

کاربرد فازی چند جمله‌ای در هم‌زمان‌سازی سیستم‌های آشوبی مرتبه کسری مبتنی بر روش جمع مربعات

علی اکبر کیخاجوان، اباذر کیخا*

گروه برق، واحد زابل، دانشگاه آزاد اسلامی، زابل، ایران

گروه ریاضی و آمار، دانشگاه ولایت، ایرانشهر، ایران

تاریخ پذیرش: ۱۴۰۳/۰۶/۲۷

تاریخ دریافت: ۱۴۰۳/۰۲/۰۹

نوع مقاله: علمی-پژوهشی

چکیده. مفهوم آشوب و رفتارهای آشوبی در سیستم‌های فیزیکی و دینامیکی در سالیان اخیر مورد توجه زیادی قرار گرفته است. سیستم‌های آشوبی، رفتار دینامیکی غیرخطی داشته و به شدت به شرایط اولیه حساس می‌باشند. تحلیل، کنترل و هم‌زمان‌سازی این سیستم‌ها زمانی میسر است که ابتدا مدلی مناسب از آن‌ها ارائه گردد. بسیاری از سیستم‌های غیرخطی را می‌توان به کمک منطق فازی مدل‌سازی و کنترل نمود. مدل‌های فازی تاکاگی-سوگنو بدین منظور به طور موفقیت‌آمیزی عمل نموده‌اند. اخیراً تکنیک فازی چند جمله‌ای برای تعمیم مدل فازی T-S پیشنهاد شده است. این مدل جدید می‌تواند یک دسته وسیع‌تر از سیستم‌های غیرخطی را ارائه کند. استفاده از حسابان مرتبه کسری می‌تواند منجر به کارایی سیستم‌های کنترل سنتی گردد. سیستم‌های مرتبه کسری می‌توانند مدل دقیق‌تری از سیستم واقعی ارائه دهند. بنابراین در این تحقیق مسئله هم‌زمان‌سازی سیستم مرتبه (ادامه دارد)

2010 Mathematics Subject Classification. 05C72, 94D05

* Corresponding author

E-mails: abazar_keikha@yahoo.com.

عبارات و کلمات کلیدی. مدلسازی فازی چند جمله‌ای، سیستم‌های آشوبی مرتبه کسری، هم‌زمان‌سازی، روش جمع مربعات (SOS).

کسری چن چند پیچکی به کمک روش چند جمله‌ای فازی انجام شده است. در طراحی کنترل‌کننده بهره‌های فیدبک بدست آمده توسط روش جمع مربعات (*SOS*) بدست آمده‌اند. سرانجام نتایج شبیه‌سازی کارایی روش طراحی کنترل فازی چند جمله‌ای پیشنهادی را نشان داده است.

۱. سرآغاز

سیستم‌های آشوبی، سیستم‌هایی می‌باشند که به طور طبیعی به شدت غیرخطی بوده و رفتار دینامیکی پیچیده‌ای را از خود نشان می‌دهند. این سیستم‌ها به شرایط اولیه بسیار حساس می‌باشند [۲۸، ۴].

در سالیان اخیر، تحقیقات زیادی روی سیستم‌های فازی مدل تاکاگی-سوگنو، مدل چند جمله‌ای و تئوری آشوب توسط مهندسين سیستم و کنترل انجام شده است [۴، ۲۸، ۳۶، ۱۳، ۸، ۲۷، ۲۱، ۳۲، ۳۱، ۱۶].

از طرف دیگر در دنیای مهندسی و زمانی که به کاربردهای عملی می‌اندیشیم، پدیده مهم آشوب خودنمایی می‌کند و لذا کنترل آشوب تأثیر زیادی روی افزایش عملکرد این گونه سیستم‌ها به لحاظ زمان و انرژی خواهد داشت.

در کنار هم قرار دادن این دو مقوله در چارچوب مفهوم محاسبات نرم می‌باشد. استدلال‌گری تقریبی و دینامیک آشوب‌گونه مغز انسان می‌تواند دلیلی بر پردازش حجم عظیمی از اطلاعات به صورت یک‌جا باشد. بنابراین ترکیب کردن سیستم‌های فازی و تئوری آشوب دارای پتانسیل زیادی برای تحقیقات علمی و مهندسی پیش رو می‌باشد. با توجه به اینکه آشوب در کاربردهای مهندسی خودنمایی می‌کند، دانشمندان تحقیقات زیادی بر روی کنترل آشوب [۸]، هم‌زمان‌سازی [۴، ۲۸، ۲۷]، یاد هم‌زمان‌سازی [۲۷] انجام داده‌اند که تا هم اکنون ادامه دارد. تمام این روش‌ها میسر نمی‌شود، مگر آنکه مدل مناسبی از سیستم در اختیار داشته باشیم. مدلسازی فازی برای سیستم‌های غیر خطی دارای عدم قطعیت به کمک فازی نوع ۲ ارایه گردید که پدیده چترینگ باعث کاهش تلاش کنترل‌کننده فازی می‌شود و خطا کاهش می‌یابد [۱۶]. یکی از مزایایی که مدلسازی فازی دارد، آن است که قابل درک می‌باشد. ثابت شده است که مدل‌های فازی تقریب‌گرهای جهانی برای سیستم‌های غیر خطی می‌باشند. بنابراین در تحقیقات از مدل‌های فازی تاکاگی-سوگنو به طور گسترده‌ای در مدلسازی سیستم‌های آشوبی استفاده شده است [۲۶، ۱۰، ۱، ۳۷، ۳۵، ۶]. اما توجه کمتری به مدل‌های فازی چند جمله‌ای شده است [۳، ۴]. سیستم‌های فازی جایگاه خود را در بسیاری صنایع مانند اتوماسیون و کنترل باز

کرده‌اند.

هم‌زمان با استفاده کنترل‌کننده‌های فازی در بحث هم‌زمان‌سازی و کاربرد آن در مخابرات امن [۳۴]، استراتژی هم‌زمان‌سازی آشوبی مختلفی به صورت تئوری در تحقیقات به کار برده شده است. می‌توان به کنترل فیدبک حالت [۷]، کنترل مد لغزشی [۹، ۳۰]، کنترل تطبیقی [۲۳، ۳۳]، کنترل گام به عقب [۱۲]، کنترل فعال [۵] و کنترل منطق فازی اشاره نمود [۳، ۶، ۳۵].

یک مدل فازی یک ابزار ریاضی به منظور نمایش سیستم غیر خطی می‌باشد. این مدل فازی سپس برای تحلیل و طراحی کنترل‌کننده استفاده می‌شود. مدل‌های فازی گوناگونی پیشنهاد شده‌اند. از این مدل‌ها می‌توان به مجموعه‌های فازی نوع ۱-۲ خطی و چند جمله‌ای اشاره نمود.

گرچه سیستم فازی T-S مزایای زیادی از خود نشان داده است، اما هنوز دارای چند نقصان می‌باشد. با در نظر گرفتن مفهوم غیرخطی، یک مدل ریاضی را می‌توان به صورت مدل فازی T-S با در نظر گرفتن یک حوزه عامل فشرده توصیف نمود. سپس، می‌توان مدل فازی T-S به صورت یک مدل غیر خطی محلی در نظر گرفت. نتایج تحلیلی مربوط به مدل فازی T-S هنگامی معتبر می‌باشند که سیستم در حوزه‌ی عملیاتی در نظر گرفته شده کار کند. نتایج بدست آمده از LMI ها خیلی محافظه کارانه است و قسمت تالی فازی T-S را می‌توان فقط به صورت یک ماتریس خطی نوشت. این مشکل را می‌توان بوسیله‌ی جابه‌جا نمودن زیر سیستم‌های خطی در قسمت تالی قواعد بوسیله‌ی زیر سیستم‌های چند جمله‌ای رفع نمود. که به این مدل، فازی چند جمله‌ای نوع ۱ گفته می‌شود. با وجود چند جمله‌ای‌ها در زیر سیستم‌ها، این مدل فازی می‌تواند انواع سیستم‌های غیر خطی و وسیع‌تری را مدل‌سازی نماید.

