سیستم های فازی و کاربردها
سال هفتم، شماره اول (بهار و تابستان ۱۴۰۳)
صص. ۲۵ تا ۵۱
شاپای چاپی: ۲۷۱۷ـ۴۴۰۹
شاپای الکترونیکی: ۲۷۱۷ـ۳۹۸۴
DOI:10.22034/JFSA.2024.455888.1204

$\mathcal{L}$ـپیش‌ایده‌آل‌های نرم شهودی در EQـجبرها

محمود بخشی

گروه ریاضی، دانشگاه بجنورد، بجنورد، ایران

تاریخ دریافت: ۱۴۰۳/۰۲/۱۶ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۳/۰۳/۱۵

نوع مقاله: علمی ـ پژوهشی

چکیده. در این مقاله، با درنظر گرفتن مفهوم $\mathcal{L}$ـمجموعه (که $\mathcal{L}$ یک مشبکه کامل است)، مفاهیم $\mathcal{L}$ـپیش‌ایده‌آل نرم شهودی و $\mathcal{L}$ـایده‌آل نرم شهودی در EQـجبرها را معرفی و خواص مقدماتی و نیز شرایطی معادل برای آن‌ها ارائه می‌دهیم. در ادامه ساختار مشبکه‌ای آن‌ها را مطالعه و نشان می‌دهیم که تحت رابطه شمول مجموعه‌ها یک مشبکه‌ی کامل تشکیل می‌دهند. همچنین، برخی اعمال جبری روی این مفاهیم را معرفی و به مطالعه خواص آن‌ها می‌پردازیم. به‌علاوه، مفاهیم $\mathcal{L}$ـپیش‌فیلترنرم شهودی و $\mathcal{L}$ـفیلتر نرم شهودی در EQـ جبرها را معرفی و ضمن ارائه شرایطی معادل برای آنها، ارتباط بین آنها با $\mathcal{L}$ـپیش‌ایده‌آل‌ها و $\mathcal{L}$ـایده‌آل‌ها را بررسی می‌کنیم.

۱. سرآغاز

مفهوم EQـجبر [۱۶] توسط نواک[1] و دی‌بیتس[2] به‌عنوان مدلی جبری برای منطق فازی مرتبه بالاتر [3] یا همان نظریه نوع فازی [4] معرفی شد. EQـجبر، جبری است از نوع $(۲,۲,۲,۰)$

2010 *Mathematics Subject Classification.* 03G25; 08A72
E-mail: bakhshi@ub.ac.ir.
عبارات و کلمات کلیدی. EQـجبر، $\mathcal{L}$ـپیش‌ایده‌آل نرم شهودی، $\mathcal{L}$ـپیش‌فیلتر نرم شهودی، مشبکه کامل.
[1]Novák
[2]De Beats
[3]Higher-order fuzzy logic
[4]Fuzzy type theory

مشتمل بر یک عمل ضرب ($*$)، یک عمل tـ نرم مینیمم ($\wedge$)، یک عمل تساوی فازی ($\sim$) و یک ثابت ۱. اگرچه عمل استلزام از تساوی فازی و مینیمم بدست می‌آید ولی یک عمل مانده نیست، لذا EQـ جبرها لزوماً مشبکه مانده نیستند [۱۷]. با این‌حال، مشبکه‌های مانده (و لذا زیر رده‌های آن‌ها) همگی مثال‌هایی از EQـ جبر هستند. نواک و دی‌بیتس، چندین رده از EQـ جبرها مثل EQـ جبرهای خوب، EQـ جبرهای مانده و EQـ جبرهای جداشده را معرفی و ثابت کردند که EQـ جبرهای مانده، EQـ جبرهای جداشده با خاصیت $(a * b) \to c = a \to (b \to c)$ و EQـ جبرهای خوب با خاصیت $a \leq b \to (a * c)$ همگی معادلند. پس از آن، مطالعات زیادی روی EQـ جبرها انجام شد، به‌عنوان مثال به [۱، ۴، ۶، ۷، ۹، ۱۵] مراجعه شود. در مطالعه جبرهای منطقی، مفهوم فیلتر و ایده‌آل نقشی اساسی ایفا می‌کنند چرا که آنها متناظر با مجموعه‌های متشکل از فرمول‌های قابل اثبات در منطق متناظر هستند. از طرف دیگر، فیلترها/ایده‌آل‌ها یک رابطه همنهشتی القا می‌کنند که بواسطه آنها، کلاسهای همنهشتی تشکیل جبری از همان نوع و در مواردی با خاصیت اضافی، می‌دهند. نواک و دی‌بیتس مفهوم فیلتر در یک EQـ جبر را معرفی و ثابت کردند که کلاسهای همنهشتی القا شده توسط یک فیلتر تشکیل یک EQـ جبر جدا شده می‌دهند. اِل‌ـ زکی[1] و همکاران [۱۰]، خاطرنشان کردند که حتی وقتی که یک EQـ جبر، جداشده باشد ممکن است EQـ جبر خارج قسمتی القایی جداشده نباشد. لذا، آنها ایده رابطه همنهشتی نسبی را مطرح کردند که نوعی رابطه همنهشتی است که جبر خارج قسمتی القایی توسط آن یک EQـ جبر جداشده است. آنها همچنین مفهوم پیش‌فیلتر که خیلی شبیه به تعریف فیلتر در مشبکه‌های مانده است را معرفی کردند و ثابت کردند که هر پیش‌فیلتر در یک EQـ جبر جداشده، یک رابطه همنهشتی نسبی القا می‌کند به‌طوری‌که جبر خارج قسمتی یک نیم‌مشبکه است.

پس از آنکه زاده[2] مفهوم مجموعه فازی را مطرح کرد [۱۸]، این مفهوم به‌سرعت توسعه پیدا کرد و تعمیم‌های متنوعی از آن مطرح شد مثل مجموعه فازی شهودی [۳] و مجموعه‌های نرم [۱۴]. همچنین، محققان آن را در علوم محض و کاربردی برای توصیف اطلاعات نادقیق به‌کار گرفتند، برای مثال به [۸، ۱۹، ۲۰، ۲۱] مراجعه شود. در زمینه جبرهای منطقی، مطالعات زیادی روی کاربرد مجموعه‌های فازی و ارتباط آنها با زیرساختارهایی همچون فیلترها و ایده‌آل‌ها صورت گرفته است. در EQـ جبرها، ما[3] و هو[4] مفهوم فیلتر فازی را مطرح و نتایجی

---

[1] El-Zekey
[2] Zadeh
[3] Ma
[4] Hu

در این خصوص ارائه دادند. آنها نشان دادند که هر فیلتر فازی یک رابطه همنهشتی فازی القا می‌کند که جبرخارج قسمتی متناظر یک EQـ جبر جداشده است [۱۳].

اگرچه مجموعه‌های فازی ابزاری مفید و کاربردی برای مدل‌سازی مسائل نادقیق است، اما مسائل بهینه‌سازی زیادی وجود دارند که با زبان مجموعه‌های فازی قابل بیان نیستند. در این‌گونه مسائل، مجموعه‌های جزئاً مرتب به مراتب بهتر از فاصله یکه $[0, 1]$ عمل می‌کنند. از این‌رو گوگن[1][۱۱] مفهوم مجموعه فازی مشبکه‌ـ مقدار یا بطور خلاصه $\mathcal{L}$ـ مجموعه را معرفی کرد که در آن یک مشبکه کامل $\mathcal{L}$ به‌جای فاصله یکه حقیقی $[0, 1]$ جایگزین می‌شود. این موضوع، محققان را برآن داشت تا نتایج قبلی را تعمیم داده و با استفاده از مفهوم نظریه مشبکه به توصیف جبرهای منطقی بپردازند.

از آن‌جایی که EQـ جبرها به‌عنوان یک ساختار جبری کلی که در برگیرنده بسیاری از جبرهای متناظر با منطق است شناخته می‌شود لذا مطالعه آن بالاخص مطالعه زیرساختارهای آن از اهمیت زیادی برخوردار است. از طرف دیگر چون بازه یکه حقیقی خود یک مشبکه کامل است، جالب است که مقادیر ارزشدهی‌ها را از یک مشبکه کامل کلی‌تر انتخاب کرد. به‌علاوه، اگرچه پیش‌فیلترها/فیلترهای فازی قبلاً مطالعه شده‌اند، مطالعه پیش‌ایده‌آل‌ها و نقش آن‌ها در توصیف جبرهای منطقی بالاخص EQـ جبرها و ارتباط آن‌ها با پیش‌فیلترها/فیلترها نیز می‌تواند موضوعی درخور توجه باشد. موضوع دیگری که انگیزه مطالعه اثر حاضر می‌باشد، مطالعه انواع دیگر ابزارهای نادقیق مانند مجموعه‌های نرم و مجموعه‌های فازی شهودی با تاکید بر نظریه مشبکه و نقش آن‌ها در توصیف و شناخت هرچه بیشتر EQـ جبرهاست. بنابراین، در این مقاله، با به‌کارگیری مفهوم مجموعه نرم و مجموعه فازی شهودی، به معرفی و مطالعه خواص پیش‌ایده‌آل‌ها و ایده‌آل‌های نرم شهودی از نقطه‌نظر نظریه مشبکه می‌پردازیم. برای این منظور مفهوم $\mathcal{L}$ـ پیش‌ایده‌آل و $\mathcal{L}$ـ ایده‌آل نرم شهودی در EQـ جبرها را معرفی و برخی خواص مقدماتی و شرایط هم‌ارز آن‌ها را بدست می‌آوریم. به‌علاوه، نشان می‌دهیم که تحت رابطه شمول یک مشبکه کامل تشکیل می‌دهند. در ادامه، برخی اعمال جبری روی $\mathcal{L}$ـ پیش‌ایده‌آل‌ها و $\mathcal{L}$ـ ایده‌آل‌های نرم شهودی را معرفی و خواص آن‌ها را بررسی می‌کنیم.

۲. مفاهیم و نتایج مقدماتی

در این بخش به معرفی برخی تعریف‌ها و نتیجه‌های مورد نیاز این مقاله می‌پردازیم.

[1] Goguen

تعریف ۱.۲. [۱۶، ۲] جبر $\mathcal{E} = (E, *, \wedge, \sim, ۱)$ از نوع $(۲, ۲, ۲, ۰)$، EQـ جبر نامیده شود هرگاه شرایط زیر برای هر $a, b, c \in E$ برقرار باشند:

(EQ۱) $(E, \wedge, ۱)$ یک نیم‌مشبکه با بزرگترین عنصر ۱ نسبت به رابطه القاشده توسط عمل $\wedge$ باشد که بصورت $a \leq b \Leftrightarrow a \wedge b = a$ تعریف می‌شود،

(EQ۲) $(E, *, ۱)$ یک تکواره جابجایی با خاصیت $a \leq b \Rightarrow a * c \leq b * c$ باشد،

(EQ۳) $a \sim a = ۱$،

(EQ۴) $((a \wedge b) \sim c) * (d \sim a) \leq c \sim (d \wedge b)$،

(EQ۵) $(a \sim b) * (c \sim d) \leq (a \sim c) \sim (b \sim d)$،

(EQ۶) $(a \wedge b \wedge c) \sim a \leq (a \wedge b) \sim a$،

(EQ۷) $(a \wedge b) \sim a \leq (a \wedge b \wedge c) \sim (a \wedge c)$،

(EQ۸) $a * b \leq a \sim b$.

EQـ جبر $\mathcal{E} = (E, *, \wedge, \sim, ۱)$

(الف) جداشده نامیده می‌شود هرگاه برای هر $a, b \in E$، $a \sim b = ۱$ نتیجه دهد $a = b$،

(ب) مانده نامیده می‌شود هرگاه هم‌ارزی $a * b \leq c \Leftrightarrow a \leq b \to c$، برای هر $a, b, c \in E$ برقرار باشد، که $a \to b := (a \wedge b) \sim a$،

(ج) خوب گفته می‌شود هرگاه برای هر $a \in E$ داشته باشیم $\tilde{a} = a$، که $\tilde{a} := a \sim ۱$.

