سیستم های فازی و کاربردها
سال هفتم، شماره اول (بهار و تابستان ۱۴۰۳)
صص. ۱۵۱ تا ۱۶۱

شاپای چاپی: ۲۷۱۷ـ۴۴۰۹
شاپای الکترونیکی: ۲۷۱۷ـ۳۹۸۴
DOI:10.22034/JFSA.2024.464412.1213

مون‌ها و گوپ‌ها با شرایط اضافی

اکبر رضایی [۱,*]، محمد رضا خانی‌کوثرخیزی [۲] و اسفندیار اسلامی [۳]

[۱] گروه ریاضی، دانشگاه پیام نور، صندوق پستی ۱۹۳۹۵ـ۴۶۹۷، تهران، ایران
[۳,۲] گروه ریاضی محض، دانشکده ریاضی و کامپیوتر، دانشگاه شهید باهنر کرمان، کرمان، ایران

تاریخ دریافت: ۱۴۰۳/۰۴/۰۳ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۳/۰۶/۲۱

نوع مقاله: علمی‌ـ پژوهشی

چکیده. در این مقاله به‌منظور شناخت بیشتر ساختارهای جبری سعی شده است با اضافه‌نمودن شرایطی به گروه‌وارها، RM ـجبرها، مون‌ها (پیچشی) و گوپ‌ها برخی خواص و روابط بین آن‌ها بررسی شوند. ثابت شده است که در بیشتر موارد، مون‌ها با اضافه شدن این شرایط بدیهی خواهند شد.

۱. سرآغاز

ساختارهای جبری BCK ـجبرها و BCI ـجبرها در سال ۶۶۱۹ توسط دو ریاضیدان ژاپنی به نام‌های ایمایی[۱] و ایزاکی[۲] به‌عنوان تعمیمی از منطق گزاره‌ای معرفی شده‌اند ([۴، ۷،

2010 *Mathematics Subject Classification.* 20N02; 03G25; 06F35 * Corresponding author
E-mails: rezaei@pnu.ac.ir, khani.mrk@gmail.com and Esfandiar.Eslami@uk.ac.ir.
عبارات و کلمات کلیدی. گروه‌وار، RM ـجبر، مون (پیچشی)، گوپ.

[1] Imai
[2] Iséki

© ۱۴۰۳ (انجمن سیستم‌های فازی)

۸]). هو[1] و لی[2] در سال ۱۹۸۳ دسته‌ای وسیع‌تر از جبرهای مجرد به نام BCH ـ‌جبرها را معرفی نمودند ([۳]). آن‌ها نشان دادند که کلاس BCI ـ‌جبرها یک زیرکلاس سره از BCH ـ‌جبرها می‌باشد. در سال ۱۹۸۵ لی[3] و شی[4] کلاس BCI ـ‌جبرهای p ـ‌نیم ساده را تعریف نمودند و ثابت کردند که این جبرها معادل با گروه‌های آبلی می‌باشند ([۱۱]). سپس محققین دیگری مانند مینگ[5] (۱۹۸۷، [۱۲])، هوو[6] (۱۹۹۰، [۲])، اسالم[7] و تهیم[8] (۱۹۹۰، [۱])، ژانگ[9] (۱۹۹۱، [۱۹])، ژانگ و ی[10] (۱۹۹۵، [۲۰]) و کیم[11] و پارک[12] (۲۰۰۵، [۱۰]) در مقالاتی خواص این جبرها را مورد مطالعه قرار داده و نشان دادند که BZ ـ‌جبرهای p ـ‌نیم ساده با گروه‌های آبلی معادل می‌باشند. در سال ۱۹۸۶ ماندیسی[13] نشان داد که MV ـ‌جبرها با BCKـ‌جبرهای جابجایی کراندار معادل هستند ([۱۳]). جون[14] و همکاران در سال ۱۹۹۸ BH ـ‌جبرها را معرفی و نتایجی روی این ساختار به‌دست آوردند ([۹]). یورگلسکو[15] تعمیم‌های جدیدی از گروه‌وارها مانند مون‌ها و گوپ‌ها را معرفی و ارتباط آن‌ها با سایر ساختارهای جبری را مطالعه نموده است ([۵، ۶]). دیده می‌شود که همه جبرهای ذکر شده، در کلاس RM ـ‌جبرها قرار دارند. سپس در سال ۲۰۲۰ والندزیاک[16] RM ـ‌جبرها را از جنبه‌های گوناگونی مورد تحقیق و بررسی قرار داده و رابطه آن‌ها را با مون‌های آبلی بررسی و ارتباط این ساختار جبری با تعدادی از جبرهای معرفی شده قدیمی و جدید را با نمودار نشان داده است ([۱۷، ۱۸]).