در سیستم فازی چند جمله‌ای کنترل‌کننده فازی مبتنی بر روش جمع مربعات SOS و مدل‌سازی فازی چند جمله‌ای موثرتر از کنترل‌کننده فازی مبتنی بر LMI می‌باشند [۳۲]. قسمت‌های تالی مدل فازی چند جمله‌ای با ماتریس چند جمله‌ای تشکیل شده است. بنابراین، شرایط پایداری SOS کلی‌تر از شرایط پایداری LMI می‌باشند [۳]. بنابراین سیستم‌های فازی چند جمله‌ای معیارهای ساده‌تری برای تحلیل پایداری و طراحی کنترل‌کننده در اختیار قرار می‌دهند. تعداد مدل‌های محلی به طور عمومی کمتر از سیستم‌های فازی T-S می‌باشد و شرایط طراحی SOS روش‌های طراحی مبتنی بر LMI برای مدل فازی T-S را به عنوان یک حالت خاص در نظر می‌گیرند.

کنترل‌کننده‌های فازی فیدبک حالت دینامیک از خطا دارای دینامیک‌هایی در خروجی‌شان هستند

که با استفاده از مجموعه‌ای از معادلات مرتبه اول دیفرانسیلی تعیین می‌شوند. این نوع از کنترل‌کننده‌های فازی در ردیابی کنترل مرجع و دفع اغتشاش مناسب هستند. در این تحقیق ابتدا سیستم‌های آشوبی چن ارباب و برده مرتبه کسری به مدل‌های معادل چند جمله‌ای فازی انتقال می‌یابند. سپس یک کنترل فازی چند جمله‌ای به منظور هم‌زمان‌سازی مدل‌های فازی چند جمله‌ای ارباب و برده طراحی می‌شود. طراحی کنترل فازی چند جمله‌ای در مقوله‌ی شرایط جمع مربعات (SOS) انجام می‌شود که می‌تواند بوسیله ابزار بهینه‌سازی SOS به نام SOSTOOLS انجام شود [۱۱]. در سالیان اخیر محاسبات مرتبه کسری به عنوان یک میدان تحقیقاتی فعال برای دانشمندان و محققان مورد توجه قرار گرفته است. نظریه‌ی محاسبات مرتبه کسری کاربردهای زیادی در علوم مختلف شامل مکانیک سیالات، کوانتوم، مدل زیستی، دانش مواد و غیره دارد. سیستم‌ها با محاسبات مرتبه کسری می‌توانند انعطاف پذیری بیشتری در مدل ایجاد کنند. این سیستم‌ها رفتار غیر محلی‌ای دارند که در آن حالت آینده نه فقط به حالت فعلی وابسته است، بلکه همچنین به تمام تاریخچه حالات گذشته بستگی دارد. در سیستم‌های مرتبه کسری پارامترهای سیستم و مرتبه‌های کسری می‌توانند سیگنال‌های آشوبی متفاوتی ایجاد کنند. بنابراین این سیستم‌ها کاربردهای بیشتری در مخابرات امن دارند. در طول سالیان گذشته سیستم‌های مرتبه کسری زیادی مانند چوآی مرتبه کسری [۱۵]، راسلر مرتبه کسری [۱۸]، لورنز مرتبه کسری [۲۰، ۲، ۱۴]، لو مرتبه کسری [۱۷]، چن مرتبه کسری [۲۴] معرفی شدند. در مقاله [۴] سیستم آشوبی چن در نظر گرفته شده و طراحی کنترل‌کننده چند جمله‌ای فازی برای هم‌زمان‌سازی سیستم‌های آشوبی چن چند پیچکی مورد توجه قرار گرفته است. اما با توجه به تحقیقات گذشته توجه چندانی به مدل‌سازی فازی و هم‌زمان‌سازی سیستم‌های آشوبی مرتبه کسری نشده است.

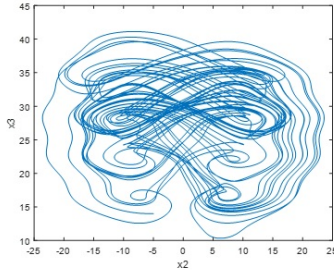
در بخش ۲ این مطالعه به بیان مسئله و توصیف سیستم آشوبی مرتبه کسری چن چند پیچکی پرداخته شده؛ و در بخش ۳ کنترل‌کننده فازی و مدل چند جمله‌ای آن برای هم‌زمان‌سازی و کاهش خطا ارائه گردیده است. در بخش ۴ نتایج حاصل از شبیه‌سازی در سه قسمت شامل سیستم آشوبی بدون اغتشاش، با اغتشاش و سیستم دارای عدم قطعیت مطرح شده؛ و در بخش ۵ نتایج حاصله مقایسه گردیده و نظراتی برای کارهای پژوهشی آینده به بحث گذاشته شده است.

۲. توصیف سیستم و فرمول نویسی مسئله

یک سیستم آشوبی چن چندپیچکی به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود [۴].

$$(۱.۲) \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = a(x_2 - x_1) \\ \dot{x}_2 = (c - a - x_3 + d \sin x_3)x_1 + cx_2 \\ \dot{x}_3 = x_1x_2 - bx_3 \end{cases}$$

که x_1, x_2, x_3 متغیرهای حالت و a, b, c, d پارامترهای سیستم می‌باشند، به طوری که $d = ۸, c = ۲۸, b = ۳, a = ۳۵$ است. یک جاذب شش پیچکی چن در شکل ۱ نشان داده شده است.



شکل ۱: منحنی فاز x_2, x_3 سیستم آشوبی چن چند پیچکی

سیستم مرتبه کسری چن آشوبی به صورت معادله ۱.۴ می‌باشد:

$$(۲.۲) \quad \begin{cases} D^q x_1 = a(x_2 - x_1) \\ D^q x_2 = (c - a - x_3 + d \sin x_3)x_1 + cx_2 \\ D^q x_3 = x_1x_2 - bx_3 \end{cases}$$

که در آن D^q مشتق با مرتبه کسری q است. با استفاده از تعریف مشتق گرانوالد لتیکوو سیستم را شبیه سازی می‌کنیم. روابط تعریف مشتق گرانوالد لتیکوو به صورت زیر است [۲۲]:

$$(۳.۲) \quad D_t^q f(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{h^q} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \binom{q}{j} f(t - jh)$$

که

$$\binom{q}{j} = \frac{q!}{j!(q-j)!} = \frac{\Gamma(q+1)}{\Gamma(j+1)\Gamma(q-j+1)}$$

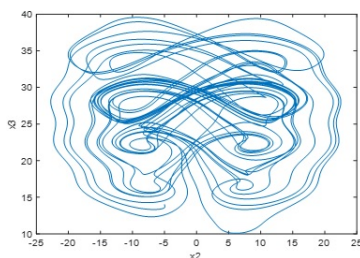
اگر $n = \frac{t-a}{h}$ ، که a ثابت حقیقی است که یک مقدار حد را بیان نموده و می‌توان نوشت:

$$(۴.۲) \quad {}_a D_t^q f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^q} (-1)^j \binom{q}{j} f(t - jh)$$

