سیستم های فازی و کاربردها
سال هفتم، شماره اول (بهار و تابستان ۱۴۰۳)
صص. ۷۹ تا ۹۲

شاپای چاپی: ۲۷۱۷ـ۴۴۰۹
شاپای الکترونیکی: ۲۷۱۷ـ۳۹۸۴
DOI:10.22034/JFSA.2024.459073.1207

تابع عضویت بر اساس تابع چگالی احتمال

محسن عارفی* و سید محمود طاهری

گروه آمار، دانشکده علوم ریاضی و آمار، دانشگاه بیرجند، بیرجند، ایران
دانشکده علوم مهندسی، دانشکدگان فنی، دانشگاه تهران، تهران، ایران

تاریخ دریافت: ۱۴۰۳/۰۳/۰۳ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۳/۰۵/۲۶

نوع مقاله: علمی–پژوهشی

چکیده. چندین روش به‌منظور برآورد تابع چگالی احتمال وجود دارد. از سوی دیگر، در نظریه مجموعه‌های فازی یکی از روش‌های ساختن تابع عضویت بر پایه‌ی مجموعه داده، روش مبتنی بر تابع چگالی احتمال است. با توجه به روش‌های متداول در برآورد تابع چگالی، این مسئله می‌تواند به محاسبه انواع تابع عضویت بر پایه یک مجموعه داده منجر شود. در این مقاله، برخی از این روش‌ها بیان و با مثال عددی تشریح می‌شوند.

۱. درآمد

در نظریه مجموعه‌های فازی، ساختن تابع عضویت اهمیت ویژه‌ای در مسائل کاربردی دارد. چندین روش به‌منظور ساختن یا به‌دست آوردن تابع عضویت پیشنهاد شده است. برای مثال، در [۹] روشی مبتنی بر اصل بیشینهٔ آنتروپی برای ساختن تابع عضویت متغیرهای فازی گسسته پیشنهاد شده است. همچنین، در [۳] روش‌هایی برای ساخت توابع عضویت

2010 *Mathematics Subject Classification.* 62G07; 03E72
* Corresponding author
E-mails: Arefi@birjand.ac.ir, sm_taheri@ut.ac.ir.
عبارات و کلمات کلیدی. تابع توزیع تجربی، تابع چگالی احتمال، تابع عضویت، تابع هسته.

مجموعه‌های فازی با استفاده از دیدگاه خبرگان معرفی شده، و با روش‌های تقریب و درونیابی تأثیر نویزها در اطلاعات خبرگان بر روی دقت توابع عضویت به‌دست آمده نیز بررسی شده است. در پژوهشی دیگر، شیوه‌ای به‌منظور ساختن تابع عضویت بر مبنای ادغام یک تابع چگالی احتمال و آنتروپی شانون فازی معرفی شده است [۱۰]. نیز در [۱۳] روش ساخت مجموعه فازی، برپایهٔ تبدیل مقادیر چندارزشی عضویت به یک مقدار مشخص عددی ارائه شده است. در [۱۲] پس از تأکید بر چهار ملاک در ساخت توابع عضویت (درستی، انعطاف، قابلیت محاسباتی و سادگی در استفاده)، روشی براساس نظریه منحنی‌ها و سطوح بزیه (Bezier) معرفی شده است. علاقمندان می‌توانند به‌منظور فهرستی از روش‌های ساختن تابع عضویت، شامل انواع روش‌های عددی و روش‌های مبتنی بر شبکه‌های عصبی مصنوعی و الگوریتم‌های تکاملی به [۱۱] و به‌منظور آشنایی با روشی عملیاتی در ساختن تابع عضویت همراه با کاربرد آن در مهندسی معدن به [۲] مراجعه کنند.

از روش‌های ساختن تابع عضویت، روش‌های مبتنی بر مجموعه‌ای از داده‌هاست، که یکی از این روش‌ها روش مبتنی بر تابع چگالی احتمال است. در این باره با دو نوع مسئله روبرو هستیم:

۱) مجموعه‌ای از داده‌ها در دسترس است. در این حالت باید دو گام برداشته شود: نخست باید بر اساس داده‌ها، یک تابع چگالی احتمال برآورد گردد (مسئله‌ی برآورد تابع چگالی). در گام دوم، برپایه‌ی برآورد تابع چگالی حاصل از گام اول، تابع عضویت مناسب ساخته می‌شود.

۲) تابع چگالی احتمال مربوط به متغیر مورد بررسی داده شده است (و بنابراین گام اول در اقدامات بالا منتفی است). لذا کافی است تابع عضویت مناسب برپایه‌ی تابع چگالی احتمال ساخته شود.

در مقالهٔ حاضر، با تلفیق روش‌های برآورد تابع چگالی (یا تابع جرم) احتمال و روش‌های تبدیل تابع چگالی به تابع عضویت، شیوه‌ای برای ساختن یک تابع عضویت بر اساس مجموعه‌ای از داده‌ها بررسی و با مثال‌های عددی تشریح شده است.

