سیستم های فازی و کاربردها
سال ششم، شماره دوم (پائیز و زمستان ۱۴۰۲)
صص. ۲۶۹ تا ۲۹۸

شاپای چاپی: ۲۷۱۷ـ۴۴۰۹
شاپای الکترونیکی: ۲۷۱۷ـ۳۹۸۴
DOI:10.22034/JFSA.2024.437276.1195

fـ مشتق روی جبرهای تساوی

سوگل نیازیان*
علوم پزشکی تهران، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ایران

تاریخ دریافت: ۱۴۰۲/۱۱/۰۳ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۳/۳/۲۱

نوع مقاله: علمی ـ پژوهشی

چکیده. در این مقاله، ابتدا مفاهیم fـ مشتق درونی و بیرونی را روی یک جبر تساوی مانند E تعریف و با استفاده از این مفاهیم، fـ مشتق را معرفی خواهیم کرد. سپس برخی ویژگی‌های fـ مشتق (درونی و بیرونی) را بررسی و شرایط لازم که به ما کمک خواهند کرد تا مفهوم fـ مشتق را روی یک جبر تساوی به‌دست آوریم، را مطالعه خواهیم کرد. همچنین مفهوم هسته و مجموعه نقطه ثابت از fـ مشتق روی یک جبر تساوی E را تعریف و ثابت خواهیم کرد که تحت چه شرایطی آن‌ها می‌توانند فیلتر باشند. بعلاوه، ثابت خواهیم کرد که تحت شرایط خاص، رابطه هم‌ارزی تولید شده توسط فیلتر F در E با رابطه هم‌ارزی تولید شده توسط تصویر فیلتر F توسط درون‌ریختی f در E با fـ مشتق منطبق است. در پایان، با استفاده از ویژگی‌های جبر تساوی، دو fـ مشتق بیرونی خواهیم ساخت و با معرفی یک عمل دوتایی $\rightarrow$ روی مجموعه همه این fـ مشتق‌های بیرونی نشان خواهیم داد که این ساختار می‌تواند یک BEـ جبر و BCKـ جبر دوگان باشد.

۱. مقدمه

مشتق موضوع مهمی برای نظریه حلقه نزدیک است و در [۱۳، ۱۸] بررسی شده است. در [۱۲]، نویسندگان مفاهیم حلقه نزدیک را به BCI ـ جبرها تعمیم دادند. سپس محققان دیگر، زمینه جدیدی را در مورد تعمیم مشتقات و کاربرد آن‌ها در بسیاری از جبرهای منطقی

2010 *Mathematics Subject Classification.* 06F15, 06F05, 03G25
* Corresponding author
E-mails: s.niazian@iautmu.ac.ir, sniazian@yahoo.com.
عبارات و کلمات کلیدی. جبر تساوی، مشتق، fـ مشتق، مشتق بیرونی و درونی، فیلتر، BE ـ جبر، BCK ـ جبر دوگان.

آغاز کردند. به‌طور مثال، آنها مفهوم $BCI/BCK/BCC$ـجبرها، (α, β)ـ مشتقات (معمول)، fـمشتقات چپ‌ـراست (راست‌ـچپ) و (f, g)ـمشتقات را روی BCI ـ جبرها معرفی کردند. سپس برخی از ویژگی‌های اساسی آن‌ها را بررسی و رابطه بین آن‌ها را مطالعه کردند (به [۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۱۴] مراجعه کنید).

همان‌طور که می‌دانیم جبرهای منطقی مختلفی به‌عنوان نظام معنایی سیستم‌های منطقی غیرکلاسیک پیشنهاد شده است. در بین جبرهای منطقی، مشبکه‌های مانده دارای ویژگی‌های جبری جالبی هستند و شامل دو دسته مهم جبر می‌شوند: BLـجبرها و MVـجبرها. مفهوم مشبکه‌های مانده توسط وارد [۱] و دیلوورث [۲] در [۲۰] معرفی شد و اونو [۳] مشبکه‌های مانده را به‌عنوان ساختار جبری از منطق‌های زیرساختی در [۱۶] در نظر گرفت.

از آنجایی که جبر متناظر با مقادیر درست سابقه طولانی‌تری نسبت به مشبکه مانده ندارد، نوآک [۴] و دیبتس [۵] در [۱۵] مشبکه‌های مانده را تعمیم دادند و جبر خاصی به نام EQـجبر [۶] را پیشنهاد کردند. همان‌طور که می‌دانیم هر EQـجبر به‌صورت $(E, \wedge, \sim, \otimes, ۱)$ یک ساختار جبری از نوع $(۲, ۲, ۲, ۰)$ است. با حذف عمل ضرب در EQـجبرها، جبر جدیدی به نام جبر تساوی به‌دست می‌آید که توسط جنی [۷] در [۱۰] معرفی شده است. از آنجایی که جبرهای تساوی می‌توانند کاندیدای معناشناسی جبری احتمالی برای نظریه نوع فازی باشند، مطالعه آن‌ها اهمیت زیادی دارد. در [۹]، ثابت شد که هر جبر تساوی با یک BCK ـجبر $\wedge$ ـنیم‌شبکه متناظر است و هر BCK(D) ـ جبر $\wedge$ ـنیم‌شبکه با یک جبر تساوی که در آن رابطه $x \to (y \wedge z) = (x \to y) \wedge (x \to z)$ برقرار باشد، متناظر است.

در [۱۹]، نویسندگان مفهوم مشتق را در جبر تساوی E با استفاده از مفاهیم مشتقات درونی و بیرونی معرفی کردند. همچنین، آن‌ها ثابت کردند که تحت چه شرایطی هسته و مجموعه نقطه ثابت یک مشتق در E می‌توانند فیلترهایی از E باشند.

در این مقاله، ابتدا مفاهیم fـمشتق درونی و بیرونی را روی یک جبر تساوی E تعریف و با استفاده از این مفاهیم، fـمشتق را معرفی کرده‌ایم. سپس برخی ویژگی‌های fـمشتق، (درونی و بیرونی) را بررسی و شرایط لازم که به ما کمک می‌کنند تا مفهوم fـمشتق را روی

---

[1] Ward
[2] Dilworth
[3] Ono
[4] Novak
[5] De Beats
[6] EQ-algebra
[7] Jenei

جبر تساوی به‌دست آوریم را مطالعه کرده‌ایم. همچنین مفهوم هسته و مجموعه نقطه ثابت از fـ مشتق روی جبر تساوی E را تعریف و ثابت می‌کنیم تحت چه شرایطی آن‌ها می‌توانند فیلتر باشند. بعلاوه، ثابت کردیم که تحت برخی شرایط، روابط هم‌ارزی در $(E, \to, ۱)$ (جبر تساوی به همراه عمل استلزام مربوط به آن) با روابط هم‌ارزی در E با fـ مشتق منطبق است. در پایان، با استفاده از ویژگی‌های جبر تساوی، دو fـ مشتق بیرونی ساختیم و با معرفی یک عمل دوتایی "$\rightsquigarrow$" روی مجموعه همه این fـ مشتق‌های بیرونی نشان دادیم که این ساختار می‌تواند یک BEـ جبر و BCKـ جبر دوگان باشد.

۲. پیشنیاز

در این بخش، برخی از مفاهیم اساسی مربوط به جبر تساوی را جمع‌آوری می‌کنیم که در بخش‌های بعدی مورد نیاز خواهند بود.

تعریف ۱.۲. [۱۰] یک ساختار جبری $E = (E; \wedge, \sim, ۱)$ از نوع $(۲, ۲, ۰)$ را یک جبر تساوی می‌نامیم، هرگاه برای هر $x, y, z \in E$، شرایط زیر برقرار باشند:

$(E۱)$ $(E, \wedge, ۱)$ تکواره خودتوان جابه‌جایی است.

$(E۲)$ $x \sim y = y \sim x$،

$(E۳)$ $x \sim x = ۱$،

$(E۴)$ $x \sim ۱ = x$،

$(E۵)$ اگر $x \leq y \leq z$، آن‌گاه $x \sim z \leq y \sim z$ و $x \sim z \leq x \sim y$،

$(E۶)$ $x \sim y \leq (x \wedge z) \sim (y \wedge z)$،

$(E۷)$ $x \sim y \leq (x \sim z) \sim (y \sim z)$.

عملگر $\wedge$ را اینفیمم و $\sim$ را عمل تساوی می‌نامیم. در یک جبر تساوی مانند E می‌نویسیم $x \leq y$ اگروتنهااگر $x \wedge y = x$. به راحتی می‌توان مشاهده کرد که رابطه "$\leq$" یک رابطه ترتیب جزئی روی E است.

همچنین، با استفاده از عمل‌های روی جبر تساوی می‌توان دو عمل دیگر روی جبرهای تساوی به‌صورت زیر تعریف کرد:

$$x \to y = x \sim (x \wedge y) \quad \text{و} \quad x \leftrightarrow y = (x \to y) \wedge (y \to x).$$

نکته: در ادامه این مقاله، $(E, \sim, \wedge, ۱)$ یا E را یک جبر تساوی درنظر می‌گیریم.

گزاره ۲.۲. [۱۰، ۲۱] *برای هر* $x, y, z \in E$*، احکام زیر برقرار هستند:*

۱) $x \to y = ۱$ *اگروتنهااگر* $x \leq y$،

۲) $x \to ۱ = ۱,\ ۱ \to x = x,$ و $x \to x = ۱$،

۳) $y \to x \leq x$،

۴) $y \to (x \to y) \leq x$،

۵) $(x \to z) \to y = (y \to z) \to x$،

۶) $x \leq y$ *نتیجه می‌دهد که* $z \to x \leq z \to y$ *و* $y \to z \leq x \to z$،

۷) $x \to y = x \to (x \wedge y)$،

۸) $x \to y \leq (z \to x) \to (z \to y)$،

۹) $((x \to y) \to y) \to y = x \to y$،

۱۰) *اگر* $x \leq y$*، آن‌گاه* $x \sim y = y \to x$.

جبر تساوی E را کراندار می‌نامیم، هرگاه عنصر $۰ \in E$ وجود داشته باشد، به‌طوری‌که برای هر $x \in E$، $۰ \leq x$. اگر E کراندار باشد، آن‌گاه عمل یکتایی "$^-$" را روی E برای هر $x \in E$، به‌صورت $x^- = x \to ۰ = x \sim ۰$ تعریف می‌کنیم. اگر برای هر $x \in E$ داشته باشیم $x^{--} = x$، آن‌گاه E را جبر تساوی جذبی می‌نامیم.