به‌منظور شناخت بیشتر ساختارهای جبری با اصول موضوعه حداقلی در این مقاله سعی شده است تا با مروری بر کارهای انجام شده قبلی با اضافه نمودن شرایط جدیدی روابط بین

---

[1] Hu
[2] Li
[3] Lei
[4] Xi
[5] Meng
[6] Hoo
[7] Aslam
[8] Thaheem
[9] Zhang
[10] Ye
[11] Kim
[12] Park
[13] Mundici
[14] Jun
[15] Iorgulescu
[16] Walendziak

۱۵۳ ــ

تعریف ۱.۱. ([۵، ۶، ۱۷]) (آ) جبر $(X, \to)$ که در آن X مجموعه‌ای غیر تهی و $\to$ یک عمل دوتایی روی X می‌باشند، یک گروه‌وار و اگر عمل دوتایی $\to$ شرکت‌پذیر باشد، نیم گروه و اگر برای هر $x, y \in X$ داشته باشیم $x \to y = y \to x$، آنگاه آبلی نامیده می‌شود.

(ب) جبر $(X, \to, ۱)$ از نوع $(۲, ۰)$ یک RM ــجبر نامیده می‌شود هرگاه در $(X۲)$ و $(X۳)$ صدق کند. علاوه‌بر آن آبلی نامیده می‌شود هرگاه گروه‌وار آبلی باشد.

(ج) جبر $(X, \to, ^{-۱}, ۱)$ از نوع $(۲, ۱, ۰)$ که در آن ۱ عنصر ثابت همانی بوده (بدین معنی‌که $x \to ۱ = ۱ \to x = x$ برای هر $x \in X$) یک مون نامیده می‌شود هرگاه در $(X۹)$ صدق کند و اگر در $(X۱۰)$ هم صدق کند پیچشی نامیده می‌شود.

(د) جبر مون که در خاصیت شرکت‌پذیری صدق کند، یک گروه نامیده می‌شود.

(ه) جبر $(X, \to, ^{-۱}, ۱)$ از نوع $(۲, ۱, ۰)$ یک گوپ نامیده می‌شود هرگاه ۱ عنصر همانی بوده و $(X۱۱)$ و $(X۱۲)$ نیز برقرار باشند.

گزاره ۲.۱. ([۱۷]) *جبر* $(X, \to, ^{-1}, 1)$ *از نوع* $(2, 1, 0)$ *یک گوپ است اگر و فقط اگر یک مون پیچشی صادق در شرط زیر باشد.*

$(X14)$ *اگر* $x \to y = 1$، *آنگاه* $y \to x^{-1} = x$.

گزاره ۳.۱. ([۱۵]) *اگر* $(X, \to, 1)$ *یک* RM ـ*جبر آبلی باشد، آنگاه* ۱ *عنصر همانی است.*

قضیه ۴.۱. ([۱۵]) *اگر* $(X, \to, 1)$ *یک* RM ـ*جبر و عمل دوتایی* $\to$ *شرکت‌پذیر باشد، آنگاه جبر* $(X, \to, ^{-1}, 1)$ *از نوع* $(2, 1, 0)$ *یک گروه است که در آن برای هر* $x \in X$، *داریم* $x^{-1} = x$.

ملاحظه ۵.۱. هر گروه یک گوپ است. در مثال بعدی دیده می‌شود که در حالت کلی ممکن است عکس آن برقرار نباشد.

مثال ۶.۱. مجموعه $X = \{a, b, 1\}$ همراه با عمل دوتایی $\to$ تعریف شده در جدول کیلی (۶) با $a^{-1} = a$، $b^{-1} = b$ و $1^{-1} = 1$ را در نظر می‌گیریم.

جدول ۱: جدول کیلی عمل دوتایی $\to$.