متن حاضر بدین صورت تدوین شده است: در بخش دوم سه روش رایج در برآورد تابع چگالی احتمال، به‌کوتاهی، معرفی شده است. در بخش سوم، روشی برای ساختن تابع عضویت برپایه‌ی تابع چگالی احتمال (یا برآوردی از آن) مرور و تشریح شده است. در بخش چهارم، با یک مثال عددی روش ارائه شده توضیح داده شده است. در بخش پنجم، روش ساختن تابع عضویت برپایه‌ی سه تابع چگالی احتمال خاص (یکنواخت، نمایی و نرمال) بیان گردیده است.

۲. برآورد تابع چگالی احتمال

نمونه تصادفی $X_۱, ..., X_n$ را، با مقادیر مشاهده‌شده $x_۱, ..., x_n$، از جامعه‌ای با تابع چگالی (یا تابع جرم احتمال) $f(t)$ در نظر بگیرید. می‌خواهیم بر اساس این داده‌ها، برآوردی برای تابع چگالی احتمال $f(t)$ بیابیم. چند روش متداول در برآورد تابع چگالی به شرح زیر است [۶، ۷، ۱۴].

۱.۲. برآورد تابع چگالی احتمال به روش هیستوگرام (بافت‌نگار). فرض کنید یک نمونه تصادفی از تابع چگالی احتمال پیوسته نامعلومی با دامنه تغییرات $[a, b]$ در دسترس است. دامنه تغییرات را به‌صورت $a = t_۰ < t_۱ < ... < t_{m-۱} < t_m = b$ افراز می‌کنیم. آنگاه برآورد تابع چگالی $f_H(.)$ به‌صورت زیر به‌دست می‌آید

$$\begin{cases} f_H(t) = c_i, & t_i \leq t < t_{i+۱} \quad i = ۰, ۱, ..., m-۱, \\ f_H(b) = c_{m-۱}, & \\ f_H(t) = ۰, & o.w., \end{cases}$$

که $c_i = \frac{q_i}{n(t_{i+۱} - t_i)},\ i = ۰, ۱, ..., m-۱$ و q_i تعداد مشاهداتی است که در بازه $[t_i, t_{i+۱})$ قرار می‌گیرند. باید توجه داشت که این برآورد در شرایط یک تابع چگالی احتمال صدق می‌کند.

۲.۲. برآورد تابع چگالی احتمال بر پایه تابع توزیع تجربی. در این روش که گسترشی از روش هیستوگرام است، برآورد تابع چگالی احتمال چنین به‌دست می‌آید

$$\hat{f}_n(t) = \frac{F_n(t + h_n) - F_n(t - h_n)}{۲h_n},$$

که h_n دنباله‌ای از ثابت‌های مثبت و $F_n(t) = \frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n} I_{(-\infty, t]}(x_i)$ تابع توزیع تجربی است.

۳.۲. برآورد تابع چگالی احتمال بر اساس تابع هسته. روش مبتنی بر تابع هسته برای برآورد یک تابع چگالی احتمال به‌صورت زیر تعریف می‌شود (نیز [۱] را ببینید)

$$\hat{f}_n(t) = \frac{۱}{nh_n}\sum_{i=۱}^{n} K(\frac{t - x_i}{h_n}),$$

که $K(.)$ تابع هسته نامیده می‌شود و در ویژگی‌های زیر صدق می‌کند

$$\int_{-\infty}^{\infty} |K(y)| dy < \infty,\ \sup_y |K(y)| < \infty,\ \lim_{y\to\infty} |yK(y)| = ۰.$$

گفتنی است اگر تابع هسته $K(.)$ یک تابع چگالی باشد، در ویژگی‌های بالا صدق می‌کند. جدول زیر شامل برخی از تابع هسته‌های رایج است. گفتنی است که اگر تابع هسته را $K(y) = \frac{۱}{۲}$ انتخاب کنیم، این روش در برآورد تابع چگالی احتمال به روش هیستوگرام تبدیل می‌گردد.

تابع هسته	دامنه تغییرات
$K(y) = \frac{۱}{۲}$	$\|y\| \leq ۱$
$K(y) = ۱ - \|y\|$	$\|y\| \leq ۱$
$K(y) = \frac{۱۵}{۱۶}(۱ - y^۲)^۲$	$\|y\| \leq ۱$
$K(y) = \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}} e^{-y^۲/۲}$	$\|y\| < \infty$

۳. ساختن تابع عضویت بر اساس تابع چگالی احتمال

فرض کنید $f(x)$ تابع چگالی احتمال (یا برآوردی از آن) و $\mu(x)$ تابع عضویت مجموعه فازی باشد که می‌خواهیم براساس $f(x)$ بسازیم. شرایط زیر را در نظر بگیرید:

الف) $E(\mu(X)) \geq c$، که c سطح اطمینان نامیده می‌شود و باید نزدیک یک باشد. مقدار $E(\mu(X))$ بر اساس تعریف احتمال زاده [۱۵] به‌صورت زیر تعریف می‌گردد

$$E(\mu(X)) = \int \mu(x) f(x) dx.$$

ب) $۰ \leq \mu(x) \leq ۱$.

