i=1}^n w_i^{\mu^-} \left| \mu_{\tilde{A}}^-(x_i) - \mu_{\tilde{C}}^-(x_i) \right| + w_i^{\mu^+} \left| \mu_{\tilde{A}}^+(x_i) - \mu_{\tilde{C}}^+(x_i) \right| \\ &\quad + w_i^{\pi^-} \left| \pi_{\tilde{A}}^-(x_i) - \pi_{\tilde{C}}^-(x_i) \right| + w_i^{\pi^+} \left| \pi_{\tilde{A}}^+(x_i) - \pi_{\tilde{C}}^+(x_i) \right| \\ &= \frac{1}{4n} \sum_{i=1}^n w_i^{\mu^-} \left| \mu_{\tilde{A}}^-(x_i) - \mu_{\tilde{B}}^-(x_i) + \mu_{\tilde{B}}^-(x_i) - \mu_{\tilde{C}}^-(x_i) \right| \\ &\quad + w_i^{\mu^+} \left| \mu_{\tilde{A}}^+(x_i) - \mu_{\tilde{B}}^+(x_i) + \mu_{\tilde{B}}^+(x_i) - \mu_{\tilde{C}}^+(x_i) \right| \\ &\quad + w_i^{\pi^-} \left| \pi_{\tilde{A}}^-(x_i) - \pi_{\tilde{B}}^-(x_i) + \pi_{\tilde{B}}^-(x_i) - \pi_{\tilde{C}}^-(x_i) \right| \\ &\quad + w_i^{\pi^+} \left| \pi_{\tilde{A}}^+(x_i) - \pi_{\tilde{B}}^+(x_i) + \pi_{\tilde{B}}^+(x_i) - \pi_{\tilde{C}}^+(x_i) \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{1}{\forall n} \sum_{i=1}^n w_i^{\mu^-} \left(\left| \mu_{\tilde{A}}^-(x_i) - \mu_{\tilde{B}}^-(x_i) \right| + \left| \mu_{\tilde{B}}^-(x_i) - \mu_{\tilde{C}}^-(x_i) \right| \right) \\
&\quad + w_i^{\mu^+} \left(\left| \mu_{\tilde{A}}^+(x_i) - \mu_{\tilde{B}}^+(x_i) \right| + \left| \mu_{\tilde{B}}^+(x_i) - \mu_{\tilde{C}}^+(x_i) \right| \right) \\
&\quad + w_i^{\pi^-} \left(\left| \pi_{\tilde{A}}^-(x_i) - \pi_{\tilde{B}}^-(x_i) \right| + \left| \pi_{\tilde{B}}^-(x_i) - \pi_{\tilde{C}}^-(x_i) \right| \right) \\
&\quad + w_i^{\pi^+} \left(\left| \pi_{\tilde{A}}^+(x_i) - \pi_{\tilde{B}}^+(x_i) \right| + \left| \pi_{\tilde{B}}^+(x_i) - \pi_{\tilde{C}}^+(x_i) \right| \right) \\
&\leq \frac{1}{\forall n} \sum_{i=1}^n w_i^{\mu^-} \left(\left| \mu_{\tilde{A}}^-(x_i) - \mu_{\tilde{B}}^-(x_i) \right| \right) + w_i^{\mu^+} \left(\left| \mu_{\tilde{A}}^+(x_i) - \mu_{\tilde{B}}^+(x_i) \right| \right) \\
&\quad + w_i^{\pi^-} \left(\left| \pi_{\tilde{A}}^-(x_i) - \pi_{\tilde{B}}^-(x_i) \right| \right) + w_i^{\pi^+} \left(\left| \pi_{\tilde{A}}^+(x_i) - \pi_{\tilde{B}}^+(x_i) \right| \right) \\
&\leq \frac{1}{\forall n} \sum_{i=1}^n w_i^{\mu^-} \left(\left| \mu_{\tilde{B}}^-(x_i) - \mu_{\tilde{C}}^-(x_i) \right| \right) + w_i^{\mu^+} \left(\left| \mu_{\tilde{B}}^+(x_i) - \mu_{\tilde{C}}^+(x_i) \right| \right) \\
&\quad + w_i^{\pi^-} \left(\left| \pi_{\tilde{B}}^-(x_i) - \pi_{\tilde{C}}^-(x_i) \right| \right) + w_i^{\pi^+} \left(\left| \pi_{\tilde{B}}^+(x_i) - \pi_{\tilde{C}}^+(x_i) \right| \right) \\
&= D(\tilde{A}, \tilde{B}) + D(\tilde{B}, \tilde{C})
\end{aligned}$$

از این رو رابطه (۲۴.۲) در تمامی خواص اندازه صدق می‌کند.

با استفاده از روابط (۱۳.۲)–(۹.۲) می‌توان اندازه‌های تشابه جدیدی براساس اندازه فاصله تعریف شده در رابطه (۲۴.۲) به دست آورد.

$$\begin{aligned}
s_{new}(\tilde{A}, \tilde{B}) = 1 - \frac{1}{\forall n} \sum_{i=1}^n w_i^{\mu^-} |\mu_{\tilde{A}}^-(x_i) - \mu_{\tilde{B}}^-(x_i)| + w_i^{\mu^+} |\mu_{\tilde{A}}^+(x_i) - \mu_{\tilde{B}}^+(x_i)| \\
+ w_i^{\pi^-} |\pi_{\tilde{A}}^-(x_i) - \pi_{\tilde{B}}^-(x_i)| + w_i^{\pi^+} |\pi_{\tilde{A}}^+(x_i) - \pi_{\tilde{B}}^+(x_i)|
\end{aligned}
\tag{۲۵.۲}$$

واضح است برای رابطه (۲۵.۲) خواص زیر برقرار است:

$$\begin{aligned}
&\bullet \cdot \leq s_{new}(\tilde{A}, \tilde{B}) \leq 1 \bullet \\
&\bullet s_{new}(\tilde{A}, \tilde{B}) = \bullet \iff \tilde{A} = \tilde{B} \bullet \\
&\bullet s_{new}(\tilde{A}, \tilde{B}) = s_{new}(\tilde{B}, \tilde{A}) \bullet
\end{aligned}$$

علاوه بر قضیه پیشین دو قضیه زیر برای اندازه فاصله پیشنهادی برقرار هستند.