در محاسبه‌ی عددی مشتقات مرتبه کسری، تقریب عددی آشکار مشتق q ام در نقاط kh ($k = 1, 2, \dots$) حالت زیر را نگه می‌دارد:

$$(۵.۲) \quad \left(k - \frac{L_m}{h}\right) D_{t_k}^q f(t) \approx h^{-q} \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{q}{j} f(t_k - j)$$

منحنی فاز سیستم مرتبه کسری شده چن با $q = ۰.۹۹$ در شکل ۲ نشان داده شده است. به



شکل ۲: منحنی فاز x_2, x_3 سیستم مرتبه کسری چن

منظور طرح مسئله هم‌زمان‌سازی ارباب و برده، سیستم ارباب به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

سیستم آشوبی ارباب:

$$(۶.۲) \quad \begin{cases} D^q x_{m1} = a(x_{m2} - x_{m1}) \\ D^q x_{m2} = (c - a - x_{m3} + d \sin x_{m3})x_{m1} + cx_{m2} \\ D^q x_{m3} = x_{m1}x_{m2} - bx_{m3} \end{cases}$$

سیستم آشوبی برده:

$$(۷.۲) \quad \begin{cases} D^q x_{s1} = a(x_{s2} - x_{s1}) + u_1 \\ D^q x_{s2} = (c - a - x_{s3} + d \sin x_{s3})x_{s1} + cx_{s2} + u_2 \\ D^q x_{s3} = x_{s1}x_{s2} - bx_{s3} + u_3 \end{cases}$$

که x_{m1}, x_{m2}, x_{m3} متغیرهای حالت سیستم آشوبی ارباب و x_{s1}, x_{s2}, x_{s3} متغیرهای حالت سیستم آشوبی برده می‌باشند. u_1, u_2, u_3 ورودی‌های کنترل سیستم آشوبی برده می‌باشند که باید به منظور هم‌زمان‌سازی سیستم‌های ارباب و برده طراحی شوند.

۳. طراحی کنترل فازی چند جمله‌ای برای هم‌زمان‌سازی

در این بخش طراحی کنترل فازی چند جمله‌ای برای هم‌زمان‌سازی سیستم آشوبی ارباب و ۶.۲ و سیستم آشوبی برده ۷.۲ ارائه شده است. در طراحی سیستم‌های آشوبی ارباب و برده به مدل‌های فازی چند جمله‌ای معادل انتقال می‌یابند. سپس یک مدل فازی چند جمله‌ای به منظور هم‌زمان‌سازی مدل‌های فازی چند جمله‌ای ارباب و برده که معادل با سیستم‌های آشوبی ارباب و برده اصلی می‌باشند طراحی می‌شوند.

الف- مدل فازی چند جمله‌ای سیستم آشوبی

سیستم آشوبی ارباب ۶.۲ و سیستم آشوبی برده ۷.۲ را می‌توان به طور دقیقی به صورت مدل‌های فازی چند جمله‌ای ارائه داد:

$$(۱.۳) \quad D^q x_m = \sum_{i=1}^2 h_i(x_m) A_i(x_m) x_m$$

$$(۲.۳) \quad D^q x_s = \sum_{i=1}^2 h_i(x_s) A_i(x_s) x_s + u$$

که $x_m = [x_{m1}, x_{m2}, x_{m3}]^T$ بردار حالت سیستم ارباب، $x_s = [x_{s1}, x_{s2}, x_{s3}]^T$ بردار حالت سیستم برده و $u = [u_1, u_2, u_3]$ ورودی کنترلی می‌باشند. $h_i(x)$ درجه عضویت نرمال شده، $A_i(x) \in \mathcal{R}^{n \times n}$ ماتریس سیستم که n تعداد ابعاد سیستم برابر با ۳ می‌باشد.

و

$$h_1(x_m) = \begin{cases} \frac{\rho \sin(x_{m\gamma} - x_{m\beta})}{x_{m\beta}} + 1, & x_{m\beta} \neq 0 \\ 0, & x_{m\beta} = 0 \end{cases}, \quad h_2(x_m) = 1 - h_1(x_m)$$

$$h_1(x_s) = \begin{cases} \frac{\rho \sin(x_{s\gamma} - x_{s\beta})}{x_{s\beta}} + 1, & x_{s\beta} \neq 0 \\ 0, & x_{s\beta} = 0 \end{cases}, \quad h_2(x_s) = 1 - h_1(x_s)$$

$$A_1(x_m) = \begin{bmatrix} -a & a & 0 \\ c - a - x_{m\beta} & c & dx_{m\alpha} \\ x_{m\beta} & 0 & -b \end{bmatrix}$$

$$A_2(x_m) = \begin{bmatrix} -a & a & 0 \\ c - a - x_{m\beta} & c & dx_{m\alpha}(1 - x_{m\beta}^\gamma/\rho) \\ x_{m\beta} & 0 & -b \end{bmatrix}$$

$$A_1(x_s) = \begin{bmatrix} -a & a & 0 \\ c - a - x_{s\beta} & c & dx_{s\alpha} \\ x_{s\beta} & 0 & -b \end{bmatrix}$$

$$A_2(x_s) = \begin{bmatrix} -a & a & 0 \\ c - a - x_{s\beta} & c & dx_{s\alpha}(1 - x_{s\beta}^\gamma/\rho) \\ x_{s\beta} & 0 & -b \end{bmatrix}$$

ب- طراحی کنترل کننده فازی فعال چند جمله‌ای

تعریف می‌شود که $e \equiv x_s - x_m$ ، یک کنترل کننده فازی چند جمله‌ای به منظور هم‌زمان‌سازی سیستم آشوبی ارباب ۶.۲ و سیستم آشوبی برده ۷.۲ به صورت زیر طراحی می‌شود:

$$(۳.۳) \quad u = u_n + u_f$$

با

$$(۴.۳) \quad u_n = - \sum_{i=1}^2 h_i(x_s) A_i(x_s) x_s + \sum_{i=1}^2 h_i(x_m) A_i(x_m) x_m$$

$$(۵.۳) \quad u_f = -\left(\sum_{i=1}^2 h_i(x_m) F_i(x_m)\right) e$$

قضیه ۱.۳. سیستم آشوبی ارباب ۶.۲ و سیستم آشوبی برده ۷.۲ را می‌توان بوسیله‌ی کنترل کننده‌ی فازی چند جمله‌ای ۳.۳ همزمان نمود اگر یک ماتریس معین $X \in \mathcal{R}^{3 \times 3}$ وجود داشته باشد و ماتریس‌های چند جمله‌ای $M_i(x_m) \in \mathcal{R}^{3 \times 3}$ به طوری وجود داشته باشند که شرایط زیر برقرار شود:

$$(۶.۳) \quad \nu^T (X - \epsilon_1 I) \nu \quad \text{is} \quad \text{SOS}$$

$$(۷.۳) \quad \nu^T (M_i^T(x_m) + M_i(x_m) - \epsilon_2 I) \nu \quad \text{is} \quad \text{SOS}, \quad i = 1, 2$$