یک جبر تساوی E را یک $\odot$ـ جبر تساوی می‌نامیم، هرگاه برای هر $a, b \in E$، مجموعه

$$E(a, b) := \{x \in E \mid a \leq b \to x\}$$

دارای کوچک‌ترین عضو به‌صورت $a \odot b$ باشد. فرض کنیم $E = (E, \wedge, \sim, ۱)$ یک جبر تساوی باشد که یک عمل دوتایی به‌صورت "$\odot$" وجود داشته باشد، به‌طوری‌که برای هر $a, b, c \in E$،

$$a \to (b \to c) = (a \odot b) \to c.$$

دراین‌صورت $E = (E, \wedge, \sim, ۱)$ یک $\odot$ـ جبر تساوی است. (منبع [۱] مشاهده شود).

گزاره ۳.۲. [۱] *اگر* E *یک* $\odot$*ـ جبر تساوی باشد، آن‌گاه برای هر* $a, b, c \in E$*، احکام زیر برقرار هستند:*

۱) $a \odot b = b \odot a$،

۲) $(a \odot b) \odot c = a \odot (b \odot c)$،

۳) *اگر* $a \leq b$*، آن‌گاه* $a \odot c \leq b \odot c$.

تعریف ۴.۲. [۲۱] جبر تساوی E را جابه‌جایی می‌نامیم، هرگاه برای هر $x, y \in E$،

$$(x \to y) \to y = (y \to x) \to x.$$

نکته. برای هر $x, y \in E$، قرار دهید:

$$x \bar{\vee} y := (x \to y) \to y. \tag{۱.۲}$$

تعریف ۵.۲. [۱۱] فرض کنیم F یک زیرمجموعه ناتهی از جبر تساوی E باشد. دراین‌صورت F یک فیلتر از E است، هرگاه برای هر $x, y \in E$ داشته باشیم

۱) اگر $x \in F$ و $x \leq y$، آن‌گاه $y \in F$؛
۲) اگر $x \in F$ و $x \sim y \in F$، آن‌گاه $y \in F$.

گزاره ۶.۲. [۱۱] *فرض کنیم F یک زیرمجموعه ناتهی از E باشد. دراین‌صورت F یک فیلتر از E، اگروتنهااگر برای هر $x, y \in E$، $۱ \in F$، و اگر $x \in F$ و $x \to y \in F$، آن‌گاه $y \in F$.*

مجموعه همه فیلترهای E را با نماد $\mathcal{F}(E)$ نشان می‌دهیم.

ملاحظه ۷.۲. [۱۰] فرض کنیم $F \in \mathcal{F}(E)$. دراین‌صورت رابطه θ_F را روی E به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$(x, y) \in \theta_F \;\Leftrightarrow\; \{x \to y, y \to x\} \subseteq F.$$

در ادامه از نماد $\equiv_F$ برای نشان دادن رابطه هم‌ارزی تولید شده توسط فیلتر F از E استفاده می‌کنیم.

تعریف ۸.۲. [۱۷] فرض کنیم $(E; \wedge_E, \sim_E, ۱_e)$ و $(Q; \wedge_Q, \sim_Q, ۱_Q)$ دو جبر تساوی باشند. دراین‌صورت نگاشت $f : E \to Q$ را یک همریختی تساوی می‌نامیم، هرگاه برای هر $x, y \in E$، شرایط زیر برقرار باشند:

$$f(x \wedge_E y) = f(x) \wedge_Q f(y) \qquad \text{و} \qquad f(x \sim_E y) = f(x) \sim_Q f(y).$$

علاوه‌براین، اگر E و Q دو جبر تساوی کراندار باشند، آن‌گاه همریختی تساوی f را کراندار می‌نامیم، هرگاه $f(۰_E) = ۰_Q$.

تعریف ۹.۲. [۱۹] نگاشت $d : E \longrightarrow E$ را

۱) یک مشتق درونی روی E می‌نامیم، هرگاه برای هر $x, y \in E$، در شرط زیر صدق کند:

$$d(x \to y) = (x \to d(y))\bar{\nabla}(d(x) \to y).$$

۲) یک مشتق بیرونی روی E می‌نامیم، هرگاه برای هر $x, y \in E$، در شرط زیر صدق کند:

$$d(x \to y) = (d(x) \to y)\bar{\nabla}(x \to d(y)).$$

۳) یک مشتق روی E می‌نامیم، هرگاه d یک مشتق درونی و بیرونی E باشد.

مجموعه همه مشتق‌های درونی، مشتق‌های بیرونی و مشتق‌ها روی E را به‌ترتیب با نمادهای $\mathcal{OD}(E)$، $\mathcal{ID}(E)$ و $\mathcal{D}(E)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۱۰.۲. [۷] یک BEـجبر یک ساختار جبری به‌صورت $(X, \twoheadrightarrow, ۱)$ از نوع $(۲, ۰)$ است، به‌طوری‌که برای هر $x, y, z \in X$ در شرایط زیر صدق کند:

(b۱) $x \twoheadrightarrow x = ۱$،

(b۲) $x \twoheadrightarrow ۱ = ۱$،

(b۳) $۱ \twoheadrightarrow x = x$،

(b۴) $x \twoheadrightarrow (y \twoheadrightarrow z) = y \twoheadrightarrow (x \twoheadrightarrow z)$.

تعریف ۱۱.۲. [۸] فرض کنیم $(X, \circ, ۰)$ یک BCKـجبر باشد و عمل از نوع ۲ ”$*$“ روی X به‌صورت $x * y = y \circ x$ تعریف شده باشد. دراین‌صورت $(X, *, ۱)$ را دوگان BCKـجبر می‌نامیم. درحقیقت، برای هر $x, y, z \in X$، اصول موضوعه آن به‌صورت زیر است:

(DBCK۱) $(y * z) * ((z * x) * (y * x)) = ۱$،

(DBCK۲) $y * ((y * x) * x) = ۱$،

(DBCK۳) $x * x = ۱$،

(DBCK۴) $y * x = x * y = ۱$ نتیجه دهد که $x = y$،

(DBCK۵) $x * ۱ = ۱$.

۳. fـ مشتق روی جبرهای تساوی

در این بخش، fـ مشتق را روی جبرهای تساوی معرفی کرده و برخی از ویژگی‌های آن‌ها را بررسی می‌کنیم.

تعریف ۱.۳. فرض کنیم $f : E \longrightarrow E$ یک درون‌ریختی باشد. نگاشت $d_f : E \longrightarrow E$ را یک

۱) fـ مشتق درونی روی E می‌نامیم هرگاه برای هر $x, y \in E$، در تساوی زیر صدق کند،

$$d_f(x \to y) = (f(x) \to d_f(y))\bar{\vee}(d_f(x) \to f(y)),$$

۲) fـ مشتق بیرونی روی E می‌نامیم هرگاه برای هر $x, y \in E$، در تساوی زیر صدق کند،

$$d_f(x \to y) = (d_f(x) \to f(y))\bar{\vee}(f(x) \to d_f(y)),$$

۳) fـ مشتق روی E نامیم، هرگاه d_f یک fـ مشتق درونی و بیرونی روی E باشد.

مجموعه همه fـ مشتق‌های بیرونی، fـ مشتق‌های درونی و fـ مشتق‌ها را روی E به‌ترتیب با نمادهای $\mathcal{O}_f\mathcal{D}(E)$، $\mathcal{I}_f\mathcal{D}(E)$ و $\mathcal{D}_f(E)$ نشان می‌دهیم.

ملاحظه ۲.۳. ۱) اگر f نگاشت همانی باشد، آنگاه مفاهیم fـ مشتق بیرونی، fـ مشتق درونی و fـ مشتق روی E به‌ترتیب با مفاهیم مشتق بیرونی، مشتق درونی و مشتق تعریف شده در مقاله [۱۹] روی E منطبق هستند.

۲) اگر f و d_f یکسان باشند، آنگاه $d_f \in \mathcal{D}_f(E)$.

مثال ۳.۳. [۱۹] فرض کنیم $(E = \{۰, a, b, ۱\}, \leq)$، که در آن $۰ < a < b < ۱$، یک زنجیر باشد. دراین‌صورت عمل از نوع ۲، "$\sim$" را روی E به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$\to$	۰	a	b	۱
۰	۱	۱	۱	۱
a	۰	۱	۱	۱
b	۰	a	۱	۱
۱	۰	a	b	۱

$\sim$	۰	a	b	۱
۰	۱	۰	۰	۰
a	۰	۱	a	a
b	۰	a	۱	b
۱	۰	a	b	۱

دراین‌صورت $(E, \wedge, \sim, ۰, ۱)$ یک جبر تساوی کراندار است.

۱) اگر $f : E \to E$ که در آن $f(۰) = ۰$، $f(a) = f(b) = f(۱) = ۱$ و $d_f : E \to E$ به‌طوری‌که $d_f(۰) = ۰$، $d_f(a) = a$ و $d_f(b) = d_f(۱) = ۱$ باشند، آن‌گاه بدیهی است که $d_f \notin \mathcal{I}_f\mathcal{D}(E)$. چون

$$a = d_f(a) = d_f(۱ \to a) \neq (f(۱) \to d_f(a))\,\bar{\nabla}\,(d_f(۱) \to f(a))$$
$$= d_f(a)\bar{\nabla}۱ = ۱.$$

به روش مشابه می‌توان مشاهده کرد که $d_f \notin \mathcal{O}_f\mathcal{D}(E)$.

۲) اگر $f : E \to E$ که در آن $f(۰) = ۰$، $f(a) = a$ و $f(b) = f(۱) = ۱$ و $d_f : E \to E$ به‌طوری‌که $d_f(۰) = ۰$ و $d_f(a) = d_f(b) = d_f(۱) = ۱$ باشند، آن‌گاه بدیهی است $d_f \in \mathcal{D}_f(E)$ است. بنابراین

$$d_f \in \mathcal{I}_f\mathcal{D}(E) \cap \mathcal{O}_f\mathcal{D}(E).$$

۳) قرار دهید $f : E \to E$ که در آن $f(۰) = ۰$، $f(a) = a$ و $f(b) = f(۱) = ۱$ و $d_f : E \to E$ به‌طوری‌که $d_f(۰) = ۰$، $d_f(b) = b$ و $d_f(a) = d_f(۱) = ۱$. بدیهی است که $d_f \in \mathcal{I}_f\mathcal{D}(E)$.