(د) کراندار نامیده می‌شود هرگاه دارای کوچکترین عضو ۰ نسبت به رابطه $\leq$ باشد.

(ه) پیچشی نامیده می‌شود هرگاه برای هر $x \in E$ داشته باشیم $\neg\neg x = x$، که عمل $\neg$ به‌صورت $\neg x = x \to ۰$ تعریف می‌شود.

گزاره ۲.۲. [۱۶، ۱۰] *در هر EQ ـ جبر خواص زیر برقرارند:*

(۱) $a \to ۱ = ۱ = a \to a$، $\tilde{a} = ۱ \to a$، $\neg a = a \sim ۰$،

(۲) $(a \sim b) * (b \sim c) \leq a \sim c$، $(a \to b) * (b \to c) \leq a \to c$،

(۳) $a * b \leq a \wedge b$، $c * (a \wedge b) \leq (c * a) \wedge (c * b)$،

(۴) $(a \to b) * (b \to a) \leq a \sim b \leq a \to b$، $b \leq \tilde{b} \leq a \to b$،

(۵) $a \sim d \leq (a \sim c) \sim (d \sim c)$، $a \sim d \leq (b \to a) \sim (b \to d)$،

(۶) $a \to d \leq (b \to a) \to (b \to d)$، $a \to d \leq (d \to b) \to (a \to b)$،

(۷) $a \sim b \leq (a \wedge c) \sim (b \wedge c)$، $a \to b \leq (a \wedge c) \to (b \wedge c)$،

(۸) اگر $a \leq b$، آنگاه $a \to b = ۱$، $c \to a \leq c \to b$ و $b \to c \leq a \to c$.
بالاخص، $a \leq b$ ایجاب می‌کند که $\neg b \leq \neg a$،

(۹) اگر $a \leq b \leq c$، آنگاه $c \sim a \leq c \sim b$ و $a \sim c \leq a \sim b$. بالاخص اینکه اگر $a \leq b$، آنگاه $\tilde{a} \leq \tilde{b}$،

(۱۰) اگر $\mathcal{E}$ خوب باشد، آنگاه $a \leq (a \sim b) \sim b$. بالاخص اینکه، $a \leq \neg\neg a$ و $\neg\neg\neg a = \neg a$.

(۱۱) هر EQ ـ جبر خوب جدا شده است و در شرط $a \to (b \to c) = b \to (a \to c)$ صدق می‌کند.

تعریف ۳.۲. [۲] زیرمجموعه ناتهی I از EQـ جبر کراندار $\mathcal{E} = (E, \wedge, *, \sim, ۰, ۱)$ یک پیش‌ایده‌آل نامیده می‌شود هرگاه در دو خاصیت (PI۱) و (PI۲) صدق کند:

(PI۱) هرگاه $a \leq b$ و $b \in I$، آنگاه $a \in I$،

(PI۲) هرگاه $a, b \in I$، آنگاه $\neg a \to b \in I$.

پیش‌ایده‌آل I یک ایده‌آل نامیده می‌شود هرگاه در خاصیت (PI۳) صدق کند:

(PI۳) $\neg(a \to b) \in I$ نتیجه دهد $\neg((a * c) \to (b * c)) \in I$،

تعریف ۴.۲. [۵] فرض کنید $\mathcal{L}$ یک مجموعه جزئاً مرتب باشد. تابع $\mathfrak{n} : \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{L}$ یک عمل پیچشی نامیده می‌شود هرگاه برای هر $x, y \in \mathcal{L}$، $x \leq y$ ایجاب کند که $\mathfrak{n}(y) \leq \mathfrak{n}(x)$ و نیز $\mathfrak{n}(\mathfrak{n}(x)) = \mathfrak{n}(x)$.

تعریف ۵.۲. [۳، ۱۲، ۱۴] فرض کنید X مجموعه‌ای ناتهی و $\mathcal{L}$ مشبکه‌ای کامل باشد.

(i) هر تابع از X به‌توی $\mathcal{L}$ یک $\mathcal{L}$ـ مجموعه نامیده می‌شود.

(ii) هرگاه $\mathcal{L}$ منضم به یک عمل پیچشی $\mathfrak{n}$ باشد، یک $\mathcal{L}$ـ مجموعه شهودی در X بصورت
$\lambda = \{\langle x, \mu_\lambda(x), \nu_\lambda(x)\rangle : x \in X\}$ تعریف می‌شود که μ_λ و ν_λ، $\mathcal{L}$ـ مجموعه‌هایی از X هستند با این خاصیت که برای هر $x \in X$، $\mu_\lambda(x) \leq \mathfrak{n}(\nu_\lambda(x))$.

(iii) هرگاه λ یک $\mathcal{L}$ـ مجموعه شهودی از X باشد، به‌ازای $s, t \in \mathcal{L}$، مجموعه‌های $\mathfrak{U}_t = \{x \in X : \mu(x) \geq t\}$، $\mathfrak{L}_s = \{x \in X : \nu(x) \leq s\}$، به‌ترتیب مجموعه تراز بالایی و مجموعه تراز پایینی λ نامیده می‌شود.

(iv) هرگاه A مجموعه‌ای از پارامترها باشد، یک مجموعه نرم روی X تابعی است چون $F : A \longrightarrow ۲^X$، که بصورت (F, A) نشان داده می‌شود.

در این مقاله، $\mathcal{L} = (L, \vee, \wedge, \mathfrak{n}, \perp, \top)$ نشان‌دهنده مشبکه‌ای کامل همراه با عمل پیچشی $\mathfrak{n}$، $\mathcal{E} = (E, \wedge, *, \sim, ۰, ۱)$ یک EQـ جبر کراندار و A مجموعه‌ای از پارامترها هستند.

۳. $\mathcal{L}$ـ پیش‌ایده‌آل‌های نرم شهودی

برای عناصر $a, b \in E$، عمل $\boxminus$ را بصورت $a \boxminus b = \neg a \to b$ تعریف می‌کنیم. برخی خواص عمل $\boxminus$ به شرح زیر است:

گزاره ۱.۳. *در هر EQ ـ جبر $\mathcal{E}$ خواص زیر برقرار است:*

(۱) $b \leq a \boxminus b$، $a \boxminus \neg a = ۱$، $a \leq a \boxminus a$، $a \boxminus ۱ = ۱ = a \boxminus a$، $a \boxminus \tilde{a} = ۱$.
اگر $\mathcal{E}$ پیچشی باشد، آن‌گاه $\tilde{a} \boxminus a = ۱$،

(۲) *اگر $\mathcal{E}$ کراندار باشد، آن‌گاه* $۰ \boxminus a = \tilde{a}$ *و* $\neg\neg a = a \boxminus ۰$،

(۳) *فرض کنید $\mathcal{E}$ خوب باشد. اگر $a \leq b$، آن‌گاه* $\neg(b \boxminus \neg a) = ۰$.

(۴) *اگر $\mathcal{E}$ خوب باشد، آن‌گاه برای هر $a, b \in E$ داریم* $\neg\neg(a \boxminus \neg b) = a \boxminus \neg b$

اثبات. برهان (۱) و (۲) از گزاره ۲.۲(۱)،(۴) مستقیماً نتیجه می‌شود. برای برهان (۴) به [۲، گزاره ۱۵.۳] مراجعه شود. برای اثبات (۳) فرض کنیم $\mathcal{E}$ خوب باشد. هرگاه $a, b \in E$ طوری باشند که $a \leq b$، آنگاه $a \to b = ۱$. چون $\mathcal{E}$ خوب است، پس طبق گزاره ۲.۲(۱)،(۱۰)، به‌ازای $b := ۰$ و $a := b$ داریم $b \leq (b \sim ۰) \sim ۰ = \neg\neg b$ لذا طبق گزاره ۲.۲(۸) نتیجه می‌شود که $a \to \neg\neg b \leq a \to b = ۱$ که ایجاب می‌کند $a \to \neg\neg b = ۱$.
حال، طبق گزاره ۲.۲(۱۱) نتیجه می‌شود که

$$\neg(b \boxminus \neg a) = \neg(\neg b \to \neg a) = \neg(\neg b \to (a \to ۰)) = \neg(a \to \neg\neg b) = \neg ۱ = ۰.$$

□

تعریف ۲.۳. فرض کنید A مجموعه‌ای از پارامترها باشد. یک $\mathcal{L}$ـ مجموعه نرم شهودی بر مبنای پارامتر $e \in A$ یا $\mathcal{L}$ـ مجموعه eـ نرم شهودی در E به‌صورت

$\lambda(e) = \{\langle x, \mu_{\lambda(e)}(x), \nu_{\lambda(e)}(x)\rangle : x \in E\}$ تعریف می‌شود که $\mu_{\lambda(e)}$ و $\nu_{\lambda(e)}$، $\mathcal{L}$ـ مجموعه‌هایی از E با خاصیت $\mu_{\lambda(e)}(x) \leq \mathfrak{n}(\nu_{\lambda(e)}(x))$، برای هر $x \in E$ بوده و برای راحتی آن‌را به‌صورت $\langle E, \lambda, A\rangle$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۳.۳. $\mathcal{L}$ـ مجموعه نرم شهودی $\langle E, \lambda, A\rangle$ یک $\mathcal{L}$ـ پیش‌ایده‌آل نرم شهودی بر مبنای پارامتر $e \in A$ یا $\mathcal{L}$ـ پیش‌ایده‌آل eـ نرم شهودی نامیده می‌شود هرگاه در دو خاصیت زیر صدق کند:

(ISP۱) برای هر $x, y \in E$، هرگاه $x \leq y$، آنگاه $\mu_{\lambda(e)}(x) \geq \mu_{\lambda(e)}(y)$ و $\nu_{\lambda(e)}(x) \leq \nu_{\lambda(e)}(y)$،

(ISP۲) برای هر $x, y \in E$، $\mu_{\lambda(e)}(x \boxminus y) \geq \mu_{\lambda(e)}(x) \wedge \mu_{\lambda(e)}(y)$ و $\nu_{\lambda(e)}(x \boxminus y) \leq \nu_{\lambda(e)}(x) \vee \nu_{\lambda(e)}(y)$.

$\mathcal{L}$ـ پیش‌ایده‌آل eـ نرم شهودی $\langle E, \lambda, A\rangle$ یک $\mathcal{L}$ـ ایده‌آل eـ نرم شهودی نامیده می‌شود هرگاه برای هر $x, y, z \in E$ داشته باشیم

(ISP۳) $\mu_{\lambda(e)}(\neg((x * z) \to (y * z))) \geq \mu_{\lambda(e)}(\neg(x \to y))$ و $\nu_{\lambda(e)}(\neg((x * z) \to (y * z))) \leq \nu_{\lambda(e)}(\neg(x \to z))$.

هرگاه $\langle \mathcal{E}, \lambda, A\rangle$، برای هر $e \in A$، یک $\mathcal{L}$ـ پیش‌ایده‌آل/$\mathcal{L}$ـ ایده‌آل eـ نرم شهودی باشد، آن را یک $\mathcal{L}$ـ پیش‌ایده‌آل/$\mathcal{L}$ـ ایده‌آل نرم شهودی می‌نامیم.