ج) باید انتگرال $\int \mu^۲(x) dx$ مینیمم شود.

قضیه ۱.۳. *تابع عضویتی که در شرایط الف تا ج بالا صدق کند، بدین‌صورت است*

$$\mu(x) = \begin{cases} \lambda f(x) & \lambda f(x) < ۱, \\ ۱ & \lambda f(x) \geq ۱, \end{cases}$$

که ثابت λ از حل معادلهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$\lambda \int_{\lambda f(x) < ۱} f^۲(x) dx + \int_{\lambda f(x) \geq ۱} f(x) dx - c = ۰. \qquad (۱)$$

اثبات. اثبات بر اساس روش‌های بهینه‌سازی مقید در فضاهای نامتناهی‌بعد انجام می‌شود. علاقمندان را به [۴] ارجاع می‌دهیم. □

تذکر ۲.۳. چون اطلاعات موجود در داده‌ها در تابع چگالی مندرج است و تابع عضویت نیز بر پایهٔ تابع چگالی ساخته می‌شود، بنابراین متوسط مقدار عضویت تخصیص داده شده به مقادیر مختلف x (توزیع شده بر اساس تابع چگالی) باید بزرگ باشد، که این مقدار با سطح اطمینان c در شرط الف کنترل می‌گردد. شرط ب این نکته را تأمین می‌کند که تابع عضویت در بازه $[۰, ۱]$ قرار گیرد. شرط ج (بر پایه اندازه یک مجموعه فازی) نیز ضمانت می‌کند که کوچک‌ترین مجموعه فازی، که واجد همهٔ اطلاعات مندرج در تابع چگالی احتمال است، ساخته شود [۵].

تذکر ۳.۳. بر اساس اصل سازگاری احتمال_امکان زاده [۱۶]، امکان هر پیشامد باید بزرگ‌تر یا برابر با احتمال آن باشد. اگر مقادیر تابع عضویت به‌عنوان درجه‌های امکان منظور شوند، اصل سازگاری به‌صورت شرط زیر در می‌آید [۸]

$$\max_{x\in D} \frac{\mu(x)}{\max \mu(x)} \geq \int_D f(x)dx, \quad \forall D \subset R$$

اگر بخواهیم تابع عضویت بهینه حاصل از قضیه ۱.۳ در اصل سازگاری نیز صدق کند، باید کران پایینی برای سطح اطمینان c در نظر بگیریم. ثابت می‌شود که برای هر تابع چگالی احتمال، یک چنین c وجود دارد که با اضافه کردن شرط بالا به شرط‌های قضیه به‌دست می‌آید [۴].

تذکر ۴.۳. در صورتی که مسئله ساختن تابع عضویت با تابع جرم احتمال روی مقادیر گسسته $D = \{x_۱, x_۲, ..., x_k\}$ باشد، تمام مطالب بالا برقرار است و فقط به‌جای انتگرال به مجموع‌یابی روی D نیاز داریم.

۴. مثال عددی

به‌منظور ساختن یک تابع عضویت، ابتدا برآورد تابع چگالی احتمال طبق بخش ۲ به‌دست می‌آید و سپس طبق بخش ۳ تابع عضویت ساخته می‌شود. در ادامه، روش ارائه شده، بر اساس یک مثال کاربردی تشریح می‌گردد.

مثال ۱.۴. هزینه بستری و مراقبت عمومی و درمان ۵۴ بیمار (برحسب ۱۰ میلیون ریال)، با نوعی بیماری خاص، در یک بیمارستان به‌صورت زیر گزارش شده است

۱۵/۱, ۲۸/۲, ۱۴/۷, ۸/۳, ۲۴/۲, ۲۱/۵, ۱۶/۲, ۸/۵, ۱۳/۵, ۱۲/۷, ۲۲/۳, ۲۳, ۱۲/۹,
۱۸/۲, ۱۰/۸, ۱۴/۷, ۳۸, ۱۵/۵, ۲۰, ۳۲/۵, ۱۲/۵, ۱۱, ۲۹, ۱۷/۵, ۱۶/۸, ۱۴, ۱۴/۴,
۷/۷, ۱۸/۵, ۲۵/۵, ۸/۵, ۱۴/۳, ۱۲/۵, ۱۴/۸, ۲۲, ۶۷, ۹/۵, ۱۳, ۲۱, ۴۷, ۲۱, ۲۳/۲,
۱۴, ۱۳/۲, ۶۳/۵, ۱۰/۲, ۱۴/۱, ۱۱/۵, ۱۷/۴, ۲۲/۳, ۱۷, ۱۴/۲, ۱۶/۷, ۱۶/۶.

برپایهٔ این داده‌ها، تابع عضویت بر اساس سه روش برآورد تابع چگالی احتمال به‌صورت زیر ساخته می‌شود.

