سیستم های فازی و کاربردها
سال ششم، شماره دوم (پائیز و زمستان ۱۴۰۲)
صص. ۱۹۱ تا ۲۱۳

شاپای چاپی: ۲۷۱۷ـ ۴۴۰۹
شاپای الکترونیکی: ۲۷۱۷ـ ۳۹۸۴
DOI:10.22034/JFSA.2023.189272

# روش حلی برای مسائل برنامه‌ریزی خطی چندهدفه بازه‌ای

زهرا داوری، ساناز ریواز*، محمود بهروزی‌فر
گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه صنعتی نوشیروانی بابل، بابل، ایران

تاریخ دریافت: ۱۴۰۲/۶/۶ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۲/۹/۲۸

نوع مقاله: علمی ـ پژوهشی

**چکیده.** در این مقاله مسائل برنامه‌ریزی خطی چندهدفه با ضرایب بازه‌ای در توابع هدف بررسی می‌شوند. با به کارگیری شاخص پذیرش، مفاهیم جواب‌های مختلفی متناظر با چنین مسائلی ارائه می‌گردد. به منظور دستیابی به چنین جواب‌هایی، روش حل جدیدی معرفی می‌شود. ویژگی‌هایی پیرامون جواب/جواب‌های حاصل از روش حل جدید نیز بیان می‌شود. برای نمونه، جواب بهینه یکتای حاصل از روش حل جدید، یک جواب $\mathcal{A}-$ کارای اکید مسئله برنامه‌ریزی خطی چندهدفه با ضرایب بازه‌ای در توابع هدف است. به منظور درک بهتر مفاهیم و روش حل ارائه شده، مثال‌هایی عددی نیز مورد بررسی قرار می‌گیرند.

## ۱. مقدمه

مسائل بهینه‌سازی که اغلب شامل چندین تابع هدف هستند، توجه بسیاری از محققان را در دهه‌های اخیر به خود جلب کرده است. در بسیاری از مسائل، ضرایب تابع هدف را نمی‌توان به صورت قطعی بیان کرد لذا این ضرایب به صورت بازه‌ای در نظر گرفته می‌شوند. از این رو، برنامه‌ریزی بازه‌ای به‌عنوان ابزاری کاربردی برای برخورد با عدم قطعیت پیشنهاد می‌شود. عدد بازه‌ای را می‌توان به عنوان بسط مفهوم عدد حقیقی و زیرمجموعه‌ای از مجموعه اعداد حقیقی ($\mathbb{R}$) در نظر گرفت [۲، ۱۳، ۲۲، ۲۱، ۲۴] . برنامه‌ریزی بازه‌ای به دلیل عدم نیاز به

2010 *Mathematics Subject Classification.* 90C29, 90C70, 65G30
* Corresponding author
E-mails: srivaz@nit.ac.ir, sanazrivaz@gmail.com.
عبارات و کلمات کلیدی. برنامه‌ریزی خطی چندهدفه، برنامه‌ریزی بازه‌ای، عدم قطعیت، جواب کارا.

شرایط خاص و پیچیده، روشی مناسب برای رویارویی با مسائل بهینه‌سازی چندهدفه با داده‌ها و ضرایب غیرقطعی است. در این راستا، یورلی و نادئو [۳۴] مسائل برنامه‌ریزی خطی چندهدفه با ضرایب بازه‌ای را بررسی و روشی تعاملی برای حل آن‌ها ارائه کردند. نخستین مقاله‌ی مروری بر روش‌های موجود در برنامه‌ریزی خطی چندهدفه با ضرایب بازه‌ای در [۱۸] قابل دستیابی است. یک روش تعاملی برای حل چنین مسائلی نیز در [۱۹] وجود دارد. شرایط بهینگی کروش‌ـکیون‌ـتاکر [۱] برای مسائل برنامه‌ریزی خطی چندهدفه با ضرایب بازه‌ای در توابع هدف در [۳۵] ارائه شده است. مفهوم بیشینه رگرت در [۲۴، ۲۶] نیز جهت برخورد با همین دسته از مسائل مورد استفاده قرار گرفته است. در [۴] یافتن جواب‌های کارا متناظر با یک مسئله برنامه‌ریزی خطی چندهدفه بازه‌ای بیان شده است. بعضی از محققین نیز رویکردهایی بر پایه روابط ترتیبی بر بازه‌ها ارائه کرده‌اند [۵، ۱۴] . مقایسه‌ی اعداد بازه‌ای به دلیل کاربرد آن در مدل‌سازی و بهینه‌سازی مسائل، مورد توجه قرار گرفته است. رویکردهای متفاوتی به منظور مقایسه‌ی اعداد بازه‌ای تا کنون ارائه شده‌است [۶، ۱۴، ۱۶، ۲۱، ۲۸، ۲۹، ۳۱] . لازم به ذکر است در حالت کلی هیچ کدام از آن‌ها را نمی‌توان به عنوان بهترین روش معرفی کرد. دو رابطه‌ی ترتیبی برای بازه‌ها در [۲۲، ۲۱] توسط موور تعریف شده است که یکی به عنوان تعمیم رابطه «$<$» موجود در مجموعه اعداد حقیقی و دیگری تعمیم رابطه $\subseteq$ برای بازه‌ها است. اما این روابط ترتیبی نمی‌توانند دو بازه دارای اشتراک را مقایسه کنند. دو رابطه‌ی ترتیبی $\leq_{mw}$ و $\leq_{LR}$ در [۱۴] پیشنهاد شده که عملکرد بهتری نسبت به تعاریف ارائه شده توسط موور دارند. با این حال، مجموعه‌ای از بازه‌ها وجود دارند که با این دو رابطه‌ی ترتیبی نیز قابل مقایسه نیستند. هو و وانگ [۹] برای رفع کاستی‌های روابط ترتیبی موجود، تعاریف جدیدی بیان کردند. همچنین نوع دیگری از روابط ترتیبی توسط ماهاتو و بونیا [۲۰] ارائه شده است که بیشتر تاکید بر ترجیح تصمیم گیرنده دارد. از دیدگاهی دیگر، سنگوپتا و همکاران [۲۸، ۲۹] تعریف متفاوتی از رتبه‌بندی را با عنوان «شاخص پذیرش» ارائه کردند. در تعریف آن‌ها، دو بازه توسط یک شاخص مرتب می‌شوند. این شاخص بر اساس میانه و عرض بازه‌ها تعریف شده است و مقدار آن عددی بین $[۰,۱]$ است که نشان دهنده‌ی میزان رضایت تصمیم‌گیرنده از برتری بازه اول نسبت به بازه دوم است. روابط ترتیبی موجود بین بازه‌ها جهت برخورد با مسائل برنامه‌ریزی خطی تک هدفه و چندهدفه با ضرایب توابع هدف بازه‌ای تا کنون بسیار مورد استفاده واقع شده‌اند [۶، ۱۰، ۱۱، ۱۲، ۱۴، ۳۰، ۳۳] . ویژگی شایان ذکر مفهوم شاخص پذیرش آن است که به کمک این مفهوم امکان مقایسه تمامی بازه‌ها وجود دارد [۱] . به منظور برخورد با مسائل

[۱] Karush-Kuhn-Tacker

برنامه‌ریزی خطی چندهدفه با ضرایب بازه‌ای در توابع هدف، دو رویکرد اصلی، راضی کننده [۱] و بهینه ساز [۲] ، وجود دارد [۱۸] . در رویکرد راضی کننده، هر تابع هدف بازه‌ای به یک یا چند تابع هدف معین تبدیل می‌شود. در دیدگاه بهینه ساز، مفهوم جواب کارا موجود در بهینه‌سازی چندهدفه به این گونه مسائل گسترش داده می‌شود و سعی می‌شود چنین جواب‌هایی برای مسئله حاصل گردد. این دیدگاه به دلیل پرداختن به مفهوم معتبر جواب کارا توجه پژوهشگران بسیاری را به خود معطوف کرده است. در این مقاله نیز مسائل برنامه‌ریزی خطی چندهدفه با ضرایب توابع هدف بازه‌ای مورد بررسی قرار می‌گیرد. مفاهیم جواب‌های جدیدی با به کارگیری شاخص پذیرش برای این دسته از مسائل تعریف می‌شود. به منظور برخورد با چنین مسائلی، روش حل جدیدی ارائه می‌شود. ویژگی‌ها و خصوصیات روش جدید که در دسته رویکرد بهینه ساز قرار دارد، در قضایایی بیان می‌گردد. نتایج در مثال‌هایی عددی نیز بررسی می‌شوند. با توجه به ویژگی‌های مناسب مفهوم شاخص پذیرش، امکان مقایسه تمامی بازه‌ها، و همچنین با توجه به اینکه روش ارائه شده به رویکرد بهینه ساز تعلق دارد، لذا روش حل جدید می‌تواند به عنوان ابزاری کارآمد در حل مسائل برنامه‌ریزی خطی چندهدفه با ضرایب بازه‌ای در توابع هدف مورد استفاده قرار گیرد.