$\to$	a	b	1
a	1	a	a
b	b	1	b
1	a	b	1

در این‌صورت $(X, \to, ^{-1}, 1)$ یک گوپ می‌باشد. از طرفی چون $\to$ شرکت‌پذیر نمی‌باشد، پس گروه نیست، زیرا

$$a \to (b \to a) = a \to b = a \neq 1 = a \to a = (a \to b) \to a.$$

۲. نتایجی روی مون‌ها و گوپ‌ها

در این بخش سعی خواهد شد با اضافه نمودن شرایطی به ساختار جبری $(X, \to, ^{-1}, 1)$ از نوع $(2, 1, 0)$ نتایج و خواص بیشتری به‌دست آوریم. در ادامه انواع شرایط متفاوتی که ممکن است برای جبری از نوع $(2, 0)$ صادق باشند، آورده شده است.

$(X15)$ اگر $x \to y = 1$، آنگاه $x = y$،

۱۵۵ ــ

(X۱۶) اگر $x \to ۱ = ۱$، آنگاه $x = ۱$،

(X۱۷) $x \to [(x \to ۱) \to ۱] = ۱$،

(X۱۸) $x = (x \to ۱) \to ۱$،

(X۱۹) $(x \to ۱) \to y = (y \to ۱) \to x$،

(X۲۰) $x \to (y \to z) = (z \to x) \to y$،

(X۲۱) $x \to (y \to z) = z \to (x \to y)$،

(X۲۲) $x \to (y \to x) = y \to (x \to y)$،

(X۲۳) $(y \to x) \to x = y \to (x \to x)$،

(X۲۴) $x \to ۱ = ۱$،

(X۲۵) $x \to (y \to x) = ۱$،

(X۲۶) $x \to (y \to z) = (x \to y) \to (x \to z)$،

(X۲۷) $(x \to y) \to z = (x \to z) \to (y \to z)$،

(X۲۸) $x \to (x \to y) = y \to (y \to x)$،

(X۲۹) $(x \to y) \to x = x$.

در واقع (X۱۸) و (X۱۹) در مرجع [۶] به‌ترتیب با (DN) (نقیض دوگانه، نفی نفی، وارون وارون) و $(pDNeg۲)$ (در حالت آبلی) نمایش داده شده‌اند.

لم ۱.۲. *اگر $(X, \to, ۱)$ جبری از نوع $(۲, ۰)$ باشد، آنگاه*

(آ) *از (X۳) و (X۱۹)، (X۱۸) نتیجه می‌شود،*

(ب) *از (X۳) و (X۱۸)، (X۱۶) نتیجه می‌شود،*

(ج) *اگر (X۱)، (X۲)، (X۵) و (X۱۶) برقرار باشند، آنگاه (X۱۵) نیز برقرار است،*

(د) *اگر (X۱۵) و (X۱۷) برقرار باشند، آنگاه (X۱۸) نیز برقرار است،*

(ه) *اگر (X۲)، (X۴) و (X۱۸) برقرار باشند، آنگاه (X۱۵) نیز برقرار است،*

(و) *اگر (X۱۵) برقرار باشد، آنگاه (X۱)، (X۶) و (X۵) نیز برقرار هستند.*

(ز) *اگر آبلی باشد، آنگاه (X۴) و (X۲۰) معادل هم می‌باشند.*

(ح) *اگر آبلی باشد، آنگاه (X۴) و (X۲۱) معادل هم می‌باشند.*

(ط) *اگر آبلی باشد، آنگاه (X۲۰) و (X۲۱) معادل هم می‌باشند.*

اثبات. (آ) ـ (و) به [۱۷] لم ۱.۳ مراجعه شود.

(ز) فرض کنیم $(X, \to, ۱)$ آبلی بوده و در (X۴) صدق کند. در نتیجه برای هر $x, y, z \in X$

داریم

$$\begin{aligned} x \to (y \to z) &= x \to (z \to y) \\ &= z \to (x \to y) \\ &= z \to (y \to x) \\ &= y \to (z \to x) \\ &= (z \to x) \to y. \end{aligned}$$

بنابراین $(X۲۰)$ برقرار است. برعکس، فرض کنیم گروه‌وار آبلی $(X, \to, ۱)$ در $(X۲۰)$ صدق کند. در این‌صورت

$$x \to (y \to z) = (z \to x) \to y = y \to (z \to x) = y \to (x \to z).$$

پس، $(X۴)$ برقرار است.