حال، اگر نگاشت f را همانی و نگاشت $d_f : E \to E$ را به‌صورت $d_f(۰) = ۰$، $d_f(a) = b$ و $d_f(b) = d_f(۱) = ۱$ در نظر بگیریم، بدیهی است که $d_f \in \mathcal{I}_f\mathcal{D}(E)$. آن‌گاه به راحتی می‌توان مشاهده کرد که $d_f \notin \mathcal{O}_f\mathcal{D}(E)$، زیرا

$$b = d_f(a) = d_f(b \to a)$$
$$\neq (d_f(b) \to a) = (d_f(b) \to a)\,\bar{\nabla}\,(b \to d_f(a)) = ۱.$$

مسئله باز: مثالی از یک fـ مشتق بیرونی پیدا کنید که یک fـ مشتق درونی نباشد.

لم ۴.۳. *برای هر $x, y \in E$، احکام زیر برقرار هستند:*

۱) *$۱\bar{\nabla}x = ۱ = x\bar{\nabla}۱$؛*

۲) *اگر $x \leq y$ باشد، آن‌گاه $x\bar{\nabla}y = y$ است.*

اثبات. (۱) با استفاده از گزاره ۲.۲(۲) داریم،

$$1\bar{\nabla}x = (1 \to x) \to x = x \to x = 1,$$
$$x\bar{\nabla}1 = (x \to 1) \to 1 = 1 \to 1 = 1.$$

بنابراین $1\bar{\nabla}x = 1 = x\bar{\nabla}1$.

(۲) چون $x \leq y$ پس $x\bar{\nabla}y = (x \to y) \to y = 1 \to y = y$. □

گزاره ۵.۳. *فرض کنیم d_f یک fـ مشتق بیرونی(درونی) روی E باشد. دراین‌صورت برای هر $x, y \in E$، احکام زیر برقرار هستند:*

۱) $d_f(1) = 1$؛

۲) $d_f(x) = f(x)\bar{\nabla}d_f(x)$ ($d_f(x) = d_f(x)\bar{\nabla}f(x)$)؛

۳) $f(x) \leq d_f(x)$؛

۴) $d_f(x) \to f(y) \leq f(x) \to d_f(y)$؛

۵) *فرض کنیم E یک جبر تساوی کراندار باشد. دراین‌صورت، اگر $d_f \in \mathcal{I}_f\mathcal{D}(E)$، آن‌گاه $d_f(0) = d_f(0)''$.*

اثبات. تمام احکام بیان شده را برای $d_f \in \mathcal{O}_f\mathcal{D}(E)$ ثابت می‌کنیم. اثبات حالت دیگر مشابه است. بنابراین

(۱) چون $f(1) = 1$، با استفاده از گزاره ۲.۲(۲) و لم ۴.۳(۱) برای هر $x \in E$ داریم،

$$\begin{aligned} d_f(1) = d_f(x \to 1) &= (d_f(x) \to f(1))\bar{\nabla}(f(x) \to d_f(1)) \\ &= (d_f(x) \to 1)\bar{\nabla}(f(x) \to d_f(1)) \\ &= 1\bar{\nabla}(f(x) \to d_f(1)) = 1. \end{aligned}$$

(۲) با استفاده از (۱)، $d_f(1) = 1$ و بنابر گزاره ۲.۲(۲) داریم

$$\begin{aligned} d_f(x) = d_f(1 \to x) &= (d_f(1) \to f(x))\bar{\nabla}(f(1) \to d_f(x)) \\ &= (1 \to f(x))\bar{\nabla}(1 \to d_f(x)) = f(x)\bar{\nabla}d_f(x). \end{aligned}$$

(۳) فرض کنیم $x \in E$. دراین‌صورت با استفاده از (۲) داریم،

$$\begin{aligned} f(x) \to d_f(x) &= f(x) \to (f(x) \bar{\nabla} d_f(x)) \\ &= f(x) \to [(f(x) \to d_f(x)) \to d_f(x)] \quad \text{با استفاده از (۱.۲)} \\ &= ((f(x) \to d_f(x)) \to (f(x) \to d_f(x)) \quad \text{بنابر گزاره ۲.۲(۵)} \\ &= ۱. \quad \text{بنابر گزاره ۲.۲(۲)} \end{aligned}$$

(۴) چون با استفاده از (۳)، $f(x) \leq d_f(x)$ پس بنابر گزاره ۲.۲(۶) می‌توان نتیجه گرفت که

$$d_f(x) \to f(y) \leq f(x) \to f(y). \tag{۱.۳}$$

همچنین $f(y) \leq d_f(y)$ نتیجه می‌دهد

$$f(x) \to f(y) \leq f(x) \to d_f(y). \tag{۲.۳}$$

بنابراین با استفاده از (۱.۳) و (۲.۳) نتیجه می‌شود که $d_f(x) \to f(y) \leq f(x) \to d_f(y)$.

(۵) فرض کنیم $d_f \in \mathcal{I}_f\mathcal{D}(E)$. دراین‌صورت با استفاده از (۱.۲) داریم

$$\begin{aligned} d_f(۰) &= d_f(۱ \to ۰) = (f(۱) \to d_f(۰)) \,\bar{\nabla}\, (d_f(۱) \to f(۰)) \\ &= (۱ \to d_f(۰)) \,\bar{\nabla}\, (۱ \to ۰) = (d_f(۰) \to ۰) \to ۰ = d_f(۰)''. \end{aligned}$$

□

قضیه ۶.۳. *$d_f \in \mathcal{O}_f\mathcal{D}(E)$ اگروتنهااگر برای هر $x, y \in E$ شرط زیر برقرار باشد:*

$$d_f(x \to y) = f(x) \to d_f(y).$$

اثبات. بنا به تعریف $d_f \in \mathcal{O}_f\mathcal{D}(E)$ اگروتنهااگر

$$\begin{aligned} & d_f(x \to y) \\ =\ & \big(d_f(x) \to f(y)\big) \bar{\nabla} \big(f(x) \to d_f(y)\big) \\ =\ & \Big[\underbrace{\big(d_f(x) \to f(y)\big) \to \big(f(x) \to d_f(y)\big)}\Big] \to \big(f(x) \to d_f(y)\big) \quad \text{بنابر (۱.۲)} \\ =\ & ۱ \to \big(f(x) \to d_f(y)\big) \quad \text{بنابر گزاره ۵.۳(۴)} \\ =\ & f(x) \to d_f(y). \quad \text{بنابر گزاره ۲.۲(۲)} \end{aligned}$$

□

نتیجه ۷.۳. *فرض کنیم* $d_f \in \mathcal{O}_f\mathcal{D}(E)$ $(d_f \in \mathcal{I}_f\mathcal{D}(E))$. *اگر* $x \leq y$، *آن‌گاه*

$$f(x) \leq d_f(y).$$

اثبات. فرض کنیم $d_f \in \mathcal{O}_f\mathcal{D}(E)$ و $x \leq y$ باشند. دراین‌صورت با استفاده از قضیه ۶.۳ و گزاره ۵.۳(۱) داریم

$$f(x) \to d_f(y) = d_f(x \to y) = d_f(۱) = ۱.$$

بنابراین $f(x) \leq d_f(y)$. حال، فرض کنیم $d_f \in \mathcal{I}_f\mathcal{D}(E)$. دراین‌صورت چون f یک درون‌ریختی است و $x \leq y$، پس $f(x) \leq f(y)$. از طرفی، با استفاده از گزاره ۵.۳(۳)، $f(y) \leq d_f(y)$. بنابراین $f(x) \leq d_f(y)$. □

گزاره ۸.۳. *فرض کنیم* E *جابه‌جایی باشد. دراین‌صورت* $d_f \in \mathcal{I}_f\mathcal{D}(E)$ *اگروتنهااگر*

$$d_f(x \to y) = f(x) \to d_f(y).$$

اثبات. فرض کنیم E جابه‌جایی باشد. دراین‌صورت با استفاده از تعریف $d_f \in \mathcal{I}_f\mathcal{D}(E)$، اگروتنهااگر

$$\begin{aligned}
d_f(x \to y) &= (f(x) \to d_f(y))\bar{\vee}(d_f(x) \to f(y)) \\
&= \big[(f(x) \to d_f(y)) \to (d_f(x) \to f(y))\big] \to (d_f(x) \to f(y)) \\
&\qquad \text{بنابر (۱.۲)} \\
&= \big[(d_f(x) \to f(y)) \to (f(x) \to d_f(y))\big] \to (f(x) \to d_f(y)) \\
&\qquad \text{با استفاده از ویژگی جابه‌جایی } E \\
&= ۱ \to (f(x) \to d_f(y)) \qquad \text{با استفاده از گزاره ۵.۳(۴)} \\
&= f(x) \to d_f(y). \qquad \text{با استفاده از گزاره ۲.۲(۲)}
\end{aligned}$$

□

مسئله باز: مثالی از یک جبر تساوی ناجابه‌جایی پیدا کنید به‌طوری‌که قضیه فوق برای آن برقرار نباشد.

نتیجه ۹.۳. *اگر E جابه‌جایی باشد، آن‌گاه fــ مشتق بیرونی، fــ مشتق درونی و fــ مشتق روی E با یکدیگر معادل هستند.*

نکته. نگاشت $f : E \to E$ را یک نگاشت خودتوان نامیم هرگاه $f^{2} = f \circ f = f$.