گزاره ۴.۳. *هر $\mathcal{L}$ـ پیش‌ایده‌آل eـ نرم شهودی $\langle E, \lambda, A\rangle$ در شرایط زیر صدق می‌کند:*

(۱) $\mu_{\lambda(e)}(x * y) \geq \mu_{\lambda(e)}(x \sim y) \geq \mu_{\lambda(e)}(x \to y)$ و $\nu_{\lambda(e)}(x * y) \leq \nu_{\lambda(e)}(x \sim y) \leq \nu_{\lambda(e)}(x \to y)$،

(۲) $\mu_{\lambda(e)}(a \sim b) \geq \mu_{\lambda(e)}((a \wedge c) \sim (b \wedge c))$ و $\nu_{\lambda(e)}(a \sim b) \leq \nu_{\lambda(e)}((a \wedge c) \sim (b \wedge c))$،

(۳) $\mu_{\lambda(e)}(a \sim b) \geq \mu_{\lambda(e)}((a \sim c) \sim (b \sim c))$ و $\nu_{\lambda(e)}(a \sim b) \leq \nu_{\lambda(e)}((a \sim c) \sim (b \sim c))$،

(۴) $\mu_{\lambda(e)}(a \to b) \geq \mu_{\lambda(e)}((a \wedge c) \to (b \wedge c))$ و $\nu_{\lambda(e)}(a \to b) \leq \nu_{\lambda(e)}((a \wedge c) \to (b \wedge c))$،

(۵) $\mu_{\lambda(e)}(a \to b) \geq \mu_{\lambda(e)}((b \to c) \to (a \to c))$ و $\nu_{\lambda(e)}(a \to b) \leq \nu_{\lambda(e)}((b \to c) \to (a \to c))$،

(۶) $\mu_{\lambda(e)}(a\to b)\geq \mu_{\lambda(e)}((c\to a)\to(c\to b))$ و
$\nu_{\lambda(e)}(a\to b)\leq \nu_{\lambda(e)}((c\to a)\to(c\to b))$.

اثبات. برهان از (EQ۸)، گزاره ۲.۲ و (ISP۱) مستقیماً نتیجه می‌شود. □

مثال ۵.۳. فرض کنید A مجموعه‌ای از پارامترها بوده و نگاشت‌های $\mathbf{۰},\mathbf{۱}:\mathcal{E}\longrightarrow\mathcal{L}$ با ضابطه $\mathbf{۰}(x)=\bot$ و $\mathbf{۱}(x)=\top$ تعریف شده باشند. همچنین فرض کنید نگاشت $\lambda^{\mathbf{۰}}_{\mathbf{۱}}:A\longrightarrow\mathcal{L}^{\mathcal{E}}\times\mathcal{L}^{\mathcal{E}}$ با ضابطه $e\mapsto(\mathbf{۱},\mathbf{۰})$ تعریف شده باشد. در اینصورت $\langle\mathcal{E},\lambda^{\mathbf{۰}}_{\mathbf{۱}},A\rangle$ یک $\mathcal{L}$ـ ایده‌آل نرم شهودی است.

در مثال‌های ۶.۳ و ۷.۳ نمونه‌هایی از $\mathcal{L}$ـ پیش‌ایده‌آل نرم شهودی و $\mathcal{L}$ـ ایده‌آل نرم شهودی و ارتباط آنها را با یکدیگر ارائه می‌دهیم.

مثال ۶.۳. EQـ جبر $(E;\wedge,*,\sim,۰,۱)$ را در نظر می‌گیریم که در آن $E=\{۰,a,b,c,d,۱\}$ یک زنجیر با ترتیب $۰\leq a\leq b\leq c\leq d\leq ۱$ بوده و اعمال $*$ و $\sim$ طبق جدول ۱ و عمل کمکی $\to$ طبق جدول ۲ تعریف می‌شوند ([۱۶، مثال ۵]). به‌ازای $s_۱,s_۲,s_۳\in L$ که $s_۳<s_۲<s_۱$، و $\mathfrak{n}(s_۳)=s_۱$ و $\mathfrak{n}(s_۲)=s_۲$، $\mathcal{L}$ـ مجموعه نرم شهودی $\langle E,\lambda,A\rangle$ را که در آن $A=\{p_۱,p_۲,p_۳\}$ بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\mu_{\lambda(p_۱)}(x)=\begin{cases} s_۱ & x=۰\\ s_۲ & x\neq ۰\end{cases}\qquad \nu_{\lambda(p_۱)}(x)=\begin{cases} s_۲ & x=۰\\ s_۱ & x\neq ۰\end{cases}$$
$$\mu_{\lambda(p_۲)}(x)=\begin{cases} s_۲ & x\in\{۰,a\}\\ s_۳ & x\in E\setminus\{۰,a\}\end{cases}\qquad \nu_{\lambda(p_۲)}(x)=\begin{cases} s_۳ & x\in\{۰,a\}\\ s_۲ & x\in E\setminus\{۰,a\}\end{cases}$$
$$(\forall x\in E)\quad \mu_{\lambda(p_۳)}(x)=\top\qquad \nu_{\lambda(p_۳)}(x)=\bot$$

در این صورت $\langle E,\lambda,A\rangle$ یک $\mathcal{L}$ـ پیش‌ایده‌آل نرم شهودی است ولی یک $\mathcal{L}$ـ ایده‌آل نرم شهودی نیست زیرا به‌ازای $e\in\{p_۱,p_۲\}$،

$$\begin{aligned}\mu_{\lambda(e)}(\neg((۱*d)\to(a*d))) &= \mu_{\lambda(e)}(۱)=s_۲\not\geq s_۱=\mu_{\lambda(e)}(۰)\\ &= \mu_{\lambda(e)}(\neg(۱\to a))\end{aligned}$$

مثال ۷.۳. EQـ جبر $(E;\wedge,*,\sim,۰,۱)$ که در آن $E=\{۰,a,b,c,d,e,f,۱\}$ یک مشبکه با ترتیب جزئی $۰\leq a,b\leq c\leq d\leq e,f\leq ۱$ بوده و اعمال $*$، $\sim$ و $\to$ طبق

جدول ۱: جدول کیلی عمل‌های $*$ و $\sim$ (مثال ۶.۳)

$*$	0	a	b	c	d	1	$\sim$	0	a	b	c	d	1
0	0	0	0	0	0	0	0	1	c	b	a	0	0
a	0	0	0	0	0	a	a	c	1	b	a	a	a
b	0	0	0	0	a	b	b	b	b	1	b	b	b
c	0	0	0	a	a	c	c	a	a	b	1	c	c
d	0	0	a	a	a	d	d	0	a	b	c	1	d
1	0	a	b	c	d	1	1	0	a	b	c	d	1

جدول ۲: جدول کیلی عمل $\rightarrow$ (مثال ۶.۳)

$\rightarrow$	0	a	b	c	d	1
0	1	1	1	1	1	1
a	c	1	1	1	1	1
b	b	1	1	1	1	1
c	a	a	b	1	1	1
d	0	a	b	c	1	1
1	0	a	b	c	d	1

جدول‌های ۳ـ۵ تعریف می‌شوند را در نظر می‌گیریم ([۱۶، مثال ۷]). به‌ازای $s_۱, s_۲ \in L$ که $s_۱ < s_۲$، $\mathcal{L}$ـ مجموعه نرم شهودی $\langle E, \lambda, A\rangle$ را که در آن $A = \{p_۱, p_۲\}$ بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\mu_{\lambda(p_۱)}(x) = \begin{cases} s_۱ & x \in \{۰, a, b, c\} \\ s_۲ & x \in \{d, e, f, ۱\} \end{cases} \qquad \nu_{\lambda(p_۱)}(x) = \begin{cases} s_۲ & x \in \{۰, a, b, c\} \\ s_۱ & x \in \{d, e, f, ۱\} \end{cases}$$

$$(\forall x \in E) \quad \mu_{\lambda(p_۲)}(x) = \top \qquad \nu_{\lambda(p_۲)}(x) = \bot$$

در اینصورت $\langle E, \lambda, A\rangle$ یک $\mathcal{L}$ـ ایده‌آل نرم شهودی است.

قضیه ۸.۳. *فرض کنیم $\mathcal{E}$ یک EQ ـ جبر خوب و $\langle E, \lambda, A\rangle$ یک $\mathcal{L}$ـ مجموعه نرم شهودی باشد. به‌ازای $e \in A$، شرایط زیر معادلند:*

جدول ۳: جدول کیلی عمل $*$ (مثال ۷.۳)

$*$	0	a	b	c	d	e	f	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0
a	0	0	0	0	0	0	0	a
b	0	0	0	0	0	0	0	b
c	0	0	0	0	0	0	0	c
d	0	0	0	0	d	d	d	d
e	0	0	0	0	d	e	d	e
f	0	0	0	0	d	d	d	f
1	0	a	b	c	d	e	f	1

جدول ۴: جدول کیلی عمل $\sim$ (مثال ۷.۳)

$\sim$	0	a	b	c	d	e	f	1
0	1	e	f	d	c	a	b	0
a	e	1	d	f	c	a	c	a
b	f	d	1	e	c	c	b	b
c	d	f	e	1	c	c	c	c
d	c	c	c	c	1	f	e	d
e	a	a	c	c	f	1	d	e
f	b	c	b	c	e	d	1	f
1	0	a	b	c	d	e	f	1

(۱) $\langle E, \lambda, A \rangle$ یک $\mathcal{L}$ـ پیش‌ایده‌آل eـ نرم شهودی است؛

(۲) $\langle E, \lambda, A \rangle$ در (ISP۱) و (ISP۴) صدق می‌کند که (ISP۴) عبارتست از

$$(\forall a, b \in E) \quad \begin{cases} \mu_{\lambda(e)}(b) \geq \mu_{\lambda(e)}(a) \wedge \mu_{\lambda(e)}(\neg(a \boxminus \neg b)) \\ \nu_{\lambda(e)}(b) \leq \nu_{\lambda(e)}(a) \vee \nu_{\lambda(e)}(\neg(a \boxminus \neg b)) \end{cases}$$

(۳) $\langle E, \lambda, A \rangle$ در (ISP۱)، (ISP۴) و (ISP۵) صدق می‌کند که (ISP۵) عبارتست از $(\forall a \in E) \quad \mu_{\lambda(e)}(\neg\neg a) = \mu_{\lambda(e)}(a), \nu_{\lambda(e)}(\neg\neg a) = \nu_{\lambda(e)}(a)$

جدول ۵: جدول کیلی عمل $\rightarrow$ (مثال ۷.۳)

$\rightarrow$	0	a	b	c	d	e	f	1
0	1	1	1	1	1	1	1	1
a	e	1	e	1	1	1	1	1
b	f	f	1	1	1	1	1	1
c	d	f	e	1	1	1	1	1
d	c	c	c	c	1	1	1	1
e	a	a	c	c	f	1	f	1
f	b	c	b	c	e	e	1	1
1	0	a	b	c	d	e	f	1

(۴) $\langle E, \lambda, A\rangle$ در (ISP۴)، (ISP۵) و (ISP۶) صدق می‌کند که (ISP۶) عبارتست از

$$\mu_{\lambda(e)}(\cdot) \geq \mu_{\lambda(e)}(a), \nu_{\lambda(e)}(\cdot) \leq \nu_{\lambda(e)}(a) \quad (\forall a \in E)$$

(۵) $\langle E, \lambda, A\rangle$ در (ISP۱) و (ISP۷) صدق می‌کند که (ISP۷) عبارتست از

$$(\forall a, b \in E) \quad \begin{cases} \mu_{\lambda(e)}(b) \geq \mu_{\lambda(e)}(a) \wedge \mu_{\lambda(e)}(\neg(\neg a \sim \neg b)) \\ \nu_{\lambda(e)}(b) \leq \nu_{\lambda(e)}(a) \vee \nu_{\lambda(e)}(\neg(\neg a \sim \neg b)) \end{cases}$$

اثبات. (۲) $\Rightarrow$ (۱) فرض کنیم $\langle E, \lambda, A\rangle$ یک $\mathcal{L}$ـ پیش‌ایده‌آل eـ نرم شهودی بوده و $a, b \in E$. واضح است که (ISP۱) برقرار است. حال، چون $\mathcal{E}$ خوب است، طبق گزاره ۲.۲(۱۱) داریم

$$\begin{aligned} b \rightarrow (a \boxminus \neg(a \boxminus \neg b)) &= b \rightarrow (\neg a \rightarrow \neg(a \boxminus \neg b)) \\ &= b \rightarrow ((a \boxminus \neg b) \rightarrow \neg\neg a) \\ &= (a \boxminus \neg b) \rightarrow (b \rightarrow \neg\neg a) \\ &= (a \boxminus \neg b) \rightarrow (\neg a \rightarrow \neg b) \\ &= (a \boxminus \neg b) \rightarrow (a \boxminus \neg b) = ۱ \end{aligned}$$

که ایجاب می‌کند $b \leq a \boxminus \neg(a \boxminus \neg b)$ و لذا طبق (ISP۱) و (ISP۲) داریم

$\mu_{\lambda(e)}(b) \geq \mu_{\lambda(e)}(a \boxminus (\neg(a \boxminus \neg b))) \geq \mu_{\lambda(e)}(a) \wedge \mu_{\lambda(e)}(\neg(a \boxminus \neg b))$ و $\nu_{\lambda(e)}(b) \leq \nu_{\lambda(e)}(a \boxminus (\neg(a \boxminus \neg b))) \leq \nu_{\lambda(e)}(a) \vee \nu_{\lambda(e)}(\neg(a \boxminus \neg b))$ و بدین ترتیب (ISP۴) ثابت می‌شود.