این مقاله به شرح زیر تنظیم شده است: در بخش ۲ پیش‌نیازهایی از بازه‌ها و محاسبات بازه‌ای مرور می‌شوند. همچنین مفهوم شاخص پذیرش به عنوان یک رابطه‌ی ترتیبی برای بازه‌ها دربخش ۲ بررسی می‌گردد. در بخش ۳ ، مسائل برنامه‌ریزی خطی چندهدفه ارائه می‌شوند. علاوه بر آن، مفاهیم جواب‌های متناظر با این گونه مسائل و ویژگی‌هایی از آن‌ها در این بخش بیان می‌گردد. بخش ۴ نیز به بیان مسائل برنامه‌ریزی چندهدفه با ضرایب توابع هدف بازه‌ای و ارائه روش حلی متناظر با آن‌ها اختصاص دارد. در این بخش، ویژگی‌های مناسبی از روش حل جدید نیز ارائه می‌شوند. مثال‌هایی عددی جهت درک بهتر نتایج در بخش ۵ مورد بررسی قرار می‌گیرند. در نهایت، نتیجه‌گیری و پیشنهاداتی برای تحقیقات آتی در بخش ۶ بیان می‌شود.

## ۲. پیش‌نیازها

یک بازه‌ی $\mathbf{A}$ در مجموعه‌ی اعداد حقیقی $(\mathbb{R})$ در حالت کلی به صورت

$$\mathbf{A} = [a_L, a_R] = \{a : a_L \leq a \leq a_R, a \in \mathbb{R}\}$$

---

[۱] Satisficing
[۲] Optimizing

تعریف می‌شود که در آن $a_L$ و $a_R$ به ترتیب حد چپ و حد راست بازه‌ی $\mathbf{A}$ هستند. بدیهی است که اگر $a_L = a_R$ آنگاه $\mathbf{A} = [a_L, a_R]$ یک عدد حقیقی است. بازه‌ی $\mathbf{A}$ را همچنین می‌توان به‌صورت $\mathbf{A} = \langle m(A), w(A) \rangle$ نشان داد. که در آن $m(\mathbf{A})$ نقطه میانی و $w(\mathbf{A})$ نیمه عرض (برای سادگی عرض نامیده می‌شود) بازه $\mathbf{A}$ هستند که به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$m(\mathbf{A}) = \frac{۱}{۲}(a_L + a_R) \ , \ w(\mathbf{A}) = \frac{۱}{۲}(a_R - a_L). \tag{۱.۲}$$

تعمیم محاسبات معمولی روی بازه‌ها به عنوان حساب بازه‌ای شناخته می‌شود. در این راستا فرض کنید $* \in \{+, -, \cdot, \div\}$ یک عملگر در مجموعه اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ باشد. اگر $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ دو بازه‌ی دلخواه باشند آنگاه

$$\mathbf{A} \circledast \mathbf{B} = \{a * b : a \in \mathbf{A}, b \in \mathbf{B}\}.$$

در ادامه، برخی عملیات و روابط بر روی بازه‌ها بیان شده است.

$$k.\mathbf{A} = k[a_L, a_R] = \begin{cases} [ka_L, ka_R] & , k \geq ۰, \\ [ka_R, ka_L] & , k < ۰, \end{cases} \tag{۲.۲}$$

که در آن $k$ یک عدد حقیقی است. واضح است در صورتی که $k = ۱$ آنگاه نتیجه بازه $\mathbf{A}$ خواهد بود.

$$\mathbf{A} \oplus \mathbf{B} = [a_L, a_R] + [b_L, b_R] = [a_L + b_L, a_R + b_R], \tag{۳.۲}$$

هرگاه $\mathbf{B} = [۰, ۰]$ آنگاه در (۳.۲)، بازه $A$ به عنوان نتیجه حاصل می‌گردد.

$$\mathbf{A} \ominus \mathbf{B} = [a_L, a_R] - [b_L, b_R] = [a_L - b_L, a_R - b_R], \tag{۴.۲}$$

$$m(k\mathbf{A}) = km(\mathbf{A}), \quad k \in \mathbb{R}, \tag{۵.۲}$$

$$m(\mathbf{A} \oplus \mathbf{B}) = m(\mathbf{A}) + m(\mathbf{B}), \tag{۶.۲}$$

$$m(\mathbf{A} \ominus \mathbf{B}) = m(\mathbf{A}) - m(\mathbf{B}), \tag{۷.۲}$$

$$w(k\mathbf{A}) = |k|w(\mathbf{A}), \quad k \in \mathbb{R}, \tag{۸.۲}$$

$$w(\mathbf{A} \oplus \mathbf{B}) = w(\mathbf{A} \ominus \mathbf{B}) = w(\mathbf{A}) + w(\mathbf{B}). \tag{۹.۲}$$

**مثال ۱.۲.** برای بازه‌های $\mathbf{A} = [-۲, ۰]$ و $\mathbf{B} = [۲, ۳]$ داریم:

$$۳\mathbf{B} = ۳[۲, ۳] = [۶, ۹],$$

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = [-۲, ۰] + [۲, ۳] = [۰, ۳],$$

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = [-۲, ۰] - [۲, ۳] = [-۵, -۲].$$

یکی از موضوعات مورد توجه در آنالیز بازه‌ای، بحث مقایسه بازه‌هاست به گونه‌ای که تا کنون برخی از محققین به آن پرداخته‌اند و روش‌های مختلفی را به منظور مقایسه بازه‌ها ارائه نموده‌اند. در این راستا در ادامه، تعاریف و نکاتی از روابط ترتیبی بر بازه‌ها بیان می‌شود.

**تعریف ۲.۲.** [۲۲] فرض کنید $\mathbf{A} = [a_L, a_R]$ و $\mathbf{B} = [b_L, b_R]$ دو بازه بسته در $\mathbb{R}$ باشند. $\mathbf{A} < \mathbf{B}$ اگر و تنها اگر $a_R < b_L$.

رابطه ترتیبی ارائه شده در تعریف ۲.۲، گسترش رابطه کوچکتری موجود بر روی اعداد حقیقی است. درواقع این رابطه به این معناست که

$$a < b, \ \ \forall a \in \mathbf{A}, \ \ \forall b \in \mathbf{B}.$$

لازم به ذکر است که با توجه به تعریف ۲.۲، برای نمونه امکان مقایسه دو بازه $[۲, ۶]$ و $[۱, ۴]$ وجود ندارد. بدین ترتیب واضح است که رابطه ترتیبی ارائه شده در تعریف۲.۲، امکان مقایسه تمامی بازه‌ها را ندارد.

**تعریف ۳.۲.** [۱۴] فرض کنید $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ دو بازه بسته در $\mathbb{R}$ باشند. $\mathbf{A} \leq_{LR} \mathbf{B}$ اگر و تنها اگر $a_L \leq b_L$ و $a_R \leq b_R$ . همچنین $\mathbf{A} <_{LR} \mathbf{B}$ اگر و تنها اگر $\mathbf{A} \leq_{LR} \mathbf{B}$ و $\mathbf{A} \neq \mathbf{B}$.

در رابطه ترتیبی $\leq_{LR}$ اگر همزمان کران‌های پایین و بالای یک بازه از مقادیر نظیر در بازه دیگر بزرگ‌تر باشد، آنگاه این بازه نسبت به بازه دیگر بزرگ‌تر است. بدین ترتیب در مسئله بیشینه‌سازی، اگر $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ بازه‌های مربوط به سود باشند آنگاه $\mathbf{B}$ که بازه بزرگ‌تر است بر $\mathbf{A}$ ارجح است. همچنین اگر $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ بازه‌های مربوط به هزینه باشند آنگاه بازه‌ی $\mathbf{A}$ بر $\mathbf{B}$ ارجح است.

شایان ذکر است که برای نمونه بازه‌های $[۲, ۴]$ و $[۲/۵, ۳]$ با استفاده از $\leq_{LR}$ قابل مقایسه نیستند. بدین ترتیب واضح است که رابطه $\leq_{LR}$ نیز امکان مقایسه تمامی بازه‌ها را ندارد.

**تعریف ۴.۲.** فرض کنید $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ دو بازه بسته در $\mathbb{R}$ باشند. $\mathbf{A} \leq_{mw} \mathbf{B}$ اگر و تنها اگر $m(A) \leq m(B)$ و $w(A) \leq w(B)$ . همچنین $\mathbf{A} <_{mw} \mathbf{B}$ اگر و تنها اگر $\mathbf{A} \leq_{mw} \mathbf{B}$ و $\mathbf{A} \neq \mathbf{B}$.

در رابطه $\leq_{mw}$ ، اگر مقدار نقطه میانی یک بازه از بازه دومی بزرگ‌تر اما عرض آن کوچک‌تر باشد، آنگاه بازه‌ی اول برای مسئله بیشینه‌سازی الویت خواهد داشت. در مسئله کمینه‌سازی اگر $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ بازه‌های مربوط به هزینه باشند تعریف ۵.۲ استفاده می‌شود.

**تعریف ۵.۲.** فرض کنید $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ دو بازه بسته در $\mathbb{R}$ باشند. $\mathbf{A} \leq^{*}_{mw} \mathbf{B}$ اگر و تنها اگر $m(A) \leq m(B)$ و $w(A) \leq w(B)$. همچنین $\mathbf{A} <^{*}_{mw} \mathbf{B}$ اگر و تنها اگر $\mathbf{A} \leq^{*}_{mw} \mathbf{B}$ و $\mathbf{A} \neq \mathbf{B}$ .