گزاره ۱۰.۳. *فرض کنیم f خودتوان باشد و $d_{1,f},\ d_{2,f} \in \mathcal{O}_f\mathcal{D}(E)$. دراین‌صورت $d_{1,f} \circ d_{2,f} \in \mathcal{O}_f\mathcal{D}(E)$.*

اثبات. اگر $d_{1,f},\ d_{2,f} \in \mathcal{O}_f\mathcal{D}(E)$ باشند، آن‌گاه با استفاده از قضیه ۶.۳، برای هر $x, y \in E$ و $i = 1, 2$، $d_{i,f}(x \to y) = f(x) \to d_{i,f}(y)$. پس داریم

$$(d_{1,f} \circ d_{2,f})(x \to y) = d_{1,f}(d_{2,f}(x \to y)) = d_{1,f}(f(x) \to d_{2,f}(y))$$
$$= f^{2}(x) \to d_{1,f}(d_{2,f}(y)) = f(x) \to (d_{1,f} \circ d_{2,f})(y).$$

بنابراین، با استفاده از قضیه ۶.۳، $d_{1,f} \circ d_{2,f} \in \mathcal{O}_f\mathcal{D}(E)$. □

قضیه ۱۱.۳. *اگر f خودتوان باشد، آن‌گاه مجموعه همه fــ مشتق‌های بیرونی روی E با عمل "$\circ$"، یعنی، $\langle \mathcal{O}_f\mathcal{D}(E), \circ \rangle$ یک نیم‌گروه است.*

اثبات. بدیهی است که با استفاده از گزاره ۱۰.۳، مجموعه همه fــ مشتق‌های بیرونی نسبت به عمل ترکیب بسته است و با توجه به شرکت‌پذیری عمل ترکیب اثبات بدیهی است. □

گزاره ۱۲.۳. *فرض کنیم $d_f \in \mathcal{I}_f\mathcal{D}(E)$ $(d_f \in \mathcal{O}_f\mathcal{D}(E))$. دراین‌صورت، اگر $d_f(x \to y) = d_f(x) \to f(y)$، آن‌گاه $d_f(x) = f(x)$.*

اثبات. فرض کنیم $d_f \in \mathcal{I}_f\mathcal{D}(E)$ و $d_f(x \to y) = d_f(x) \to f(y)$. دراین‌صورت با استفاده از گزاره ۵.۳(۱)، داریم

$$d_f(x) = d_f(1 \to x) = d_f(1) \to f(x) = 1 \to f(x) = f(x).$$

اثبات حالت دیگر مشابه است. □

لم ۱۳.۳. *فرض کنیم $d_f \in \mathcal{I}_f\mathcal{D}(E)$ $(d_f \in \mathcal{O}_f\mathcal{D}(E))$. دراین‌صورت $f(x) \to d_f(y) = d_f(x) \to f(y)$ نتیجه می‌دهد*

$$d_f(x \to y) = d_f(x) \to f(y).$$

اثبات. فرض کنیم $d_f \in \mathcal{I}_f\mathcal{D}(E)$ و $f(x) \to d_f(y) = d_f(x) \to f(y)$. دراین‌صورت

$$\begin{aligned}
& d_f(x \to y) \\
= \;& (f(x) \to d_f(y)) \bar{\vee} (d_f(x) \to f(y)) \\
= \;& \big[\underbrace{(f(x) \to d_f(y))} \to (d_f(x) \to f(y))\big] \to (d_f(x) \to f(y)) \\
= \;& \big[(d_f(x) \to f(y)) \to (d_f(x) \to f(y))\big] \to (d_f(x) \to f(y)) \quad \text{بنا به فرض} \\
= \;& 1 \to \big(d_f(x) \to f(y)\big) \quad \text{با استفاده از گزاره ۲.۲(۲)} \\
= \;& d_f(x) \to f(y).
\end{aligned}$$

اثبات حالت دیگر مشابه است. □

نتیجه ۱۴.۳. *فرض کنیم $d_f \in \mathcal{I}_f\mathcal{D}(E)$ ($d_f \in \mathcal{O}_f\mathcal{D}(E)$). دراین‌صورت، اگر $f(x) \to d_f(y) = d_f(x) \to f(y)$، آن‌گاه $d_f(x) = f(x)$.*

اثبات. با استفاده از لم ۱۳.۳ و گزاره ۱۲.۳ اثبات بدیهی است. □

تعریف ۱۵.۳. فرض کنیم $d_f \in \mathcal{I}_f\mathcal{D}(E)$ ($d_f \in \mathcal{O}_f\mathcal{D}(E)$). دراین‌صورت، قرار دهید

$$Fix_{d_f}(E) = \{x \in E \mid d_f(x) = x\} \qquad \ker(d_f) = \{x \in E |\ d_f(x) = 1\}،$$

$$E_{d_f=f} = \{x \in E |\ d_f(x) = f(x)\}.$$

مثال ۱۶.۳. مثال ۳.۳(۲) را در نظر بگیرید. بدیهی است که

$$\ker(d_f) = \{a, b, 1\}, \qquad Fix_{d_f}(E) = \{0, 1\}, \quad E_{d_f=f} = \{0, b, 1\}.$$

نکته. چون f یک همریختی است پس با استفاده از گزاره ۵.۳(۱)،

$$1 \in \ker(d_f) \cap Fix_{d_f}(E) \cap E_{d_f=f}.$$

مثال ۱۷.۳. [۱] (۱) فرض کنیم $E = \{۰, a, b, c, d, ۱\}$ باشد که در آن $۰ \leq a, b \leq c \leq d \leq ۱$. عمل $\sim$ را روی E به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$\sim$	۰	a	b	c	d	۱
۰	۱	d	d	d	c	۰
a	d	۱	c	d	c	a
b	d	c	۱	d	c	b
c	d	d	d	۱	d	c
d	c	c	c	d	۱	d
۱	۰	a	b	c	d	۱

$\to$	۰	a	b	c	d	۱
۰	۱	۱	۱	۱	۱	۱
a	d	۱	d	۱	۱	۱
b	d	d	۱	۱	۱	۱
c	d	d	d	۱	۱	۱
d	c	c	c	d	۱	۱
۱	۰	a	b	c	d	۱

دراین‌صورت $(E, \wedge, \sim, ۰, ۱)$ یک جبر تساوی کراندار است. قرار دهید $f = id_E$ و $d_f(۰) = ۰$، $d_f(a) = a$، $d_f(d) = d$، $d_f(b) = b$ و $d_f(c) = d_f(۱) = ۱$. دراین‌صورت $E_{d_f=f} = \{۰, a, d, b, ۱\}$ که زیرجبر E نیست، زیرا $d \sim ۰ = c \notin E_{d_f=f}$.
(۲) مثال ۳.۳(۲) را در نظر بگیرید. بدیهی است که $E_{d_f=f} = \{۰, b, ۱\}$ چون $۰ \in E_{d_f=f}$ ولی $a \notin E_{d_f=f}$، بنابراین $E_{d_f=f}$ یک فیلتر از E نیست.

گزاره ۱۸.۳. اگر $d_f \in \mathcal{I}_f\mathcal{D}(E)$($d_f \in \mathcal{O}_f\mathcal{D}(E)$)، آن‌گاه

$$f(x) \to d_f(x) \in \ker(d_f).$$

اثبات. فرض کنیم $d_f \in \mathcal{I}_f\mathcal{D}(E)$. دراین‌صورت

$$\begin{aligned}
& d_f(f(x) \to d_f(x)) \\
= \;& d_f\big(f(x) \to (d_f(x) \bar{\vee} f(x))\big) && \text{بنابر گزاره ۵.۳(۲)} \\
= \;& d_f\big[f(x) \to \big((d_f(x) \to f(x)) \to f(x)\big)\big] && \text{بنابر (۱.۲)} \\
= \;& d_f\big[\big(d_f(x) \to f(x)\big) \to \big(f(x) \to f(x)\big)\big] && \text{بنابر گزاره ۲.۲(۵)} \\
= \;& d_f\big[\big(d_f(x) \to f(x)\big) \to ۱\big] && \text{بنابر گزاره ۲.۲(۲)} \\
= \;& d_f(۱) = ۱.
\end{aligned}$$

بنابراین $f(x) \to d_f(x) \in \ker(d_f)$. اگر $d_f \in \mathcal{O}_f\mathcal{D}(E)$، آن‌گاه به روش مشابه می‌توان آن را ثابت کرد. □

مسئله باز: مثالی بیابید که نشان دهد عکس گزاره بالا همواره برقرار نیست.

گزاره ۱۹.۳. *فرض کنیم* $(d_f \in \mathcal{O}_f\mathcal{D}(E))d_f \in \mathcal{I}_f\mathcal{D}(E)$. *دراین‌صورت احکام زیر برقرار هستند:*

۱) d_f *یک نگاشت خودتوان روی* $Fix_{d_f}(E)$ *و* $\ker(d_f)$ *است.*

۲) *اگر* d_f *یک نگاشت خودتوان روی* E *باشد، آن‌گاه* $Im(d_f) = Fix_{d_f}(E)$.

۳) d_f *یک نگاشت حافظ ترتیب روی* $Fix_{d_f}(E)$ *و* $E_{d_f=f}$ *است.*

۴) $Fix_{d_f}(E) \cap \ker(d_f) = \{۱\}$.

۵) $E_{d_f=f} \cap \ker(d_f) = f^{-۱}(۱) = \ker f$.

۶) $\ker(d_f)$ *تحت عمل "*$\rightarrow$*" بسته است.*

۷) $E_{d_f=f}$ *تحت عمل "* $\rightarrow$ *" بسته است.*

اثبات. (۱) فرض کنیم $x \in Fix_{d_f}(E)$. دراین‌صورت $d_f(x) = x$ و در نتیجه

$$d_f(d_f(x)) = d_f(x) = x.$$

بنابراین نگاشت d_f روی $Fix_{d_f}(E)$ خودتوان است. بدیهی است که d_f روی $\ker(d_f)$ نیز خودتوان می‌باشد.

(۲) فرض کنیم d_f روی E خودتوان باشد و $x \in E$. اگر $x \in Fix_{d_f}(E)$، آن‌گاه $d_f(x) = x$ و در نتیجه $x \in Im(d_f)$. بنابراین $Fix_{d_f}(E) \subseteq Im(d_f)$. حال فرض کنیم $y \in Im(d_f)$. دراین‌صورت، عنصر $x \in E$ وجود دارد، به‌طوری‌که $d_f(x) = y$. چون d_f روی E خودتوان است، پس $d_f(y) = d_f(d_f(x)) = d_f(x) = y$ و در نتیجه $y \in Fix_{d_f}(E)$. پس $Im(d_f) \subseteq Fix_{d_f}(E)$. بنابراین $Fix_{d_f}(E) = Im(d_f)$.

(۳) چون f یک همریختی جبر تساوی است، پس اثبات بدیهی است.

(۴) فرض کنیم $x \in Fix_{d_f}(E) \cap \ker(d_f)$. چون $۱ = d_f(x) = x$ پس $x = ۱$.

(۵) فرض کنیم $x \in E_{d_f=f} \cap \ker(d_f)$. دراین‌صورت $۱ = d_f(x) = f(x)$ و در نتیجه $x \in f^{-۱}(۱) = \ker f$.