که ϵ_1 و ϵ_2 مقادیر مثبت خیلی کوچک می‌باشند. در این حالت بهره‌ی فیدبک در ۵.۳ به صورت زیر به دست می‌آید:

$$(۸.۳) \quad F_i(x_m) = M_i(x_m) X^{-1}$$

پارامترها به کمک قواعد تطبیق زیر تخمین زده می‌شوند:

$$D^q \hat{a} = -k(e_a),$$

$$(۹.۳) \quad D^q \hat{b} = -k(e_b),$$

$$D^q \hat{c} = -k(e_c).$$

که در آن k بهره فیدبک خطای پارامترها می‌باشد و $k > 0$. خطاهای پارامتری به صورت زیر می‌باشند:

$$e_a = \hat{a} - a,$$

$$(۱۰.۳) \quad e_b = \hat{b} - b,$$

$$e_c = \hat{c} - c.$$

اثبات. سیستم آشوبی ارباب ۶.۲ و سیستم آشوبی برده ۷.۲ به طور دقیق به مدل‌های فازی چند جمله‌ای ۱.۳ و ۲.۳ انتقال می‌یابند. بنابراین سیستم خطا را می‌توان به صورت زیر

تعریف نمود:

$$\begin{aligned}
 D^q e &= D^q x_s - D^q x_m \\
 (11.3) \quad &= \sum_{i=1}^{\gamma} h_i(x_s) A_i(x_s) x_s + u - \sum_{i=1}^{\gamma} h_i(x_m) A_i(x_m) x_m
 \end{aligned}$$

تابع لیاپانوف به صورت زیر تعریف می‌شود [۲۹]

$$(12.3) \quad V(e) = \frac{1}{\gamma} \sum_{i=1}^{\gamma} e_i^2 + \frac{1}{\gamma} e_a^2 + \frac{1}{\gamma} e_b^2 + \frac{1}{\gamma} e_c^2$$

که

$$P = \begin{bmatrix} 1/\gamma & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1/\gamma & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1/\gamma \end{bmatrix} = X^{-1}$$

سپس مشتق V به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\begin{aligned}
 \dot{V}(e) &= e_1(D^q e_1) + e_2(D^q e_2) + e_3(D^q e_3) + e_a(D^q e_a) + e_b(D^q e_b) + e_c(D^q e_c) \\
 &= e_1 \left(\sum_{i=1}^{\gamma} h_i(x_{s1}) A_i(x_{s1}) x_{s1} - \sum_{i=1}^{\gamma} h_i(x_{m1}) A_i(x_{m1}) x_{m1} + u_1 \right) +
 \end{aligned}$$

(۱۳.۳)

$$\begin{aligned}
 &e_2 \left(\sum_{i=1}^{\gamma} h_i(x_{s2}) A_i(x_{s2}) x_{s2} - \sum_{i=1}^{\gamma} h_i(x_{m2}) A_i(x_{m2}) x_{m2} + u_2 \right) + \\
 &e_3 \left(\sum_{i=1}^{\gamma} h_i(x_{s3}) A_i(x_{s3}) x_{s3} - \sum_{i=1}^{\gamma} h_i(x_{m3}) A_i(x_{m3}) x_{m3} + u_3 \right) + \\
 &e_a(-k(e_a)) + e_b(-k(e_b)) + e_c(-k(e_c))
 \end{aligned}$$

اگر

$$\begin{aligned}
 u_1 &= - \sum_{i=1}^2 h_i(x_{s1}) A_i(x_{s1}) x_{s1} + \sum_{i=1}^2 h_i(x_{m1}) A_i(x_{m1}) x_{m1} + u_{f1} \\
 (14.3) \quad u_2 &= - \sum_{i=1}^2 h_i(x_{s2}) A_i(x_{s2}) x_{s2} + \sum_{i=1}^2 h_i(x_{m2}) A_i(x_{m2}) x_{m2} + u_{f2} \\
 u_3 &= - \sum_{i=1}^2 h_i(x_{s3}) A_i(x_{s3}) x_{s3} + \sum_{i=1}^2 h_i(x_{m3}) A_i(x_{m3}) x_{m3} + u_{f3}
 \end{aligned}$$

آنگاه

$$(15.3) \quad \dot{V} = e_1 u_{f1} + e_2 u_{f2} + e_3 u_{f3} - k(e_a^2 + e_b^2 + e_c^2).$$

با جایگذاری u_f خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
 \dot{V} &= - \sum_{i=1}^2 h_i(x_{m1}) F_i(x_{m1}) e_1^2 - \sum_{i=1}^2 h_i(x_{m2}) F_i(x_{m2}) e_2^2 \\
 (16.3) \quad &- \sum_{i=1}^2 h_i(x_{m3}) F_i(x_{m3}) e_3^2 - k(e_a^2 + e_b^2 + e_c^2) \leq 0.
 \end{aligned}$$

فرض شده است که $k > 0$ باشد. بخش دوم معادله‌ی ۱۴.۳ کوچکتر از صفر خواهد شد و بخش اول معادله‌ی ۱۶.۳ را در نظر می‌گیریم که به صورت زیر است:

$$\begin{aligned}
 \dot{V}_1 &= - \sum_{i=1}^2 h_i(x_{m1}) F_i(x_{m1}) e_1^2 - \sum_{i=1}^2 h_i(x_{m2}) F_i(x_{m2}) e_2^2 \\
 (17.3) \quad &- \sum_{i=1}^2 h_i(x_{m3}) F_i(x_{m3}) e_3^2 \leq 0.
 \end{aligned}$$

با اعمال معادله ۸.۳ در ۱۷.۳ داریم:

$$\begin{aligned}
 &- \left(P M_i(x_m)^T \right) + P \left(- M_i(x_m) P \right) < 0 \\
 (18.3) \quad &\Rightarrow M_i(x_m)^T + M_i(x_m) > 0, \quad i = 1, 2, 3.
 \end{aligned}$$

نامعادله ۱۶.۳ در صورت برقرار شدن شرط‌های ۶.۳ و ۷.۳ برقرار می‌شود. فرض شده است که $k > 0$ باشد. با توجه به اینکه $F_i(X_m)$ بدست آمده از SOS مثبت معین می‌باشد. لذا شرط $V < 0$ برقرار می‌شود.

هدف این است که اغتشاش موجود در سیستم برده را طوری تخمین بزنیم که بتوانیم تا حد امکان اثر آن را بر روی سیستم رفع نماییم. بدین منظور تابع لیاپانوف زیر تعریف می‌شود:

$$(۱۹.۳) \quad V(e) = \sum_{i=1}^3 e_i^2 + \frac{1}{\gamma} e_a^2 + \frac{1}{\gamma} e_b^2 + \frac{1}{\gamma} e_c^2 + \sum_{i=1}^3 e_{di}^2$$

$$\begin{aligned} \dot{V}(e) &= e_1 D^q e_1 + e_2 D^q e_2 + e_3 D^q e_3 + e_a D^q e_a + e_b D^q e_b + e_c D^q e_c \\ &\quad + e_{d1} D^q e_{d1} + e_{d2} D^q e_{d2} + e_{d3} D^q e_{d3} \\ &= e_1 \left(\sum_{i=1}^{\gamma} h_i(x_{s1}) A_i(x_{s1}) x_{s1} - \sum_{i=1}^{\gamma} h_i(x_{m1}) A_i(x_{m1}) x_{m1} + \right. \end{aligned}$$