الف) روش هیستوگرام: فرض کنید دامنه تغییرات داده‌ها را به $m = ۶$ بازه به‌صورت $t_۰ = ۰ < t_۱ = ۱۴ < t_۲ = ۲۸ < t_۳ = ۴۲ < t_۵ = ۵۶ < t_۶ = ۷۰$ افراز کنیم. در این صورت برآورد تابع چگالی به روش هیستوگرام برابر است با (شکل ۱)

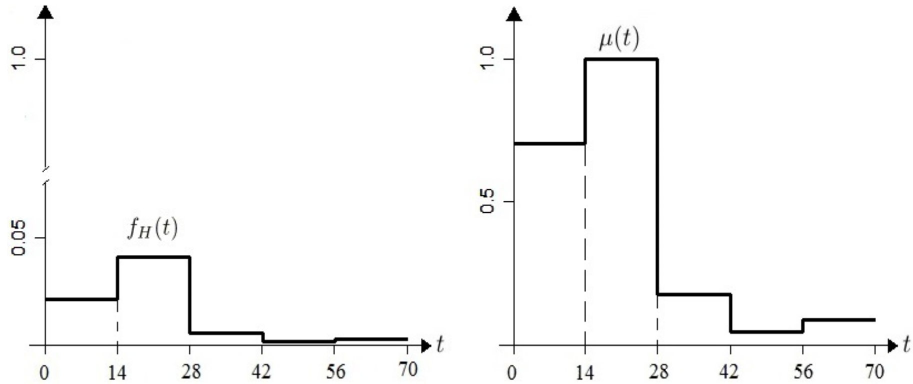
$$f_H(t) = \begin{cases} ۰/۰۲۱۲ & ۰ \leq t < ۱۴, \\ ۰/۰۴۱۰ & ۱۴ \leq t < ۲۸, \\ ۰/۰۰۵۳ & ۲۸ \leq t < ۴۲, \\ ۰/۰۰۱۳ & ۴۲ \leq t < ۵۶, \\ ۰/۰۰۲۶ & ۵۶ \leq t < ۷۰. \end{cases}$$

تحت ضریب اطمینان $c = ۰/۸$ مقدار $\lambda = ۳۳/۲۱۷۱$ به‌دست می‌آید. در این صورت برآورد تابع عضویت عبارت است از (شکل ۱)

$$\mu(t) = \begin{cases} ۰/۷۰۴۲ & ۰ \leq t < ۱۴, \\ ۱ & ۱۴ \leq t < ۲۸, \\ ۰/۱۷۶۱ & ۲۸ \leq t < ۴۲, \\ ۰/۰۴۳۲ & ۴۲ \leq t < ۵۶, \\ ۰/۰۸۶۴ & ۵۶ \leq t < ۷۰. \end{cases}$$

ب) روش تابع توزیع تجربی: برآورد تابع چگالی احتمال به‌ازای $h_n = ۵$ و مقادیر $t = ۰, ۱۴, ۲۸, ۴۲, ۵۶, ۷۰$ به صورت زیر به‌دست می‌آید

$$\hat{f}_n(t) = \begin{cases} ۰ & t = ۰, \\ ۰/۰۵۹۳ & t = ۱۴, \\ ۰/۰۱۱۱ & t = ۲۸, \\ ۰/۰۰۳۷ & t = ۴۲, \\ ۰ & t = ۵۶, \\ ۰/۰۰۱۹ & t = ۷۰. \end{cases}$$



شکل ۱: برآورد تابع چگالی و برآورد تابع عضویت در مثال ۱.۴ بر اساس روش هیستوگرام

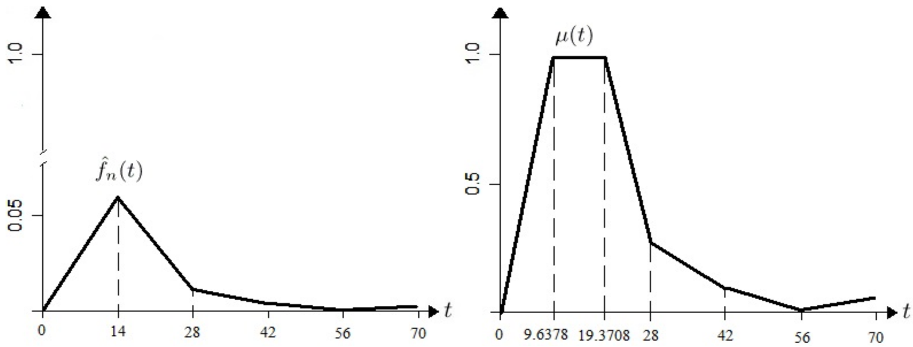
بر اساس برآوردهای بالا، چندبر فراوانی تابع چگالی احتمال را می‌توان به‌صورت تابع زیر ارائه نمود (شکل ۲):

$$\hat{f}_n(t) = \begin{cases} ۰/۰۰۴۲۴t & ۰ \leq t < ۱۴, \\ ۰/۱۰۷۵ - ۰/۰۰۳۴۴t & ۱۴ \leq t < ۲۸, \\ ۰/۰۲۵۹ - ۰/۰۰۰۵۳t & ۲۸ \leq t < ۴۲, \\ ۰/۰۱۴۸ - ۰/۰۰۰۲۶t & ۴۲ \leq t < ۵۶, \\ ۰/۰۰۰۱۴t - ۰/۰۰۷۶ & ۵۶ \leq t \leq ۷۰. \end{cases}$$