(۶) فرض کنیم $x, y \in \ker(d_f)$. دراین‌صورت $d_f(x) = ۱ = d_f(y)$. حال اگر

$d_f \in \mathcal{I}_f\mathcal{D}(E)$ باشد، آن‌گاه

$$\begin{aligned} & d_f(x \to y) \\ = \ & \big(f(x) \to d_f(y)\big) \bar{\nabla} \big(d_f(x) \to f(y)\big) \\ = \ & \Big[\big(f(x) \to d_f(y)\big) \to \big(d_f(x) \to f(y)\big)\Big] \to \big(d_f(x) \to f(y)\big) && \text{بنابر (۱.۲)} \\ = \ & \big[\big(f(x) \to ۱\big) \to \big(۱ \to f(y)\big)\big] \to \big(۱ \to f(y)\big) \\ = \ & \big(۱ \to f(y)\big) \to f(y) = f(y) \to f(y) = ۱. \end{aligned}$$

پس $x \to y \in \ker(d_f)$. همچنین چون $۱ \in \ker(d_f)$. بنابراین $\ker(d_f)$ تحت عمل "$\to$" بسته است. اثبات حالت دیگر مشابه است

(۷) فرض کنیم $x, y \in E_{d_f = f}$. دراین‌صورت $d_f(x) = f(x)$ و $d_f(y) = f(y)$. فرض کنیم $d_f \in \mathcal{O}_f\mathcal{D}(E)$. دراین‌صورت با استفاده از قضیه ۶.۳ داریم

$$d_f(x \to y) = f(x) \to d_f(y) = f(x) \to f(y) = f(x \to y).$$

حال قرار دهید $d_f \in \mathcal{I}_f\mathcal{D}(E)$. پس

$$\begin{aligned} & d_f(x \to y) \\ = \ & \big(f(x) \to d_f(y)\big) \bar{\nabla} \big(d_f(x) \to f(y)\big) \\ = \ & \Big[\underbrace{\big(f(x) \to d_f(y)\big)} \to \big(d_f(x) \to f(y)\big)\Big] \to \big(d_f(x) \to f(y)\big) && \text{بنابر (۱.۲)} \\ = \ & \Big[\big(d_f(x) \to f(y)\big) \to \big(d_f(x) \to f(y)\big)\Big] \to \big(f(x) \to f(y)\big) && \text{بنا به فرض} \\ = \ & ۱ \to \big(f(x) \to f(y)\big) = f(x) \to f(y) \\ = \ & f(x \to y). && \text{چون } f \text{ یک درون‌ریختی است} \end{aligned}$$

بنابراین در هر دو مورد $d_f(x \to y) = f(x \to y)$. بنابراین $E_{d_f = f}$ تحت عمل "$\to$" بسته است. $\square$

نتیجه ۲۰.۳. *فرض کنیم $d_f \in \mathcal{I}_f\mathcal{D}(E)$ ($d_f \in \mathcal{O}_f\mathcal{D}(E)$). دراین‌صورت $\ker(d_f)$ و $E_{d_f = f}$ تحت عمل "$\bar{\nabla}$" بسته هستند.*

اثبات. با استفاده از (۱.۲)، گزاره ۱۹.۳(۶) و (۷)، اثبات بدیهی است. $\square$

گزاره ۲۱.۳. *فرض کنیم $d_{۱,f}$ و $d_{۲,f}$ دو fـ مشتق (درونی) بیرونی حافظ ترتیب روی E باشند که برای هر $x \in E$ داشته باشیم، $x \leq f(x)$. دراین‌صورت*

۱) $Fix_{d_{۱,f}}(E) = Fix_{d_{۲,f}}(E)$، *اگروتنهااگر* $d_{۱,f} = d_{۲,f}$.

۲) $Im(d_{۱,f}) = Im(d_{۲,f})$ *اگروتنهااگر* $d_{۱,f} = d_{۲,f}$.

اثبات. (۱) با استفاده از گزاره ۱۹.۳(۱) نگاشت‌های $d_{۱,f}$ و $d_{۲,f}$ به‌ترتیب روی $Fix_{d_{۱,f}}(E)$ و $Fix_{d_{۲,f}}(E)$ خودتوان هستند. پس $d_{۱,f}(d_{۱,f}(x)) = d_{۱,f}(x)$ و درنتیجه برای هر $x \in E$، $d_{۱,f}(x) \in Fix_{d_{۱,f}}(E)$. چون $Fix_{d_{۱,f}}(E) = Fix_{d_{۲,f}}(E)$ پس $d_{۱,f}(x) \in Fix_{d_{۲,f}}(E)$. درنتیجه $d_{۲,f}(d_{۱,f}(x)) = d_{۱,f}(x)$. همچنین با استفاده از گزاره ۵.۳(۳) و فرض، برای هر $x \in E$، $x \leq f(x) \leq d_{۱,f}(x)$. چون $d_{۱,f}$ و $d_{۲,f}$ دو fـ مشتق حافظ ترتیب روی E هستند، پس

$$d_{۲,f}(x) \leq d_{۲,f}(f(x)) \leq d_{۲,f}(d_{۱,f}(x)) = d_{۱,f}(x).$$

در نتیجه برای هر $x \in E$،

$$d_{۲,f}(x) \leq d_{۱,f}(x).$$

به‌روش مشابه داریم، $d_{۱,f}(x) \leq d_{۲,f}(x)$. بنابراین $d_{۱,f} = d_{۲,f}$. اثبات طرف دیگر بدیهی است.

(۲) با استفاده از گزاره ۱۹.۳(۲) و (۱)، اثبات بدیهی است. □

گزاره ۲۲.۳. *فرض کنیم $d_{۱,f}, d_{۲,f} \in \mathcal{O}_f\mathcal{D}(E)$. اگر $d_{۱,f} \circ d_{۲,f} = ۱$ باشد، آن‌گاه $E_{d_{۲,f}=f} \subseteq f^{-۱}(\ker(d_{۱,f}))$. عکس گزاره برای هر $x \in E_{d_{۲,f}=f}$ برقرار است.*

اثبات. فرض کنیم $x \in E_{d_{۲,f}=f}$. دراین‌صورت $d_{۲,f}(x) = f(x)$. با توجه به این مطلب که $d_{۱,f} \in \mathcal{O}_f\mathcal{D}(E)$، با استفاده از قضیه ۶.۳ و فرض گزاره داریم،

$$\begin{aligned} d_{۱,f}(f(x)) &= d_{۱,f}(۱ \rightarrow f(x)) = f(۱) \rightarrow d_{۱,f}(f(x)) \\ &= ۱ \rightarrow d_{۱,f} \circ d_{۲,f}(x) = ۱ \rightarrow ۱ = ۱. \end{aligned}$$

بنابراین $f(x) \in \ker(d_{۱,f})$ و درنتیجه $x \in f^{-۱}(\ker(d_{۱,f}))$.

برعکس، اگر $x \in E_{d_{۲,f}=f}$، آن‌گاه $d_{۲,f}(x) = f(x)$ و $x \in f^{-۱}(\ker(d_{۱,f}))$ پس $f(x) \in \ker(d_{۱,f})$ و در نتیجه $d_{۱,f}(f(x)) = ۱$. چون $d_{۱,f}, d_{۲,f} \in \mathcal{O}_f\mathcal{D}(E)$ پس

$$\begin{aligned} d_{۱,f} \circ d_{۲,f}(x) &= d_{۱,f} \circ d_{۲,f}(۱ \to x) = f(۱) \to d_{۱,f} \circ d_{۲,f}(x) \\ &= ۱ \to d_{۱,f} \circ d_{۲,f}(x) = d_{۱,f}(d_{۲,f}(x)) = d_{۱,f}(f(x)) = ۱. \end{aligned}$$

□

گزاره ۲۳.۳. *فرض کنیم $d_f \in \mathcal{I}_f\mathcal{D}(E)$ ($d_f \in \mathcal{O}_f\mathcal{D}(E)$). اگر $x \in \ker(d_f)$، آن‌گاه برای هر $y \in E$ احکام زیر برقرار هستند:*

(۱) $y \to x \in \ker(d_f)$؛

(۲) $y \bar{\nabla} x \in \ker(d_f)$.

اثبات. (۱) فرض کنیم $d_f \in \mathcal{I}_f\mathcal{D}(E)$ و $x \in \ker(d_f)$. دراین‌صورت $d_f(x) = ۱$ و در نتیجه

$$\begin{aligned} d_f(y \to x) &= \big(f(y) \to d_f(x)\big)\bar{\nabla}\big(d_f(y) \to f(x)\big) \\ &= \big(f(y) \to ۱\big)\bar{\nabla}\big(d_f(y) \to f(x)\big) \\ &= ۱\bar{\nabla}\big(d_f(y) \to f(x)\big) = ۱. \quad \text{بنابر لم ۴.۳(۱)} \end{aligned}$$

بنابراین $y \to x \in \ker(d_f)$.

(۲) با استفاده از تعریف ۱.۳ و (۱.۲) داریم

$$\begin{aligned} & d_f(y\bar{\nabla}x) \\ = \;& d_f\big((y \to x) \to x\big) = \Big[f(y \to x) \to d_f(x)\Big]\bar{\nabla}\Big[\underbrace{d_f(y \to x)} \to f(x)\Big] \\ = \;& \big[f(y \to x) \to ۱\big]\bar{\nabla}\big[۱ \to f(x)\big] \quad \text{بنابر (۱)} \\ = \;& ۱\bar{\nabla}(۱ \to f(x)) = ۱. \quad \text{بنابر لم ۴.۳(۱)} \end{aligned}$$

بنابراین $y\bar{\nabla}x \in \ker(d_f)$. □

قضیه ۲۴.۳. *فرض کنیم E جابه‌جایی باشد، $d_f \in \mathcal{I}_f\mathcal{D}(E)$ و $x, y \in E$. اگر $x \leq y$ و $x \in \ker(d_f)$، آن‌گاه $y \in \ker(d_f)$.*

اثبات. فرض کنیم $d_f \in \mathcal{I}_f\mathcal{D}(E)$، $x \in \ker(d_f)$ و y و $x \leq y$. دراین‌صورت داریم $d_f(x) = ۱$ و $x \to y = ۱$. پس

$$\begin{aligned} d_f(y) &= d_f(۱ \to y) = d_f((x \to y) \to y) \\ &= d_f\big((y \to x) \to x\big) \quad \text{بنا به جابه‌جایی } E \\ &= \Big[f(y \to x) \to d_f(x)\Big] \bar{\vee} \Big[d_f(y \to x) \to f(x)\Big] \\ &= \big[f(y \to x) \to ۱\big] \bar{\vee} \big[\underbrace{d_f(y \to x)}_{=۱} \to f(x)\big] \quad \text{با استفاده از گزاره ۲۳.۳(۱)} \\ &= ۱ \bar{\vee} f(x) = ۱. \quad \text{بنابر لم ۴.۳(۱)} \end{aligned}$$

بنابراین $y \in \ker(d_f)$. □

گزاره ۲۵.۳. *فرض کنیم E یک زنجیر و $d_f \in \mathcal{O}_f\mathcal{D}(E)$ ($d_f \in \mathcal{I}_f\mathcal{D}(E)$) باشد. دراین‌صورت $\ker(d_f)$ یک زیرجبر از E است.*