(۳) $\Rightarrow$ (۲) فرض کنیم $a \in E$. چون $\mathcal{E}$ خوب است، پس $a \leq \neg\neg a$ و لذا طبق (ISP۱) داریم $\mu_{\lambda(e)}(a) \geq \mu_{\lambda(e)}(\neg\neg a)$ و $\nu_{\lambda(e)}(a) \leq \nu_{\lambda(e)}(\neg\neg a)$. از طرفی با جایگذاری $\neg\neg a$ بجای b در (ISP۴) نتیجه می‌شود که

$$
\begin{aligned}
\mu_{\lambda(e)}(\neg\neg a) &\geq \mu_{\lambda(e)}(\neg(a \boxminus \neg\neg\neg a)) \wedge \mu_{\lambda(e)}(a) \\
&= \mu_{\lambda(e)}(\neg(\neg a \to \neg\neg\neg a)) \wedge \mu_{\lambda(e)}(a) \\
&= \mu_{\lambda(e)}(\neg 1) \wedge \mu_{\lambda(e)}(a) \qquad \text{زیرا } \neg a \leq \neg\neg\neg a \\
&= \mu_{\lambda(e)}(0) \wedge \mu_{\lambda(e)}(a) = \mu_{\lambda(e)}(a)
\end{aligned}
$$

مشابهاً ثابت می‌شود که $\nu_{\lambda(e)}(\neg\neg a) \leq \nu_{\lambda(e)}(a)$. بنابراین، (ISP۵) برقرار است.

(۴) $\Rightarrow$ (۳) چون $0 \leq x$، برای هر $x \in E$، لذا (ISP۶) نتیجه مستقیم (ISP۱) است.

(۱) $\Rightarrow$ (۴) فرض کنیم $a, b \in E$. هرگاه $b \leq a$، آنگاه $\neg a \leq \neg b$ و لذا $a \boxminus \neg b = \neg a \to \neg b = 1$. از این‌رو، طبق (ISP۴) و (ISP۶) داریم $\mu_{\lambda(e)}(b) \geq \mu_{\lambda(e)}(a) \wedge \mu_{\lambda(e)}(\neg 1) = \mu_{\lambda(e)}(a) \wedge \mu_{\lambda(e)}(0) = \mu_{\lambda(e)}(a)$ و مشابهاً $\nu_{\lambda(e)}(b) \leq \nu_{\lambda(e)}(a) \vee \nu_{\lambda(e)}(0) = \nu_{\lambda(e)}(a)$ که (ISP۱) را ثابت می‌کند. برای اثبات (ISP۲) ابتدا توجه می‌کنیم که

$$
\begin{aligned}
\neg(a \boxminus \neg(a \boxminus b)) &= \neg(\neg a \to \neg(\neg a \to b)) \\
&= \neg((\neg a \to b) \to (\neg a \to 0)) \quad \text{گزاره ۲.۲(۱۱)} \\
&\leq \neg(b \to 0) = \neg\neg b \quad \text{گزاره ۲.۲(۶)،(۸)}
\end{aligned}
$$

حال، با جایگذاری $a \boxminus b$ بجای b، در (ISP۴) داریم

$$
\begin{aligned}
\mu_{\lambda(e)}(a \boxminus b) &\geq \mu_{\lambda(e)}(a) \wedge \mu_{\lambda(e)}(\neg(a \boxminus \neg(a \boxminus b))) \\
&\geq \mu_{\lambda(e)}(a) \wedge \mu_{\lambda(e)}(\neg\neg b) \\
&= \mu_{\lambda(e)}(a) \wedge \mu_{\lambda(e)}(b) \quad \text{(ISP۵)}
\end{aligned}
$$

بهمین ترتیب،

$$\begin{aligned}\nu_{\lambda(e)}(a \boxminus b) &\leq \nu_{\lambda(e)}(a) \vee \nu_{\lambda(e)}(\neg(a \boxminus \neg(a \boxminus b)))\\ &\leq \nu_{\lambda(e)}(a) \vee \nu_{\lambda(e)}(\neg\neg b) = \nu_{\lambda(e)}(a) \vee \nu_{\lambda(e)}(b)\end{aligned}$$

بنابراین (۱) ثابت می‌شود.

(۵) $\Rightarrow$ (۲) فرض کنیم $a, b \in E$. طبق گزاره ۲.۲(۱)، $\neg a \sim \neg b \leq \neg a \to \neg b$ و لذا طبق گزاره ۲.۲(۸) نتیجه می‌شود که $\neg(a \boxminus \neg b) = \neg(\neg a \to \neg b) \leq \neg(\neg a \sim \neg b)$. حال طبق (ISP۱) و (ISP۴) حکم ثابت می‌شود.

(۲) $\Rightarrow$ (۵) فرض کنیم $a, b \in E$. ابتدا توجه می‌کنیم که چون $\mathcal{E}$ خوب است، پس $\neg a \wedge \neg b \leq \neg\neg(\neg a \wedge \neg b) \leq \neg\neg\neg a = \neg a$ و لذا طبق گزاره ۲.۲(۹) داریم $\neg a \sim (\neg a \wedge \neg b) \leq \neg a \sim \neg\neg(\neg a \wedge \neg b)$. از این‌رو،

$$\neg(\neg a \sim (\neg a \wedge \neg b)) \geq \neg(\neg a \sim \neg\neg(\neg a \wedge \neg b)).$$

و لذا طبق (ISP۱) داریم

$$\mu_{\lambda(e)}(\neg(\neg a \sim (\neg a \wedge \neg b))) \leq \mu_{\lambda(e)}(\neg(\neg a \sim \neg\neg(\neg a \wedge \neg b))). \tag{۱.۳}$$

حال، طبق تعریف اعمال $\boxminus$ و $\to$ و نیز نامساوی (۱.۳) داریم

$$\begin{aligned}\mu_{\lambda(e)}(a) \wedge \mu_{\lambda(e)}(\neg(a \boxminus \neg b)) &= \mu_{\lambda(e)}(a) \wedge \mu_{\lambda(e)}(\neg(\neg a \to \neg b))\\ &= \mu_{\lambda(e)}(a) \wedge \mu_{\lambda(e)}(\neg(\neg a \sim (\neg a \wedge \neg b))\\ &\leq \mu_{\lambda(e)}(a) \wedge \mu_{\lambda(e)}(\neg(\neg a \sim \neg\neg(\neg a \wedge \neg b))\\ &\leq \mu_{\lambda(e)}(\neg(\neg a \wedge \neg b)) \quad \text{(ISP۷) طبق}\\ &\leq \mu_{\lambda(e)}(\neg\neg b) \leq \mu_{\lambda(e)}(b) \quad \text{(ISP۱) طبق}\end{aligned}$$

بهمین صورت نتیجه می‌شود که $\nu_{\lambda(e)}(b) \leq \nu_{\lambda(e)}(a) \vee \nu_{\lambda(e)}(\neg(a \boxminus \neg b))$ و بدین ترتیب برهان قسمت (۲) کامل می‌شود. □

برای $\mathcal{L}$ــ مجموعه نرم شهودی $\langle E, \lambda, A\rangle$ و $s, t \in L$ تعریف می‌کنیم $\mathfrak{U}_t = \{x \in E : \mu_{\lambda(e)}(x) \geq t\}$ و $\mathfrak{L}_s = \{x \in E : \nu_{\lambda(e)}(x) \leq s\}$. گزاره ۹.۳ ارتباط بین یک $\mathcal{L}$ــ پیش‌ایده‌آل/$\mathcal{L}$ــ ایده‌آل eــ نرم شهودی و زیرمجموعه‌های E را بیان می‌کند.

گزاره ۹.۳. *$\mathcal{L}$ـ مجموعه نرم شهودی $\langle E, \lambda, A\rangle$ یک $\mathcal{L}$ـ پیش‌ایده‌آل/$\mathcal{L}$ـ ایده‌آل نرم شهودی است اگروفقط اگر $\mathfrak{U}_t(\neq \emptyset)$ و $\mathfrak{L}_s(\neq \emptyset)$، که $s, t \in \mathcal{L}$، پیش‌ایده‌آل/ ایده‌آل هایی از E باشند.*

اثبات. اثبات بدیهی است. □

در ادامه ارتباط بین $\mathcal{L}$ـ پیش‌ایده‌آل/$\mathcal{L}$ـ ایده‌آل های نرم شهودی و $\mathcal{L}$ـ پیش‌فیلتر/$\mathcal{L}$ـ فیلتر های نرم شهودی در یک EQـ جبر را بررسی می‌کنیم.

تعریف ۱۰.۳. $\mathcal{L}$ـ مجموعه نرم شهودی $\langle E, \lambda, A\rangle$ یک $\mathcal{L}$ـ پیش‌فیلتر eـ نرم شهودی نامیده می‌شود هرگاه در (ISLS۱) و (ISLS۲) صدق کند که عبارتند از

$$(\forall x \in E)\begin{cases} \mu_{\lambda(e)}(x) \leq \mu_{\lambda(e)}(۱) \\ \nu_{\lambda(e)}(x) \geq \nu_{\lambda(e)}(۱) \end{cases} \qquad \text{(ISLS۱)}$$

$$(\forall x, y \in E)\begin{cases} \mu_{\lambda(e)}(x) \wedge \mu_{\lambda(e)}(x \to y) \leq \mu_{\lambda(e)}(y) \\ \nu_{\lambda(e)}(x) \vee \nu_{\lambda(e)}(x \to y) \geq \nu_{\lambda(e)}(y) \end{cases} \qquad \text{(ISLS۲)}$$

$\mathcal{L}$ـ پیش‌فیلتر eـ نرم شهودی $\langle \mathcal{E}, \lambda, A\rangle$ یک $\mathcal{L}$ـ فیلتر eـ نرم شهودی نامیده می‌شود هرگاه در شرط زیر صدق کند:

$$(\forall x, y, z \in E)\begin{cases} \mu_{\lambda(e)}((x * z) \to (y * z)) \geq \mu_{\lambda(e)}(x \to y) \\ \nu_{\lambda(e)}((x * z) \to (y * z)) \leq \nu_{\lambda(e)}(x \to y) \end{cases} \qquad \text{(ISLS۳)}$$

مثال ۱۱.۳. EQـ جبر $\mathcal{E} = (E, \wedge, *, \sim, ۱)$ را در نظر بگیرید که در آن $E = \{۰, a, b, c, d, ۱\}$ یک زنجیر با ترتیب $۰ < a, b < c < d < ۱$ بوده و عمل‌های $*$، $\sim$ و $\to$ طبق جدول‌های ۶ـ۸ ([۱۶]). فرض کنیم $A = \{p_۱, p_۲\}$ مجموعه‌ای از پارامترها بوده و $\mathcal{L}$ مشبکه‌ای شامل سه عضو $s_۱$، $s_۲$ و $s_۳$ با شرط $s_۱ > s_۲ > s_۳$ بوده به‌طوری‌که $\mathfrak{n}(s_۱) = s_۳$ و $\mathfrak{n}(s_۲) = s_۲$. در این‌صورت $\mathcal{L}$ـ مجموعه نرم شهودی $\langle \mathcal{E}, \lambda, A\rangle$ که به‌صورت زیر تعریف می‌شود یکه $\mathcal{L}$ـ پیش‌فیلتر نرم شهودی است اما یک $\mathcal{L}$ـ فیلتر نرم شهودی نیست زیرا $\mu_{\lambda(p_۲)}((۱ * c) \to (d * c)) = \mu_{\lambda(p_۲)}(c \to ۰) = \mu_{\lambda(p_۲)}(a) = s_۳ \ngeq s_۲ = \mu_{\lambda(p_۲)}(۱ \to d)$.