(۲۰.۳)

$$\begin{aligned} &\left. u_1 + d_1 \right) + e_2 \left(\sum_{i=1}^{\gamma} h_i(x_{s2}) A_i(x_{s2}) x_{s2} - \sum_{i=1}^{\gamma} h_i(x_{m2}) A_i(x_{m2}) x_{m2} + \right. \\ &\left. u_2 + d_2 \right) + e_3 \left(\sum_{i=1}^{\gamma} h_i(x_{s3}) A_i(x_{s3}) x_{s3} - \sum_{i=1}^{\gamma} h_i(x_{m3}) A_i(x_{m3}) x_{m3} + \right. \\ &\left. u_3 + d_3 \right) + e_a (-k(e_a)) + e_b (-k(e_b)) + e_c (-k(e_c)) + \\ &\quad e_{d1} D^q e_{d1} + e_{d2} D^q e_{d2} + e_{d3} D^q e_{d3}. \end{aligned}$$

که d_i , $i = 1, 2, 3$ سیگنال اغتشاش وارد شده به سیستم برده می‌باشد.
اگر

$$u_1 = - \sum_{i=1}^{\gamma} h_i(x_{s1}) A_i(x_{s1}) x_{s1} + \sum_{i=1}^{\gamma} h_i(x_{m1}) A_i(x_{m1}) x_{m1} + u_{f1} - \hat{d}_1$$

(۲۱.۳)

$$\begin{aligned} u_2 &= - \sum_{i=1}^{\gamma} h_i(x_{s2}) A_i(x_{s2}) x_{s2} + \sum_{i=1}^{\gamma} h_i(x_{m2}) A_i(x_{m2}) x_{m2} + u_{f2} - \hat{d}_2 \\ u_3 &= - \sum_{i=1}^{\gamma} h_i(x_{s3}) A_i(x_{s3}) x_{s3} + \sum_{i=1}^{\gamma} h_i(x_{m3}) A_i(x_{m3}) x_{m3} + u_{f3} - \hat{d}_3 \end{aligned}$$

آنگاه

$$\dot{V} = e_1 u_{f1} + e_2 u_{f2} + e_3 u_{f3} - k(e_a^y + e_b^y + e_c^y) - e_1 \hat{d}_1 - e_2 \hat{d}_2 - e_3 \hat{d}_3 - e_{d1} D^q e_{d1} - e_{d2} D^q e_{d2} - e_{d3} D^q e_{d3}. \quad (22.3)$$

u_f را از معادله‌ی ۵.۳ استفاده نموده و در معادله ۲۲.۳ جایگذاری می‌کنیم.

$$\begin{aligned} \dot{V} = & - \sum_{i=1}^3 h_i(x_{m1}) F_i(x_{m1}) e_1^y - \sum_{i=1}^3 h_i(x_{m2}) F_i(x_{m2}) e_2^y - \\ & \sum_{i=1}^3 h_i(x_{m3}) F_i(x_{m3}) e_3^y - k(e_a^y + e_b^y + e_c^y) - e_1(\hat{d}_1 - d_1) - \\ (23.3) \quad & e_2(\hat{d}_2 - d_2) - e_3(\hat{d}_3 - d_3) + e_{d1}(D^q \hat{d}_1 - D^q d_1) + \\ & e_{d2}(D^q \hat{d}_2 - D^q d_2) + e_{d3}(D^q \hat{d}_3 - D^q d_3). \end{aligned}$$

بنابراین تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned} (24.3) \quad D^q \hat{d}_1 &= e_1 + D^q d_1 - k_{d1} e_{d1}; \quad D^q \hat{d}_2 = e_2 + D^q d_2 - k_{d2} e_{d2}; \\ D^q \hat{d}_3 &= e_3 + D^q d_3 - k_{d3} e_{d3}. \end{aligned}$$

با جایگذاری معادله ۲۲.۳ در ۲۱.۳ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \dot{V} = & - \sum_{i=1}^3 h_i(x_{m1}) F_i(x_{m1}) e_1^y - \sum_{i=1}^3 h_i(x_{m2}) F_i(x_{m2}) e_2^y - \\ (25.3) \quad & - k(e_a^y + e_b^y + e_c^y) - e_1(\hat{d}_1 - d_1) - k_{d1} e_{d1}^y - k_{d2} e_{d2}^y - k_{d3} e_{d3}^y \leq 0 \end{aligned}$$

با توجه قضیه ۱.۳ و معادله ۲۵.۳ باید $k_{d_i} > 0$ ($i = 1, 2, 3$) انتخاب شود به طوری که $V \leq 0$. بنابراین معادله ۱۹.۳ اثبات شده و سیستم در حالت وجود عدم قطعیت و اغتشاشات پایدار می‌شود. □

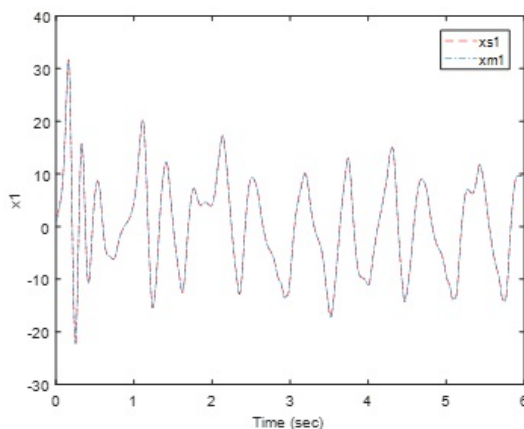
۴. نتایج شبیه‌سازی

۱.۴. در حالت بدون اغتشاش. پارامترهای سیستم آشوبی ارباب و برده به این صورت انتخاب شده‌اند. $a = 35, b = 3, c = 28, d = 8$. فرض شود شرایط اولیه‌ی سیستم ارباب به صورت $x_m(0) = [-9 \quad -5 \quad 14]$ و حالات اولیه‌ی سیستم برده به صورت باشد. با

حل شرایط SOS در قضیه ۱.۳ بهره‌های فیدبک چند جمله‌ای در ۹.۳ بوسیله‌ی بدست می‌آیند. مقدار F_1 و F_2 به صورت زیر بدست آمده است که در تمامی حالات استفاده می‌شود.

$$F_1 = F_2 = \begin{bmatrix} 17/9483 & 4/697 & 4/697 \\ 4/697 & 17/9483 & 4/697 \\ 4/697 & 4/697 & 17/9483 \end{bmatrix}$$

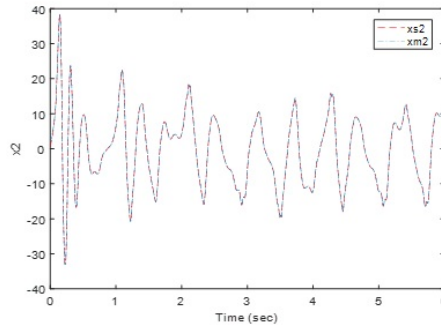
نتایج شبیه‌سازی در شکل‌های ۳ الی ۵ نشان داده شده است. شکل‌های ۳ تا ۵ ردیابی



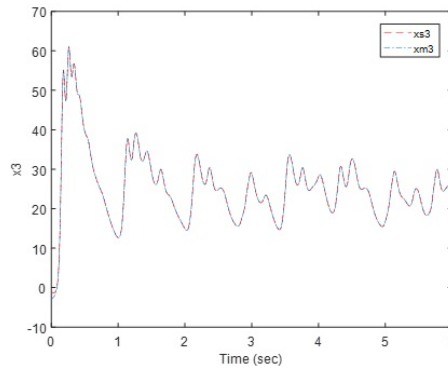
شکل ۳: منحنی هم‌زمان‌سازی سیگنال x_1 سیستم مرتبه کسری چن با استفاده از کنترل‌کننده چند جمله‌ای فازی

پارامترهای سیستم پیرو به سیستم پایه را نشان می‌دهد که با توجه به شکل‌های ۳ الی ۵ مشاهده می‌شود که هم‌زمان‌سازی به خوبی انجام شده است. منحنی خطاهای هم‌زمان‌سازی در شکل‌های ۶ الی ۹ نشان داده شده است. در شکل‌های فوق خطای حاصل از ردیابی هم‌زمان‌سازی سیستم پیرو ۱.۲ و سیستم پایه را مشاهده می‌کنیم از شکل‌های ۶ الی ۸ مشاهده می‌شود که هر سه خطای هم‌زمان‌سازی به سرعت به سمت صفر رسیده است.