(ح) فرض کنیم $(X, \to, ۱)$ آبلی بوده و در $(X۴)$ صدق کند. در نتیجه برای هر $x, y, z \in X$ داریم

$$\begin{aligned} x \to (y \to z) &= y \to (x \to z) \\ &= y \to (z \to x) \\ &= z \to (y \to x) \\ &= z \to (x \to y). \end{aligned}$$

بنابراین $(X۲۱)$ برقرار است. برعکس، فرض کنیم گروه‌وار آبلی $(X, \to, ۱)$ در $(X۲۱)$ صدق کند. در این‌صورت

$$\begin{aligned} x \to (y \to z) &= z \to (x \to y) \\ &= z \to (y \to x) \\ &= x \to (z \to y) \\ &= y \to (x \to z). \end{aligned}$$

پس، $(X۴)$ برقرار است.
(ط) بنابه (ز) و (ح) برقرار است.

□

در مثال زیر نشان داده شده است که آبلی بودن در (ز)ـ(ط) لم ۱.۲ الزامی است.

مثال ۲.۲. ([۱۵]) مجموعه اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ را در نظر گرفته و عمل دوتایی $\to$ را روی $\mathbb{R}\setminus\{۰\}$ به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم. برای هر $x,y\in\mathbb{R}\setminus\{۰\}$

$$x\to y=\frac{y}{x}.$$

در این‌صورت $(\mathbb{R}\setminus\{۰\},\to,۱)$ یک RM ـجبر است. دیده می‌شود که آبلی نیست و در $(X۴)$ صدق می‌کند، ولی $(X۲۰)$ و $(X۲۱)$ برقرار نمی‌باشند، زیرا به‌طور مثال اگر قرار دهیم $x:=۲$، $y:=۵$ و $z:=۴$ داریم

$$۲\to(۵\to۴)=۲\to\frac{۴}{۵}=\frac{\frac{۴}{۵}}{۲}=\frac{۴}{۱۰}\neq۱۰=\frac{۲۰}{۲}=\frac{۲}{۴}\to۵=(۴\to۲)\to۵.$$

پس، $(X۲۰)$ برقرار نیست. همچنین،

$$۲\to(۵\to۴)=\frac{۴}{۱۰}\neq\frac{۵}{۸}=\frac{۵}{۲}\to۴=۴\to\frac{۵}{۲}=۴\to(۲\to۵).$$

بنابراین در $(X۲۱)$ نیز صدق نمی‌کند.

در مرجع [۱۶]، با ارائه مثال‌هایی نشان داده شده است که در یک گروه‌وار $(X,\to)$ خاصیت شرکت‌پذیری، $(X۲۰)$ و $(X۲۱)$ مستقل از هم می‌باشند. اما اگر RM ـجبر باشد، ثابت شده است که $(X۲۰)$ و $(X۲۱)$ با هم معادل می‌باشند. همچنین نشان داده شده است که فقط گروه بدیهی در $(X۲۲)$ صدق می‌کند.

گزاره ۳.۲. *فرض کنیم $(X,\to,۱)$ یک جبر مون باشد. در این‌صورت برای هر $x,y\in X$ داریم:*

(آ) *اگر $(X۲۰)$ برقرار باشد، آنگاه $x^{-۱}\to(y\to x)=x\to(y\to x^{-۱})=y$،*
(ب) *اگر $(X۲۱)$ برقرار باشد، آنگاه $x^{-۱}\to(x\to y)=x\to(x^{-۱}\to y)=y$،*
(ج) *اگر $(X۲۲)$ برقرار باشد، آنگاه $x=x^{-۱}$،*
(د) *اگر $(X۲۳)$ برقرار باشد، آنگاه $|X|=۱$،*
(ه) *اگر $(X۲۴)$ برقرار باشد، آنگاه $|X|=۱$،*

(و) *اگر* $(X۲۵)$ *برقرار باشد، آن‌گاه* $|X| = ۱$،
(ز) *اگر* $(X۲۶)$ *برقرار باشد، آن‌گاه* $|X| = ۱$،
(ح) *اگر* $(X۲۷)$ *برقرار باشد، آن‌گاه* $|X| = ۱$،
(ط) *اگر* $(X۲۸)$ *برقرار باشد، آن‌گاه* $x = x^{-۱}$.