قضیه ۹.۲. برای دو مجموعه فازی شهودی بازه ای مقدار \tilde{A} و \tilde{B} نشان دهید:

$$D(\tilde{A} + \tilde{B}, \bullet) \leq D(\tilde{A}, \bullet) + D(\tilde{B}, \bullet).$$

اثبات. با شروع از سمت چپ و با توجه به ضرایب وزنی داریم:

$$\begin{aligned}
 D(\tilde{A} + \tilde{B}, \cdot) &= \frac{1}{\forall n} \sum_{i=1}^n w_i^{\mu^-} |\mu_{\tilde{A}}^-(x_i) + \mu_{\tilde{B}}^-(x_i) - \mu_{\tilde{A}}^-(x_i)\mu_{\tilde{B}}^-(x_i)| \\
 &\quad + w_i^{\mu^+} |\mu_{\tilde{A}}^+(x_i) + \mu_{\tilde{B}}^+(x_i) - \mu_{\tilde{A}}^+(x_i)\mu_{\tilde{B}}^+(x_i)| \\
 &\quad + w_i^{\pi^-} |\nu_{\tilde{A}}^-(x_i) - \mu_{\tilde{A}}^-(x_i) - \mu_{\tilde{B}}^-(x_i) + \mu_{\tilde{A}}^-(x_i)\mu_{\tilde{B}}^-(x_i) - \nu_{\tilde{A}}^-(x_i)\nu_{\tilde{B}}^-(x_i)| \\
 &\quad + w_i^{\pi^+} |\nu_{\tilde{A}}^+(x_i) - \mu_{\tilde{A}}^+(x_i) - \mu_{\tilde{B}}^+(x_i) + \mu_{\tilde{A}}^+(x_i)\mu_{\tilde{B}}^+(x_i) - \nu_{\tilde{A}}^+(x_i)\nu_{\tilde{B}}^+(x_i)| \leq \\
 &\quad \frac{1}{\forall n} \sum_{i=1}^n w_i^{\mu^-} |\mu_{\tilde{A}}^-(x_i)| + w_i^{\mu^+} |\mu_{\tilde{A}}^+(x_i)| + w_i^{\pi^-} |\nu_{\tilde{A}}^-(x_i) - \mu_{\tilde{A}}^-(x_i) - \nu_{\tilde{A}}^-(x_i)| \\
 &\quad + w_i^{\pi^+} |\nu_{\tilde{A}}^+(x_i) - \mu_{\tilde{A}}^+(x_i) - \nu_{\tilde{A}}^+(x_i)| + \frac{1}{\forall n} \sum_{i=1}^n w_i^{\mu^-} |\mu_{\tilde{B}}^-(x_i)| + w_i^{\mu^+} |\mu_{\tilde{B}}^+(x_i)| \\
 &\quad + w_i^{\pi^-} |\nu_{\tilde{B}}^-(x_i) - \mu_{\tilde{B}}^-(x_i) - \nu_{\tilde{B}}^-(x_i)| + w_i^{\pi^+} |\nu_{\tilde{B}}^+(x_i) - \mu_{\tilde{B}}^+(x_i) - \nu_{\tilde{B}}^+(x_i)|
 \end{aligned}$$

□

قضیه ۱۰.۲. برای دو مجموعه فازی شهودی بازه ای مقدار \tilde{A} و \tilde{B} ، اگر $D(\tilde{A}, \tilde{B}) \leq \epsilon$ ، آنگاه:

$$|D(\tilde{A}, \tilde{C}) - D(\tilde{B}, \tilde{C})| \leq \epsilon.$$

اثبات. با شروع از فرض و کم و اضافه کردن مقادیری مشخص در هر یک از قدرمطلق

ها داریم:

$$\begin{aligned}
 D(\tilde{A}, \tilde{B}) &= \frac{1}{\forall n} \sum_{i=1}^n w_i^{\mu^-} |\mu_{\tilde{A}}^-(x_i) + \mu_{\tilde{C}}^-(x_i) - \mu_{\tilde{C}}^-(x_i) - \mu_{\tilde{B}}^-(x_i)| \\
 &\quad + w_i^{\mu^+} |\mu_{\tilde{A}}^+(x_i) + \mu_{\tilde{C}}^+(x_i) - \mu_{\tilde{C}}^+(x_i) - \mu_{\tilde{B}}^+(x_i)| \\
 &\quad + w_i^{\pi^-} |\pi_{\tilde{A}}^-(x_i) + \pi_{\tilde{C}}^-(x_i) - \pi_{\tilde{C}}^-(x_i) - \pi_{\tilde{B}}^-(x_i)| \\
 &\quad + w_i^{\pi^+} |\pi_{\tilde{A}}^+(x_i) + \pi_{\tilde{C}}^+(x_i) - \pi_{\tilde{C}}^+(x_i) - \pi_{\tilde{B}}^+(x_i)|
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\geq \frac{1}{4n} \sum_{i=1}^n w_i^{\mu^-} \left| |\mu_{\tilde{A}}^-(x_i) - \mu_{\tilde{C}}^-(x_i)| - |\mu_{\tilde{B}}^-(x_i) - \mu_{\tilde{C}}^-(x_i)| \right| \\
&+ w_i^{\mu^+} \left| |\mu_{\tilde{A}}^+(x_i) - \mu_{\tilde{C}}^+(x_i)| - |\mu_{\tilde{B}}^+(x_i) - \mu_{\tilde{C}}^+(x_i)| \right| \\
&+ w_i^{\pi^-} \left| |\pi_{\tilde{A}}^-(x_i) - \pi_{\tilde{C}}^-(x_i)| - |\pi_{\tilde{B}}^-(x_i) - \pi_{\tilde{C}}^-(x_i)| \right| \\
&+ w_i^{\pi^+} \left| |\pi_{\tilde{A}}^+(x_i) - \pi_{\tilde{C}}^+(x_i)| - |\pi_{\tilde{B}}^+(x_i) - \pi_{\tilde{C}}^+(x_i)| \right| \\
&= |D(\tilde{A}, \tilde{C}) - D(\tilde{B}, \tilde{C})|.
\end{aligned}$$

از این رو

$$|D(\tilde{A}, \tilde{C}) - D(\tilde{B}, \tilde{C})| \leq D(\tilde{A}, \tilde{B}) \leq \epsilon.$$

□

اگر چه اندازه فاصله های ارائه شده در بخش (۲.۳)، همگی دارای مزایایی کاربردی برای مسائل مختلف تحقیق در عملیات هستند، با این حال همان گونه که از ضوابط متناظر با آنها مشخص است اغلب دارای فرمول هایی به مراتب طولانی تر از اندازه فاصله پیشنهادی هستند. همچنین، برخی از آنها همچون اندازه $s_1(\tilde{A}, \tilde{B})$ ، $s_5(\tilde{A}, \tilde{B})$ ، $s_4(\tilde{A}, \tilde{B})$ و $s_V(\tilde{A}, \tilde{B})$ نیاز به محاسباتی پیش نیاز برای جایگذاری در رابطه اصلی دارند. علاوه براین، اندازه فاصله $s_1(\tilde{A}, \tilde{B})$ برای حالت هایی که $\delta_1 = \alpha_1 = 0$ ، یا $\beta_1 = \gamma_1 = 0$ و یا هر دو حالت با هم روی دهند، مقداری غیرمنطقی به دست می دهد و از این رو نمی تواند در تمامی مواقع عملکرد مناسبی از خود نشان دهد. به عنوان نمونه برای دو عدد فازی شهودی بازه ای مقدار $\tilde{A} = \langle [0, 0], [0/5, 0/6], [0, 0] \rangle$ و $\tilde{B} = \langle [0, 0], [0/3, 0/8], [0, 0] \rangle$ مقدار اندازه شباهت تعریف نشده است. به منظور بررسی دقیق تر مقدار شباهت برای برخی اعداد به کمک اندازه های مروری و اندازه پیشنهادی در جدول ۱ به دست آمده است. مقادیر حاصل برای اندازه پیشنهادی با وزن های $0/75$ و $0/25$ محاسبه شده اند و تمایز مناسبی بین نمونه ها از خود نشان می دهد. همان گونه که مشاهده می شود خروجی s_4 و s_3 برای تمامی نمونه های ذکر شده در اینجا، مقادیر یکسانی به دست آورده اند. برای s_4 نیز در ستون دوم و سوم مقادیر یکسانی حاصل شده است. علاوه براین، s_5 برای دو عدد نامساوی در ستون اول مقدار یک را نشان می دهد که مقداری غیرمنطقی است. روشهای s_6 و s_7 ، اگر چه تمایز مناسبتری از خود نشان می دهند، اما حجم محاسبات به مراتب بالاتری نسبت به اندازه پیشنهادی دارند.