طبق شکل ۹ مشاهده می‌شود که خطای هم‌زمان‌سازی سیستم پیرو ۱.۴ با سیستم پایه با سرعت مناسب به صفر همگرا شده و حداکثر در زمان $t = 0.4 \text{ sec}$ هر سه سیگنال به سمت صفر رسیده‌اند. بر اساس رابطه ۱۰.۳ از شکل ۱۰ مشاهده می‌شود که پارامترها به طور کامل تخمین زده شده‌اند.



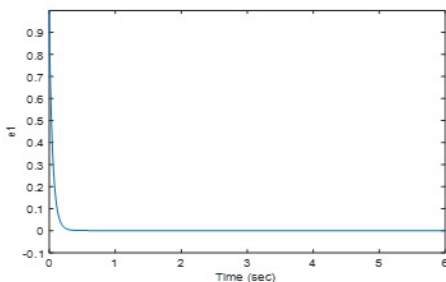
شکل ۴: منحنی هم‌زمان‌سازی سیگنال x_2 سیستم مرتبه کسری چن با استفاده از کنترل‌کننده چند جمله‌ای فازی



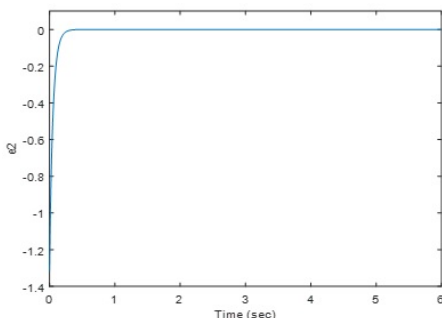
شکل ۵: منحنی هم‌زمان‌سازی سیگنال x_3 سیستم مرتبه کسری چن با استفاده از کنترل‌کننده چند جمله‌ای فازی

۲.۴. در حالت وجود اغتشاش. در این حالت اغتشاش از نوع متناوب سینوسی و نوع ناگهانی به سیستم پیرو اعمال می‌کنیم. مشابه با [۱۹] اغتشاش در سیستم پیرو قرار داده ایم. معادله‌ی سیستم پیرو به صورت زیر تغییر می‌کند:

$$(۱.۴) \quad \begin{cases} D^q x_{s1} = a(x_{s2} - x_{s1}) + d_1 + u_1 \\ D^q x_{s2} = (c - a - x_{s3} + d \sin x_{s3})x_{s1} + cx_{s2} + d_2 + u_2 \\ D^q x_{s3} = x_{s1}x_{s2} - bx_{s3} + d_3 + u_3 \end{cases}$$



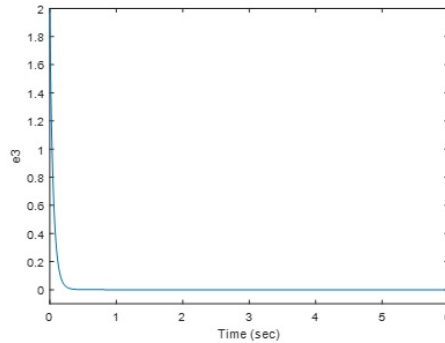
شکل ۶: منحنی خطای e_1 هم‌زمان‌سازی سیستم مرتبه کسری آشوبی چن با استفاده از کنترل کننده چند جمله‌ای فازی



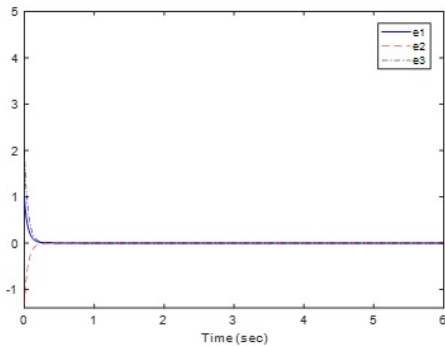
شکل ۷: منحنی خطای e_2 هم‌زمان‌سازی سیستم مرتبه کسری آشوبی چن با استفاده از کنترل کننده چند جمله‌ای فازی

که اگر $3 < t < 4$ آنگاه $d_i = 0.5 \cos(0.5k\frac{\pi}{4})$ ، در غیر این صورت $d_i = 0$ ؛ و k نشان دهنده شماره‌ی نمونه می‌باشد. همانطور که مشاهده می‌شود، یک اغتشاش ناگهانی در زمان $t = 3$ ثانیه اعمال شده است. با استفاده از کنترل‌کننده طراحی شده در بخش پیشین شبیه‌سازی را انجام می‌دهیم. نتایج شبیه‌سازی در ادامه آورده شده است. شکل ۱۱ خطای هم‌زمان‌سازی ناشی از ردیابی سیستم پیرو ۱.۲ با سیستم پایه در حالتی که در سیستم پایه اغتشاش داریم را نشان می‌دهد همانطور که مشاهده می‌شود، کنترل‌کننده قادر به حذف اغتشاش در $t = 3$ می‌باشد. همچنین اثر اغتشاش سینوسی کم شده است.

همانگونه که تعریف می‌شود $e \equiv x_s - x_m$ ، در شکل ۱۲ مشاهده می‌شود که خطای سیگنال x_2 نیز پس از ثانیه‌ی سوم سریعاً به سمت صفر رسیده است. همچنین اثر اغتشاش



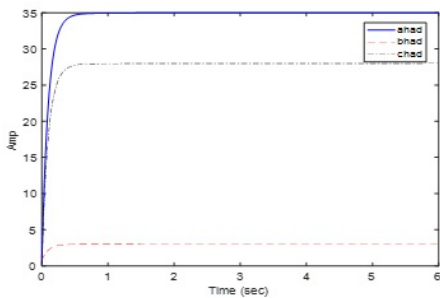
شکل ۸: منحنی خطای e_3 هم‌زمان‌سازی سیستم مرتبه کسری آشوبی چن ارباب و برده با استفاده از کنترل کننده چند جمله‌ای فازی



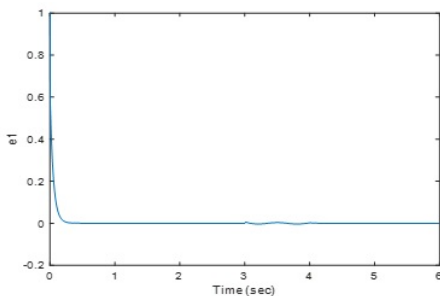
شکل ۹: منحنی خطای هم‌زمان‌سازی سیستم مرتبه کسری آشوبی چن ارباب و برده با استفاده از کنترل کننده چند جمله‌ای فازی

سینوسی کم شده است. مشابهاً در شکل ۱۳ مشاهده می‌شود که برای سیگنال x^3 نیز خطای هم‌زمان‌سازی پس از ثانیه سوم با وجود اغتشاش به سرعت به سمت صفر رسیده است. در شکل ۱۴ مشاهده می‌شود که هر سه خطا با وجود اغتشاش به سمت صفر رسیده‌اند. زمان رسیدن به صفر برابر با $t = 0.4 \text{ sec}$ است.