$$\mu_{\lambda(p_۱)}(x) = \begin{cases} s_۱ & x = ۱ \\ s_۲ & x \in E \setminus \{۱\} \end{cases} \qquad \nu_{\lambda(p_۲)}(x) = \begin{cases} s_۳ & x = ۱ \\ s_۲ & x \in E \setminus \{۱\} \end{cases}$$

$$\mu_{\lambda(p_۲)}(x) = \begin{cases} s_۱ & x = ۱ \\ s_۲ & x = d \\ s_۳ & x \in \{۰, a, b, c\} \end{cases} \qquad \nu_{\lambda(p_۲)}(x) = \begin{cases} s_۳ & x = ۱ \\ s_۲ & x = d \\ s_۱ & x \in \{۰, a, b, c\} \end{cases}$$

جدول ۶: جدول کیلی عمل $*$ (مثال ۱۱.۳)

$*$	0	a	b	c	d	1
0	0	0	0	0	0	0
a	0	0	0	0	0	0
b	0	0	0	0	0	0
c	0	0	0	0	0	0
d	0	0	0	0	d	d
1	0	a	b	c	d	1

جدول ۷: جدول کیلی عمل $\sim$ (مثال ۱۱.۳)

$\sim$	0	a	b	c	d	1
0	1	1	a	a	a	a
a	1	1	a	a	a	a
b	a	a	1	c	c	c
c	a	a	c	1	c	c
d	a	a	c	c	1	d
1	a	a	c	c	d	1

جدول ۸: جدول کیلی عمل $\rightarrow$ (مثال ۱۱.۳)

$\rightarrow$	0	a	b	c	d	1
0	1	1	1	1	1	1
a	1	1	1	1	1	1
b	a	a	1	1	1	1
c	a	a	c	1	1	1
d	a	a	c	c	1	1
1	a	a	c	c	d	1

مثال ۱۲.۳. EQـجبر مثال ۷.۳ را در نظر بگیرید. فرض کنید $A = \{p_1, p_2, p_3\}$ مجموعه‌ای از پارامترها و $\mathcal{L}$ مشبکه‌ای شامل سه عضو s_1، s_2 و s_3 با شرط $s_3 < s_2 < s_1$ باشد به‌طوری‌که $\mathfrak{n}(s_3) = s_1$ و $\mathfrak{n}(s_2) = s_2$. در این‌صورت، $\mathcal{L}$ـمجموعه نرم شهودی $\langle \mathcal{E}, \lambda, A\rangle$ که به‌صورت زیر تعریف می‌شود یک $\mathcal{L}$ـفیلتر نرم شهودی است:

$$\mu_{\lambda(p_1)}(x) = \begin{cases} s_1 & x = 1 \\ s_2 & x \in \{d, e, f\} \\ s_3 & x \in \{0, a, b, c\} \end{cases} \qquad \nu_{\lambda(p_1)}(x) = \begin{cases} s_3 & x = 1 \\ s_2 & x \in \{d, e, f\} \\ s_1 & x \in \{0, a, b, c\} \end{cases}$$

$$\mu_{\lambda(p_2)}(x) = \begin{cases} s_1 & x = 1 \\ s_2 & x \in E \setminus \{1\} \end{cases} \qquad \nu_{\lambda(p_2)}(x) = \begin{cases} s_2 & x = 1 \\ s_1 & x \in E \setminus \{1\} \end{cases}$$

$$\mu_{\lambda(p_3)}(x) = \top \qquad \nu_{\lambda(p_3)}(x) = \bot$$

گزاره ۱۳.۳. *$\mathcal{L}$ـ مجموعه نرم شهودی $\langle \mathcal{E}, \lambda, A\rangle$ یک $\mathcal{L}$ـ پیش‌فیلتر eـ نرم شهودی است اگرو فقط اگر در شرایط زیر صدق کند:*

(ISLS۳) برای هر $x, y \in E$،

$$x \leq y \Rightarrow (\mu_{\lambda(e)}(x) \leq \mu_{\lambda(e)}(y),\ \nu_{\lambda(e)}(x) \geq \nu_{\lambda(e)}(y))$$

$$(\forall x, y \in E) \begin{cases} \mu_{\lambda(e)}(x) \wedge \mu_{\lambda(e)}(x \sim y) \leq \mu_{\lambda(e)}(y) \\ \nu_{\lambda(e)}(x) \vee \nu_{\lambda(e)}(x \sim y) \geq \nu_{\lambda(e)}(y) \end{cases} \qquad (ISLS۴)$$

اثبات. فرض کنیم $\langle \mathcal{E}, \lambda, A\rangle$ یک $\mathcal{L}$ـ پیش‌فیلتر eـ نرم شهودی بوده و $a, b \in E$ طوری باشند که $a \leq b$. در این‌صورت $a \to b = 1$ لذا (ISLS۳) از (ISLS۱) و (ISLS۲) مستقیماً نتیجه می‌شود. از این‌که $a \sim b \leq a \to b$ طبق (ISLS۱) داریم
$\mu_{\lambda(e)}(a \to b) \leq \mu_{\lambda(e)}(a \sim b)$ و $\nu_{\lambda(e)}(a \sim b) \geq \nu_{\lambda(e)}(a \to b)$. پس

$$\mu(a) \wedge \mu_{\lambda(e)}(a \sim b) \leq \mu(a) \wedge \mu_{\lambda(e)}(a \to b) \leq \mu(b)$$

$$\nu(a) \vee \nu_{\lambda(e)}(a \sim b) \geq \nu(a) \vee \nu_{\lambda(e)}(a \to b) \geq \nu_{\lambda(e)}(b)$$

و بدین ترتیب (ISLS۴) ثابت می‌شود.

به‌عکس، فرض کنیم (ISLS۳) و (ISLS۴) برقرار باشند. از اینکه $a \leq 1$، برای هر $a \in E$، لذا (ISLS۱) مستقیماً نتیجه می‌شود. حال طبق تعریف $\sim$ داریم

$$\begin{aligned}\mu_{\lambda(e)}(a) \wedge \mu_{\lambda(e)}(a \to b) &= \mu_{\lambda(e)}(a) \wedge \mu_{\lambda(e)}((a \wedge b) \sim a) \leq \mu_{\lambda(e)}(a \wedge b)\\ &\leq \mu_{\lambda(e)}(b).\end{aligned}$$

مشابهاً، ثابت می‌شود که $\nu_{\lambda(e)}(a) \vee \nu_{\lambda(e)}(a \to b) \geq \nu_{\lambda(e)}(b)$ و بدین ترتیب (ISLS۲) ثابت می‌شود. □

فرض کنید $\langle E, \lambda, A\rangle$ یک $\mathcal{L}$ـ مجموعه نرم شهودی باشد. نگاشت $\neg\lambda$ را به‌صورت $\neg\lambda : A \longrightarrow \mathcal{L}^{\mathcal{E}} \times \mathcal{L}^{\mathcal{E}}$ با ضابطه زیر تعریف می‌کنیم:

$$(\forall x \in E) \quad \mu_{(\neg\lambda)(e)}(x) = \mu_{\lambda(e)}(\neg x),\ \nu_{(\neg\lambda)(e)}(x) = \nu_{\lambda(e)}(\neg x).$$

توجه می‌کنیم که $\langle E, \neg\lambda, A\rangle$ نیز یک $\mathcal{L}$ـ مجموعه نرم شهودی است چرا که طبق فرض می‌دانیم برای هر $x \in E$، $\mu_{\lambda(e)}(x) \leq \mathfrak{n}(\nu_{\lambda(e)}(x))$. بالاخص، $\mu_{\lambda(e)}(\neg x) \leq \mathfrak{n}(\nu_{\lambda(e)}(\neg x))$ و این یعنی $\mu_{(\neg\lambda)(e)}(x) \leq \mathfrak{n}(\nu_{(\neg\lambda)(e)}(x))$.

برای دو $\mathcal{L}$ـ مجموعه نرم شهودی $\langle \mathcal{E}, \lambda, A\rangle$ و $\langle \mathcal{E}, \gamma, A\rangle$، گوییم $\langle \mathcal{E}, \lambda, A\rangle$ یک $\mathcal{L}$ـ زیرمجموعه نرم شهودی از $\langle \mathcal{E}, \gamma, A\rangle$ است هرگاه $\mu_{\lambda(e)} \subseteq \mu_{\gamma(e)}$ و $\nu_{\lambda(e)} \supseteq \nu_{\gamma(e)}$، برای هر $e \in A$.

گزاره ۱۴.۳. *فرض کنید $\mathcal{E}$ خوب باشد، $\langle E, \lambda, A\rangle$ یک $\mathcal{L}$ـ پیش‌ایده‌آل/$\mathcal{L}$ـ ایده‌آل eـ نرم شهودی و $\langle E, \gamma, A\rangle$ یک $\mathcal{L}$ـ پیش‌فیلتر/$\mathcal{L}$ـ فیلتر eـ نرم شهودی باشد. در اینصورت خواص زیر برقرارند:*

(۱) $\langle E, \neg\lambda, A\rangle$ یک $\mathcal{L}$ـ پیش‌فیلتر/$\mathcal{L}$ـ فیلتر eـ نرم شهودی است؛

(۲) $\langle E, \neg\gamma, A\rangle$ یک $\mathcal{L}$ـ پیش‌ایده‌آل/$\mathcal{L}$ـ ایده‌آل eـ نرم شهودی است؛

(۳) $\langle E, \lambda, A\rangle$ و $\langle E, \neg\neg\lambda, A\rangle$ $\mathcal{L}$ـ پیش‌ایده‌آلهای eـ نرم شهودی یکسانی هستند؛

(۴) $\langle \mathcal{E}, \neg\neg\gamma, A\rangle \subseteq \langle \mathcal{E}, \gamma, A\rangle$ و $\langle \mathcal{E}, \lambda, A\rangle \subseteq \langle \mathcal{E}, \neg\neg\lambda, A\rangle$. اگر $\mathcal{E}$ پیچشی باشد، تساوی برقرار است؛

(۵) $\langle E, \neg\neg\neg\gamma, A\rangle$ و $\langle E, \neg\gamma, A\rangle$ $\mathcal{L}$ـ پیش‌ایده‌آل/$\mathcal{L}$ـ ایده‌آل های eـ نرم شهودی یکسانی هستند؛

(۶) $\langle E, \neg\neg\neg\lambda, A\rangle$ و $\langle E, \neg\lambda, A\rangle$ $\mathcal{L}$ـ پیش‌فیلتر/$\mathcal{L}$ـ فیلترهای eـ نرم شهودی یکسانی هستند.

اثبات. قضیه را برای $\mathcal{L}$ـ پیش‌ایده‌آل ثابت می‌کنیم. بررسی شرایط برای $\mathcal{L}$ـ ایده‌آل مشابهاً ثابت می‌شود.