با فرض اینکه ضریب اطمینان $c = ۰/۸$ باشد، بر اساس رابطه (۱) مقدار $\lambda = ۲۴/۴۷۱۲$ است. در نتیجه تابع عضویت به‌صورت زیر به‌دست می‌آید (شکل ۲):

$$\mu(t) = \begin{cases} ۰/۱۰۳۸t & ۰ \leq t < ۹/۶۳۷۸, \\ ۱ & ۹/۶۳۷۸ \leq t < ۱۹/۳۷۰۸, \\ ۲۴/۴۷۱۲(۰/۱۰۷۵ - ۰/۰۰۳۴۴t) & ۱۹/۳۷۰۸ \leq t < ۲۸, \\ ۲۴/۴۷۱۲(۰/۰۲۵۹ - ۰/۰۰۰۵۳t) & ۲۸ \leq t < ۴۲, \\ ۲۴/۴۷۱۲(۰/۰۱۴۸ - ۰/۰۰۰۲۶t) & ۴۲ \leq t < ۵۶, \\ ۲۴/۴۷۱۲(۰/۰۰۰۱۴t - ۰/۰۰۷۶) & ۵۶ \leq t \leq ۷۰. \end{cases}$$

ج) روش تابع هسته: برآورد تابع چگالی احتمال به‌ازای $h_n = ۵$ و بر اساس تابع هسته گوسی



شکل ۲: برآورد تابع چگالی و برآورد تابع عضویت در مثال ۱.۴ بر پایه روش تابع توزیع تجربی

$K(y) = \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}} e^{-y^{۲}/۲}$ به‌ازای $t = ۰, ۱۴, ۲۸, ۴۲, ۵۶, ۷۰$ به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

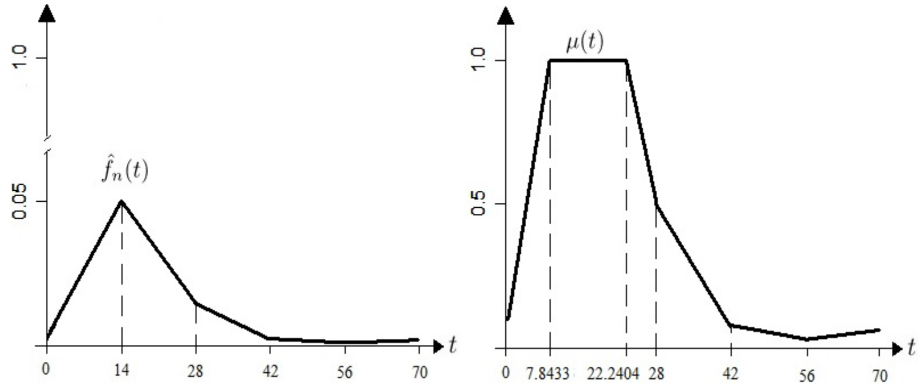
$$\hat{f}_n(t) = \begin{cases} ۰/۰۰۳۰ & t = ۰, \\ ۰/۰۵۰۲ & t = ۱۴, \\ ۰/۰۱۴۷ & t = ۲۸, \\ ۰/۰۰۲۳ & t = ۴۲, \\ ۰/۰۰۰۹ & t = ۵۶, \\ ۰/۰۰۱۹ & t = ۷۰. \end{cases}$$

بر اساس برآوردهای بالا، برآورد چندبر فراوانی تابع چگالی احتمال چنین است (شکل ۳)

$$\hat{f}_n(t) = \begin{cases} ۰/۰۰۳۳۷t + ۰/۰۰۳۰ & ۰ \leq t < ۱۴, \\ ۰/۰۸۵۷ - ۰/۰۰۲۵۳t & ۱۴ \leq t < ۲۸, \\ ۰/۰۳۹۵ - ۰/۰۰۰۸۹t & ۲۸ \leq t < ۴۲, \\ ۰/۰۰۶۵ - ۰/۰۰۰۱t & ۴۲ \leq t < ۵۶, \\ ۰/۰۰۰۰۷t - ۰/۰۰۳۱ & ۵۶ \leq t \leq ۷۰. \end{cases}$$