همان طور که مشاهده می‌شود در روابط $\leq_{LR}$ و $\leq_{mw}$ بیشتر بر روی الویت تمرکز شده است و رتبه‌بندی بازه‌ها با توجه به مقدار آن‌ها مدنظر نیست [۴] . بنابراین در ادامه مفهومی تحت عنوان شاخص پذیرش که توسط سنگوپتا و پال در [۱۴] بیان شده است، ارائه می‌گردد. با استفاده از این مفهوم رتبه‌بندی و مقایسه تمامی بازه‌ها در مجموعه اعداد حقیقی امکان پذیر است. همچنین در این روش می‌توان به سوال «به چه میزان یک بازه از بازه دیگر بزرگ‌تر است» نیز پاسخ داد. با توجه به کارایی این روش مقایسه، محققین بسیاری تا کنون از آن بهره برده‌اند [۳، ۷، ۱۵، ۲۳] .

**تعریف ۶.۲.** [۲۸] فرض‌کنید $\mathbf{I}$ مجموعه تمام بازه‌های بسته در $\mathbb{R}$ باشد. تابع پذیرش $\mathcal{A} : \mathbf{I} \times \mathbf{I} \longrightarrow [۰, \infty)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathcal{A}(\mathbf{A} < \mathbf{B}) = \frac{m(\mathbf{B}) - m(\mathbf{A})}{w(\mathbf{B}) + w(\mathbf{A})},$$

که در آن $w(\mathbf{B}) + w(\mathbf{A}) \neq ۰$ .

$\mathcal{A}(\mathbf{A} < \mathbf{B})$ را می‌توان به عنوان درجه‌ی پذیرش «بازه‌ی اول پایین‌تر از بازه‌ی دوم» تفسیر کرد. درجه ی پذیرش $\mathcal{A}(\mathbf{A} < \mathbf{B})$ به‌صورت زیرتفسیر و طبقه‌بندی می‌شود:

$$\mathcal{A}(\mathbf{A} < \mathbf{B}) \begin{cases} = ۰, & if \quad m(\mathbf{A}) = m(\mathbf{B}), \\ \in (۰, ۱), & if \quad m(\mathbf{A}) < m(\mathbf{B}) \quad and \quad a_R > b_L, \\ \geqslant ۱, & if \quad m(\mathbf{A}) < m(\mathbf{B}) \quad and \quad a_R \leqslant b_L. \end{cases}$$

اگر $\mathcal{A}(\mathbf{A} < \mathbf{B}) = ۰$ ، لذا فرض « $\mathbf{A}$ پایین‌تر از $\mathbf{B}$ » پذیرفته نمی‌شود.
اگر $۰ < \mathcal{A}(\mathbf{A} < \mathbf{B}) < ۱$ ، سپس فرض $\mathcal{A}(\mathbf{A} < \mathbf{B})$ با درجه‌های مختلف رضایت از صفر تا یک پذیرفته می‌شود (به جز صفر و یک). اگر $\mathcal{A}(\mathbf{A} < \mathbf{B}) \geqslant ۱$ ، فرض $\mathcal{A}(\mathbf{A} < \mathbf{B})$ کاملا درست است.
بدین ترتیب اگر $\mathcal{A}(\mathbf{A} < \mathbf{B}) > ۰$ ، بنابراین برای مسئله‌ی بیشینه‌سازی ( $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ دو بازه‌ی سود هستند) بازه‌ی $\mathbf{B}$ به بازه‌ی $\mathbf{A}$ ترجیح داده می‌شود و برای مسئله‌ی کمینه‌سازی ( $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ دو بازه‌ی هزینه هستند) بازه‌ی $\mathbf{A}$ از نظر ارزش بر $\mathbf{B}$ ترجیح داده می‌شود. همچنین اگر $\mathcal{A}(\mathbf{A} < \mathbf{B}) = ۰$ و $w(\mathbf{B}) = w(\mathbf{A})$ لذا $\mathbf{A} \equiv \mathbf{B}$ یعنی $\mathbf{A}$ مشابه (یکسان) است با $\mathbf{B}$.
حال اگر $\mathcal{A}(\mathbf{A} < \mathbf{B}) = ۰$ و $w(\mathbf{B}) \neq w(\mathbf{A})$ لذا بدیهی است که $\mathbf{A}$ مشابه (یکسان) با بازه‌ی $\mathbf{B}$ نیست. در این صورت، به منظور مقایسه‌ی دو بازه $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ ، قضیه‌ی۷.۲ می‌تواند مورد استفاده قرار گیرد.

**قضیه ۷.۲.** [۳۰] *اگر بازه‌ی $\mathbf{D} = \langle m(\mathbf{D}), w(\mathbf{D}) \rangle$ بقسمی در نظر گرفته شود که از بازه‌های $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ پایین‌تر باشد، آن‌گاه در مقایسه‌ی $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ با بازه‌ی $\mathbf{D}$ داریم :*

$$\mathcal{A}(\mathbf{D} < \mathbf{A}) > ۰ \quad , \quad \mathcal{A}(\mathbf{D} < \mathbf{B}) > ۰$$

*و اگر $\mathcal{A}(\mathbf{A} < \mathbf{B}) = ۰$ اما $\mathbf{B} \neq \mathbf{A}$ آن‌گاه*

$$(۱)\mathcal{A}(\mathbf{D} < \mathbf{A}) > \mathcal{A}(\mathbf{D} < \mathbf{B}) \Longleftrightarrow w(\mathbf{A}) < w(\mathbf{B})$$

$$(۲)\mathcal{A}(\mathbf{D} < \mathbf{A}) < \mathcal{A}(\mathbf{D} < \mathbf{B}) \Longleftrightarrow w(\mathbf{A}) > w(\mathbf{B})$$

بدین ترتیب می‌توان نتیجه گرفت که هرگاه بازه‌های $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ دارای مرکز یکسان باشند اما بازه‌ی $\mathbf{A}$ ( $\mathbf{B}$ ) عرض کمتری نسبت به بازه‌ی $\mathbf{B}$ ( $\mathbf{A}$ ) داشته باشد سپس $\mathbf{A}$ ( $\mathbf{B}$ ) به $\mathbf{B}$ ( $\mathbf{A}$ ) ترجیح داده می‌شود.
همچنین برای نمونه، شرط (۱) نشان می‌دهد که در مقایسه با بازه‌ی $\mathbf{D}$ ، برتری $\mathbf{A}$ نسبت به $\mathbf{B}$ باورپذیرتر است. بنابراین در مسئله‌ی بیشینه‌سازی، $\mathbf{A}$ بر $\mathbf{B}$ ترجیح داده می‌شود. به طریق مشابه نتایجی متناظر با مسئله‌ی کمینه‌سازی نیز وجود دارد. در این راستا، بازه مرجع $\mathbf{D}^* = \langle m(\mathbf{D}^*), w(\mathbf{D}^*) \rangle$ با ویژگی‌های $\mathcal{A}(\mathbf{D}^* < \mathbf{A}) > ۰$ و $\mathcal{A}(\mathbf{D}^* < \mathbf{B}) > ۰$ در نظر بگیرید. با فرض اینکه $\mathcal{A}(\mathbf{A} < \mathbf{B}) = ۰$ و $\mathbf{A} \neq \mathbf{B}$ ، داریم

$$(۱)\mathcal{A}(\mathbf{A} < \mathbf{D}^*) > \mathcal{A}(\mathbf{B} < \mathbf{D}^*) \Longleftrightarrow w(\mathbf{A}) < w(\mathbf{B})$$

$$(۲)\mathcal{A}(\mathbf{A} < \mathbf{D}^*) < \mathcal{A}(\mathbf{B} < \mathbf{D}^*) \Longleftrightarrow w(\mathbf{A}) > w(\mathbf{B})$$

به عنوان مثال، شرط (۱) نشان می‌دهد که در مقایسه‌ی با $\mathbf{D}^*$ ، کوچکتری $\mathbf{A}$ نسبت به $\mathbf{B}$ باور پذیرتر است بنابراین $\mathbf{A}$ بر $\mathbf{B}$ در مسئله‌ی کمینه‌سازی ترجیح داده می‌شود .

**مثال ۸.۲.** [۲۹] فرض‌کنید $\langle ۱۵۰, ۳۰ \rangle = [۱۲۰, ۱۸۰] = \mathbf{A}$ و $\mathbf{B}_۱ = [۱۳۰, ۲۱۰] = \langle ۱۷۰, ۴۰ \rangle$ دو بازه‌ی سود باشند. برای یک مسئله‌ی بیشینه‌سازی با توجه به شاخص پذیرش داریم

$$\mathcal{A}(\mathbf{A} < \mathbf{B}_۱) = ۰/۲۸$$

لذا تصمیم‌گیرنده می‌پذیرد که $\mathbf{A}$ پایین‌تر از $\mathbf{B}_۱$ است و درجه‌ی رضایت او ۰/۲۸ است بنابراین $\mathbf{B}_۱$ بازه‌ی انتخابی برای بیشینه‌سازی است.