جدول ۱: مقایسه عملکرد اندازه شباهت های موجود و اندازه پیشنهادی.

$\langle [0/3, 0/4], [0/4, 0/6] \rangle$	$\langle [0/3, 0/4], [0/3, 0/5] \rangle$	$\langle [0/3, 0/4], [0/4, 0/6] \rangle$	\tilde{A}
$\langle [0/2, 0/3], [0/3, 0/5] \rangle$	$\langle [0/2, 0/3], [0/4, 0/6] \rangle$	$\langle [0/2, 0/3], [0/4, 0/6] \rangle$	\tilde{B}
۰/۹۹	۰/۹۶	۰/۹۸	s_1
۰/۹۰	۰/۹۰	۰/۹۰	s_2
۰/۹۰	۰/۹۰	۰/۹۰	s_3
۰/۸۲	۰/۸۲	۰/۹۱	s_4
۰/۹۵	۰/۹۸	۱/۰۰	s_5
۰/۸۰	۰/۹۰	۰/۹۵	s_6
۰/۹۵	۰/۹۷	۰/۹۹	s_7
۰/۷۵	۰/۸۵	۰/۸۰	s_{new}

۳. کاربردها و تحلیل مقایسه ای

اکنون قصد داریم عملکرد و کارایی اندازه ارائه شده در بخش پیشین را در مثال‌هایی کاربردی از تصمیم‌گیری و تشخیص پزشکی به همراه تحلیل‌هایی مقایسه‌ای نشان دهیم.

۱.۳ کاربرد در تصمیم‌گیری چند معیاره. در این قسمت می‌خواهیم اندازه پیشنهادی را در مدلی ترکیبی برای حل مسئله تصمیم‌گیری چندمعیاره به کار ببریم. تکنیک اولویت بندی براساس شباهت به راه حل ایده آل که به عنوان روش تاپسیس در حل مسائل تصمیم‌گیری چندمعیاره انفرادی و گروهی شناخته می‌شود، از مهمترین و پراستنادترین روشهای مبتنی بر فاصله است که به رتبه بندی گزینه می‌پردازد. این روش شاخص و مفهومی به نام نزدیکی (شباهت) به جواب ایده آل مثبت و دوری (عدم شباهت) از جواب ایده آل منفی را تعریف می‌کند، که معمولاً به نام ضریب نزدیکی نسبی شناخته می‌شود. از این رو، گزینه‌ای که حداکثر شباهت را به جواب ایده آل مثبت و بیشترین فاصله را از جواب ایده آل منفی دارد، انتخاب می‌کند. به این معنا که گزینه‌ای با بیشترین درجه نزدیکی نسبی به عنوان گزینه مطلوب برگزیده می‌شود. در این روش می‌توان علاوه بر اندازه شباهت از اندازه فاصله نیز استفاده کرد. برخی از فرضیات اولیه که باید در این رویکرد رعایت شوند عبارتند از:

(۱) میزان مطلوبیت در هر معیار به صورت یکنواخت و انواع افزایشی یا کاهششی باشد. تا بتوانیم برترین ارزش موجود در آن معیار را به عنوان ایده آل مثبت و بدترین ارزش موجود در آن معیار را به عنوان ایده آل منفی در نظر بگیریم.

(۲) تمامی معیارها باید طوری مطرح شوند که عملکردی مستقل از یکدیگر داشته باشند. به این معنا که میزان افزایش یا کاهش مقادیر در یک معیار بر میزان مقادیر در سایر معیارها تاثیرگذار نباشد. از آنجا که روش تاپسیس تنها برای رتبه بندی گزینه ها به کار برده می شود قابلیت ترکیب الگوریتم های مربوط به وزندهی معیارها را نیز دارد. از سوی دیگر نسخه های مختلفی از این روش براساس نحوه نرمال سازی داده ها، استفاده اندازه شباهت یا اندازه های فاصله مختلف ابداع شده است. از دیگر مزایای این روش می توان به موارد زیر اشاره کرد:

- امکان استفاده از معیارهای مثبت (سود) و منفی (هزینه) به صورت همزمان در یک مسئله مهیا است. نقش ایده آل مثبت و ایده آل منفی در این زمینه کمک کننده می باشد.

- روش با افزایش تعداد معیارها و گزینه ها همچنان عملکرد قابل قبولی دارد.

(۳) نه تنها گزینه برتر، بلکه تمامی گزینه ها در این روش رتبه بندی می شوند.

(۴) با توجه به پایه ریاضی به کار رفته در محاسبه ضریب نزدیکی نسبی انتخاب گزینه بهینه به صورتی منطقی انجام می شود.

(۵) وزن تمامی معیارها در تصمیم گیری دخالت داده می شود.

(۶) سادگی محاسبات و سرعت بالا حل مسائل با ابعاد بالا را میسر می سازد.

فرض کنید مجموعه ای از گزینه ها مانند $\tilde{A} = \{\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \dots, \tilde{A}_m\}$ و مجموعه ای از معیارها مانند $\tilde{C} = \{\tilde{C}_1, \tilde{C}_2, \dots, \tilde{C}_n\}$ داشته باشیم به گونه ای که هر گزینه عدد فازی شهودی بازه ای مقدار دارای نمایشی به صورت زیر باشد:

$$\tilde{A}_i = \left\{ \langle \tilde{C}_j, [\mu_{ij}^-(x_i), \mu_{ij}^+(x_i)], [\nu_{ij}^-(x_i), \nu_{ij}^+(x_i)] \rangle \mid \tilde{C}_j \in \tilde{C} \right\}, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

الگوریتم زیر با استفاده از رابطه (۱.۳) برای حل مسئله تصمیم گیری چند معیاره به کار برده می شود:

گام ۱: ایده ال مثبت و منفی را به صورت زیر بیابید:

$$\begin{aligned} \tilde{A}^+ = & \left\{ \left(\tilde{C}_1, \langle [\mu_{\gamma+}^-(x_i), \mu_{\gamma+}^+(x_i)], [\nu_{\gamma+}^-(x_i), \nu_{\gamma+}^+(x_i)] \rangle \right), \right. \\ & \left(\tilde{C}_r, \langle [\mu_{\gamma+}^-(x_i), \mu_{\gamma+}^+(x_i)], [\nu_{\gamma+}^-(x_i), \nu_{\gamma+}^+(x_i)] \rangle \right), \dots, \\ & \left. \left(\tilde{C}_n, \langle [\mu_{n+}^-(x_i), \mu_{n+}^+(x_i)], [\nu_{n+}^-(x_i), \nu_{n+}^+(x_i)] \rangle \right) \right\} \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned} \tilde{A}^- = & \left\{ \left(\tilde{C}_1, \langle [\mu_{\gamma-}^-(x_i), \mu_{\gamma-}^+(x_i)], [\nu_{\gamma-}^-(x_i), \nu_{\gamma-}^+(x_i)] \rangle \right), \right. \\ & \left(\tilde{C}_r, \langle [\mu_{\gamma-}^-(x_i), \mu_{\gamma-}^+(x_i)], [\nu_{\gamma-}^-(x_i), \nu_{\gamma-}^+(x_i)] \rangle \right), \dots, \\ & \left. \left(\tilde{C}_n, \langle [\mu_{n-}^-(x_i), \mu_{n-}^+(x_i)], [\nu_{n-}^-(x_i), \nu_{n-}^+(x_i)] \rangle \right) \right\} \end{aligned}$$

که در آن

$$\begin{aligned} \left(\tilde{C}_j, \langle [\mu_{j+}^-(x_i), \mu_{j+}^+(x_i)], [\nu_{j+}^-(x_i), \nu_{j+}^+(x_i)] \rangle \right) = & \left(\tilde{C}_j, \left[\max_i \mu_{ij}^-(x_i), \max_i \mu_{ij}^+(x_i) \right], \right. \\ & \left. \left[\min_i \nu_{ij}^-(x_i), \min_i \nu_{ij}^+(x_i) \right] \right) \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned} \left(\tilde{C}_j, \langle [\mu_{j-}^-(x_i), \mu_{j-}^+(x_i)], [\nu_{j-}^-(x_i), \nu_{j-}^+(x_i)] \rangle \right) = & \left(\tilde{C}_j, \left[\max_i \mu_{ij}^-(x_i), \max_i \mu_{ij}^+(x_i) \right], \right. \\ & \left. \left[\min_i \nu_{ij}^-(x_i), \min_i \nu_{ij}^+(x_i) \right] \right) \end{aligned}$$

گام ۲: درجه شباهت بین هر گزینه و ایده ال مثبت، $S(\tilde{A}_i, \tilde{A}^+)$ و همین طور درجه شباهت بین هر گزینه و ایده ال منفی، $S(\tilde{A}_i, \tilde{A}^-)$ را بیابید.

گام ۳: با استفاده از مقادیر به دست آمده در گام دوم، برای $i = 1, 2, \dots, m$ درجه شباهت را براساس رابطه (۱.۳) می یابیم:

$$(۱.۳) \quad S(\tilde{A}_i) = \frac{S(\tilde{A}_i, \tilde{A}^+)}{S(\tilde{A}_i, \tilde{A}^-) + S(\tilde{A}_i, \tilde{A}^+)}$$

گام ۴: بیشترین درجه شباهت حاصل از گام ۳، بهترین گزینه انتخابی را نشان می دهد.

مثال ۱.۳ [۳۷] فرض کنید از بین ۵ توزیع کننده $(\tilde{A} = \{\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \tilde{A}_3, \tilde{A}_4, \tilde{A}_5\})$ به دنبال انتخاب بهترین آنها برای توزیع محصول خود هستیم. ارزیابی توزیع کنندگان براساس شش معیار؛ هزینه \tilde{C}_1 ، زمان ارسال \tilde{C}_2 ، کیفیت \tilde{C}_3 ، سطح تکنولوژی \tilde{C}_4 ، سطح خدمات رسانی \tilde{C}_5 و میزان همکاری \tilde{C}_6 انجام می شود. نتایج ارزیابی هر یک از توزیع کنندگان در هریک از شش معیار ذکر شده توسط کارشناسان با داده های فازی شهودی بازه ای مقدار مطابق جدول

جدول ۲: اطلاعات توزیع کنندگان در شش معیار با اعداد فازی شهودی بازه ای مقدار.

C_j/A_i	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
\tilde{C}_1	$([0.4, 0.5], [0.2, 0.3])$	$([0.5, 0.7], [0.1, 0.2])$	$([0.2, 0.3], [0.6, 0.7])$	$([0.5, 0.6], [0.1, 0.2])$	$([0.4, 0.5], [0.3, 0.4])$
\tilde{C}_2	$([0.6, 0.8], [0.1, 0.2])$	$([0.6, 0.8], [0.1, 0.2])$	$([0.4, 0.5], [0.3, 0.4])$	$([0.3, 0.4], [0.2, 0.3])$	$([0.8, 0.9], [0.0, 0.1])$
\tilde{C}_3	$([0.4, 0.5], [0.2, 0.4])$	$([0.3, 0.4], [0.4, 0.6])$	$([0.7, 0.8], [0.1, 0.2])$	$([0.5, 0.8], [0.1, 0.2])$	$([0.6, 0.8], [0.1, 0.2])$
\tilde{C}_4	$([0.8, 0.9], [0.1, 0.1])$	$([0.8, 0.9], [0.0, 0.1])$	$([0.2, 0.5], [0.1, 0.2])$	$([0.6, 0.7], [0.1, 0.2])$	$([0.8, 0.9], [0.0, 0.1])$
\tilde{C}_5	$([0.2, 0.6], [0.2, 0.3])$	$([0.2, 0.5], [0.3, 0.4])$	$([0.7, 0.8], [0.0, 0.1])$	$([0.3, 0.4], [0.3, 0.4])$	$([0.7, 0.8], [0.1, 0.2])$
\tilde{C}_6	$([0.5, 0.7], [0.1, 0.2])$	$([0.1, 0.2], [0.4, 0.5])$	$([0.5, 0.6], [0.2, 0.4])$	$([0.1, 0.2], [0.7, 0.8])$	$([0.5, 0.6], [0.1, 0.2])$

۲ آورده شده است.

برای حل گام‌های الگوریتم تصمیم‌گیری چند معیاره را به ترتیب اجرا می‌کنیم.
گام ۱: ایده ال مثبت و منفی را بر اساس اطلاعات جدول به صورت زیر می‌یابیم:

$$\begin{aligned} \bar{A}^+ = \{ & (\tilde{C}_1, ([0.5, 0.7], [0.1, 0.2])), (\tilde{C}_2, ([0.8, 0.9], [0.0, 0.1])), \\ & (\tilde{C}_3, ([0.7, 0.8], [0.1, 0.2])), (\tilde{C}_4, ([0.8, 0.9], [0.0, 0.1])), \\ & (\tilde{C}_5, ([0.7, 0.8], [0.0, 0.1])), (\tilde{C}_6, ([0.5, 0.7], [0.1, 0.2])) \} \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned} \bar{A}^- = \{ & (\tilde{C}_1, ([0.2, 0.3], [0.6, 0.7])), (\tilde{C}_2, ([0.3, 0.4], [0.3, 0.4])), \\ & (\tilde{C}_3, ([0.3, 0.4], [0.4, 0.6])), (\tilde{C}_4, ([0.2, 0.5], [0.1, 0.2])), \\ & (\tilde{C}_5, ([0.2, 0.4], [0.3, 0.4])), (\tilde{C}_6, ([0.1, 0.2], [0.7, 0.8])) \} \end{aligned}$$

گام ۲: نتایج مربوط به درجه شباهت هر گزینه و ایده ال مثبت، همین‌طور درجه شباهت هر گزینه و ایده ال در جدول ۳ آورده شده است:

$$S(\tilde{A}_i) = \frac{S(\tilde{A}_i, \bar{A}^+)}{S(\tilde{A}_i, \bar{A}^-) + S(\tilde{A}_i, \bar{A}^+)}$$

گام ۳: با استفاده از مقادیر به دست آمده در گام دوم، برای $i = 1, 2, \dots, m$ درجه شباهت $S(\tilde{A}_i)$ را برای هر یک از گزینه‌ها می‌یابیم.