با فرض این‌که ضریب اطمینان $c = ۰/۸$ باشد، مقدار $\lambda = ۳۳/۹۷۶۸$ است و در این صورت برآورد تابع عضویت به‌صورت زیر به‌دست می‌آید (شکل ۳)

$$\mu(t) = \begin{cases} ۳۳/۹۷۶۸(۰/۰۰۳۳۷t + ۰/۰۰۳۰) & ۰ \leq t < ۷/۸۴۳۳, \\ ۱ & ۷/۸۴۳۳ \leq t < ۲۲/۲۴۰۴, \\ ۳۳/۹۷۶۸(۰/۰۸۵۷ - ۰/۰۰۲۵۳t) & ۲۲/۲۴۰۴ \leq t < ۲۸, \\ ۳۳/۹۷۶۸(۰/۰۳۹۵ - ۰/۰۰۰۸۹t) & ۲۸ \leq t < ۴۲, \\ ۳۳/۹۷۶۸(۰/۰۰۶۵ - ۰/۰۰۰۱t) & ۴۲ \leq t < ۵۶, \\ ۳۳/۹۷۶۸(۰/۰۰۰۰۷t - ۰/۰۰۳۱) & ۵۶ \leq t \leq ۷۰. \end{cases}$$



شکل ۳: برآورد تابع چگالی و برآورد تابع عضویت در مثال ۱.۴ بر اساس روش تابع هسته

۵. ساختن توابع عضویت بهینه براساس برخی توابع چگالی احتمال خاص

در بخش سوم، روش یافتن تابع عضویت بهینه بر اساس تابع چگالی احتمال بیان گردید. در بخش اول اشاره شد که گاه خودِ تابع چگالی احتمال را داریم و می‌خواهیم تابع عضویت را براساس آن بسازیم. روشن است که درباره‌ی هر تابع چگالی احتمال باید مسئله بهینه‌سازی مربوط را حل کرد، و یک رابطه‌ی ثابت کلی نداریم. در این بخش، برای برخی توابع چگالی احتمال خاص (یکنواخت، نمایی و نرمال)، روش ساخت تابع عضویت بهینه را بیان می‌کنیم [۴].

۱.۵. تابع چگالی قطعه‌ای_یکنواخت. تابع چگالی قطعه‌ای_یکنواخت زیر را در نظر بگیرید

$$f(x) = \begin{cases} \frac{۱}{۱۷} & -۳/۵ \leq x \leq -۱, \\ \frac{۶}{۱۷} & -۱ < x \leq ۱, \\ \frac{۱}{۱۷} & ۱ \leq x \leq ۳/۵. \end{cases}$$

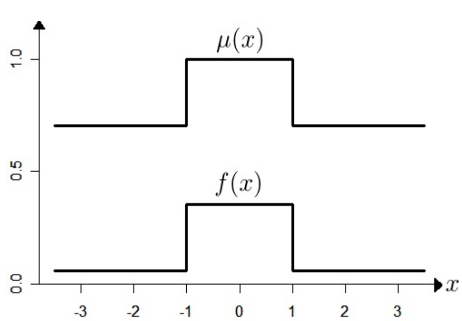
با توجه به قضیه ۱.۳، رابطه $\lambda f(x)$ سه حالت زیر را دارد

$$\begin{cases} ۱ \leq \frac{\lambda}{۱۷} < \frac{۶\lambda}{۱۷} & \Rightarrow & ۱۷ \leq \lambda, & c = ۱, \\ \frac{\lambda}{۱۷} < ۱ \leq \frac{۶\lambda}{۱۷} & \Rightarrow & \frac{۱۷}{۶} \leq \lambda < ۱۷, & c > \frac{۶}{۱۷}, \\ \frac{\lambda}{۱۷} < \frac{۶\lambda}{۱۷} < ۱ & \Rightarrow & \lambda < \frac{۱۷}{۶}, & c = \frac{۲۸۹\lambda}{۴۱}. \end{cases}$$

برای مثال، فرض کنید $c = ۰/۵۶$. در این صورت بر اساس رابطه (۱)، $\lambda = ۱۱/۹۶۸$ می‌باشد. بنابراین تابع عضویت به‌صورت زیر به‌دست می‌آید (شکل ۴)

$$\mu(x) = \begin{cases} ۰/۷۰۴ & -۳/۵ \leq x \leq -۱, \\ ۱ & -۱ < x \leq ۱, \\ ۰/۷۰۴ & ۱ \leq x \leq ۳/۵. \end{cases}$$

همچنین چنانچه $c = ۱$ باشد، تابع عضویت در بازه $-۳/۵ \leq x \leq ۳/۵$ همواره برابر یک



شکل ۴: تابع عضویت بر اساس تابع چگالی قطعه‌ای_یکنواخت

است. قابل توجه است که به‌ازای $c > ۰/۷۸$ اصل سازگاری برقرار است.