(۱) فرض کنیم $x \in E$. در اینصورت، طبق (ISP۶) داریم

$$\mu_{(\neg\lambda)(e)}(x) = \mu_{\lambda(e)}(\neg x) \leq \mu_{\lambda(e)}(۰) = \mu_{\lambda(e)}(\neg ۱) = \mu_{(\neg\lambda)(e)}(۱)$$

مشابهاً ثابت می‌شود که $\nu_{(\neg\lambda)(e)}(x) \geq \nu_{(\neg\lambda)(e)}(۱)$ و لذا (ISLS۱) ثابت می‌شود. حال فرض کنیم $x, y \in E$. طبق گزاره ۲.۲(۶)، به‌ازای $a := x$، $d := y$ و $b := ۰$ داریم $x \to y \leq \neg y \to \neg x$ و لذا طبق گزاره ۲.۲(۸)،(۱۰)، (۱۱) داریم

$$\begin{aligned} \neg(x \to y) &\geq \neg(\neg y \to \neg x) = \neg(\neg y \to \neg\neg\neg x) = \neg(\neg\neg x \to \neg\neg y) \\ &= \neg(\neg x \boxminus \neg\neg y) \end{aligned}$$

اکنون،

$$\begin{aligned} \mu_{(\neg\lambda)(e)}(x) \wedge \mu_{(\neg\lambda)(e)}(x \to y) &= \mu_{\lambda(e)}(\neg x) \wedge \mu_{\lambda(e)}(\neg(x \to y)) \\ &\leq \mu_{\lambda(e)}(\neg x) \wedge \mu_{\lambda(e)}(\neg(\neg x \boxminus \neg\neg y)) \\ &\leq \mu_{\lambda(e)}(\neg y) \quad \text{(ISP۴) طبق} \\ &= \mu_{(\neg\lambda)(e)}(y) \end{aligned}$$

بطور مشابه ثابت می‌شود که $\nu_{(\neg\lambda)(e)}(x) \vee \nu_{(\neg\lambda)(e)}(x \to y) \geq \nu_{(\neg\lambda)(e)}(y)$ و بدین ترتیب (ISLS۲) ثابت می‌شود. بنابراین $\langle E, \neg\lambda, A\rangle$ یک $\mathcal{L}$ـ پیش‌فیلتر eـ نرم شهودی است.

(۲) ثابت می‌کنیم $\langle E, \neg\gamma, A\rangle$ در (ISP۴)، (ISP۵) و (ISP۶) صدق می‌کند که در آن صورت طبق قضیه ۸.۳ نتیجه مطلوب حاصل می‌شود. اکنون، به‌ازای $x \in E$ داریم $\mu_{(\neg\gamma)(e)}(x) = \mu_{\gamma(e)}(\neg x) \leq \mu_{\gamma(e)}(۱) = \mu_{\gamma(e)}(\neg ۰) = \mu_{(\neg\gamma)(e)}(۰)$. مشابهاً، $\nu_{(\neg\gamma)(e)}(x) = \nu_{\gamma(e)}(\neg x) \geq \nu_{\gamma(e)}(۱) = \nu_{\gamma(e)}(\neg ۰) = \nu_{(\neg\gamma)(e)}(۰)$ و لذا (ISP۶) ثابت می‌شود. (ISP۵) مستقیماً از گزاره ۲.۲(۱۰) نتیجه می‌شود. حال، فرض کنیم $x, y \in E$. در اینصورت،

$$
\begin{aligned}
\mu_{(\neg\gamma)(e)}(y) &= \mu_{\gamma(e)}(\neg y) \\
&\geq \mu_{\gamma(e)}(\neg x) \wedge \mu_{\gamma(e)}(\neg x \to \neg y) && \text{طبق (ISLS۲)} \\
&= \mu_{\gamma(e)}(\neg x) \wedge \mu_{\gamma(e)}(x \boxminus \neg y) && \text{طبق تعریف عمل } \boxminus \\
&= \mu_{\gamma(e)}(\neg x) \wedge \mu_{\gamma(e)}(\neg\neg(x \boxminus \neg y)) && \text{طبق گزاره ۱.۳(۴)} \\
&= \mu_{(\neg\gamma)(e)}(x) \wedge \mu_{(\neg\gamma)(e)}(\neg(x \boxminus \neg y))
\end{aligned}
$$

نامساوی متناظر برای $\nu_{(\neg\gamma)(e)}$ نیز بطور مشابه ثابت می‌شود. از این‌رو (ISP۴) ثابت می‌شود. بنابراین، $\langle E, \neg\gamma, A\rangle$ یک $\mathcal{L}$ـ پیش‌ایده‌آل eـ نرم شهودی است.

(۳) طبق (۱) و (۲)، $\langle \mathcal{E}, \neg\neg\lambda, A\rangle$ یک $\mathcal{L}$ـ پیش‌ایده‌آل eـ نرم شهودی است. حال طبق گزاره ۸.۳(۳) نتیجه می‌شود که برای هر $x \in E$، $\mu_{(\neg\neg\lambda)(e)}(x) = \mu_{\lambda(e)}(\neg\neg x) = \mu_{\lambda(e)}(x)$ و نیز $\nu_{(\neg\neg\lambda)(e)}(x) = \nu_{\lambda(e)}(\neg\neg x) = \nu_{\lambda(e)}(x)$. بنابراین حکم ثابت می‌شود.

(۴) از اینکه در یک EQـ جبر خوب همواره نامساوی $x \leq \neg\neg x$ برقرار است، لذا حکم مستقیماً نتیجه می‌شود. به‌همین صورت هرگاه $\mathcal{E}$ پیچشی باشد، حکم واضح است.

برهان (۵) و (۶) مستقیماً از گزاره ۲.۲(۱۰) نتیجه می‌شود. $\square$

مثال ۱۵.۳ نشان می‌دهد، در گزاره ۱۴.۳(۴)، تساوی لزوماً برقرار نیست.

مثال ۱۵.۳. $\mathcal{L}$ـ پیش‌فیلتر تعریف شده در مثال ۱۱.۳ را در نظر بگیرید. در این‌صورت

$$\mu_{(\neg\neg\lambda)(p_۲)}(d) = \mu_{\lambda(p_۲)}(\neg\neg d) = \mu_{\lambda(p_۲)}(۱) = s_۱ \neq s_۲ = \mu_{\lambda(p_۲)}(d).$$

۴. جبر $\mathcal{L}$ـ پیش‌ایده‌آل‌های eـ نرم شهودی

در این بخش برخی اعمال مجموعه‌ها را به $\mathcal{L}$ـ مجموعه‌های نرم شهودی تعمیم می‌دهیم و خواص آنها را بررسی می‌کنیم.

برای دو $\mathcal{L}$ـ مجموعه نرم شهودی $\langle \mathcal{E}, \lambda, A\rangle$ و $\langle \mathcal{E}, \gamma, A\rangle$، اشتراک و اجتماع آنها که با $\langle \mathcal{E}, \lambda\cap\gamma, A\rangle$ و $\langle \mathcal{E}, \lambda\cup\gamma, A\rangle$ نشان داده می‌شود بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$(\forall x\in E)\quad \begin{cases} \mu_{(\lambda\cap\gamma)(e)}(x)=\mu_{\lambda(e)}(x)\wedge\mu_{\gamma(e)}(x)\\ \nu_{(\lambda\cap\gamma)(e)}(x)=\nu_{\lambda(e)}(x)\vee\nu_{\gamma(e)}(x)\end{cases}$$

$$(\forall x\in E)\quad \begin{cases} \mu_{(\lambda\cup\gamma)(e)}(x)=\mu_{\lambda(e)}(x)\vee\mu_{\gamma(e)}(x)\\ \nu_{(\lambda\cup\gamma)(e)}(x)=\nu_{\lambda(e)}(x)\wedge\nu_{\gamma(e)}(x)\end{cases}$$

اکنون رفتار دو $\mathcal{L}$ـ پیش‌ایده‌آل/$\mathcal{L}$ـ ایده‌آل eـ نرم شهودی را نسبت به دو عمل اجتماع و اشتراک بررسی می‌کنیم. گزاره بعدی به‌سادگی قابل اثبات است و لذا برهان آن حذف می‌شود.

گزاره ۱.۴. *فرض کنید $\langle \mathcal{E}, \lambda, A\rangle$ و $\langle \mathcal{E}, \gamma, A\rangle$ دو $\mathcal{L}$ـ پیش‌ایده‌آل/$\mathcal{L}$ـ ایده‌آل eـ نرم شهودی باشند. در اینصورت*

(۱) *$\langle \mathcal{E}, \lambda\cap\gamma, A\rangle$ یک $\mathcal{L}$ـ پیش‌ایده‌آل/$\mathcal{L}$ـ ایده‌آل eـ نرم شهودی است؛*

(۲) *اگر $\gamma\subseteq\lambda$ (یا $\lambda\subseteq\gamma$)، آنگاه $\langle \mathcal{E}, \lambda\cup\gamma, A\rangle$ یک $\mathcal{L}$ـ پیش‌ایده‌آل/$\mathcal{L}$ـ ایده‌آل eـ نرم شهودی است.*

مثال ۲.۴ نشان می‌دهد که در حالت کلی، اجتماع دو $\mathcal{L}$ـ پیش‌ایده‌آل eـ نرم شهودی ممکن است یک $\mathcal{L}$ـ پیش‌ایده‌آل eـ نرم شهودی نباشد. از آنجا که هر $\mathcal{L}$ـ ایده‌آل eـ نرم شهودی یک $\mathcal{L}$ـ پیش‌ایده‌آل eـ نرم شهودی است، لذا این نتیجه به $\mathcal{L}$ـ ایده‌آل‌های eـ نرم شهودی قابل تعمیم است.

مثال ۲.۴. EQـ جبر مثال ۷.۳ را در نظر بگیرید. فرض کنیم $A=\{p\}$ و $s_۱, s_۲, s_۳\in\mathcal{L}$ طوری باشند که $s_۳<s_۲<s_۱$ و $\mathfrak{n}(s_۳)=s_۱$، $\mathfrak{n}(s_۲)=s_۲$. $\mathcal{L}$ـ مجموعه‌های نرم شهودی $\langle \mathcal{E}, \lambda, A\rangle$ و $\langle \mathcal{E}, \gamma, A\rangle$ را بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\mu_{\lambda(p)}(x)=\begin{cases} s_۱ & x\in\{۰, a\}\\ s_۲ & x\in\{b,c\}\\ s_۳ & x\in\{d,e,f,۱\}\end{cases}\qquad \nu_{\lambda(p)}(x)=\begin{cases} s_۳ & x\in\{۰, a\}\\ s_۲ & x\in\{b,c\}\\ s_۱ & x\in\{d,e,f,۱\}\end{cases}$$

$$\mu_{\gamma(p)}(x)=\begin{cases} s_۱ & x\in\{۰, b\}\\ s_۲ & x\in\{a,c\}\\ s_۳ & x\in\{d,e,f,۱\}\end{cases}\qquad \nu_{\gamma(p)}(x)=\begin{cases} s_۳ & x\in\{۰, b\}\\ s_۲ & x\in\{a,c\}\\ s_۱ & x\in\{d,e,f,۱\}\end{cases}$$

در اینصورت، $\langle \mathcal{E}, \lambda, A\rangle$ و $\langle \mathcal{E}, \gamma, A\rangle$ $\mathcal{L}$ـ پیش‌ایده‌آلهای pـ نرم شهودی هستند با این خاصیت که $\gamma \not\subseteq \lambda$ و $\lambda \not\subseteq \gamma$. بعلاوه، $\langle \mathcal{E}, \lambda\cup\gamma, A\rangle$ یک $\mathcal{L}$ـ پیش‌ایده‌آل pـ نرم شهودی نیست زیرا

$$\begin{aligned}\mu_{(\lambda\cup\gamma)(p)}(a \boxminus b) &= \mu_{\lambda(p)}(a \boxminus b) \vee \mu_{\gamma(p)}(a \boxminus b) = \mu_{\lambda(p)}(c) \vee \mu_{\gamma(p)}(c)\\ &= s_۲ \ngeq s_۱ = \mu_{(\lambda\cup\gamma)(p)}(a) \wedge \mu_{(\lambda\cup\gamma)(p)}(b).\end{aligned}$$