اثبات. چون $\ker(d_f) \subseteq E$، پس $\ker(d_f)$ یک زنجیر است. اگر $x, y \in \ker(d_f)$ به‌طوری‌که $x \leq y$، آن‌گاه $x \wedge y = x$ و در نتیجه $d_f(x \wedge y) = d_f(x) = ۱$. بنابراین $x \wedge y \in \ker(d_f)$. علاوه‌براین، با استفاده از گزاره ۲.۲(۱۰) داریم $x \sim y = y \to x$. حال اگر $d_f \in \mathcal{O}_f\mathcal{D}(E)$، آن‌گاه با استفاده از قضیه ۶.۳ داریم،

$$d_f(x \sim y) = d_f(y \to x) = f(y) \to d_f(x) = f(y) \to ۱ = ۱,$$

همچنین اگر $d_f \in \mathcal{I}_f\mathcal{D}(E)$، آن‌گاه

$$\begin{aligned} & d_f(x \sim y) \\ &= d_f(y \to x) \\ &= [(f(y) \to d_f(x)) \to (d_f(y) \to f(x))] \to (d_f(y) \to f(x)) \\ &= [(f(y) \to ۱) \to (۱ \to f(x))] \to (۱ \to f(x)) \quad \text{چون } d_f(x) = ۱ = d_f(y) \\ &= [۱ \to f(x)] \to f(x) \quad \text{با استفاده از گزاره ۲.۲(۲)} \\ &= f(x) \to f(x) = ۱, \end{aligned}$$

و در نتیجه در هر دو حالت $x \sim y \in \ker(d_f)$. بنابراین $\ker(d_f)$ یک زیرجبر از E است. $\square$

در ادامه گزاره‌ای ارائه می‌دهیم و در آن شرایطی را که تحت آن $ker(d_f)$ یک فیلتر است بررسی می‌کنیم.

نکته. d_f را یک $\to$ـ درون ریختی روی E نامیم هرگاه برای هر $x, y \in E$ در شرط زیر صدق کند:

$$d_f(x \to y) = d_f(x) \to d_f(y).$$

گزاره ۲۶.۳. *فرض کنیم $d_f : E \to E$ یک نگاشت روی E باشد. دراین‌صورت*

۱) *اگر d_f یک $\to$ـ درون‌ریختی روی E باشد، آنگاه $\ker(d_f) \in \mathcal{F}(E)$.*

۲) *فرض کنیم $d_f \in \mathcal{O}_f\mathcal{D}(E)$. اگر d_f خودتوان و حافظ ترتیب باشد، به‌طوری‌که برای هر $x \in E$ داشته باشیم $x \leq f(x)$، آنگاه $\ker(d_f) \in \mathcal{F}(E)$.*

اثبات. (۱) چون d_f یک $\to$ـ درون‌ریختی روی E است با استفاده از گزاره ۵.۳(۱) داریم $d_f(۱) = ۱$ و در نتیجه $۱ \in \ker(d_f)$. فرض کنیم برای $x, y \in E$، $x, x \to y \in \ker(d_f)$. دراین‌صورت $d_f(x) = d_f(x \to y) = ۱$. بنابراین

$$۱ = d_f(x \to y) = d_f(x) \to d_f(y) = ۱ \to d_f(y) = d_f(y).$$

پس $d_f(y) = ۱$ و درنتیجه $y \in \ker(d_f)$. بنابراین $\ker(d_f) \in \mathcal{F}(E)$.

(۲) فرض کنیم d_f یک fـ مشتق بیرونی حافظ ترتیب و خودتوان روی E باشد. پس $d_f(۱) = ۱$ و در نتیجه $۱ \in \ker(d_f)$. فرض کنیم برای $x, y \in E$ داشته باشیم $x, x \to y \in \ker(d_f)$. دراین‌صورت $d_f(x) = d_f(x \to y) = ۱$. بنابراین $۱ = d_f(x \to y) = f(x) \to d_f(y)$، و در نتیجه $f(x) \leq d_f(y)$. همچنین با استفاده از فرض $x \leq f(x)$ پس $x \leq d_f(y)$. چون d_f یک fـ مشتق بیرونی حافظ ترتیب و خودتوان روی E است پس $d_f(x) \leq d_f(d_f(y)) = d_f(y)$. از طرفی، چون $x \in \ker(d_f)$ داریم: $۱ = d_f(x) \leq d_f(y)$ و در نتیجه $d_f(y) = ۱$ پس $y \in \ker(d_f)$. بنابراین $\ker(d_f) \in \mathcal{F}(E)$. $\square$

لم ۲۷.۳. *فرض کنیم $(E; \wedge_E, \sim_E, ۱_E)$ و $(Q; \wedge_Q, \sim_Q, ۱_Q)$ دو جبر تساوی و نگاشت $f : E \to Q$ یک همریختی تساوی باشد. دراین‌صورت*

۱) اگر $F \in \mathcal{F}(E)$، f یک همریختی پوشا و $\ker f \subseteq F$، آن‌گاه $f(F) \in \mathcal{F}(Q)$.
۲) اگر $G \in \mathcal{F}(Q)$، آن‌گاه $f^{-1}(G) \in \mathcal{F}(E)$.

اثبات. اثبات بدیهی است. □

قضیه ۲۸.۳. *فرض کنیم $d_f \in \mathcal{O}_f\mathcal{D}(E)$ ($d_f \in \mathcal{I}_f\mathcal{D}(E)$) و $f : E \to E$ یک همریختی پوشا باشد. اگر $F \in \mathcal{F}(E)$، به‌طوری‌که $\ker f \subseteq F$، آن‌گاه*

۱) $d_f(F) \subseteq f(F)$.
۲) برای هر $x, y \in E$، $d_f(x \to y) \leq d_f(x) \to d_f(y)$ نتیجه می‌دهد که رابطه هم‌ارزی روی E منطبق است با رابطه هم‌ارزی روی E که توسط f ــ مشتق d_f به‌دست آمده است.

اثبات. با استفاده از فرض و لم ۲۷.۳(۱)، $f(F) \in \mathcal{F}(E)$.
(۱) فرض کنیم $y \in d_f(F)$. پس عنصر $x \in F$ وجود دارد، به‌طوری‌که $d_f(x) = y$. بنابر گزاره ۵.۳(۳)، $f(x) \leq d_f(x) = y$. چون $f(F) \in \mathcal{F}(E)$ و $x \in F$ پس $f(x) \in f(F)$ و در نتیجه $y \in f(F)$. بنابراین $d_f(F) \subseteq f(F)$.
(۲) فرض کنیم $x \equiv_F y$. بنابر گزاره ۷.۲، $x \to y, y \to x \in F$. چون f یک همریختی پوشا است، پس $f(x) \equiv_{f(F)} f(y)$. علاوه‌براین، بنا بر گزاره ۵.۳(۳) و فرض داریم،

$$f(x) \to f(y) = f(x \to y) \leq d_f(x \to y) \leq d_f(x) \to d_f(y).$$

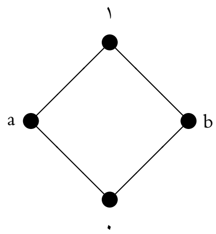
چون $f(F) \in \mathcal{F}(E)$ پس $d_f(x) \to d_f(y) \in f(F)$. به‌روش مشابه می‌توان نتیجه گرفت که $d_f(y) \to d_f(x) \in f(F)$. بنابراین $d_f(x) \equiv_{f(F)} d_f(y)$. □

نکته. f ــ مشتق ساخته شده در مثال ۳.۳(۲)، شرط قضیه ۲۸.۳(۲) را برآورده می‌کند. فرض کنیم $F \in \mathcal{F}(E)$ و $x, y \in E$. دراین‌صورت

$$x, y \notin F \;\Rightarrow\; x \to y \in F \text{ یا } y \to x \in F. \qquad (۳.۳)$$

در ادامه مثالی ارائه می‌دهیم که نشان می‌دهد فیلتری در جبر تساوی وجود دارد که در شرط (۳.۳) صدق می‌کند.

مثال ۲۹.۳. [۱] فرض کنیم $E=\{۰,a,b,۱\}$ با نمودار هسه و عمل زیر باشد.



$\sim$	۰	a	b	۱
۰	۱	b	a	۰
a	b	۱	b	a
b	a	a	۱	b
۱	۰	a	b	۱

$\to$	۰	a	b	۱
۰	۱	۱	۱	۱
a	b	۱	b	۱
b	a	a	۱	۱
۱	۰	a	b	۱

دراین‌صورت $(E,\wedge,\sim,۰,۱)$ یک جبر تساوی کراندار است و $F_۱=\{۱\}$ و $F_۲=\{a,۱\}$ دو فیلتر از E هستند، به‌طوری‌که $F_۱$ در شرط (۳.۳) صدق نمی‌کند و $F_۲$ در شرط (۳.۳) صدق می‌کند، زیرا $۰,b\notin F_۲$، درصورتی‌که $۰\to b=۱$ و $b\to ۰=a\in F_۲$.

قضیه ۳۰.۳. *فرض کنیم $f:E\to E$ یک درون‌ریختی باشد و $F\in\mathcal{F}(E)$ که ویژگی (۳.۳) را برآورده نکند. دراین‌صورت یک $d_f\in\mathcal{D}_f(E)$ وجود دارد به‌طوری‌که $E_{d_f=f}=F$ و در نتیجه $E_{d_f=f}\in\mathcal{F}(E)$.*

اثبات. فرض کنیم $F\in\mathcal{F}(E)$. نگاشت $d_f:E\to E$ را به‌گونه‌ای تعریف می‌کنیم که برای هر $x\in F$ داشته باشیم $d_f(x)=f(x)$ و برای هر $x\notin F$، $d_f(x)=۱$. بدیهی است که $E_{d_f=f}=F$ و در نتیجه $E_{d_f=f}\in\mathcal{F}(E)$. پس کافی است ثابت کنیم که $d_f\in\mathcal{D}_f(E)$. برای این منظور ثابت می‌کنیم $d_f\in\mathcal{I}_f\mathcal{D}(E)\cap\mathcal{O}_f\mathcal{D}(E)$. ابتدا نشان می‌دهیم که $d_f\in\mathcal{O}_f\mathcal{D}(E)$. چهار حالت زیر را در نظر می‌گیریم:

حالت ۱. فرض کنیم $x,y\in F$. دراین‌صورت $d_f(x)=f(x)$ و $d_f(y)=f(y)$. چون $x,y\in F\in\mathcal{F}(E)$ پس $x\to y\in F$ و در نتیجه

$$d_f(x\to y)=f(x\to y)=f(x)\to f(y)=f(x)\to d_f(y).$$

بنابراین، با استفاده از قضیه ۶.۳ داریم: $d_f\in\mathcal{O}_f\mathcal{D}(E)$.