**مثال ۹.۲.** [۲۹] فرض‌کنید بازه‌ی $\langle ۱۷۰, ۵۰ \rangle = [۱۲۰, ۲۲۰] = \mathbf{B}_۲$ جایگزین بازه‌ی $\mathbf{B}_۱$ در مثال ۸.۲ شود. (توجه داشته باشید که $m(\mathbf{B}_۱) = m(\mathbf{B}_۲)$ اما $w(\mathbf{B}_۱) < w(\mathbf{B}_۲)$ ) اکنون با توجه به اطلاعات مسئله و با استفاده از شاخص پذیرش داریم

$$\mathcal{A}(A < B_۲) = ۰/۲۵$$

بنابراین از بین دو بازه‌ی سود $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}_۲$ بازه‌ی $\mathbf{B}_۲$ برای مسئله‌ی بیشینه‌سازی انتخاب می‌شود. همچنین تصمیم‌گیرنده از برتری $\mathbf{B}_۲$ نسبت به $\mathbf{A}$ با درجه‌ی رضایت ۰/۲۵ راضی است (که کمتر از درجه رضایت به‌دست آمده در مثال ۸.۲ است. )
اگرچه $\mathbf{B}_۱$ و $\mathbf{B}_۲$ معادل محور هستند( $m(\mathbf{B}_۱) = m(\mathbf{B}_۲)$ )، تنها عدم قطعیت بیشتر $\mathbf{B}_۲$ ( $w(\mathbf{B}_۱) < w(\mathbf{B}_۲)$ ) است که تفاوت درجه‌ی رضایت را برای این دو مثال ایجاد می‌کند.

## ۳. برنامه‌ریزی خطی چندهدفه

یک مسئله‌ی برنامه ریزی خطی چندهدفه در حالت کلی به صورت زیر قابل نمایش است:

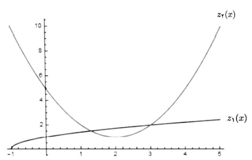
$$min \quad Cx = (c_۱x, ..., c_px)^t, \tag{۱.۳}$$

$$s.t. \quad \chi = \{x \in \mathbb{R}^n | Ax = b, x \geqq ۰\}$$

که در آن $z_i(x) = c_i x = \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_j$ یک تابع حقیقی مقدار برای $i = 1, ..., p$ است. همچنین $C$ یک ماتریس $p \times n$ می‌باشد که هر سطر آن به فرم $c_i = (c_{i1}, ..., c_{in})$ برای $i = 1, ..., p$ است. $A$ یک ماتریس $m \times n$، $b \in \mathbb{R}^n$ بردار سمت راست و $x \in \mathbb{R}^n$ بردار متغیرها است. لازم به ذکر است که نماد $t$ بالای یک بردار یا ماتریس، نماد ترانهاده است.

**مثال ۱.۳.** مسئله‌ی برنامه‌ریزی دو هدفه زیر را در نظر بگیرید:

$$min_{\{x\in\mathbb{R}|x\geqq 0\}} \ (z_1(x), z_2(x)) = min_{\{x\in\mathbb{R}|x\geqq 0\}} \ (\sqrt{x+1}, (x-2)^2+1)$$




شکل ۱: نمودار مسئله‌ی ۱.۳

با توجه به شکل۱، کمینه‌ی مقدار تابع $z_1(x)$ در $x = 0$ و کمینه‌ی مقدار تابع $z_2(x)$ در $x = 2$ اتفاق می‌افتد. لذا امکان یافتن جوابی که همزمان هر دو تابع را کمینه سازد وجود ندارد.

به منظور ارائه مفاهیم متناظر با مسئله‌ی برنامه‌ریزی خطی چندهدفه (۱.۳)، ابتدا تعریف ۲.۳ جهت مقایسه‌ی دو بردار در $\mathbb{R}^p$ یادآوری می‌شود.

**تعریف ۲.۳.** [۸] فرض کنید $A = (a_1, ..., a_p)^t$ و $B = (b_1, ..., b_p)^t$ دو بردار در $\mathbb{R}^p$ باشند. آنگاه:

- $B \preceq A$ اگر $a_i \leqslant b_i$ برای $i = 1, ..., p$ باشد و حداقل یک $1 \leqslant q \leqslant p$ وجود داشته باشد که $a_q < b_q$.
- $B \leqq A$ اگر $a_i \leqslant b_i$ برای $i = 1, ..., p$.
- $B \prec A$ اگر $a_i < b_i$ برای $i = 1, ..., p$.

**تعریف ۳.۳.** [۸] در مسئله‌ی (۱.۳)، $x^\circ \in \chi$ یک جواب:

- کارا است اگر وجود نداشته باشد $x \in \chi$ به‌طوری‌که $Cx \preceq Cx^\circ$ .
- کارای ضعیف است اگر وجود نداشته باشد $x \in \chi$ به‌طوری‌که $Cx \prec Cx^\circ$ .
- کارای اکید است اگر وجود نداشته باشد $x \in \chi$ به طوری که $x \neq x^\circ$ و $Cx \leqq Cx^\circ$.

**قضیه ۴.۳.** [۸] *اگر در مسئله‌ی بهینه‌سازی چندهدفه منظور از $X_{WE}$ ، $X_E$ و $X_{SE}$ به ترتیب مجموعه‌های کارای ضعیف، کارا و کارای اکید باشند، آن‌گاه*

$$X_{SE} \subseteq X_E \subseteq X_{WE}$$

*برقرار است.*

**تعریف ۵.۳.** [۸] بردار $\lambda = (\lambda_۱, ..., \lambda_p)$ که در آن $\lambda_i \geqslant ۰$ ، $i = ۱, ..., p$ را در نظر بگیرید. مسئله‌ی برنامه ریزی خطی مجموع وزنی (به طور مختصر، مسئله‌ی مجموع وزنی) متناظر با مسئله‌ی برنامه‌ریزی خطی چندهدفه(۱.۳) به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$\begin{aligned} & min \sum_{i=۱}^{p} \lambda_i c_i x, \\ & s.t. \quad x \in \chi = \{x | Ax = b, x \geqq ۰\}. \end{aligned} \tag{۲.۳}$$

لازم به ذکر است که معمولا مفروضات $۰ \leqslant \lambda_i \leqslant ۱$ و $\sum_{i=۱}^{p} \lambda_i$ ، $i = ۱, ..., p$ ، نیز در مسائل مجموع وزنی در نظر گرفته می‌شود.

ارتباط مابین مسئله‌ی (۱.۳) و (۲.۳)در قضایای ۶.۳ و ۷.۳ یادآوری می‌شود. این قضایا در منابع مختلفی در دسترس هستند. برای نمونه می‌توان به [۸، ۳۲] مراجعه نمود. با توجه به شباهت قضایا و به منظور مروری بر اثبات آن‌ها، اثبات قضیه ۷.۳ آورده می‌شود.

**قضیه ۶.۳.** *$x^\circ \in \chi$ یک جواب کارای ضعیف برای مسئله‌ی برنامه‌ریزی خطی چندهدفه (۱.۳) است اگر و تنها اگر یک بردار $\lambda = (\lambda_۱, ..., \lambda_p)$ با $\lambda_i \geqslant ۰$ ، $i = ۱, ..., p$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $x^\circ$ یک جواب بهینه‌ی مسئله‌ی (۲.۳) باشد.*

**قضیه ۷.۳.** *$x^\circ \in \chi$ یک جواب کارای مسئله‌ی برنامه‌ریزی خطی چندهدفه (۱.۳) است اگر و تنها اگر یک بردار $\lambda = (\lambda_۱, ..., \lambda_p)$ با $\lambda_i > ۰$ ، $i = ۱, ..., p$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $x^\circ$ یک جواب بهینه‌ی مسئله‌ی (۲.۳) باشد.*

**اثبات.** بار اول فرض کنید $x^\circ \in \chi$ جواب بهینه مسئله‌ی (۲.۳) است وقتی که $\lambda_i > ۰$ ، $i = ۱, ..., p$ . همچنین با برهان خلف فرض کنید $x^\circ$ یک جواب کارای مسئله‌ی (۱.۳) نیست. بدین ترتیب

$$\exists x \in \chi : c_i x \leqslant c_i x^\circ \ , \ i = ۱, ..., p, \ \ \& \ \ c_j x \leqslant c_j x^\circ, for some ۱ \leq j \leq p.$$

بنابراین با توجه به $\lambda_i > ۰$ ، $i = ۱, ..., p$ ، داریم

$$\sum_{i=۱}^{p} \lambda_i c_i x < \sum_{i=۱}^{p} \lambda_i c_i x^\circ$$

لذا تناقض حاصل می‌گردد.