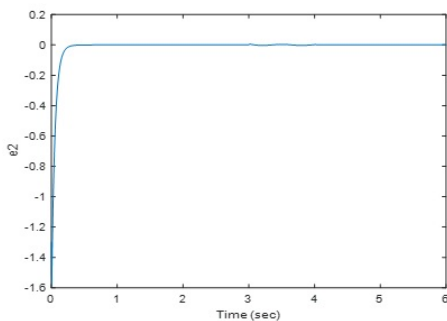
بر اساس $e_a = \hat{a} - a$ مشاهده می‌شود که با وجود اغتشاش در این حالت نیز پارامترهای سیستم آشوبی به طور کامل تخمین زده شده‌اند (به شکل ۱۵ رجوع شود).



شکل ۱۰: منحنی تخمین پارامترها بر حسب زمان در حالت بدون اغتشاش

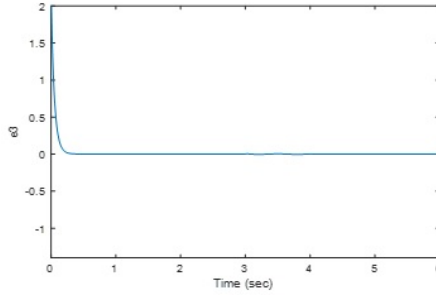


شکل ۱۱: منحنی خطای هم‌زمان‌سازی e_1 در حالت وجود اغتشاش

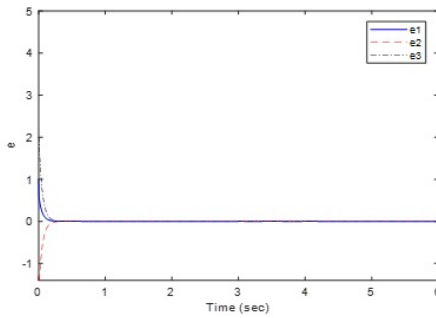


شکل ۱۲: منحنی خطای هم‌زمان‌سازی e_2 در حالت وجود اغتشاش

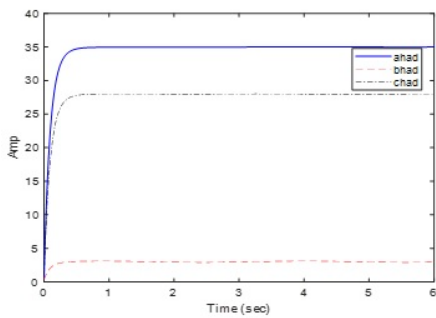
۳.۴. حالت با عدم قطعیت پارامتری. در این حالت بردار مقدار قطعیت را برای پارامترهای a, b, c به صورت زیر تعیین می‌کنیم. مشابه مقاله [۱۹] این پارامترها را به صورت زیر قرار



شکل ۱۳: منحنی خطای هم‌زمان‌سازی e_3 در حالت وجود اغتشاش



شکل ۱۴: منحنی خطای هم‌زمان‌سازی e_1, e_2, e_3 در حالت وجود اغتشاش



شکل ۱۵: منحنی تخمین پارامترها بر حسب زمان در حالت وجود اغتشاش

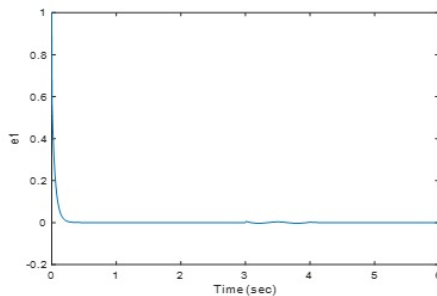
می‌دهیم.

$$a = a + 0.1 \sin(2t)$$

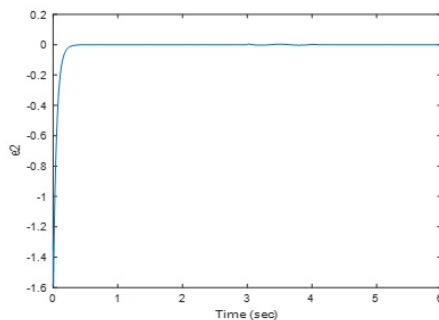
$$b = b + 0.1 \sin(2t)$$

$$c = c + 0.2 \cos(2t)$$

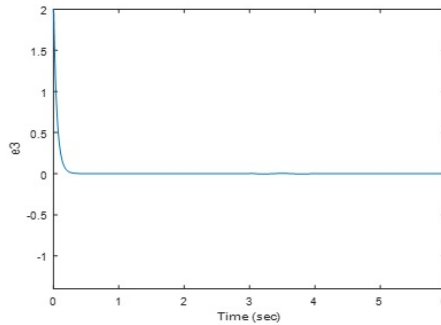
شبیه‌سازی‌ها را در این حالت انجام داده و نتایج را بدست می‌آوریم (به شکل‌های ۱۶ تا ۱۹ رجوع شود). شکل‌های ۱۶ الی ۱۹ خطای ردیابی متغیرهای سیستم پیرو ۱.۲ با سیستم پایه را به صورت مجزا و یکجا نمایش می‌دهند که با وجود عدم قطعیت و اغتشاش در سیستم پایه همگرایی مناسبی داریم.



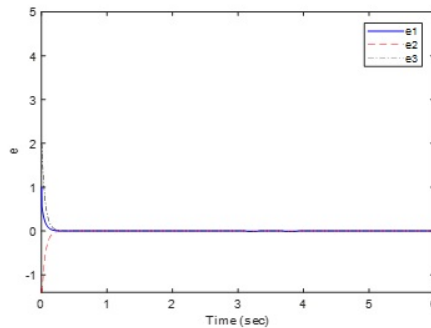
شکل ۱۶: منحنی خطای هم‌زمان‌سازی e_1 در حالت وجود اغتشاش و عدم قطعیت پارامتری



شکل ۱۷: منحنی خطای هم‌زمان‌سازی e_2 در حالت وجود اغتشاش و عدم قطعیت پارامتری



شکل ۱۸: منحنی خطای هم‌زمان‌سازی e^3 در حالت وجود اغتشاش و عدم قطعیت پارامتری

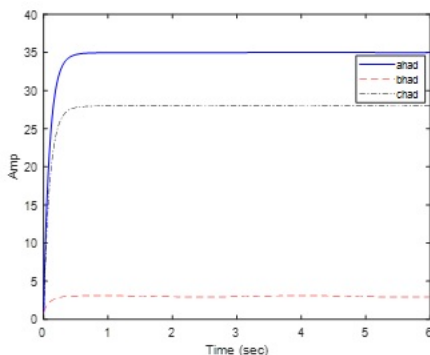


شکل ۱۹: منحنی خطای هم‌زمان‌سازی e در حالت وجود اغتشاش و عدم قطعیت پارامتری

بر اساس رابطه ۱۰.۳ مربوط به تخمین پارامترها، در شکل ۲۰ مشاهده می‌شود که با وجود هر دو مورد اغتشاش و عدم قطعیت در این حالت نیز پارامترها به سرعت تخمین زده شده‌اند. با توجه به شکل‌های بدست آمده مشاهده می‌شود که در حالت عدم قطعیت پارامتری نیز خطا به سرعت به سمت صفر رسیده است. بنابراین کنترل‌کننده فازی چند جمله‌ای پیشنهادی توانسته است بر عدم قطعیت پارامتری نیز غلبه کند.