حالت ۲. فرض کنیم $x\notin F$ و $y\in F$. دراین‌صورت $d_f(x)=۱$ و $d_f(y)=f(y)$. چون $y\le x\to y$ و $F\in\mathcal{F}(E)$ پس $x\to y\in F$. مشابه حالت (۱) می‌توان مشاهده کرد که $d_f\in\mathcal{O}_f\mathcal{D}(E)$.

حالت ۳. فرض کنیم $x\in F$ و $y\notin F$. اگر $x\to y\in F$، آن‌گاه چون $x\in F$ و $F\in\mathcal{F}(E)$ می‌توان نتیجه گرفت که $y\in F$ که تناقض است. پس $x\to y\notin F$ و

$d_f(x \to y) = ۱$. از طرف دیگر،

$$\begin{aligned}
&\Big[\big(d_f(x) \to f(y)\big) \to \big(f(x) \to d_f(y)\big)\Big] \to \big(f(x) \to d_f(y)\big)\\
&= \Big[\big(f(x) \to f(y)\big) \to \big(f(x) \to ۱\big)\Big] \to \big(f(x) \to ۱\big)
\end{aligned}$$

پس $(d_f(x) \to f(y))\bar{\vee}(f(x) \to d_f(y)) = ۱ = d_f(x \to y)$. بنابراین

$$d_f \in \mathcal{O}_f\mathcal{D}(E).$$

حالت ۴. فرض کنیم $x, y \notin F$. دراین‌صورت $d_f(x) = ۱ = d_f(y)$. پس

$$\begin{aligned}
&\Big[\big(d_f(x) \to f(y)\big) \to \big(f(x) \to d_f(y)\big)\Big] \to \big(f(x) \to d_f(y)\big)\\
&= [(۱ \to f(y)) \to (f(x) \to ۱)] \to (f(x) \to ۱)\\
&= ۱ \to ۱ = ۱.
\end{aligned}$$

علاوه‌براین، با استفاده از فرض $x, y \notin F$ نتیجه می‌دهد $x \to y \notin F$ و $y \to x \notin F$. پس $d_f(x \to y) = ۱$. بنابراین $d_f \in \mathcal{O}_f\mathcal{D}(E)$. به روش مشابه می‌توان ثابت کرد $d_f \in \mathcal{I}_f\mathcal{D}(E)$. بنابراین $d_f \in \mathcal{D}_f(E)$. □

۴. (α, f)ـ مشتق روی جبرهای تساوی

در این قسمت با استفاده از ویژگی‌های جبرهای تساوی، دو درون‌ریختی می‌سازیم و نشان می‌دهیم که آن‌ها fـ مشتقات بیرونی جبرهای تساوی هستند و با استفاده از این fـ مشتقات بیرونی یک BEـجبر و BCKـجبر دوگان می‌سازیم.

تعریف ۱.۴. [۱] فرض کنیم E یک جبر تساوی باشد. دراین‌صورت E را یک جبر تساوی مثبت می‌نامیم هرگاه برای هر $x, y, z \in E$ شرط زیر برقرار باشد:

$$x \to (y \to z) = (x \to y) \to (x \to z) \qquad (۱.۴)$$

مثال ۲.۴. جبر تساوی بیان‌شده در مثال ۲۹.۳ را در نظر بگیرید. دراین‌صورت E در شرط (۱.۴) صدق می‌کند.

گزاره ۳.۴. *فرض کنیم* $d_f^\beta : E \to E$ *یک نگاشت روی* E *باشد که در آن*

$$d_f^\beta(x) = (f(x) \to \beta) \to \beta,$$

و $\beta \in E$*. دراین‌صورت احکام زیر برقرارند:*

۱) d_f^β *حافظ ترتیب است.*

۲) *اگر* $\beta \in Fix_f(E)$ *و* $f^۲ = f$*، آن‌گاه* d_f^β *نگاشت خودتوان است.*

۳) $\ker(d_f^\beta) \in \mathcal{F}(E)$*.*

۴) *اگر* d_f^β *یک* $\to$ـ *درون‌ریختی روی* E *باشد، آن‌گاه* $d_f^\beta \in \mathcal{O}_f\mathcal{D}(E)$*.*

اثبات. (۱) فرض کنیم $x, y \in E$ به‌طوری‌که $x \leq y$. چون f یک همریختی است پس $f(x) \leq f(y)$. با دوبار استفاده از گزاره ۲.۲(۶) داریم:

$$d_f^\beta(x) = (f(x) \to \beta) \to \beta \leq (f(y) \to \beta) \to \beta = d_f^\beta(y).$$

بنابراین d_f^β حافظ ترتیب است.

(۲) فرض کنیم $x \in E$، $f^۲ = f$ و $\beta \in Fix_f(E)$. دراین‌صورت $f(\beta) = \beta$ و با استفاده از گزاره ۲.۲(۹) داریم

$$\begin{aligned} d_f^\beta(d_f^\beta(x)) &= d_f^\beta((f(x) \to \beta) \to \beta) = \big[f\big((f(x) \to \beta) \to \beta\big) \to \beta\big] \to \beta \\ &= \left[\left(\big(f^۲(x) \to f(\beta)\big) \to f(\beta)\right) \to \beta\right] \to \beta \\ &= \left[\left(\big(f(x) \to \beta\big) \to \beta\right) \to \beta\right] \to \beta \\ &= (f(x) \to \beta) \to \beta \quad \text{بنابر گزاره ۲.۲(۹)} \\ &= d_f^\beta(x). \end{aligned}$$

بنابراین d_f^β خودتوان است.

(۳) بدیهی است که $۱ \in \ker(d_f^\beta)$. فرض کنیم $x, x \to y \in \ker(d_f^\beta)$. پس $d_f^\beta(x) = ۱$ و $d_f^\beta(x \to y) = ۱$. با استفاده از گزاره ۲.۲(۴)، $f(y) \leq (f(y) \to \beta) \to \beta$ و بنابر گزاره ۲.۲(۶) می‌توان نتیجه گرفت که

$$f(x) \to f(y) \leq f(x) \to \big((f(y) \to \beta) \to \beta\big). \tag{۲.۴}$$

علاوه‌براین

$$d_f^\beta(y) = (f(y) \to \beta) \to \beta = 1 \to [(f(y) \to \beta) \to \beta]$$

$$= \Big[\underbrace{\big((f(x) \to f(y)) \to \beta\big) \to \beta}\Big] \to [(f(y) \to \beta) \to \beta]$$

چون $d_f^\beta(x \to y) = 1$

$$= (f(y) \to \beta) \to \Big[\Big(\big((f(x) \to f(y)) \to \beta\big) \to \beta\Big) \to \beta\Big]$$

با استفاده از گزاره ۲.۲(۵)

$$= \big(f(y) \to \beta\big) \to \big[(f(x) \to f(y)) \to \beta\big]$$

با استفاده از گزاره ۲.۲(۹)

$$= \big(f(x) \to f(y)\big) \to \Big[(f(y) \to \beta) \to \beta\Big]$$

با استفاده از گزاره ۲.۲(۵)

$$= \big(f(x) \to f(y)\big) \to \Big[1 \to \big((f(y) \to \beta) \to \beta\big)\Big]$$

با استفاده از گزاره ۲.۲(۲)

$$= \big(f(x) \to f(y)\big) \to \Big[\underbrace{\big((f(x) \to \beta) \to \beta\big)} \to \big((f(y) \to \beta) \to \beta\big)\Big]$$

بنابر $d_f^\beta(x) = 1$

$$= (f(x) \to f(y)) \to \Big[(f(y) \to \beta) \to \underbrace{\big(((f(x) \to \beta) \to \beta) \to \beta\big)}\Big]$$

با استفاده از گزاره ۲.۲(۵)

$$= \big(f(x) \to f(y)\big) \to \Big[(f(y) \to \beta) \to (f(x) \to \beta)\Big]$$

با استفاده از گزاره ۲.۲(۹)

$$= \big(f(x) \to f(y)\big) \to \Big[f(x) \to \big((f(y) \to \beta) \to \beta\big)\Big] \quad \text{بنابر (۲.۴)}$$

$$= 1.$$

پس $d_f^\beta(y) = 1$ و در نتیجه $y \in \ker(d_\beta)$. بنابراین $ker(d_f^\beta) \in \mathcal{F}(E)$.

(۴) با استفاده از مفروضات داریم

$$\begin{aligned} d_f^\beta(x \to y) &= d_f^\beta(x) \to d_f^\beta(y) \\ &= \big((f(x) \to \beta) \to \beta\big) \to \big((f(y) \to \beta) \to \beta\big) \\ &= (f(y) \to \beta) \to \Big(\big((f(x) \to \beta) \to \beta\big) \to \beta\Big) \end{aligned}$$

با استفاده از گزاره ۲.۲(۵)

$$= (f(y) \to \beta) \to (f(x) \to \beta) \quad \text{با استفاده از گزاره ۲.۲(۹)}$$

$$= f(x) \to \big((f(y) \to \beta) \to \beta\big) \quad \text{با استفاده از گزاره ۲.۲(۵)}$$

$$= f(x) \to d_f^\beta(y).$$

بنابراین، با استفاده از قضیه ۶.۳ داریم: $d_f^\beta \in \mathcal{O}_f\mathcal{D}(E)$. □

گزاره ۴.۴. *فرض کنیم $\alpha \in E$. نگاشت $d_f^\alpha : E \to E$ را روی E درنظر بگیرید، به‌طوری‌که برای $x \in E$ داریم: $d_f^\alpha(x) = \alpha \to f(x)$. دراین‌صورت احکام زیر برقرارند:*

۱) $d_f^1(x) = f(x)$. *اگر E کراندار باشد، آن‌گاه* $d_f^0(x) = 1$.
۲) d_f^α *حافظ ترتیب است.*
۳) *اگر E در شرط (۱.۴) صدق کند، آن‌گاه d_f^α یک $\to$ــ درون‌ریختی روی E است.*
۴) $d_f^\alpha \in \mathcal{O}_f\mathcal{D}(E)$.