بار دیگر فرض کنید $x^\circ \in \chi$ یک جواب کارای مسئله‌ی(۱.۳) است. بدین ترتیب با توجه به نتایج موجود در برنامه‌ریزی چندهدفه، مسئله‌ی برنامه‌ریزی خطی

$$\begin{aligned} & min \quad u^t b + w^t C x^\circ, \\ & s.t. \quad u^t A + w^t C \geqq ۰ \\ & w \geqq e \\ & u \in \mathbb{R}^m \end{aligned} \tag{۳.۳}$$

جواب بهینه ای مانند $(\hat{u}, \hat{w})$ دارد به طوری که $\hat{u}^t b = -\hat{w}^t C x^\circ$. $\hat{u}$ جواب بهینه مسئله‌ی برنامه‌ریزی خطی

$$min \ \{u^t b | u^t A \geqq -\hat{w}^t C\} \tag{۴.۳}$$

است. بنابراین جواب بهینه دوگان مسئله‌ی (۴.۳)، $max \ \{-\hat{w}^t C x | Ax = b, x \geqq ۰\}$ ، وجود دارد. با توجه به قضیه دوگان ضعیف $\hat{u}^t b \geqq -\hat{w}^t C x$ حاصل می‌گردد. همچنین می‌دانیم $\hat{u}^t b = -\hat{w}^t C x^\circ$ . بنابراین بهینگی $x^\circ$ برای (۴.۳) نتیجه می‌شود. مسئله‌ی (۴.۳) معادل است با

$$min \ \{\hat{w}^t C x | Ax = b, x \geqq ۰\}$$

که $\hat{w} \geqq e > ۰$ . بنابراین $x^\circ$ جواب بهینه مسئله‌ی مجموع وزنی (۲.۳) با $\lambda = \hat{w}$ است. □

## ۴. بیان مسئله و نتایج

یک مسئله‌ی برنامه‌ریزی خطی چندهدفه با ضرایب تابع هدف بازه‌ای (به اختصار مسئله‌ی برنامه‌ریزی خطی چندهدفه‌ی بازه‌ای) در حالت کلی به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\min \ Z(x) = \mathbf{C}x, \qquad (۱.۴)$$

$$s.t. \quad x \in \chi = \{x | Ax = b, x \geqq ۰\}$$

که در آن $\mathbf{C} \in \Psi$ و $\Psi$ مجموعه‌ای از ماتریس‌های $p \times n$ ، با سطرهایی به فرم $\mathbf{c}_i$ ، که عناصر آن $c_{ij} \in [c_{ij}^L, c_{ij}^R]$ برای $i = ۱, ..., p$ و $j = ۱, ..., n$ می‌باشد. با استفاده از حساب بازه‌ای، $Z(x) = (z_۱(x), ..., z_۲(x))^t$ وقتی‌که $z_i(x) = \mathbf{c}_i x = \sum_{j=۱}^n [c_{ij}^L, c_{ij}^R] x_j$ برای $i = ۱, ..., p$ نتیجه می‌شود.
واضح است که مسئله‌ی (۱.۴) به یک مسئله‌ی برنامه‌ریزی خطی چندهدفه تبدیل می‌شود هرگاه $\mathbf{C}$ یک ماتریس $p \times n$ ثابت باشد.

**مثال ۱.۴.** [۲۵] مسئله‌ی برنامه‌ریزی خطی چندهدفه بازه‌ای زیر را در نظر بگیرید:

$$\max z_۱(x) = [۰/۲, ۰/۶] x_۱, \qquad (۲.۴)$$

$$\max z_۱(x) = [۰/۱, ۱] x_۲,$$

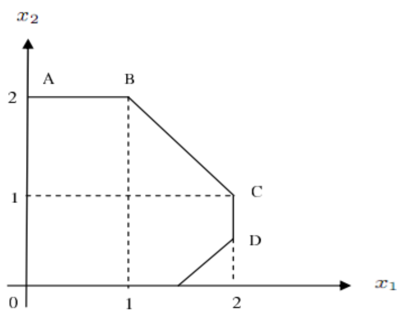
$$s.t. \quad x \in \chi$$

که در آن، مجموعه جواب‌های شدنی و مجموعه $\Psi$ به صورت زیر است:

$$\chi = \{(x_۱, x_۲)^t \mid x_۱ + x_۲ \leq ۳, ۲x_۱ - ۲x_۲ \leq ۳, x_۱ \leq ۲, x_۲ \leq ۲, x_۱, x_۲ \geq ۰\}$$

$$\Psi = \left\{ \begin{pmatrix} c_{۱۱} & c_{۱۲} \\ c_{۲۱} & c_{۲۲} \end{pmatrix} : c_{۱۱} \in [۰/۲, ۰/۶], c_{۱۲} = ۰, c_{۲۱} = ۰, c_{۲۲} = [۰/۱, ۱] \right\}$$

اگر ماتریس دلخواهی مانند $C$ در $\Psi$ در نظر گرفته شود، آن‌گاه با در نظر گرفتن $\lambda = (۰, ۱)$ ، $LS(A, B)$ مجموعه جواب های بهینه‌ی مسئله‌ی مجموع وزنی متناظر با $C$ است. بدین ترتیب با توجه به قضیه‌ی ۶.۳ و تعریف۳.۳، می‌توان گفت همه‌ی نقاط روی $LS(A, B)$ ، جواب‌های کارای ضعیف مسئله‌ی مجموع وزنی متناظر هستند. همچنین با در نظر گرفتن




شکل ۲: جواب‌های شدنی مسئله‌ی (۱.۴)

$\lambda = (۱, ۰)$ ، همه‌ی نقاط روی $LS(C, D)$ به عنوان جواب‌های کارای ضعیف مشخص می‌شوند.
در ادامه با در نظر گرفتن جواب‌های کارا، کارای ضعیف و کارای اکید در برنامه‌ریزی چندهدفه و با به کارگیری مفهوم شاخص پذیرش، مفاهیم جواب‌های مختلفی متناظر با مسئله (۱.۴) تعریف می‌شود.

**تعریف ۲.۴.** برای مسئله‌ی برنامه‌ریزی خطی چندهدفه بازه‌ای (۱.۴) ، $x^\circ \in \chi$ یک جواب:

- $\mathcal{A}-$ کارا است اگر وجود نداشته باشد $x \in \chi$ به‌طوری‌که $\mathcal{A}(z_i(x) < z_i(x^\circ)) \geqslant ۰$ برای $i = ۱, ..., p$ و $\mathcal{A}(z_i(x) < z_i(x^\circ)) > ۰$ برای برخی $۱ \leqslant j \leqslant p$ .
- $\mathcal{A}-$ کارای ضعیف است اگر وجود نداشته باشد $x \in \chi$ بطوری‌که $\mathcal{A}(z_i(x) < z_i(x^\circ)) > ۰$ برای $i = ۱, ..., p$.
- $\mathcal{A}-$ کارای اکید است اگر وجود نداشته باشد $x \in \chi$ بطوری‌که $x \neq x^\circ$ و $\mathcal{A}(z_i(x) < z_i(x^\circ)) \geqslant ۰$ برای $i = ۱, ..., p$.

به منظور برخورد با مسئله‌ی برنامه‌ریزی خطی چندهدفه بازه‌ای (۱.۴) ، حل مسئله‌ی برنامه‌ریزی خطی زیر پیشنهاد می‌شود:

$$min \;\; Z = \sum_{i=۱}^{p} \sum_{j=۱}^{n} \lambda_i (c_{ij}^L + c_{ij}^R) x_j, \qquad (۳.۴)$$
$$s.t. \quad x \in \chi,$$

که در آن $\lambda_i \geqslant ۰$ ، $i = ۱, ..., p$. ارتباط مابین مسئله‌ی برنامه‌ریزی خطی(۳.۴) و مسئله‌ی برنامه‌ریزی خطی چندهدفه بازه‌ای (۱.۴) در قضایایی در ادامه بیان می‌گردد.

**قضیه ۳.۴.** *جواب بهینه یکتای مسئله‌ی (۳.۴) یک جواب $\mathcal{A}-$ کارای اکید مسئله‌ی (۱.۴) است.*

**اثبات.** با برهان خلف فرض کنید که $x^*$ ، جواب بهینه یکتای مسئله‌ی (۳.۴)، یک جواب $\mathcal{A}-$ کارای اکید نباشد. در این صورت،

$$\exists x \in \chi : x \neq x^* \& \ \mathcal{A}(c_i(x) < c_i(x^*)) \geqslant ۰, \ \forall i = ۱, ..., p.$$

بدین ترتیب

$$\frac{m(\mathbf{c}_i(x^*)) - m(\mathbf{c}_i(x))}{w(\mathbf{c}_i(x^*)) + w(\mathbf{c}_i(x))} \geqslant ۰, \ \forall i = ۱, ..., p.$$

با توجه به $w(\mathbf{c}_i(x^*)) + w(\mathbf{c}_i(x)) > ۰$ داریم

$$m(\mathbf{c}_i(x^*)) - m(\mathbf{c}_i(x)) \geqslant ۰, \ \forall i = ۱, ..., p,$$

$$\Rightarrow m(\mathbf{c}_i(x^*)) \geqslant m(\mathbf{c}_i(x)), \ \forall i = ۱, ..., p.$$

بنابراین $\sum_{i=۱}^{p}\sum_{j=۱}^{n}\lambda_i m(\mathbf{c}_i(x^*)) \geqslant \sum_{i=۱}^{p}\sum_{j=۱}^{n}\lambda_i m(\mathbf{c}_i(x))$، که این با حکم مسئله در تناقض است. لذا فرض خلف باطل است. □