اثبات. (آ) فرض کنیم $x, y \in X$. در $(X۲۰)$ قرار می‌دهیم $z := x$. داریم

$$x^{-۱} \to (y \to x) = (x \to x^{-۱}) \to y = ۱ \to y = y.$$

از طرف دیگر دیده می‌شود

$$x \to (y \to x^{-۱}) = (x^{-۱} \to x) \to y = ۱ \to y = y.$$

بنابراین (آ) برقرار است.
(ب) در $(X۲۱)$ قرار می‌دهیم $z := y$ و $y := x^{-۱}$. داریم

$$x \to (x^{-۱} \to y) = y \to (x \to x^{-۱}) = y \to ۱ = y.$$

از طرف دیگر

$$x^{-۱} \to (x \to y) = y \to (x^{-۱} \to x) = y \to ۱ = y.$$

در نتیجه (ب) برقرار است.
(ج) فرض کنیم $x \in X$. با به‌کاربردن $(X۲۲)$ داریم

$$x = x \to ۱ = x \to (x^{-۱} \to x) = x^{-۱} \to (x \to x^{-۱}) = x^{-۱} \to ۱ = x^{-۱}.$$

(د) برای هر $x \in X$ داده شده، در $(X۲۳)$ قرار می‌دهیم $y := x^{-۱}$. در این‌صورت

$$x = ۱ \to x = (x^{-۱} \to x) \to x = x^{-۱} \to (x \to x).$$

حال قرار می‌دهیم $x := ۱$. در نتیجه

$$۱ = x^{-۱} \to (۱ \to ۱) = x^{-۱} \to ۱ = x^{-۱}.$$

از طرف دیگر داریم

$$x = ۱ \to x = x^{-۱} \to x = ۱.$$

پس، X یک مجموعه تک عضوی می‌باشد.

(ه) فرض کنیم $(X۲۴)$ برقرار باشد. بنابه $(X۹)$ داریم $۱ = ۱ \to x = x \to ۱ = x \to ۱ = ۱$. در نتیجه $|X| = ۱$.

(و) کافی است در $(X۲۵)$ قرار دهیم $y := x^{-۱}$. پس،

$$x \to (x^{-۱} \to x) = x \to ۱ = ۱.$$

حال بنابه (ح)، مجموعه X تک عضوی می‌باشد.

(ز) کافی است در $(X۲۶)$ قرار دهیم $y := x^{-۱}$ و $z = ۱$. در نتیجه

$$۱ = x \to x^{-۱} = x \to (x^{-۱} \to ۱) = (x \to x^{-۱}) \to (x \to ۱) = ۱ \to x = x.$$

پس، X یک مجموعه تک عضوی می‌باشد.

(ح) مانند اثبات (ز) می‌باشد.

(ط) برای $x \in X$ داده شده قرار می‌دهیم $y := x^{-۱}$. بنابراین

$$x = x \to ۱ = x \to (x \to x^{-۱}) = x^{-۱} \to (x^{-۱} \to x) = x^{-۱} \to ۱ = x^{-۱}.$$

پس، (ط) نیز برقرار است. □

قضیه ۴.۲. *فرض کنیم $(X, \to, ۱)$ یک مون صادق در $(X۲۰)$ باشد. در این‌صورت $(X, \to, ۱)$ یک گوپ است.*

اثبات. فرض کنیم $(X, \to, ۱)$ یک مون و داشته باشیم $x^{-۱} \to y = ۱$. با به‌کاربردن $(X۲۰)$ داریم

$$x^{-۱} \to y = ۱ \to (x^{-۱} \to y) = (y \to ۱) \to x^{-۱} = y \to x^{-۱} = ۱.$$

به‌طور مشابه عکس آن اثبات می‌شود. پس، $(X۱۱)$ برقرار است. ادعا می‌کنیم که در $(X۱۲)$ صدق می‌کند. چون

$$x = x \to ۱ = x \to (y \to x^{-۱}) = (x \to x^{-۱}) \to y = ۱ \to y = y.$$

حال اگر $x = y$، آنگاه $x \to x^{-۱} = ۱$. در نتیجه $(X, \to, ۱)$ یک گوپ است. □

قضیه ۵.۲. *فرض کنیم $(X, \to, ۱)$ یک مون صادق در $(X۲۱)$ باشد. در این‌صورت $(X, \to, ۱)$ یک گوپ است.*

اثبات. مشابه اثبات قضیه ۴.۲ می‌باشد که از ارائه آن صرف‌نظر می‌کنیم. □

۳. نتیجه‌گیری

در این مقاله، در ادامه کارهای انجام شده قبلی در [۵، ۶، ۱۵، ۱۷] شرایطی به گروه‌وارها، RM ـ‌جبرها، مون‌ها و گوپ‌ها اضافه شده و نتایج بیشتری روی این ساختارهای جبری به‌دست آمده است. دیده شد که اگر بعضی از این شرایط شناخته‌شده را به یک مون اضافه نمائیم بدیهی خواهد شد. در آینده می‌توان این نتایج را روی سایر ساختارهای جبری دیگر از نوع $(۲,۰)$ نظیر GE ـ‌جبرها، UP ـ‌جبرها، BN ـ‌جبرها، BRK ـ‌جبرها و ... بررسی و مطالعه نمود. علاوه‌برآن می‌توان مون‌ها و گوپ‌های فازی را تعریف و خواص آن‌ها را به‌دست آورد.