۲.۵. تابع چگالی نمایی. تابع چگالی احتمال نمایی را در نظر بگیرید

$$f(x) = ke^{-kx}, \qquad x > ۰$$

بر اساس قضیه ۱.۳ و رابطه $\lambda f(x)$، دامنه تغییرات به‌صورت زیر است

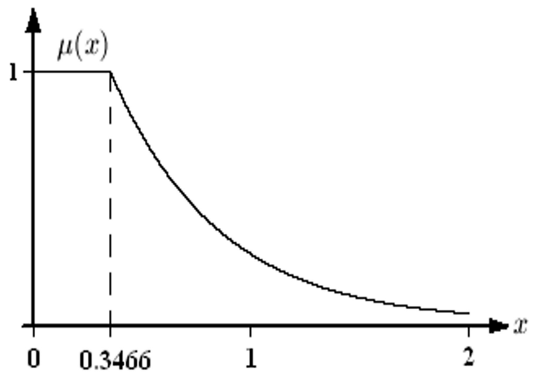
$$\begin{cases} \lambda f(x) < ۱ & \Rightarrow \quad \frac{\ln(\lambda k)}{k} < x, \\ \lambda f(x) \geq ۱ & \Rightarrow \quad ۰ < x \leq \frac{\ln(\lambda k)}{k}. \end{cases}$$

طبق رابطه (۱)، $\lambda = \frac{۱}{۲k(۱-c)}$ به‌دست می‌آید. بنابراین تابع عضویت برابر است با

$$\mu(x) = \begin{cases} ۱ & ۰ < x \leq \max(۰, -\frac{\ln(۲(۱-c))}{k}), \\ \\ \frac{۱}{۲(۱-c)} e^{-kx} & \max(۰, -\frac{\ln(۲(۱-c))}{k}) < x. \end{cases}$$

گفتنی است که به‌ازای $c \geq ۰/۵$ اصل سازگاری برقرار است. برای مثال، اگر $k = ۲$ و $c = ۰/۷۵$، تابع عضویت به‌صورت زیر است (شکل ۵)

$$\mu(x) = \begin{cases} ۱ & ۰ < x \leq ۰/۳۴۶۶, \\ ۲e^{-۲x} & ۰/۳۴۶۶ < x. \end{cases}$$



شکل ۵: تابع عضویت بهینه بر اساس تابع چگالی نمایی

۳.۵. تابع چگالی نرمال. تابع چگالی احتمال نرمال را در نظر بگیرید

$$f(x) = \frac{۱}{\sqrt{۲\pi\sigma^۲}} e^{-\frac{(x-\mu)^۲}{۲\sigma^۲}}, \qquad x \in R,\ \mu \in R,\ \sigma > ۰.$$

بر اساس قضیه ۱.۳ و رابطه $\lambda f(x)$، دامنه تغییرات برابر است با

$$\begin{cases} \lambda f(x) < ۱ & \Rightarrow \quad |x-\mu| > \sqrt{-۲\sigma^۲ \ln \frac{\sqrt{۲\pi\sigma^۲}}{\lambda}}, \\ \\ \lambda f(x) \geq ۱ & \Rightarrow \quad |x-\mu| \leq \sqrt{-۲\sigma^۲ \ln \frac{\sqrt{۲\pi\sigma^۲}}{\lambda}}, \end{cases}$$

که در رابطه بالا $\lambda < \sqrt{۲\pi\sigma^۲}$. طبق رابطه (۱)، λ طوری محاسبه می‌شود که در رابطه زیر صدق کند

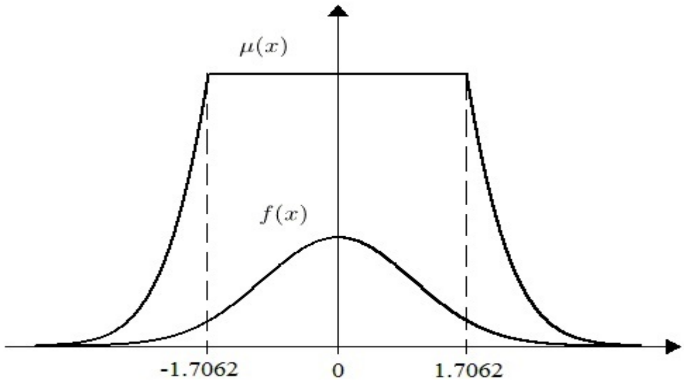
$$۲\sqrt{\pi\sigma^۲}\Phi\Big(\sqrt{-۲\ln\frac{\sqrt{۲\pi\sigma^۲}}{\lambda}}\Big) - \lambda\Phi\Big(\sqrt{-۴\ln\frac{\sqrt{۲\pi\sigma^۲}}{\lambda}}\Big) = \sqrt{\pi\sigma^۲}(۱+c) - \lambda,$$

که $\Phi(.)$ تابع توزیع نرمال استاندارد است. پس از محاسبه λ، تابع عضویت این‌گونه به‌دست می‌آید

$$\mu(x) = \begin{cases} \frac{\lambda}{\sqrt{۲\pi\sigma^۲}} e^{-\frac{(x-\mu)^۲}{۲\sigma^۲}} & |x-\mu| > \sqrt{-۲\sigma^۲ \ln \frac{\sqrt{۲\pi\sigma^۲}}{\lambda}}, \\ \\ ۱ & |x-\mu| \leq \sqrt{-۲\sigma^۲ \ln \frac{\sqrt{۲\pi\sigma^۲}}{\lambda}}. \end{cases}$$