**قضیه ۴.۴.** *$x^\circ \in \chi$ یک جواب $\mathcal{A}-$ کارای ضعیف مسئله‌ی (۱.۴) است اگر و تنها اگر وجود داشته باشد $\lambda = (\lambda_۱, ..., \lambda_p)$ با $\lambda_i \geqslant ۰$ و $i = ۱, ..., p$ بطوریکه $x^\circ$ یک جواب بهینه‌ی مسئله‌ی (۳.۴) باشد.*

**اثبات.** بار اول فرض کنید $x^\circ \in \chi$ یک جواب $\mathcal{A}-$ کارای ضعیف مسئله‌ی (۱.۴) باشد، بنابراین

$$\nexists x \in \chi : \ \frac{m(\mathbf{c}_i(x^\circ)) - m(\mathbf{c}_i(x))}{w(\mathbf{c}_i(x^\circ)) + w(\mathbf{c}_i(x))} > ۰, \ \ \forall i = ۱, ..., p.$$

با توجه به $w(\mathbf{c}_i(x^\circ)) + w(\mathbf{c}_i(x)) > ۰$ ،

$$\nexists x \in \chi : \ \ m(\mathbf{c}_i(x^\circ)) > m(\mathbf{c}_i(x)), \ \ \forall i = ۱, ..., p.$$

نتیجه می‌شود. بدین ترتیب می‌توان گفت $x^\circ \in \chi$ یک جواب کارای ضعیف برای مسئله‌ی چندهدفه

$$\begin{aligned} &min\ \ m(\mathbf{c}_1(x)) \\ &min\ \ m(\mathbf{c}_2(x)) \\ &\vdots \\ &min\ \ m(\mathbf{c}_p(x)) \\ &s.t.\ \ x \in \chi \end{aligned}$$

است. بنابراین با توجه به قضیه‌ی۶.۳ یک بردار $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_p)$ با $\lambda_i \geqslant 0$ ، $i = 1, ..., p$ بقسمی وجود دارد که $x^\circ$ جواب بهینه مسئله

$$\begin{aligned} min\ \ &\sum_{i=1}^{p} \lambda_i m(\mathbf{c}_i(x)) \\ s.t.\ \ &x \in \chi \end{aligned}$$

است. بدین ترتیب حکم ثابت می‌شود.
بار دیگر فرض کنید $x^\circ$ جواب بهینه‌ی مسئله‌ی(۳.۴) وقتی که $\lambda_i \geqslant 0$ و $i = 1, ..., p$ ، باشد و با برهان خلف فرض کنید که $x^\circ$ جواب $\mathcal{A}-$ کارای ضعیف مسئله‌ی(۱.۴) نباشد. بنابراین

$$\exists x \in \chi :\ \mathcal{A}(c_i(x) < c_i(x^\circ)) > 0,\ \forall i = 1, ..., p.$$

بدین ترتیب،

$$\frac{m(\mathbf{c}_i(x^\circ)) - m(\mathbf{c}_i(x))}{w(\mathbf{c}_i(x^\circ)) + w(\mathbf{c}_i(x))} > 0,\ \ \forall i = 1, ..., p.$$

از آن‌جایی که $w(\mathbf{c}_i(x^\circ)) + w(\mathbf{c}_i(x)) > 0$ ، بنابراین

$$m(\mathbf{c}_i(x^\circ)) > m(\mathbf{c}_i(x)),\ \forall i = 1, ..., p.$$

و

$$\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{n} \lambda_i m(\mathbf{c}_i(x^\circ)) > \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{n} \lambda_i m(\mathbf{c}_i(x)),\ \forall i = 1, ..., p.$$

نتیجه می‌شوند که با بهینگی $x^\circ$ برای مسئله‌ی (۳.۴)در تناقض است. بدین ترتیب فرض خلف باطل است. $\square$

**قضیه ۵.۴.** *$x^\circ \in \chi$ یک جواب $A-$ کارای مسئله‌ی (۱.۴) است اگر و تنها اگر وجود داشته باشد $\lambda = (\lambda_۱, ..., \lambda_p)$ با $\lambda_i > ۰$ و $i = ۱, ..., p$ بطوریکه $x^\circ$ یک جواب بهینه‌ی مسئله‌ی (۳.۴) باشد.*

**اثبات.** با توجه به قضیه‌ی۷.۳، مشابه قضیه۴.۴ اثبات می‌شود. □

## ۵. مثال عددی

**مثال ۱.۵.** فرض‌کنید یک کارخانه می‌تواند سه محصول $P_۱$ ، $P_۲$ و $P_۳$ را تولید کند. با توجه به تجربیات گذشته و وجود عدم قطعیت، این کارخانه می‌تواند از فروش هر واحد $P_۱$ ، $P_۲$ و $P_۳$ درآمدی را به ترتیب در بازه‌های $[۷, ۸]$ ، $[۲, ۳]$ و $[۴, ۶]$ (برحسب دلار) به‌دست آورد. طبق تجربه‌ی کارگران، تولید هر واحد $P_۱$ ، $P_۲$ و $P_۳$ ، مقداری از منابع کمیاب را مصرف می‌کند که به ترتیب $[۶, ۹]$ ، $[۲, ۴]$ و $[۴, ۵]$ (برحسب کیلوگرم) است. همچنین، هزینه‌ی تولید هر واحد $P_۱$ ، $P_۲$ و $P_۳$ به ترتیب ۲/۵ ، ۳ و ۲ است که مجموع منابع مالی ۱۰۰ دلار است. هدف مدیر کارخانه بیشینه‌سازی درآمد و کمینه‌سازی مصرف منابع کمیاب با توجه به محدودیت مالی و دو محدودیت دیگر در مقدار محصولات است.

واضح است که عدم‌قطعیت موجود در مسئله موجب ایجاد داده‌های بازه‌ای در خصوص درآمد حاصل از فروش و مقدار مورد نیاز از منابع کمیاب شده است. بدین ترتیب این مسئله به عنوان یک مسئله‌ی برنامه‌ریزی خطی چندهدفه بازه‌ای به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{aligned} (۱.۵)\qquad & max \quad z_۱(x) = [۷, ۸]x_۱ + [۲, ۳]x_۲ + [۴, ۶]x_۳, \\ & min \quad z_۲(x) = [۶, ۹]x_۱ + [۲, ۴]x_۲ + [۴, ۵]x_۳, \\ & s.t. \quad ۲/۵x_۱ + ۳x_۲ + ۲x_۳ \leqslant ۱۰۰, \\ & x_۱ + x_۲ + x_۳ \geqslant ۴۵, \\ & x_۳ \leqslant ۲۵, \\ & x_i \geqslant ۰, \quad i = ۱, ۲, ۳, \end{aligned}$$

که در آن $x_i$ ، $i = ۱, ۲, ۳$ ، مقدار محصول $P_i$ ، $i = ۱, ۲, ۳$ که باید تولید شود را نشان می‌دهد. لازم به ذکر است که در صورت وجود قطعیت در داده‌ها، مسئله‌ی (۱.۵) به یک مسئله‌ی برنامه‌ریزی خطی چندهدفه معمولی تبدیل می‌شود که به منظور حل آن بایستی از

راهکارهای موجود در برنامه‌ریزی چندهدفه استفاده گردد و جواب‌های کارا به دست آیند. با استفاده از روش پیشنهادی و $\lambda_۱ = \lambda_۲ = ۰/۵$ ، برنامه‌ریزی خطی زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} & min \quad z(x) = ۰/۵x_۲ - ۰/۵x_۳, \\ & s.t. \quad ۲/۵x_۱ + ۳x_۲ + ۲x_۳ \leqslant ۱۰۰, \\ & \qquad x_۱ + x_۲ + x_۳ \geqslant ۴۵, \\ & \qquad x_۳ \leqslant ۲۵, \\ & \qquad x_i \geqslant ۰, \quad i = ۱, ۲, ۳, \end{aligned} \tag{۲.۵}$$

با توجه‌به قضیه‌ی ۵.۴، جواب بهینه‌ی مسئله‌ی (۲.۵)، $(x_۱, x_۲, x_۳) = (۲۰, ۰, ۲۵)$ ، یک جواب $A-$ کارای مسئله‌ی (۱.۵) است.

**مثال ۲.۵.** یک شرکت تولید کننده‌ی پنیر پروسس قصد دارد محصول خود را با کمترین هزینه تولید کند. الزامات استاندارد به شرح زیر است:

آ. چربی: دست‌کم ۲۵ درصد فرمولاسیون

ب. پروتئین: دست‌کم ۶۰ درصد فرمولاسیون

ج. ماده‌ی خشک: دست‌کم ۳۳ درصد فرمولاسیون

د. اسیدیته: حداکثر ۷۰ واحد

مواد اولیه عبارتند از:

شیر، خامه، کره، شیرخشک، پودر پروتئن و پودر پنیر.

مواد اولیه‌ی مذکور دارای مقداری ذرات سوخته هستند که شرکت با هدف کمینه‌سازی ذرات سوخته قصد کمینه نمودن قیمت را دارد. ذرات سوخته مقدار ناخالصی غیرقابل استفاده و تیره رنگ است که در محیط مایع حل نمی‌شود. مقدار چربی، پروتئین، ماده‌ی خشک، ذرات سوخته و اسیدیته‌ی هریک از مواد اولیه به شرح زیر است:

این شرکت خامه‌ی مورد مصرف خود را از چربی گیری شیر تهیه می‌کند و روزانه خامه‌ی به دست آمده از خط تولید خود را مصرف می‌کند. مقدار آن روزانه حداکثر ۳۰۰ کیلوگرم است.