تشکر و قدردانی

از داوران محترم که نظرات ارزشمندشان باعث ارتقاء این مقاله شد صمیمانه تقدیر و تشکر می‌شود.

پیروی از اصول اخلاق پژوهش

اصول اخلاقی تماماً در این مقاله رعایت شده است. شرکت‌کنندگان اجازه داشتند هر زمان که مایل بودند از پژوهش خارج شوند. همچنین همه شرکت‌کنندگان در جریان روند پژوهش بودند. اطّلاعات آن‌ها محرمانه نگه داشته شد.

حامی مالی

این تحقیق هیچ‌گونه کمک مالی از سازمان‌های تامین مالی در بخشهای عمومی، تجاری یا غیر انتفاعی دریافت نکرده است.

مشارکت نویسندگان

تمام نویسندگان در طراحی، اجرا و نگارش همه بخش‌های پژوهش حاضر مشارکت داشتند.

تعارض منافع

بنابر اظهار نویسندگان این مقاله تعارض منافع ندارد.

مراجع

[1] Aslam, M. and Thaheem, A. B. (1991), A note on p-semisimple BCI-algebras, Math. Jpn. 36, 39–45.

[2] Hoo, C. S. (1990). Closed ideals and p-semisimple BCI-algebras, Math. Jpn., 35, 1103–1112.

[3] Hu, Q. H. and Li, X. (1983). On BCH-algebras, Math. Semin. Notes, 11, 313–320.

[4] Imai Y. and Iséki, K. (1966). On axiom systems of propositional calculi, XIV Proc. Japan Acad., 4, 19–22.

[5] Iorgulescu, A. (2018). Implicative-groups versus groups and generalizations, Matrix Rom, Bucuresti.

[6] Iorgulescu, A., (2016). New generalizations of BCI, BCK and Hilbert algebras-Part I, J. Mult.-Valued Logic Soft Comput., 27, 252–406.

[7] Iséki, K. (1980). On BCI-algebras, Math. Sem. Notes Kobe Univ., 8, 125–130.

[8] Iséki, K. (1966). An algebra related with propositional calculus, XIV Proc. Japan Acad., 42, 26–29.

[9] Jun, Y. B., Roh, E. H. and Kim, H. S. (1998). On BH-algebras, Sci. Math. Jpn., 1, 347–354.

[10] Kim, H. S. and Park, H. G. (2005), On 0-commutative B-algebras, Math. Jpn., 18, 31–36.

[11] Lei, T. and Xi, C. (1985), p-radical in BCI-algebras, Math. Jpn. 30, 511–517.

[12] Meng, D. J. (1987), BCI-algebras and abelian groups, Math. Jpn. 32, 693–696.

[13] Mundici, D. (1986). MV-algebras are categorically equivalent to bounded commutative BCK-algebras, Math. Jpn., 31, 889–894.

[14] Nanda, S. and Das, N. R. (2010). Fuzzy mathematical concepts, Alpha Science International Ltd. Oxford, U.K.

[15] Rezaei, A. (2024). On RM-algebras with an additional condition, J. Mahani Math. Res., 13 (3), 1–12.

[16] Rezaei, A. (2024). Flexible RM-algebras, J. algebr. hyperstrucres log, In press.

[17] Walendziak, A. (2020). RM-Algebras and commutative moons, Int. Electron. J. Algebra, 29, 95–106.

[18] Walendziak, A. (2020). Some generalizations of p-semisimple BCI-algebras and groups, Soft Comput., 24, 12781–12787.

[19] Zhang, Q. (1991), Some other characterizations of p-semisimple BCI-algebras, Math. Jpn., 36, 815–817.

[20] Zhang, Q. and Ye, R. (1995), BZ-algebra and group, J. Math. Phys. Sci., 29, 223–233.