قابل توجه است که به‌ازای $\frac{|c-\mu|}{\sigma} \geq \frac{۱}{\sqrt{۲}}$ اصل سازگاری برقرار است. برای مثال، فرض کنید تابع چگالی نرمال استاندارد $N(۰,۱)$ را در نظر بگیریم ($\mu = ۰$ و $\sigma^۲ = ۱$). با فرض $c = ۰/۹۶$، مقدار $\lambda = ۱۰/۷۴۶$ است و تابع عضویت به‌صورت زیر به‌دست می‌آید (شکل ۶)

$$\mu(x) = \begin{cases} \frac{۱۰/۷۴۶}{\sqrt{۲\pi}} e^{-\frac{x^۲}{۲}} & |x| > ۱/۷۰۶۲, \\ \\ ۱ & |x| \leq ۱/۷۰۶۲. \end{cases}$$



شکل ۶: تابع عضویت بهینه بر اساس تابع چگالی نرمال

۶. بحث و نتیجه‌گیری

روشی داده‌محور برای ساختن تابع عضویت بر اساس تابع چگالی احتمال مطرح و با مثال‌های عددی بررسی شد. برتری این روش این است که با توجه به تنوع در روش ساخت تابع چگالی، می‌توان توابع عضویت مختلفی را در هر مسئله پیشنهاد کرد. افزون اینکه، با تغییر پارامتر موسوم به سطح اطمینان نیز تابع عضویت‌های مختلفی ساخته می‌شود. بررسی این روش در وضعیتی که داده‌ها به‌صورت اعداد فازی هستند از مسیرهای پژوهشی پیش رو است.

مراجع

[۱] چینی‌پرداز، ر.، افشاری، ر. (۱۳۸۳)، برآورد تابع چگالی احتمال به روش هسته، اندیشهٔ آماری، سال نهم، شماره دوم، صص ۳۷ـ۴۴.

[۲] ابراهیمی، ا.، خیرخواه زرکش، م.م.، افضل، پ. (۱۳۹۶)، تعیین تابع عضویت فازی به کمک مدل‌سازی چندفراکتالی برای تهیه نقشه پتانسیل مس در منطقه ساردویه کرمان، نشریه علمی‌ـ پژوهشی مهندسی معدن، دوره ۱۲، شماره ۳۶، صص ۷۱ـ ۸۰.

[3] Aida-Zade, K.R., Guliyeva, P.S., Ismibayli, R.E. (2023). Analysis of the methods for constructing membership functions using expert data. In: Shahbazova, S.N., et al. (eds.), Recent Developments and the New Directions of Research, Foundations, and Applications. Studies in Fuzziness and Soft Computing, vol 422. Springer, pp 361-365.

[4] Civanlar, N.R. and Trussell, H.J. (1986). Constructing membership functions using statistical data. *Fuzzy Sets and Systems*, **18**, 1-13.

[5] Czogala, E., Gottwald, S. and Pedrycz, W. (1982). Contribution to application of energy measure of fuzzy sets. *Fuzzy Sets and Systems*, **8**, 205-214.

[6] Campos, V.S.M. and Dorea, C.C.Y. (2001). Kernel density estimation: the general case. *Statistics & Probability Letters*, **55**, 173-180.

[7] Devroye, L. and Györfi, L. (1985). *Nonparametric Density Estimation.* J. Wiley.

[8] Dubois, D. and Prade, H. (1980). *Fuzzy Sets and Systems: Theory and Applications.* Academic Press.

[9] Gao, X. (2009). Maximum entropy membership functions for discrete fuzzy variables. Information Sciences, 179, 2353-2361.

[10] Hasuike, T., Katagiri, H. Tsubaki, H. and Tsuda, H. (2012), Constructing membership function based on fuzzy Shannon entropy and human's interval estimation, In Proc. of the 2012 IEEE International Conference on Fuzzy Systems, Australia.

[11] Klir, G.j., Yuan, B. (1995), Fuzzy Sets and Fuzzy Logic: Theory and Applications, Pearson College Div.

[12] Medaglia, A.L., Fang, S., Nuttle, H.L.W., Wilson, J.R. (2002), An efficient and flexible mechanism for constructing membership functions, European J. Operational Research, 139, 84-95.

[13] Patrascu, V. (2012), Fuzzy membership function construction based on multi-valued evaluation, In: Proc. of The 10th International FLINS Conference on Uncertainty Modeling in Knowledge Engineering and Decision Making (FLINS 2012), Istanbul, Turkey, World Scientific Proceedings Series on Computer Engineering and Information Science: Volume 7, pp. 756-761.

[14] Wand, M.P. and Jones, M.C. (1995). *Kernel Smoothing*. Chapman & Hall.

[15] Zadeh, L.A. (1968). Probability measure of fuzzy events. Fuzzy Sets and Systems, 1, 3-28.

[16] Zadeh, L.A. (1978). Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility. J. of Mathematical Analysis and Applications, 23, 421-427.