گام ۴: رتبه بهترین گزینه مربوط به توزیع‌کننده \tilde{A}_5 با مقدار 0.5705 است.

۱.۱.۳. تحلیل مقایسه‌ای. در قسمت مروری بر برخی از اندازه‌ها برای مجموعه‌های فازی شهودی بازه ای مقدار، فرمول‌های متناسب با هفت نوع اندازه مطرح در ادبیات موضوعی پژوهش به تفصیل آورده شد. در اینجا برای مقایسه نتایج حاصل از اندازه تعریف شده نوین با اندازه‌های پیشین، قصد داریم مثال ارائه شده در بخش قبل را به کمک اندازه‌های موجود حل کنیم. خلاصه نتایج حل در جدول ۴ ذکر شده است.

جدول ۳: نتایج اجرای گامهای ۲-۴.

	$S(\tilde{A}_i, \tilde{A}^-)$	$S(\tilde{A}_i, \tilde{A}^+)$	$S(\tilde{A}_i)$	بهترین گزینه
\tilde{A}_1	۰/۷۹۵۰	۰/۸۸۷۵	۰/۵۲۷۵	
\tilde{A}_2	۰/۸۴۶۹	۰/۸۳۸۱	۰/۴۹۷۴	
\tilde{A}_3	۰/۸۴۳۷	۰/۸۴۳۷	۰/۵۰۰۰	\tilde{A}_5
\tilde{A}_4	۰/۸۸۵۰	۰/۷۹۸۷	۰/۴۷۴۴	
\tilde{A}_5	۰/۷۲۸۷	۰/۹۶۸۱	۰/۵۷۰۵	

جدول ۴: نتایج تصمیم گیری چندمعیاره بر مبنای اندازه های تشابه متنوع.

$S/S(\tilde{A}_i, P)$	$S(\tilde{A}_1)$	$S(\tilde{A}_2)$	$S(\tilde{A}_3)$	$S(\tilde{A}_4)$	$S(\tilde{A}_5)$	بهترین انتخاب
S_1	۰/۵۷	۰/۴۹	۰/۵۰	۰/۴۵	۰/۶۶	\tilde{A}_5
S_2	۰/۵۲	۰/۵۰	۰/۴۹	۰/۴۸	۰/۵۶	\tilde{A}_5
S_3	۰/۵۵	۰/۴۶	۰/۵۳	۰/۴۸	۰/۶۴	\tilde{A}_5
S_4	۰/۵۴	۰/۵۰	۰/۴۹	۰/۴۸	۰/۵۸	\tilde{A}_5
S_5	۰/۵۰	۰/۴۹	۰/۵۰	۰/۴۹	۰/۵۰	\tilde{A}_5
S_6	۰/۵۴	۰/۴۸	۰/۵۱	۰/۴۸	۰/۵۶	\tilde{A}_5
S_7	۰/۵۴	۰/۵۰	۰/۵۱	۰/۴۹	۰/۵۵	\tilde{A}_5
S_{new}	۰/۵۲	۰/۴۹	۰/۵۰	۰/۴۷	۰/۵۷	\tilde{A}_5

همانگونه که از داده های جدول استنباط می شود نتیجه نهایی تمامی روش ها پاسخی یکسان می باشد. علاوه براین در تمامی روش ها روابط زیر بین رتبه متناظر با هر یک از توزیع کنندگان برقرار است.

$$S(\tilde{A}_4) \leq S(\tilde{A}_2) \leq S(\tilde{A}_3) \leq S(\tilde{A}_1) \leq S(\tilde{A}_5)$$

۲.۳ کاربرد در تشخیص بیماری ها. کاربردهایی از عدم قطعیت در تشخیص پزشکی در ادبیات موضوعی پژوهش ذکر شد. در این قسمت، الگوریتمی برای نحوه تشخیص بیماری به کمک این اندازه نوین آورده می شود.

گام ۱:

الف) مجموعه ای از نشانه های بیماری ها را مشخص کنید. $(X = \{x_1, x_2, \dots, x_m\})$

ب) مجموعه ای از بیماریها را در نظر بگیرید. ($\bar{D} = \{\bar{D}_1, \bar{D}_2, \dots, \bar{D}_n\}$)
 ج) نشانه های هر بیماری را با داده های فازی شهودی بازه ای مقدار مشخص کنید.

گام ۲: علامت های بیمار (ورودی) را تعیین کنید.

گام ۳: شباهت میان نشانه های فرد بیمار و هر یک از بیماریها را با استفاده از رابطه و (۱.۳) بیابید.

گام ۴: بیشترین شباهت بین نشانه‌های بیمار و بیماری به عنوان تشخیص در نظر گرفته می شود.

مثال ۲.۳. [۳۰] فرض کنید مجموعه بیماری‌های مورد بررسی ما شامل چهار بیماری $\bar{D} = \{\bar{D}_1, \bar{D}_2, \bar{D}_3, \bar{D}_4\}$ باشند، که اصلی ترین نشانه های این نوع از بیماریها در مجموعه $X = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ آورده شده است. میزان هریک از نشانه‌های مربوط به هر بیماری با مجموعه ای از نوع فازی شهودی بازه ای مقدار در جدول ۵ نشان داده شده است. بیمار P با علائمی که در سطر پایانی جدول ۵ مشاهده می‌شود، مراجعه می‌کند. تشخیص بیماری به چه صورت خواهد بود.

جدول ۵: اطلاعات مربوط به علائم بیماری ها با داده های فازی شهودی بازه ای مقدار.