فرمولاسیون بهینه‌ی پنیر را به ازای ۱۰۰۰ کیلوگرم به دست آورید.

با توجه به جدول بالا، عدم قطعیت موجود در مسئله موجب ایجاد داده‌های بازه‌ای در قیمت مواد اولیه و میزان ذرات سوخته شده است. بدین ترتیب این مسئله به عنوان یک مسئله‌ی

جدول ۱: داده‌های مربوط به مثال (۲.۵)

| متغیر | مواد اولیه | چربی | پروتئین | ماده‌ی خشک | اسیدیته | ذرات سوخته | قیمت هر کیلو(برحسب تومان) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_۱$ | کره | ۸۲٪ | ۰ | ۸۴٪ | ۰/۰۵ | [۰/۰۹, ۰/۰۰۱] | [۱۴۰۰۰, ۱۶۰۰۰] |
| $x_۲$ | شیرخشک | ۱٪ | ۳۰٪ | ۹۶٪ | ۰/۰۰۵ | [۰/۰۰۲, ۰/۰۰۴] | [۸۰۰۰, ۱۰۰۰۰] |
| $x_۳$ | شیر | ۳٪ | ۳٪ | ۱۲٪ | ۰/۱ | [۰/۰۰۱, ۰/۰۰۳] | [۱۱۰۰, ۱۳۰۰] |
| $x_۴$ | پودر پروتئین | ۰ | ۷۰٪ | ۹۶٪ | ۰/۰۰۵ | [۰/۰۰۲, ۰/۰۰۴] | [۲۷۰۰۰, ۲۹۰۰۰] |
| $x_۵$ | خامه | ۴۰٪ | ۱٪ | ۴۲٪ | ۰/۱ | [۰/۰۵, ۰/۰۰۳] | [۴۰۰۰, ۶۰۰۰] |
| $x_۶$ | پودر پنیر | ۱٪ | ۵٪ | ۹۴٪ | ۰/۰۵ | [۰/۰۰۴, ۰/۰۰۶] | [۲۰۰۰, ۴۰۰۰] |

برنامه‌ریزی خطی چندهدفه بازه‌ای به صورت زیر نوشته می‌شود:

(۳.۵)

$$\begin{aligned}
min \quad z_۱(x) = & [۱۴۰۰۰, ۱۶۰۰۰]x_۱ + [۸۰۰۰, ۱۰۰۰۰]x_۲ + [۱۱۰۰, ۱۳۰۰]x_۳ \\
& + [۲۷۰۰۰, ۲۹۰۰۰]x_۴ + [۴۰۰۰, ۶۰۰۰]x_۵ + [۲۰۰۰, ۴۰۰۰]x_۶, \\
min \quad z_۲(x) = & [۰/۰۹, ۰/۰۰۱]x_۱ + [۰/۰۰۲, ۰/۰۰۴]x_۲ + [۰/۰۰۱, ۰/۰۰۳]x_۳ \\
& + [۰/۰۰۲, ۰/۰۰۴]x_۴ + [۰/۰۰۳, ۰/۰۰۵]x_۵ + [۰/۰۰۴, ۰/۰۰۶]x_۶, \\
& ۸۲x_۱ + x_۲ + ۳x_۳ + ۴۰x_۵ + ۳x_۶ \geqslant ۲۵, \\
& ۳۰x_۲ + ۳x_۳ + ۷۰x_۴ + x_۵ + ۵x_۶ \geqslant ۶, \\
& ۸۴x_۱ + ۹۶x_۲ + ۱۲x_۳ + ۹۴x_۴ + ۴۲x_۵ + ۹۶x_۶ \geqslant ۳۳, \\
& ۰/۰۵x_۱ + ۰/۰۰۵x_۲ + ۰/۱x_۳ + ۰/۰۰۵x_۴ + ۰/۰۵x_۵ + ۰/۰۵x_۶ \leqslant ۷۰, \\
& x_۵ \leqslant ۳۰۰, \\
& x_۱ + x_۲ + x_۳ + x_۴ + x_۵ + x_۶ = ۱۰۰۰,
\end{aligned}$$

$$x_j \geqslant ۰, \quad , \quad j = ۱, ..., ۶$$

لازم به ذکر است که در صورت وجود قطعیت در داده‌ها، مسئله‌ی (۳.۵) به یک مسئله‌ی برنامه‌ریزی خطی چندهدفه معمولی تبدیل می‌شود که به منظور حل آن می‌توان از راهکارهای موجود در برنامه‌ریزی چندهدفه استفاده نمود و جواب‌های کارا را به دست آورد. با توجه به روش پیشنهادی و با در نظر گرفتن $\lambda_۱ = ۰/۸$ و $\lambda_۲ = ۰/۲$ مسئله‌ی فوق به صورت برنامه‌ریزی خطی زیر به دست می‌آید:

$$(۴.۵) \qquad min \quad z(x) = ۲۴۰۰۰/۰۱۸۲x_۱ + ۱۴۴۰۰/۰۰۱۲x_۲ + ۱۹۲۰/۰۰۰۸x_۳ + ۴۴۸۰۰/۰۰۱۲x_۴ + ۸۰۰۰/۰۰۱۶x_۵ + ۴۸۰۰/۰۰۲x_۶,$$

$$۸۲x_۱ + x_۲ + ۳x_۳ + ۴۰x_۵ + ۳x_۶ \geqslant ۲۵,$$

$$۳۰x_۲ + ۳x_۳ + ۷۰x_۴ + x_۵ + ۵x_۶ \geqslant ۶,$$

$$۸۴x_۱ + ۹۶x_۲ + ۱۲x_۳ + ۹۴x_۴ + ۴۲x_۵ + ۹۶x_۶ \geqslant ۳۳,$$

$$۰/۰۵x_۱ + ۰/۰۰۵x_۲ + ۰/۱x_۳ + ۰/۰۰۵x_۴ + ۰/۰۵x_۵ + ۰/۰۵x_۶ \leqslant ۷۰,$$

$$x_۵ \leqslant ۳۰۰,$$

$$x_۱ + x_۲ + x_۳ + x_۴ + x_۵ + x_۶ = ۱۰۰۰,$$

$$x_j \geqslant ۰, \quad , \quad j = ۱, ..., ۶$$

با توجه‌به قضیه‌ی ۵.۴، جواب بهینه‌ی مسئله‌ی (۴.۵)،

$$(x_۱, x_۲, x_۳, x_۴, x_۵, x_۶) = (۰, ۰, ۴۰۰, ۰, ۰, ۶۰۰)$$

یک جواب $\mathcal{A}-$ کارای مسئله‌ی (۳.۵) است.

در ادامه به ترتیب مثال‌هایی از [۲۴] و [۲۷] آورده می‌شوند. مسائل ارائه شده در این مثال‌ها با روشی بر پایه مفهوم بیشینه رگرت در [۲۴] و [۲۷] حل شده اند. به منظور مقایسه و درک بهتر نتایج، این مسائل با روش حل جدید نیز بررسی می‌شوند.

**مثال ۳.۵.**

$$(۵.۵) \qquad max \quad z_۱(x) = [۲, ۳]x_۱ + [۱/۵, ۲/۵]x_۲,$$

$$max \quad z_۲(x) = [۳, ۴]x_۱ + [۰/۵, ۰/۸]x_۲,$$

$$s.t. \quad ۳x_۱ + ۴x_۲ \leqslant ۴۲,$$

$$3x_1 + x_2 \leqslant 24,$$
$$x_2 \leqslant 9,$$
$$x_i \geqslant 0, \quad i = 1, 2.$$

مسئله (۵.۵) در [۲۴] به کمک روش کمینه بیشینه رگرت حل شده و $(x_1, x_2) = (6/625, 4/125)$ به عنوان جواب نهایی حاصل شده است. لازم به ذکر است که جواب حاصل، یک نقطه گوشه‌ای از فضای شدنی نیست. با حل مسئله (۵.۵) به کمک روش جدید، وقتی $\lambda_1 = \lambda_2 = 0/5$ ، جواب $(x_1, x_2) = (6, 6)$ به دست می‌آید. بدین ترتیب $(6, 6)$ ، یک جواب $\mathcal{A}-$ کارای مسئله‌ی (۵.۵) است.

**مثال ۴.۵.**

$$\max \quad z_1(x) = [1, 2/5]x_1 + [3, 4]x_2, \tag{۶.۵}$$
$$\max \quad z_2(x) = [9, 3]x_1 + [1/5, 2/5]x_2,$$
$$s.t. \quad 3x_1 + 4x_2 \leqslant 42,$$
$$3x_1 + x_2 \leqslant 24,$$
$$x_2 \leqslant 9,$$
$$x_i \geqslant 0, \quad i = 1, 2.$$

با حل مسئله (۶.۵) به کمک روش مجموع وزنی بیشینه رگرت‌ها، جواب نهایی $(x_1, x_2) = (2/444444, 8/666667)$ حاصل شده است. لازم به ذکر است که این جواب، یک نقطه گوشه‌ای از فضای شدنی نیست. با حل مجدد این مسئله با استفاده از روش حل جدید، وقتی $\lambda_1 = 1$ و $\lambda_2 = 0$ ، جواب $(x_1, x_2) = (2, 9)$ نتیجه می‌شود. بدین ترتیب $(2, 9)$ ، یک جواب $\mathcal{A}-$ کارای ضعیف مسئله‌ی (۶.۵) است.