اثبات. (۱) اثبات بدیهی است.
(۲) فرض کنیم $x, y \in E$ باشند به‌طوری‌که $x \le y$. چون f یک همریختی است، پس $f(x) \le f(y)$. دراین‌صورت با استفاده از گزاره ۲.۲(۶)، $\alpha \to f(x) \le \alpha \to f(y)$ و در نتیجه $d_f^\alpha(x) \le d_f^\alpha(y)$. بنابراین d_f^α حافظ ترتیب است.
(۳) فرض کنیم $x, y \in E$. چون E در شرط (۱.۴) صدق می‌کند داریم:

$$\begin{aligned} d_f^\alpha(x \to y) &= \alpha \to f(x \to y) = \alpha \to (f(x) \to f(y)) \\ &= (\alpha \to f(x)) \to (\alpha \to f(y)) = d_f^\alpha(x) \to d_f^\alpha(y). \end{aligned}$$

بنابراین $d_f^\alpha(x \to y) = d_f^\alpha(x) \to d_f^\alpha(y)$.
(۴) فرض کنیم $x, y \in E$. با استفاده از گزاره ۲.۲(۳)، $f(x) \le \alpha \to f(x)$. بنابراین با

استفاده از گزاره ۲.۲(۶) و (۵) می‌توان نتیجه گرفت که

$$\begin{aligned}(\alpha \to f(x)) \to f(y) &\leq f(x) \to f(y)\\ &\leq \alpha \to \big(f(x) \to f(y)\big)\\ &= f(x) \to (\alpha \to f(y)).\end{aligned} \tag{۳.۴}$$

پس

$$\begin{aligned}&d_f^\alpha(x \to y)\\ &= \alpha \to f(x \to y) = \alpha \to (f(x) \to f(y)) \qquad \text{چون } f \text{ یک همریختی است}\\ &= f(x) \to (\alpha \to f(y)) \qquad \text{بنابر گزاره ۲.۲(۵)}\\ &= ۱ \to \big[f(x) \to (\alpha \to f(y))\big] \qquad \text{بنابر گزاره ۲.۲(۲)}\\ &= \underbrace{\Big[\big((\alpha \to f(x)) \to f(y)\big) \to \big(f(x) \to (\alpha \to f(y))\big)\Big]}_{\text{بنابر (۳.۴)}} \to \big[f(x) \to (\alpha \to f(y))\big]\\ &= \Big[\big(d_f^\alpha(x) \to f(y)\big) \to \big(f(x) \to d_f^\alpha(y)\big)\Big] \to \big[f(x) \to d_f^\alpha(y)\big] \qquad \text{بنا به تعریف } d_f^\alpha\\ &= \big(d_f^\alpha(x) \to f(y)\big)\bar{\vee}\big(f(x) \to d_f^\alpha(y)\big). \qquad \text{بنا به تعریف } \bar{\vee}\end{aligned}$$

بنابراین $d_f^\alpha \in \mathcal{O}_f\mathcal{D}(E)$. □

گزاره ۵.۴. *فرض کنیم E یک $\odot$ـ جبر تساوی و f خودتوان باشد. آن‌گاه $(D_f^\alpha(E), \circ, ۱_E)$ یک تکواره است که در آن* $D_f^\alpha(E) = \{d_f^\alpha \mid \alpha \in Fix_f(E)\}$.

اثبات. فرض کنیم $d_f^{\alpha_۱}, d_f^{\alpha_۲} \in D_f^\alpha(E)$. چون $\alpha_۱, \alpha_۲ \in Fix_f(E)$ پس

$$f(\alpha_۱ \odot \alpha_۲) = f(\alpha_۱) \odot f(\alpha_۲) = \alpha_۱ \odot \alpha_۲,$$

در نتیجه $Fix_f(E)$ تحت عمل $\odot$ بسته است. حال داریم:

$$d_f^{\alpha_1} \circ d_f^{\alpha_2}(x) = d_f^{\alpha_1}(\alpha_2 \to f(x)) = \alpha_1 \to f(\alpha_2 \to f(x)) \quad \text{بنا به تعریف } d_f^{\alpha}$$
$$= \alpha_1 \to \big(f(\alpha_2) \to f^2(x)\big) \quad \text{چون } f \text{ یک درونریختی است}$$
$$= \alpha_1 \to (f(\alpha_2) \to f(x)) \quad \text{چون } f \text{ خودتوان است}$$
$$= \alpha_1 \to (\alpha_2 \to f(x)) \quad \text{چون } \alpha_2 \in Fix_f(E)$$
$$= (\alpha_1 \odot \alpha_2) \to f(x) \quad \text{چون } E \text{ یک } \odot\text{ـ جبر تساوی است}$$
$$= d_f^{\alpha_1 \odot \alpha_2}(x).$$

بنابراین $(D_f^\alpha(E), \circ)$ تحت عمل "$\circ$" بسته است و با استفاده از گزاره ۳.۲(۲)، $(D_f^\alpha(E), \circ, 1_E)$ یک تکواره است که در آن برای هر $x \in E$، $1_E(x) = 1$. □

فرض کنیم $End(E)$ مجموعه همه درون‌ریختی‌های روی E است و $\alpha \in E$ ثابت در نظر بگیریم. دراین‌صورت مجموعه تمام (α, f)ـ مشتق از E مرتبط با درون‌ریختی f را با نماد $D_E(\alpha, f)$ نشان می‌دهیم، به عبارت دیگر $D_E(\alpha, f) = \{d_f^\alpha \mid f \in End(E)\}$. عمل "$\rightsquigarrow$" را روی $End(E)$ به‌صورت $(f \rightsquigarrow g)(x) = f(x) \to g(x)$ تعریف می‌کنیم که در آن $f, g \in End(E)$ و $x \in E$.

مثال ۶.۴. فرض کنیم $f, g : E \to E$ که در آن E جبر تساوی بیان‌شده در مثال ۳.۳ باشد و $f(0) = 0$، $f(a) = a$ و $f(b) = f(1) = 1$ و $g(0) = 0$، $g(a) = g(b) = g(1) = 1$. بدیهی است $f \rightsquigarrow g = 1_E \in End(E)$ درصورتی‌که $g \rightsquigarrow f \notin End(E)$.

قضیه ۷.۴. *اگر $End(E)$ تحت عمل "$\rightsquigarrow$" بسته باشد، آن‌گاه ساختار جبری با یک عمل از نوع ۲ ، $(D_E(\alpha, f), \rightsquigarrow, 1_E)$ یک BEـ جبر است و در نتیجه یک BCKـ جبر دوگان است.*

اثبات. اثبات بدیهی است. □

۵. نتیجه

در این مقاله، ابتدا مفهوم fـ مشتق در جبر تساوی E با استفاده از مفاهیم fـ مشتقات درونی و بیرونی را معرفی کردیم. سپس برخی از ویژگی‌های fـ مشتق (درونی، بیرونی) را

بررسی و شرایط مناسبی را که به ما کمک می‌کنند تا یک fـ مشتق را در E تعریف کنیم مطالعه کردیم. علاوه‌براین، مفاهیم هسته و مجموعه نقطه ثابت fـ مشتق در E را تعریف کرده و ثابت کردیم که تحت چه شرایطی فیلترهای E هستند. علاوه‌براین، نشان دادیم که تحت برخی شرایط روابط هم‌ارزی در $(E, \rightarrow, 1)$ با روابط هم‌ارزی در E با fـ مشتق منطبق است. همچنین با استفاده از ویژگی‌های جبر تساوی، دو fـ مشتق بیرونی ساخته شده و با معرفی یک عملیات دوتایی $\leftrightsquigarrow$ روی مجموعه همه این fـ مشتق‌های بیرونی نشان دادیم که این مجموعه تشکیل یک BEـ جبر و BCKـ جبر دوگان می‌دهد.

مراجع

[1] M. Aaly Kologani, R. A. Borzooei, G. R. Rezaei, Y. B. Jun, Commutative equality algebras and $\&$-equality algebras, Annal. Univ. Craiova - Math. Com. Sci. Ser., 47(2) (2020), 331-345.

[2] H. A. S. Abujabal, N. O. Al-shehri, Some results on derivations of BCI-algebras, J. Nat. Sci. Math., 46(1-2) (2006), 13-19.

[3] H. A. S. Abujabal, N. O. Al-shehri, On left derivations of BCI-algebras, Soochow J. Math., 33(3) (2007), 435-444.

[4] A. M. Al-roqi, On generalized (α, β)-derivations in BCI-algebras, J. Appl. Math. Info., 32(12) (2014), 27-38.

[5] N. O. Al-shehri, S. M. Bawazeer, On derivations of BCC-algebras, Inter. J. Alg., 6(32) (2012), 1491-1498.

[6] L. K. Ardekani, B. Davvaz, On generalized derivations of BCI-algebras and their properties, J. Math., 2014 (2014), Article ID 207161, 10 pages.

[7] R. A. Borzooei, A. Borumand Saeid, A. Rezaei, A. Radfar, R. Ameri, On pseudo-BE algebras, Discussiones Mathematicae - General Algebra and Applications, 33 (2013), 95-108.

[8] R. A. Borzooei, S. Khosravi Shoar, Impliation algebras are equivalent to the dual implicative BCK-algebras, Scientiae Mathematicae Japonicae Online, (2006), 371-373.

[9] L. C. Ciungu, Internal states on equality algebras, Soft Computing, 19(4) (2015), 939-953.

[10] S. Jenei, Equality algebras, Studia Logica, 100(6) (2012), 1201-1209.

[11] S. Jenei and L. Kóródi, On the variety of equality algebras, Fuzzy Logic and Technology, (2011), 153-155.

[12] Y. B. Jun, X. L. Xin, On derivations of BCI-algebras, Info. Sci., 159 (2004), 167-176.

[13] P. H. Lee, T. K. Lee, On derivations of prime rings, Chinese J. Math., 9 (1981), 107-110.

[14] S. Niazian, Prime filters and Zariski topology on equality algebras, International Journal of Industrial Mathematics, 15(2) (2023), DOI: 10.30495/ijim.2023.22548.

[15] V. Novák and B. De Baets, EQ-algebras, Fuzzy Sets and Systems, 160(20) (2009), 2956-2978.

[16] H. Ono, Substructural logics and residualted lattices: An introduction, Trends in Logic, 20 (2003), 177-212.

[17] A. Paad, Ideals in bounded equality algebras, Filomat, 33(7) (2019), 2113-2123.

[18] E. Posner, Derivations in prime rings, Proc. Amer. Math. Soc., 8 (1957), 1093-1100.

[19] G. R. Rezaei, M. Aaly Kologani, R. A. Borzooei, M. Mohseni Takallo, Derivations of equality algebras, Soft Computing, 26 (2022), 5057–5067.

[20] M. Ward and R. P. Dilworth , Residuated lattices, Transactions of the American Mathematical Society, 45 (1939), 335-354.

[21] F. Zebardast, R. A. Borzooei and M. Aaly Kologani, Results on equality algebras, Information Sciences, 381 (2017), 270-282.