بیماری	علائم بیماری ها			
	درجه حرارت	سرفه	سردرد	درد معده
	x_1	x_2	x_3	x_4
D_1	$\langle\langle 0.10, 0.50 \rangle, \langle 0.20, 0.30 \rangle\rangle$	$\langle\langle 0.10, 0.30 \rangle, \langle 0.00, 0.20 \rangle\rangle$	$\langle\langle 0.30, 0.50 \rangle, \langle 0.20, 0.40 \rangle\rangle$	$\langle\langle 0.20, 0.50 \rangle, \langle 0.10, 0.30 \rangle\rangle$
D_2	$\langle\langle 0.20, 0.40 \rangle, \langle 0.15, 0.35 \rangle\rangle$	$\langle\langle 0.20, 0.20 \rangle, \langle 0.05, 0.15 \rangle\rangle$	$\langle\langle 0.20, 0.60 \rangle, \langle 0.30, 0.30 \rangle\rangle$	$\langle\langle 0.30, 0.40 \rangle, \langle 0.15, 0.25 \rangle\rangle$
D_3	$\langle\langle 0.15, 0.30 \rangle, \langle 0.30, 0.40 \rangle\rangle$	$\langle\langle 0.20, 0.40 \rangle, \langle 0.50, 0.60 \rangle\rangle$	$\langle\langle 0.50, 0.60 \rangle, \langle 0.15, 0.35 \rangle\rangle$	$\langle\langle 0.25, 0.45 \rangle, \langle 0.30, 0.40 \rangle\rangle$
D_4	$\langle\langle 0.20, 0.35 \rangle, \langle 0.10, 0.65 \rangle\rangle$	$\langle\langle 0.35, 0.60 \rangle, \langle 0.05, 0.30 \rangle\rangle$	$\langle\langle 0.15, 0.30 \rangle, \langle 0.40, 0.55 \rangle\rangle$	$\langle\langle 0.15, 0.25 \rangle, \langle 0.45, 0.55 \rangle\rangle$
P	$\langle\langle 0.30, 0.40 \rangle, \langle 0.10, 0.50 \rangle\rangle$	$\langle\langle 0.10, 0.40 \rangle, \langle 0.25, 0.40 \rangle\rangle$	$\langle\langle 0.20, 0.30 \rangle, \langle 0.10, 0.35 \rangle\rangle$	$\langle\langle 0.15, 0.40 \rangle, \langle 0.20, 0.50 \rangle\rangle$

با استفاده از ضابطه (۱.۳) روابط بین نشانه‌های فرد بیمار P و نشانه‌های هر یک از بیماریها را می‌یابیم:

$$S(D_1, P) = 0.87, S(D_2, P) = 0.93, S(D_3, P) = 0.90, S(D_4, P) = 0.88$$

نتایج ذکر شده با وزن ۰/۹ برای مقدار درستی و وزن ۰/۱ برای تردید به دست آمده اند. بیشترین مقدار یعنی ۰/۹۳ مربوط به $S(D_2, P)$ است. از این رو تشخیص بیماری D_2 برای فرد بیمار بیشتر است.

۱.۲.۳. تحلیل مقایسه ای. اگر مثال مربوط به تشخیص بیماری را با استفاده از اندازه های ارائه شده در قسمت مروری بر برخی از اندازه ها برای مجموعه های فازی شهودی بازه ای مقدار، حل کنیم، نتایجی مانند آنچه در جدول ۶ آورده شده است را به دست می آوریم.

جدول ۶: نتایج تشخیص بیماری بر مبنای اندازه های تشابه متنوع.

$S/S(D, P)$	$S(D_1, P)$	$S(D_2, P)$	$S(D_3, P)$	$S(D_4, P)$	نتیجه تشخیص
S_1	۰/۸۱	۰/۸۹	۰/۸۶	۰/۸۴	D_2
S_2	۰/۷۳	۰/۸۰	۰/۷۸	۰/۷۳	D_2
S_3	۰/۸۲	۰/۸۰	۰/۷۹	۰/۷۷	D_2
S_4	۰/۸۲	۰/۹۱	۰/۸۶	۰/۸۴	D_2
S_5	۰/۸۳	۰/۸۹	۰/۸۷	۰/۸۵	D_2
S_6	۰/۹۳	۰/۹۷	۰/۹۶	۰/۹۴	D_2
S_7	۰/۹۴	۰/۹۸	۰/۹۷	۰/۹۶	D_2
$S_{new}(0.9, 0.1)$	۰/۸۷	۰/۹۳	۰/۹۰	۰/۸۸	D_2
$S_{new}(0.8, 0.2)$	۰/۸۸	۰/۹۳	۰/۹۱	۰/۸۹	D_2
$S_{new}(0.7, 0.3)$	۰/۸۸	۰/۹۳	۰/۹۱	۰/۸۹	D_2
$S_{new}(0.6, 0.4)$	۰/۸۹	۰/۹۳	۰/۹۱	۰/۸۹	D_2

داده های اطلاعات جدول ۶ شباهت بین نشانه های بیماری در فرد را با علامت های مربوط به هر یک از بیماریها، با بهره گیری از اندازه های مطرح نشان میدهد. یافته های حاصل از اندازه نوین (با وزن های مختلف) مشابه اغلب نتایج پیشین در ادبیات پژوهشی مورد نظر است. تشخیص و پیش بینی حاصل از به کارگیری رابطه (۲۴.۲) و (۹.۲)، مطابق جدول ۶ نامساوی زیر را نشان می دهد:

$$S(D_2, P) \geq S(D_3, P) \geq S(D_4, P) \geq S(D_1, P)$$

لازم به ذکر است این نامساوی به صورتی دقیق برای تمامی اندازه های پیشین به استثنای S_3 ، که در آن $S(D_4, P) \geq S(D_1, P)$ نمی باشد صدق می کند. با این حال در تمامی اندازه ها بهترین تشخیص یکسان و مربوط به بیماری نوع D_2 است.

۳.۳. انتخاب ماسک برای محافظت در برابر ویروس کرونا. با توجه به شیوع روز افزون بیماریهای واگیرداره ویژه گسترش ویروس کرونا و سویه های مختلف آن در چند سال گذشته،

انتخاب ماسک برای محافظت افراد در برابر بیماری‌های واگیردار اهمیت بسیاری یافته است. گوهین و همکاران [۳۴] در پژوهش خود چهار ویژگی شامل عمر مفید ماسک، میزان نشستی، کیفیت مواد اولیه، قابلیت فیلترکردن هوا، را به عنوان مهمترین ویژگی‌ها برای انتخاب گزینه‌های موجود در بازار در نظر گرفتند. آنها ارزیابی برای شش نوع ماسک موجود در بازار را به صورت اعداد فازی شهودی در هر یک از معیارها انجام دادند. اکنون قصد داریم با توجه به معیارهای پیشنهادی آنها، مسئله را تحت اعداد فازی شهودی بازه‌ای مقدار گسترش دهیم. برای این منظور ماسک‌های موجود در بازار را براساس اعداد فازی شهودی بازه‌ای مقدار مطابق جدول ۷، ارزیابی کرده‌ایم.

جدول ۷: ارزیابی شش نوع ماسک در چهار ویژگی با داده‌های فازی شهودی بازه‌ای مقدار.