فرض کنیم $\mathcal{ISP}(\mathcal{E})$ و $\mathcal{ISI}(\mathcal{E})$، به‌ترتیب، مجموعه همه $\mathcal{L}$ـ پیش‌ایده‌آل‌ها و $\mathcal{L}$ـ ایده‌آل‌های eـ نرم شهودی از $\mathcal{E}$ باشد. به‌سادگی می‌توان دید که به‌همراه رابطه شمول $\subseteq$ یک مجموعه جزئاً مرتب هستند و در آنها برای هر دو عضو $\langle \mathcal{E}, \lambda, A\rangle$ و $\langle \mathcal{E}, \gamma, A\rangle$، $\langle \mathcal{E}, \lambda\cap\gamma, A\rangle$ بزرگترین $\mathcal{L}$ـ پیش‌ایده‌آل/$\mathcal{L}$ـ ایده‌آل eـ نرم شهودی مشمول در هر یک از آنهاست. در واقع برای هر خانواده $\langle \mathcal{E}, \lambda_i, A\rangle$ $(i \in I)$ از $\mathcal{L}$ـ پیش‌ایده‌آل‌ها/$\mathcal{L}$ـ ایده‌آل ها، $\bigcap_{i\in I} \lambda_i$ همان اینفیمم λ_i هاست. خاطر نشان می‌کنیم که یک نیم‌مشبکه پایینی کامل گفته می‌شود هرگاه هر خانواده از اعضای آن دارای اینفیمم باشد ([۵، صفحه ۲۹]). لذا

گزاره ۳.۴. *$(\mathcal{ISP}(\mathcal{E}), \subseteq)$ و $(\mathcal{ISI}(\mathcal{E}), \subseteq)$ نیم‌مشبکه‌های پایینی کامل هستند که در آنها برای هر خانواده ناتهی $\langle \mathcal{E}, \lambda_i, A\rangle$ $(i \in I)$ از $\mathcal{L}$ـ پیش‌ایده‌آل/$\mathcal{L}$ـ ایده‌آل eـ نرم شهودی اینفیمم بصورت زیر داده می‌شود:*

$$\bigwedge_{i\in I}\langle \mathcal{E}, \lambda_i, A\rangle = \langle \mathcal{E}, \cap_{i\in I}\lambda_i, A\rangle$$

با توجه به مثال ۱۱.۳، واضح است که $\lambda_۱$ بزرگترین عضو $(\mathcal{ISP}(\mathcal{E}), \subseteq)$/$(\mathcal{ISI}(\mathcal{E}), \subseteq)$ است. اکنون طبق گزاره ۳.۴ و [۵، قضیه ۱۱.۲]، که بیان می‌دارد یک نیم‌مشبکه کامل، مشبکه‌ای کامل است اگر وفقط اگر دارای بزرگترین عضو باشد، نتیجه می‌شود که $(\mathcal{ISP}(\mathcal{E}), \subseteq)$ و $(\mathcal{ISI}(\mathcal{E}), \subseteq)$ مشبکه‌هایی کامل هستند که در آنها اینفیمم همان اشتراک است. بعلاوه واضح است که برای هر خانواده $\{\lambda_i : i \in I\}$ از $\mathcal{L}$ـ پیش‌ایده‌آل‌ها/$\mathcal{L}$ـ ایده‌آل‌ها، اشتراک تمام $\mathcal{L}$ـ پیش‌ایده‌آل‌ها/$\mathcal{L}$ـ ایده‌آل‌های شامل $\{\lambda_i : i \in I\}$ کوچکترین کران بالای $\{\lambda_i : i \in I\}$ است. بنابراین نتیجه زیر را داریم

نتیجه ۴.۴. *$(\mathcal{ISP}(\mathcal{E}), \subseteq)$ و $(\mathcal{ISI}(\mathcal{E}), \subseteq)$ مشبکه‌هایی کامل هستند که در آنها اینفیمم همان اشتراک بوده و سوپریمم بصورت زیر داده می‌شود:*

$$\bigvee_{i\in I}\langle \mathcal{E}, \lambda_i, A\rangle = \langle \mathcal{E}, [\cup_{i\in I}\lambda_i], A\rangle$$

که $[\cup\lambda_i]$ ، اشتراک همه $\mathcal{L}$ـ پیش‌ایده‌آل‌ها/$\mathcal{L}$ـ ایده‌آل‌ها ی شامل $\cup\lambda_i$ است. در واقع $(\mathcal{ISI}(\mathcal{E}), \subseteq)$ زیرمشبکه‌ای کامل از مشبکه کامل $(\mathcal{ISP}(\mathcal{E}), \subseteq)$ است.

تعریف ۵.۴. برای دو $\mathcal{L}$ـ مجموعه نرم شهودی $\langle\mathcal{E}, \lambda_۱, A_۱\rangle$ و $\langle\mathcal{E}, \lambda_۲, A_۲\rangle$، دو عمل AND و OR را بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\langle\mathcal{E}, \lambda_۱, A_۱\rangle \mathrm{AND} \langle\mathcal{E}, \lambda_۲, A_۲\rangle = \langle\mathcal{E}, \lambda_۱ \sqcap \lambda_۲, A_۱ \times A_۲\rangle,$$

$$\langle\mathcal{E}, \lambda_۱, A_۱\rangle \mathrm{OR} \langle\mathcal{E}, \lambda_۲, A_۲\rangle = \langle\mathcal{E}, \lambda_۱ \sqcup \lambda_۲, A_۱ \times A_۲\rangle$$

که $\lambda_۱ \sqcap \lambda_۲, \lambda_۱ \sqcup \lambda_۲ : A_۱ \times A_۲ \longrightarrow \mathcal{L}^{\mathcal{E}} \times \mathcal{L}^{\mathcal{E}}$ توابعی هستند با ضابطه‌های

$$(\lambda_۱ \sqcap \lambda_۲)(e_۱, e_۲) = (\mu_{\lambda_۱(e_۱)} \wedge \mu_{\lambda_۲(e_۲)}, \nu_{\lambda_۱(e_۱)} \vee \nu_{\lambda_۲(e_۲)})$$

$$(\lambda_۱ \sqcup \lambda_۲)(e_۱, e_۲) = (\mu_{\lambda_۱(e_۱)} \vee \mu_{\lambda_۲(e_۲)}, \nu_{\lambda_۱(e_۱)} \wedge \nu_{\lambda_۲(e_۲)})$$

مثال ۶.۴. EQـ جبر مثال ۷.۳ را در نظر بگیرید. فرض کنید $A = \{p\}$ و $B = \{q\}$ مجموعه‌هایی از پارامترها و $s_۱$، $s_۲$ و $s_۳$ عناصری از $\mathcal{L}$ با خاصیت $s_۱ < s_۲ < s_۳$ با شرط $\mathfrak{n}(s_۳) = s_۱$ و $\mathfrak{n}(s_۲) = s_۲$ باشند. $\mathcal{L}$ـ مجموعه‌های نرم شهودی $\langle\mathcal{E}, \lambda, A\rangle$ و $\langle\mathcal{E}, \gamma, B\rangle$ را همانند مثال ۲.۴ در نظر می‌گیریم که B با A جایگزین شده است. در این‌صورت

$$\mu_{(\lambda\sqcap\gamma)(p,q)}(x) = \begin{cases} s_۱ & x = ۰ \\ s_۲ & x \in \{a, b, c\} \\ s_۳ & x \in \{d, e, f, ۱\} \end{cases}$$

$$\nu_{(\lambda\sqcap\gamma)(p,q)}(x) = \begin{cases} s_۳ & x = ۰ \\ s_۲ & x \in \{a, b, c\} \\ s_۱ & x \in \{d, e, f, ۱\} \end{cases}$$

گزاره ۷.۴. *فرض کنید $\langle\mathcal{E}, \lambda_۱, A_۱\rangle$ و $\langle\mathcal{E}, \lambda_۲, A_۲\rangle$ دو $\mathcal{L}$ـ پیش‌ایده‌آل/ایده‌آل eـ نرم شهودی باشند. در اینصورت*

(۱) $\langle\mathcal{E}, \lambda_۱, A_۱\rangle AND \langle\mathcal{E}, \lambda_۲, A_۲\rangle$ یک $\mathcal{L}$ـ پیش‌ایده‌آل/ایده‌آل eـ نرم شهودی است.

(۲) اگر $A_۱ \subseteq A_۲$ و $\lambda_۱ \subseteq \lambda_۲$، آنگاه $\langle\mathcal{E}, \lambda_۱, A_۱\rangle OR \langle\mathcal{E}, \lambda_۲, A_۲\rangle$ یک $\mathcal{L}$ـ پیش‌ایده‌آل/ایده‌آل eـ نرم شهودی است.

اثبات. مشابه گزاره ۱.۳ ثابت می‌شود. □

مثال ۸.۴. EQ ـ جبر مثال ۷.۳ را در نظر بگیرید و فرض کنید $A_1=\{p_1,p_2\}$ و $A_2=\{p_2,p_3\}$ مجموعه‌هایی از پارامترها باشند. در اینصورت، $\mathcal{L}$ ـ مجموعه‌های نرم شهودی $\langle\mathcal{E},\lambda_1,A_1\rangle$ و $\langle\mathcal{E},\lambda_2,A_2\rangle$ تعریف شده بصورت زیر $\mathcal{L}$ ـ پیش‌ایده‌آل‌های نرم شهودی هستند:

$$\mu_{\lambda_1(p_2)}(x)=\begin{cases}s_1 & x=0\\ s_2 & x=a\\ s_3 & x\in E\setminus\{0,a\}\end{cases}\qquad \nu_{\lambda_1(p_2)}(x)=\begin{cases}s_3 & x=0\\ s_2 & x=a\\ s_1 & x\in E\setminus\{0,a\}\end{cases}$$

$$\mu_{\lambda_2(p_3)}(x)=\begin{cases}s_1 & x=0\\ s_2 & x=b\\ s_3 & x\in E\setminus\{0,b\}\end{cases}\qquad \nu_{\lambda_2(p_3)}(x)=\begin{cases}s_3 & x=0\\ s_2 & x=b\\ s_1 & x\in E\setminus\{0,b\}\end{cases}$$

$$\mu_{\lambda_2(p_2)}(x)=\mu_{\lambda_1(p_1)}(x)=\begin{cases}s_1 & x=0\\ s_2 & x\in E\setminus\{0\}\end{cases}$$
$$\nu_{\lambda_2(p_2)}(x)=\nu_{\lambda_1(p_1)}(x)=\begin{cases}s_2 & x=0\\ s_1 & x\in E\setminus\{0\}\end{cases}$$

درحالی‌که $\langle\mathcal{E},\lambda_1,A_1\rangle\mathrm{OR}\langle\mathcal{E},\lambda_2,A_2\rangle$ یک $\mathcal{L}$ ـ پیش‌ایده‌آل e ـ نرم شهودی نیست زیرا

$$\begin{aligned}&\mu_{(\lambda_1\sqcup\lambda_2)(p_2,p_3)}(a)\wedge\mu_{(\lambda_1\sqcup\lambda_2)(p_2,p_3)}(b)\\ =\;&(\mu_{\lambda_1(p_2)}\vee\mu_{\lambda_2(p_3)})(a)\wedge(\mu_{\lambda_1(p_2)}\vee\mu_{\lambda_2(p_3)})(b)\\ =\;&s_2\not\leq s_3=(\mu_{\lambda_1(p_2)}\vee\mu_{\lambda_2(p_3)})(c)=\mu_{(\lambda_1\sqcup\lambda_2)(p_2,p_3)}(a\boxminus b)\end{aligned}$$

همچنین توجه می‌کنیم که $A_2\not\subseteq A_1$ و $\lambda_2\not\subseteq\lambda_1$. این مثال نشان می‌دهد گزاره ۷.۴(۲) در حالت کلی ممکن است برقرار نباشد.