واضح است که در مثال‌های ۳.۵ و ۴.۵ با تغییر $\lambda_1$ و $\lambda_2$ در روش حل جدید امکان دستیابی به جواب‌های دیگری از فضای شدنی مسئله ایجاد می‌گردد. بدین ترتیب نقاط دیگری ازمجموعه جواب‌های $\mathcal{A}-$ کارا و $\mathcal{A}-$ کارای ضعیف حاصل می‌گردد.

## ۶. نتیجه‌گیری

بهینه‌سازی چندهدفه از دیرباز در مدل‌سازی بسیاری از مسائل دنیای واقعی استفاده شده است.از آن‌جا که در اکثر مسائل، داده‌ها و پارامترها به صورت قطعی در اختیار نیستند، بنابراین بکارگیری رویکردی مناسب جهت برخورد با داده‌های غیرقطعی همواره مد نظر بوده است. یکی از روش‌های کارآمد در برخورد با عدم قطعیت، رویکرد برنامه‌ریزی بازه‌ای است. در این مقاله، مسائل برنامه‌ریزی خطی چندهدفه با ضرایب بازه‌ای در توابع هدف مدنظر قرار گرفتند. متناظر با چنین مسائلی، جواب های مختلفی با بکارگیری مفهوم شاخص پذیرش معرفی شدند. همچنین روش حل جدیدی برای برخورد با مسائل برنامه‌ریزی خطی چند هدفه با ضرایب بازه‌ای در توابع هدف ارائه شد. در قضایایی ویژگی‌هایی پیرامون جواب‌های حاصل از روش حل جدید بیان گردید. کارایی روش نیز در مثال‌هایی عددی مورد بررسی قرار گرفت. لازم به ذکر است که عدم‌قطعیت در محدودیت‌ها و قیود نیزمی‌تواند در تحقیقات آتی مدنظر قرار گیرد. همچنین ارائه روابط ترتیبی و روش‌های حل جدید با ویژگی‌های متفاوت به منظور برخورد با مسائل چندهدفه با ضرایب بازه‌ای هم‌چنان از موضوعات تحقیقاتی جالب توجه است.

### تشکر و قدردانی

نویسنده دوم مقاله مراتب قدردانی خود را از حمایت دانشگاه صنعتی نوشیروانی بابل از طریق اعتبار پژوهشی شماره $BNUT/$۳۹۵۰۲۵/۰۲ اعلام می‌دارد.

### مراجع

[۱] الله دادی، م. (۱۴۰۰) برنامه‌ریزی خطی بازه‌ای. انتشارات دانشگاه سیستان و بلوچستان.

[۲] قلی نژاد، ش. ریواز، س. (۱۴۰۰) بررسی مفاهیم جواب‌های مختلف در مسایل برنامه‌ریزی خطی چندهدفه با ضرایب بازه‌ای. تحقیق در عملیات در کاربردهای آن. ۱۸(۲) :۲۵ـ۳۵

[3] Akyar, H., Akyar, E. (2011, January) A graphical method for solving interval matrix games. Abstr. Appl. Anal., (Vol. 2011), Hindawi.

[4] Batamiz, A., Allahdadi, M., Haldik, M. (2020) Optaining efficient solutions of interval multi-objective linear programming problems. Int. J. Fuzzy Syst., 22, 873-890.

[5] Chakara, A., Tiwari, S. P., Chattopadhyay, A. and Chatterjee, K. (2012) Multiobjective linear programmings problem with interval-coefficients based on preference relations. J. adv. res. appl. math., 4, 1-11.

[6] Chanas, S., Kuchta, D. (1996) Multiobjective programming in optimization of interval objective functions-A generalized approach. Eur. J. Oper. Res., 94, 594-598.

[7] Ebrahimnejad, A. (2021) An acceptability index based approach for solving shortest path problem on a network with interval weights. RAIRO-Oper. Res., 55, S1767-S1787.

[8] Ehrgott, M. (2005) Multicritenria Optimization. Springer, Berlin.

[9] Hu, B. Q., Wang, S. (2006) A novel approach in uncertain programming part i: New arithmetic and order relation for interval numbers. J. Ind. Manag. Optim., 2(4), 351–371.

[10] Inuiguchi, M., Kume, Y. (1991) Dominance relations as bases for constructing solution concepts in linear programming with multiple interval objective functions. Bull. Univer. Osaka Prefec., Series A: Eng. Nat. Sci., 40, 275-292.

[11] Inuiguchi, M., Kume, Y. (1991) Efficient solutions versus nondominated solutions in linear programming with multiple interval objective functions. Bull. Univer. Osaka Prefec., Series A: Eng. Natur. Sci., 40, 293-298.

[12] Inuiguchi, M., Kume, Y. (1992) Properties of nondominated solutions to linear programming problems with multiple interval objective functions. Bull. Univer. Osaka Prefec., Series A: Eng. Natur. Sci., 41, 23-37.

[13] Inuiguchi, M., Sakawa, M. (1995) Minimax regret solution to linear programming problems with an interval objective function. Eur. J. Oper. Res., 86, 526-536.

[14] Ishibuchi, H., Tanaka, H. (1990) Multiobjective programming in optimization of the interval objective function. Eur. J. Oper. Res., 48 , 219-225.

[15] Karmakar, S., Bhunia, A. K. (2012) A Comparative Study of Different Order Relations of Intervals. Reliab. Comput., 16, 38-72.

[16] Kulpa, Z. (1997) Diagrammatic representation for a space of intervals. Mach. Graph. Vision., 6(1), 5-24.

[17] Kundu, S. (1997) Min-transitivity of fuzzy leftness relationship and its application to decision making. Fuzzy. Sets. Syst., 86, 357-367.

[18] Oliveira, C., Antunes, C. H. (2007) Multiple objective linear programming models with interval coefficients-an illustrative overview. Eur. J. Oper. Res., 18, 1434-1463.

[19] Oliveira, C., Antunes, C. H. (2009) An interactive method of tackling uncertainty in interval multiple objective linear programming. J. Math. Sciences., 161, 854-866.

[20] Mahato, S. K., Bhunia, A. K. (2006) Interval-arithmetic-oriented interval computing technique for global optimization. Appl. Math. Res. Express., 2006, 1–19.

[21] Moore, R. E. (1966) Interval analysis. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.

[22] Moore, R. E. (1979) Method and Application of Interval Analysis. SIAM, Philadelphia.

[23] Qin, X. S., Xu, Y. (2011) Analyzing urban water supply through an acceptability-index-based interval approach. Adv. Water. Resour., 34(7), 873-886.

[24] Rivaz, S., Yaghoobi, M.A. (2013) Minimax regret solution to multiobjective linear programming problems whith interval objective function coefficients. Cent. Eur. J. Oper. Res., 21, 625-649.

[25] Rivaz, S., Yaghoobi, M.A. (2015) Some results in interval multiobjective linear programming for recognizing different solutions. Opsearch., 52, 75-85.

[26] Rivaz, S., Yaghoobi, M.A., Haldik, M. (2015) Using modified maximum regret for finding a necessarily efficient solution in an interval MOLP problem. Fuzzy. Optim. Decis. Mak., 15, 237-253.

[27] Rivaz, S., Yaghoobi, M. A. (2018) Weighted sum of maximum regrets in an interval MOLP problem. Int. Trans. Oper. Res., 25(5), 1659-1676.

[28] Sengupta, A., Pal, T. K. (1997) A-index for ordering interval numbers. Presented in Indian Science Congress, Delhi University, January, 3-8.

[29] Sengupta, A., Pal, T.K. (2000) On comparing interval numbers. Eur. J. Oper. Rest., 127, 28-43.

[30] Sengupta, A., Pal, T.K. and Chakraborty, D. (2001) Interpretation of inequality constraints involving interval coefficients and a solution to interval linear programming. Fuzzy. sets. syst., 119, 129-138.

[31] Sevastjanov, P., Róg, P., Karczewski, K. (2002) A probabilistic method for ordering group of intervals. Comput. Sci., 2(2), 45-53.

[32] Steuer, R. E. (1986) Multiple criteria optimization: Theory, Computation, and Application. John Wiley & Song, New York.

[33] Tong, S. (1994) Interval number and fuzzy number linear programming. Fuzzy. Sets. Syst., 66, 301-306.

[34] Urli, B., Nadeau, R. (1992) An interactive method to multiobjective linear programming problems with interval coefficients. INFOR., 30, 127-137.

[35] Wu, H. C. (2009) The Karush-Kuhn-Tucker optimality conditions in multiobjective programming problems with interval-valued objective function. Eur. J. Oper. Res., 196, 49-60.