ماسک‌ها	ویژگی‌ها			
	عمر مفید ماسک	میزان نشستی	کیفیت مواد اولیه	قابلیت فیلترکردن هوا
	x_1	x_2	x_3	x_4
D_1	$\langle [0.6, 0.7], [0.2, 0.3] \rangle$	$\langle [0.2, 0.3], [0.5, 0.6] \rangle$	$\langle [0.5, 0.6], [0.3, 0.4] \rangle$	$\langle [0.2, 0.3], [0.1, 0.2] \rangle$
D_2	$\langle [0.7, 0.8], [0.1, 0.2] \rangle$	$\langle [0.5, 0.6], [0.3, 0.4] \rangle$	$\langle [0.1, 0.2], [0.3, 0.4] \rangle$	$\langle [0.2, 0.3], [0.5, 0.6] \rangle$
D_3	$\langle [0.5, 0.6], [0.3, 0.4] \rangle$	$\langle [0.2, 0.3], [0.5, 0.6] \rangle$	$\langle [0.2, 0.3], [0.1, 0.2] \rangle$	$\langle [0.6, 0.7], [0.2, 0.3] \rangle$
D_4	$\langle [0.2, 0.3], [0.5, 0.6] \rangle$	$\langle [0.5, 0.6], [0.2, 0.3] \rangle$	$\langle [0.3, 0.4], [0.2, 0.3] \rangle$	$\langle [0.2, 0.3], [0.1, 0.2] \rangle$
D_5	$\langle [0.3, 0.4], [0.1, 0.2] \rangle$	$\langle [0.8, 0.9], [0.0, 0.1] \rangle$	$\langle [0.7, 0.8], [0.1, 0.2] \rangle$	$\langle [0.5, 0.6], [0.3, 0.4] \rangle$
D_6	$\langle [0.5, 0.6], [0.2, 0.3] \rangle$	$\langle [0.3, 0.4], [0.5, 0.6] \rangle$	$\langle [0.2, 0.3], [0.3, 0.4] \rangle$	$\langle [0.1, 0.2], [0.4, 0.5] \rangle$

یافته‌ها نشان می‌دهد که $D_5 > D_1 > D_3 > D_2 > D_4 > D_6$ ، از این رو ماسک شماره پنجم گزینه بهتری برای محافظت در برابر بیماری‌های واگیردار است.

۴. نتیجه‌گیری

در این تحقیق، با معرفی ساختاری مفهومی یک نوع اندازه فاصله نوین و کارآمد برای مقایسه اعداد فازی شهودی بازه‌ای مقدار ارائه شد. یافته‌های بخش ۲ و ۳، تاییدی بر فرضیه‌های پژوهش، نوآوری اندازه پیشنهادی و قابلیت به کارگیری آن در حل مسائل گوناگونی در حوزه تصمیم‌گیری است. با توجه به ارتباط بین اندازه‌های فاصله و شباهت، می‌توان اندازه‌های شباهت جدیدی بر مبنای اندازه فاصله تعریف کرد. همان‌گونه که در قضیه ۸.۲ نشان داده شد، اندازه‌های فاصله جدید در اصول موضوعی اندازه صدق می‌کنند. از این رو، در ترکیب با فرآیندهای وابسته به اندازه عملکرد مناسبی می‌تواند از خود نشان دهد. لازم به ذکر است،

ضرایب وزنی در اندازه تعریفی انعطاف پذیری بالاتری برای پاسخ‌دهی از جانب تصمیم گیرنده فراهم کرده است. مثال‌هایی کاربردی از به ادبیات موضوعی پژوهش در حوزه تصمیم‌گیری چند معیاره، تشخیص پزشکی و رتبه بندی ماسک‌های محافظ انتخاب شد. با بهره‌گیری از این اندازه فاصله در الگوریتم‌های ترکیبی، مثال‌هایی مطرح و کاربردی حل شد. نتایج به دست آمده از این پژوهش نتایجی مشابه با عملکرد روش‌های موجود در ادبیات موضوعی پژوهش را در حین کاهش حجم محاسبات نشان داد.

برای پژوهش‌های آینده، گسترش این ایده و امکان ترکیب با الگوریتم‌های مشابه در حوزه خوشه بندی و طبقه بندی داده‌ها می‌تواند مورد توجه محققان باشد. با توجه به آنچه تاکنون ذکر شد خواص اندازه پیشنهادی را می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

- اندازه فاصله پیشنهادی در تمامی اصول اندازه را برقرار می‌سازد.
- محاسبات به کار رفته در اندازه پیشنهادی به مراتب کمتر از سایر روشها است.
- ضابطه پیشنهادی، ساختار به مراتب ساده تری نسبت به اغلب اندازه‌های موجود دارد.
- اندازه تشابه جدیدی براساس اندازه فاصله پیشنهادی در رابطه (۲.۲۵) تعریف کرده ایم.
- اندازه فاصله پیشنهادی عملکرد مناسبی در الگوریتم‌های تصمیم‌گیری مبتنی بر فاصله و شباهت به ویژه روش تاپسیس دارد.
- اندازه تشابه پیشنهادی در فرآیند تشخیص بیماری کاربردی دقیقی از خود در مقایسه با روشهای موجود نشان داده است.
- در مثال انتخاب ماسک محافظ مطلوب در برابر بیماریها، به عنوان یکی از موارد موثر در پیشگیری از بیماریهای واگیردار نتیجه‌ای منطقی به دست آمده است.

مراجع

- [1] Ali, J. and Naeem, M. (2022), Distance and similarity measures for normal wiggly dual hesitant fuzzy sets and their application in medical diagnosis. *Sci Rep* 12, 13784. <https://doi.org/10.1038/s41598-022-16078-6>.
- [2] Alias, S., Mohamad, D., Shuib, A., MohdYusoff, N.S., AbdRhani, N. and Fitriah-Mohamad, S.N. (2022), Medical Diagnosis via Distance-based Similarity Measure for Rough Neutrosophic Set. *Neutrosophic Sets and Systems*, 46, 142-150. Retrieved from <http://fs.unm.edu/NSS2/index.php/111/article/view/1948>.

- [3] Alkan, N. and Kahraman, C. (2021), Circular intuitionistic fuzzy topsis method: pandemic hospital location selection. *J. Intell. Fuzzy Syst.* <https://doi.org/10.3233/JIFS-219193>
- [4] Atanassov, K.T. (1986), Intuitionistic fuzzy sets, *Fuzzy Sets Syst.* 20, 87–96.
- [5] Atanassov, K. and Gargov, G. (1989), Interval-valued intuitionistic fuzzy sets, *Fuzzy Sets and Systems* 31, 343–349.
- [6] Atanassov, K.T. (1999), Interval valued intuitionistic fuzzy sets. In *Intuitionistic fuzzy sets*, 35, (pp. 139-177). *Physica, Heidelberg.* <https://doi.org/10.1007/978-3-7908-1870-3-2>
- [7] Bakbak, D. and Ulucay, V. (2019), Multicriteria decision-making method using the cosine vector similarity measure under intuitionistic trapezoidal fuzzy multi-numbers in architecture. In: 6th international multidisciplinary studies congress (Multicongress'19), Gaziantep.
- [8] Boran F.E. and Akay, D. (2014), A biparametric similarity measure on intuitionistic fuzzy sets with applications to pattern recognition. *Inf. Sci.*, 255, 45–57.
- [9] Broumi, S., Mamoni, D., Abdellah, B., Assia, B. and Mohamed, T. (2022), Medical Diagnosis Problems Based on Neutrosophic Sets and Their Hybrid Structures: A Survey. *Neutrosophic Sets and Systems* 49, 1. <https://digitalrepository.unm.edu/nss-journal/vol49/iss1/1>.
- [10] Dhivya, J. and Sridevi, B. (2018), Similarity measure between interval-valued intuitionistic fuzzy sets and their applications to medical diagnosis and pattern recognition. *Int. J. Math. Arch.*, 9, 58–65.
- [11] Dorfeshan, Y., Tavakkoli-Moghaddam, R., Mousavi, S.M. and VahediNouri, B. (2020), A new weighted distance-based approximation methodology for flow shop scheduling group decisions under the interval valued fuzzy processing time. *Appl. Soft Comput.* 91, 106248 <https://doi.org/10.1016/j.asoc.2020.106248>
- [12] Du, W.S. and Hu, B.Q. (2015), Aggregation distance measure and its induced similarity measure between intuitionistic fuzzy sets. *Pattern Recogn Lett.* 60:65-71.
- [13] Ganie, A.H. and Singh, S. (2021), A picture fuzzy similarity measure based on direct operations and novel multi-attribute decision making method. *Neural Comput Appl* 33:9199–9219.
- [14] Garg, H. and Rani, D. (2021), Novel similarity measure based on the transformed right-angled triangles between intuitionistic fuzzy sets and its applications. *Cogn Comput* 13, 447–465.
- [15] Gohain, B., Dutta, P., Gogoi, S. and Chutia, R. (2021), Construction and generation of distance and similarity measures for intuitionistic fuzzy sets and various applications. *Int J Intell Syst* 36(12):7805– 7838. <https://doi.org/10.1002/int.22608>
- [16] Grzegorzewski, P. (2004), Distances between intuitionistic fuzzy sets and / or interval-valued fuzzy sets based on the Hausdorff metric. *Fuzzy Sets Syst* 148:319-328.