تعریف ۹.۴. برای دو $\mathcal{L}$ ـ مجموعه نرم شهودی $\langle\mathcal{E},\lambda_1,A_1\rangle$ و $\langle\mathcal{E},\lambda_2,A_2\rangle$، اجتماع توسعه‌یافته ($\tilde{\cup}$) و اشتراک توسعه‌یافته ($\tilde{\cap}$) بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$\langle\mathcal{E},\lambda_1,A_1\rangle\tilde{\cup}\langle\mathcal{E},\lambda_2,A_2\rangle=\langle\mathcal{E},\lambda_1\tilde{\cup}\lambda_2,A_1\cup A_2\rangle$$
$$\langle\mathcal{E},\lambda_1,A_1\rangle\tilde{\cap}\langle\mathcal{E},\lambda_2,A_2\rangle=\langle\mathcal{E},\lambda_1\tilde{\cap}\lambda_2,A_1\cap A_2\rangle$$

که $\lambda_1 \tilde{\cup} \lambda_2 : A_1 \cup A_2 \longrightarrow \mathcal{L}^{\mathcal{E}} \times \mathcal{L}^{\mathcal{E}}$ و $\lambda_1 \tilde{\cap} \lambda_2 : A_1 \cap A_2 \longrightarrow \mathcal{L}^{\mathcal{E}} \times \mathcal{L}^{\mathcal{E}}$ توابعی هستند با ضابطه

$$(\lambda_1 \tilde{\cup} \lambda_2)(e) = \begin{cases} (\mu_{\lambda_1(e)}, \nu_{\lambda_1(e)}) & e \in A_1 \setminus A_2 \\ (\mu_{\lambda_2(e)}, \nu_{\lambda_2(e)}) & e \in A_2 \setminus A_1 \\ (\mu_{\lambda_1(e)} \vee \mu_{\lambda_2(e)}, \nu_{\lambda_1(e)} \wedge \nu_{\lambda_2(e)}) & e \in A_1 \cap A_2 \end{cases}$$

و $(\lambda_1 \tilde{\cap} \lambda_2)(e) = (\mu_{\lambda_1(e)}, \nu_{\lambda_1(e)})$ یا $(\lambda_1 \tilde{\cap} \lambda_2)(e) = (\mu_{\lambda_2(e)}, \nu_{\lambda_2(e)})$ مشروط بر اینکه $\lambda_1(e) = \lambda_2(e)$.

گزاره ۱۰.۴. *فرض کنید $\langle \mathcal{E}, \lambda_1, A_1 \rangle$ و $\langle \mathcal{E}, \lambda_2, A_2 \rangle$ دو $\mathcal{L}$ـ پیش‌ایده‌آل/ایده‌آل eـ نرم شهودی باشند.*

(۱) *اگر $A_1 \cap A_2 = \emptyset$، آنگاه $\langle \mathcal{E}, \lambda_1, A_1 \rangle \tilde{\cup} \langle \mathcal{E}, \lambda_2, A_2 \rangle$ یک $\mathcal{L}$ـ پیش‌ایده‌آل/ایده‌آل eـ نرم شهودی است،*

(۲) *اگر $\lambda_1(e) = \lambda_2(e)$، برای هر $e \in A_1 \cap A_2$، آنگاه $\langle \mathcal{E}, \lambda_1, A_1 \rangle \tilde{\cap} \langle \mathcal{E}, \lambda_2, A_2 \rangle$ یک $\mathcal{L}$ـ پیش‌ایده‌آل eـ نرم شهودی است.*

اثبات. به‌سادگی انجام می‌شود. □

ملاحظه ۱۱.۴. $\mathcal{L}$ـ پیش‌ایده‌آل‌های eـ نرم شهودی $\langle \mathcal{E}, \lambda_1, A_1 \rangle$ و $\langle \mathcal{E}, \lambda_2, A_2 \rangle$ داده شده در مثال ۸.۴ را در نظر می‌گیریم. می‌بینیم که

$$(\lambda_1 \tilde{\cup} \lambda_2)(\alpha) = \begin{cases} (\mu_{\lambda_1(p_1)}, \nu_{\lambda_1(p_1)}) & \alpha \in A_1 \setminus A_2 = \{p_1\} \\ (\mu_{\lambda_2(p_3)}, \nu_{\lambda_2(p_3)}) & \alpha \in A_2 \setminus A_1 = \{p_3\} \\ (\mu_{\lambda_2(p_2)}, \nu_{\lambda_2(p_2)}) & \alpha \in A_1 \cap A_2 = \{p_2\} \end{cases}$$

در اینصورت، $\langle \mathcal{E}, \lambda_1 \tilde{\cup} \lambda_2, A_1 \cup A_2 \rangle$ یک $\mathcal{L}$ـ پیش‌ایده‌آل eـ نرم شهودی است. حال EQـ جبر مثال ۷.۳ را در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم $A_1 = \{p_1, p_2\}$ و $A_2 = \{p_2\}$. $\mathcal{L}$ـ مجموعه‌های نرم شهودی $\langle \mathcal{E}, \lambda_1, A_1 \rangle$ و $\langle \mathcal{E}, \lambda_2, A_2 \rangle$ را بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\mu_{\lambda_1(p_1)}(x) = \begin{cases} s_1 & x = 0 \\ s_2 & x = a \\ s_3 & x \in E \setminus \{0, a\} \end{cases} \qquad \nu_{\lambda_1(p_1)}(x) = \begin{cases} s_3 & x = 0 \\ s_2 & x = a \\ s_1 & x \in E \setminus \{0, a\} \end{cases}$$

$$\mu_{\lambda_1(p_2)}(x) = \begin{cases} s_1 & x = 0 \\ s_2 & x = a \\ s_3 & x \in E \setminus \{0, a\} \end{cases} \qquad \nu_{\lambda_1(p_2)}(x) = \begin{cases} s_3 & x = 0 \\ s_2 & x = a \\ s_1 & x \in E \setminus \{0, a\} \end{cases}$$

$$\mu_{\lambda_2(p_2)}(x) = \begin{cases} s_1 & x = 0 \\ s_2 & x = b \\ s_3 & x \in \{a, c\} \\ s_4 & x \in \{1, e, f, d\} \end{cases} \qquad \nu_{\lambda_2(p_2)}(x) = \begin{cases} s_4 & x = 0 \\ s_3 & x = b \\ s_2 & x \in \{a, c\} \\ s_1 & x \in \{1, e, f, d\} \end{cases}$$

در اینصورت،

$$\begin{aligned} \mu_{(\lambda_1 \tilde{\cup} \lambda_2)(p_2)}(a) \wedge \mu_{(\lambda_1 \tilde{\cup} \lambda_2)(p_2)}(b) &= s_2 \not\leq s_3 = \mu_{(\lambda_1 \tilde{\cup} \lambda_2)(p_2)}(c) \\ &= \mu_{(\lambda_1 \tilde{\cup} \lambda_2)(p_2)}(a \boxminus b) \end{aligned}$$

و این یعنی $\langle \mathcal{E}, \lambda_1 \tilde{\cup} \lambda_2, A_1 \cup A_2 \rangle$ یک $\mathcal{L}$ـ پیش‌ایده‌آل p_2ـ نرم شهودی نیست.

بنابراین، درباره اجتماع توسعه‌یافته دو $\mathcal{L}$ـ پیش‌ایده‌آل eـ نرم شهودی، در حالت کلی، نمی‌توان گفت که یک $\mathcal{L}$ـ پیش‌ایده‌آل eـ نرم شهودی است یا خیر. گزاره ۳.۴ ما را مطمئن می‌سازد که روی اشتراک تهی مجموعه پارامترها، اجتماع توسعه‌یافته دو $\mathcal{L}$ـ پیش‌ایده‌آل eـ نرم شهودی حتماً یک $\mathcal{L}$ـ پیش‌ایده‌آل eـ نرم شهودی است.

۵. نتیجه‌گیری

در این مقاله، با استفاده از $\mathcal{L}$ـ مجموعه‌های نرم شهودی به مطالعه نظریه ایده‌آل‌ها در EQـ جبرها پرداخته و مفاهیم $\mathcal{L}$ـ پیش‌ایده‌آل نرم شهودی و $\mathcal{L}$ـ ایده‌آل نرم شهودی معرفی

و بسیاری از خواص مقدماتی آن‌ها در قالب مثال و قضیه ارائه شد. همچنین مفهوم $\mathcal{L}$ـ پیش‌فیلتر نرم شهودی و $\mathcal{L}$ـ فیلتر نرم شهودی معرفی و ارتباط آن‌ها با $\mathcal{L}$ـ پیش‌ایده‌آل‌های نرم شهودی و $\mathcal{L}$ـ ایده‌آل‌های نرم شهودی مطالعه شد و ثابت شد که در EQـ جبرهای پیچشی این دو مفهوم دوگان یکدیگرند. همچنین مفهوم برخی اعمال نظریه مجموعه‌ها روی آن‌ها به‌کار گرفته شد و نتایجی بدست آمد. با این وجود هنوز انواع زیادی از فیلترها و ایده‌آل‌ها ازجمله ایده‌آل‌ها/فیلترهای استلزامی و استلزامی مثبت، ایده‌آل‌ها/فیلترهای اول و ماکسیمال و ایده‌آل‌ها/فیلترهای سرسخت می‌توانند به‌عنوان گزینه‌های مناسبی برای مطالعه در نظرگرفته شوند.

مراجع

[1] Akhlaghinia, N., Aaly Kologani, M., Borzooei, R. A., Xin, X. L. (2021) On the category of EQ-algebras. Bulletin of the Section Logic, 50, 397-419.

[2] Akhlaghinia, N., Borzooei, R. A. and Aaly Kologani, M. (2021) Preideals in EQ-algebras. Soft Computing, 25, 12703-12715.

[3] Atanassove, K., Stoeva, S. (1984) Intuitionistic $\mathcal{L}$-fuzzy sets, in R. Trappl. Ed., Cybernetics and System Research 2 (Elsevier Sci. Publ., Amsterdam), 539-540.

[4] Bakhshi, M., Khavari, M. M. and Nazifi, M. (2020) Isomorphisms in EQ-algebras. Disscussiones Mathematicae: General Algebra and Applications, 40, 267-274.

[5] Blyth, T. S. (2005) Lattices and Ordered Algebraic Structures, Springer-Verlag: London.

[6] Borzooei, R. A., Akhlaginia, N., Xin, X. L., Aaly, M. (2021) Constructing some logical algebras from EQ-algebras. Filomat, 35, 2747-2760.

[7] Borzooei, R. A., Ganji, B. (2015) States on EQ-algebras. J. Intelligent & Fuzzy Systems, 29, 209-221.

[8] Bouchon-Meunier, B., Yager, R. R., Zadeh, L. A. (1995) Fuzzy logic and soft computing. World Scientific Publisher, Singapore.

[9] El-Zekey, M. (2010) Representable good EQ-algebras. Soft Computing, 14, 1011-1023.

[10] El-Zekey, M., Novák, V. and Mesiar, R. (2011) On good EQ-algebras. Fuzzy Sets and Systems, 178, 1-23.

[11] Goguen, A. J. (1967) $\mathcal{L}$-fuzzy sets. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 18 (1), 145-174.

[12] Maji, P. K., Biswas, R., Roy, A. R. (2003) Soft set theory, Computers and Mathematics with Applications, 45, 555-562.

[13] Ming Ma, Zh. and Qing Hu, B. (2012) Fuzzy EQ-filters of EQ-algebras. Quantitative Logic and Soft Computing, 528-535.

[14] Molodtsove, D. (1999) Soft set theory-First results, Computers and Mathematics with Applications, 37, 19-31.

[15] Novák, V. (2011) EQ-algebras-based fuzzy type theory and its extensions. Logic J. IGPL, 19, 512-542.

[16] Novák, V. and De Baets, B. (2009) EQ-algebras. Fuzzy Sets and Systems, 160, 2956-2978.

[17] Xin, X. L. (2020) Residuated lattices may not be residuated lattices. Fuzzy Set and Systems, 382, 120-128.

[18] Zadeh, L. A. (1965) Fuzzy sets. Information and control, 8(3), 338-353.

[19] Zadeh, L. A. (1978) Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility. Fuzzy sets and systems, 1(1), 3-28.

[20] Zadeh, L. A. (1994) Soft computing and fuzzy logic, IEEE software, 11(6), 48-56.

[21] Zadeh, L. A. (1996) Fuzzy logic, neural networks, and soft computing. Fuzzy sets, fuzzy logic, and fuzzy systems: selected papers by Lotfi A Zadeh, 775-782.