- [17] Habib, S., Ashraf, A., Arif Butt, M. and Ahmad, M. (2021), Medical diagnosis based on single-valued neutrosophic information. *Neutrosophic Sets and Systems*, 42, 302-323.
- [18] Jafarian, E. and Rezvani, M.A. (2013), A valuation-based method for ranking the intuitionistic fuzzy numbers, *J. Intell. Fuzzy Syst.* 24 (1), 133-144.
- [19] Jain, D., Garg, R., Bansal, A. and Saini, K.K. (2016), Selection and ranking of E-learning websites using weighted distance-based approximation. *J. Comput. Educ.* 3, 193-207. <https://doi.org/10.1007/s40692-016-0061-6>
- [20] Junhua, H.u., Li, P., Yan, Y. and Haiwei, C. (2019), A group medical diagnosis model based on intuitionistic fuzzy soft sets, *Applied Soft Computing*, Volume 77, 453-466.
- [21] Khalaf, M. (2013), Medical diagnosis via interval valued intuitionistic fuzzy sets. *Ann. Fuzzy Math. Inf.*, 6, 245-249.
- [22] Lee, W.H., Tsai, J.H. and Lee, L.C. (2021), A new multiple criteria decision-making approach based on intuitionistic fuzzy sets, the weighted similarity measure, and the extended TOPSIS method. *J Internet Technol* 22(3):645-656.
- [23] Li, J. and Deng, G. (2012), The relationship between similarity measure and entropy of intuitionistic fuzzy sets. *Inf. Sci.*, 188, 314-321.
- [24] Liu, X.D., Zheng, S.H. and Xiong, F.L. (2005), Entropy and subethood for general interval-valued intuitionistic fuzzy sets. *Int. Conf. Fuzzy Syst. Knowl. Discov.*, 42-52.
- [25] Luo, M. and Liang, J. (2018), A novel similarity measure for interval-valued intuitionistic fuzzy sets and its applications. *Symmetry* 10(10):441.
- [26] Melliani, S. and Castillo, O. (2021), *Recent advances in intuitionistic fuzzy logic systems and mathematics*. Springer.
- [27] Meng, D. Zhang, X. and Qin, K. (2011), Soft rough fuzzy sets and soft fuzzy rough sets, *Comput. Math. Appl.* 62 (12), 4635-4645.
- [28] Mishra, A.R., Chandel, A. and Saeidi, P. (2021), Low-carbon tourism strategy evaluation and selection using interval-valued intuitionistic fuzzy additive ratio assessment approach based on similarity measures. *Environ Dev Sustain.* s10668-021-01746-w <https://doi.org/10.1007/>
- [29] Rajabzadeh Ghatari, A., Ghasemi, A., Azar, A. and Hosseini, R. (2018), Technical and Economic Factors in the Design Model Fuzzy Smart Priority Investment Projects for Industrial: Approach Fuzzy Expert System. *Journal of Information Technology Management*, 10(1), 23-46. doi: 10.22059/jitm.2017.230908.1998
- [30] Rathnasabapathy, P. and Palanisami, D. (2022), A theoretical development of improved cosine similarity measure for interval valued intuitionistic fuzzy sets and its applications. *J Ambient Intell Human Comput.* <https://doi.org/10.1007/s12652-022-04019-0>

- [31] Saeed, M. Ahsan, M. and Abdeljawad, T. (2021), A development of complex multi-fuzzy hypersoft set with application in MCDM based on entropy and similarity measure. *IEEE Access* 9:60026–60042.
- [32] Salimian, S. and Mousavi, S.M. (2022), A Multi-Criteria Decision-Making Model with Interval-Valued Intuitionistic Fuzzy Sets for Evaluating Digital Technology Strategies in COVID-19 Pandemic Under Uncertainty. *Arab J Sci Eng*. <https://doi.org/10.1007/s13369-022-07168-8>
- [33] Saraji, M.K., Mardani, A., Köppen, M., Mishra, A.R. and Rani, P. (2021), An extended hesitant fuzzy set using SWARA-MULTIMOORA approach to adapt online education for the control of the pandemic spread of COVID-19 in higher education institutions. *Artif. Intell. Rev*. <https://doi.org/10.1007/s10462-021-10029-9>
- [34] Shakouri, B., Abbasi Shureshjani, R., Daneshian, B. and Hosseinzadeh Lotfi, F. (2020), A Parametric Method for Ranking Intuitionistic Fuzzy Numbers and Its Application to Solve Intuitionistic Fuzzy Network Data Envelopment Analysis Models. *Complexity*, 1-25. <https://doi.org/10.1155/2020/6408613>.
- [35] Singh, P. (2012), A new method on measure of similarity between interval-valued intuitionistic fuzzy sets for pattern recognition. *J Appl Comput Math* 1(1), 1–5.
- [36] Thao, N.X. and Duong, T.T.T. (2019), Selecting target market by similar measures in interval intuitionistic fuzzy set. *Technol Econ Dev Econ* 25(5):934–950.
- [37] Wei, C.P., Wang, P. and Zhang, Y.Z. (2011), Entropy, similarity measure of interval-valued intuitionistic fuzzy sets and their applications. *Inf. Sci.*, 181, 4273–4286.
- [38] Xu, Z.S. and Chen, J. (2008), An overview of distance and similarity measures of intuitionistic fuzzy sets. *Int. J. Uncertain. Fuzziness Knowl. Based Syst.*, 16, 529–555.
- [39] Zadeh, L.A. (1965), Fuzzy sets, *Inf. Control* 8, 338–353.
- [40] Zhang, X., Zhou, B. and Li, P. (2012), A general frame for intuitionistic fuzzy rough sets, *Inform. Sci.* 216, 34–49.