۵. نتیجه گیری

در این مقاله، یک استراتژی طراحی کنترل فازی چند جمله‌ای برای هم‌زمان‌سازی سیستم‌های آشوبی مرتبه کسری چن چند پیچکی ارایه شد. سیستم‌های فازی چند جمله‌ای می‌توانند سیستم‌های غیر خطی گسترده تری را مدل‌سازی نمایند.



شکل ۲۰: منحنی تخمین پارامترها بر حسب زمان در حالت وجود اغتشاش و عدم قطعیت

سیستم‌های مرتبه کسری می‌توانند مدل دقیق‌تری را در مقابل با مرتبه صحیح ارائه دهند. به کمک ابزار SOS، ابتدا پایداری سیستم بررسی گردید و بهره‌های فیدبک کنترل‌کننده فازی چند جمله‌ای بدست آورده شد. حالات مختلف بدون اغتشاش، با اغتشاش، هر دو اغتشاش و عدم قطعیت پارامتری بررسی شدند. شبیه‌سازی‌ها در سه حالت اجرا شدند که همانطور که از منحنی‌ها مشخص است در حالت بدون اغتشاش سرعت هم‌زمان‌سازی در مقایسه با دو حالت دیگر کمی بهتر است و سیستم پیرو با سرعت بیشتری سیستم پایه را ردیابی می‌کند و در لحظات اولیه خطا سریعتر به صفر همگرا می‌شود در حالت عدم قطعیت پارامتری اگر میزان عدم قطعیت بیشتر شود سرعت همگرایی کاهش خواهد یافت. نتایج نشان دادند که طرح پیشنهادی توانسته است که به طور مؤثر و با سرعت زیادی دو سیستم آشوبی چن مرتبه کسری به کمک کنترل فازی چند جمله‌ای هم‌زمان نمایند. همچنین به کمک قواعد تطبیق پارامترها در حالات مختلف به خوبی تخمین زده شدند. با توجه به اینکه از کنترل‌کننده فازی چند جمله‌ای در بحث هم‌زمان‌سازی و مخابرات امن کمتر استفاده شده است به عنوان کار آینده می‌توان از ترکیب مد لغزشی و فازی چند جمله‌ای، کنترل‌کننده فازی چند جمله‌ای برای سیستم‌های آشوبی توزیعی و سیستم‌های آشوبی زمان محدود استفاده نمود.

مراجع

- [1] Alassafi M., Ha Sh., Alsaadi F., Ahmad A. (2021) Fuzzy synchronization of fractional-order chaotic systems using finite-time command filter. *Information Sciences*, 579, 325–346. <https://doi.org/10.1016/j.ins.2021.08.005>.

- [2] Babanli K. M., Kabaoglu R. O. (2024) Synchronization of fuzzy-chaotic systems with Z-controller in secure communication. *Information Sciences*, 657, 119988. <https://doi.org/10.1016/j.ins.2023.119988>.
- [3] Chen Y. J., Chauo H. G., Wang W. J., Tsai S. H., Tanaka K., Wang H., Wang K. C. (2020) A polynomial-fuzzy-model-based synchronization methodology for the multi-scroll Chen chaotic secure communication system, *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, 87, 103251, <https://doi.org/10.1016/j.engappai.2019.103251>.
- [4] Chen Y. J., Chou H. G., Wang. W. J. (2017) Polynomial fuzzy control design for synchronization Multi-scroll Chen Chaotic Systems. *IEEE-ICASI - Meen, Prior Lam (Eds)*.
- [5] Chibani A., Chadli M., Benhadj N. (2016) A Sum of Squares Approach for Polynomial Fuzzy Observer Design for Polynomial Fuzzy Systems with Unknown Inputs. *International Journal of Control, Automation and Systems*, 14, 1, 323-330.
- [6] Dong H., Haung C., Cao J., Liu H. (2024) Adaptive fuzzy quantized prescribed performance synchronization of uncertain non-strict feedback chaotic systems with time-varying actuator failure, *School of Mathematics, Southeast University, Nanjing*, 211189, <https://doi.org/10.1016/j.ins.2024.121241>.
- [7] Feki, M. (2017) Sliding Mode Based Control and Synchronization of Chaotic Systems in Presence of Parametric Uncertainties. In: Vaidyanathan S., Lien CH. (eds) *Applications of Sliding Mode Control in Science and Engineering. Studies in Computational Intelligence*, 709. Springer, Cham.
- [8] Gwo-Ruey Y., Yong-Dong C., Cheng C. H. (2021) Synthesis of Polynomial Fuzzy Model-Based Designs with Synchronization and Secure Communications for Chaos Systems with H_∞ Performance. 9, 2088. <https://doi.org/10.3390/pr9112088>.
- [9] Hamri N., Ouahabi R. (2015) Modified projective synchronization of different chaotic systems using adaptive control. *Computational and Applied Mathematics*, 36, 1315-1332.
- [10] Hau Y., Fang Z., Liu H. (2024) Adaptive T-S fuzzy synchronization for uncertain fractional-order chaotic systems with input saturation and disturbance. *Information Sciences*, 666, 120423. <https://doi.org/10.1016/j.ins.2024.120423>.
- [11] Hartley T. T., Lorenzo C. F., Qammer H. K. (1995) Chaos in a fractional order Chua's system. *IEEE Transaction on Circuits and Systems-1: Fundamental Theory and Applications*, 42, 8.
- [12] Huang C., Cao J. (2017) Active control strategy for synchronization and anti-synchronization of a fractional chaotic financial system. *Physica A*, 473, 262-275.
- [13] Jiafeng Y., Jian W., Xing W., ChunSong H., and Qinsheng L., (2019) H_∞ Synchronization of Non-linear Systems Based on Polynomial Fuzzy Model, *Proceedings of the 38th Chinese Control Conference July 27-30, Guangzhou, China*, DOI:10.23919/ChiCC.2019.8865389.

- [14] Jiang C., Liu S., Luo C. (2014) A New Fractional-Order Chaotic Complex System and Its Antisynchronization. Hindawi Publishing Corporation Abstract and Applied Analysis Volume 2014.
- [15] Li C., Chen G. (2004) Chaos and hyperchaos in the fractional-order Rossler equations. *Physica A*, 341, 55-61.
- [16] Lin T., and Chen M. (2011) Synchronization of uncertain chaotic systems based on adaptive type-2 fuzzy sliding mode control, *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, 24, 39–49.
- [17] Lu J. G., Chen G. (2006) A note on the fractional-order Chen system. *Chaos, Solitons and Fractals*, 27, 685-688.
- [18] Luo C., Wang X. (2013) Chaos in the fractional-order complex Lorenz system and its synchronization. *Nonlinear Dynamics*, 71, 241-257.
- [19] Mingzhi J. L., Zhang M. Y. (2016) Simpler ZD-achieving controller for chaotic systems synchronization with parameter perturbation, model uncertainty and external disturbance as compared with other controllers. *International Journal for Light and Electron Optics*, 131, 364.
- [20] Mohammadzadeh A., Ghaemi S. (2015) Synchronization of chaotic systems and identification of nonlinear systems by using recurrent hierarchical type-2 fuzzy neural networks. *ISA Transactions*, <http://dx.doi.org/10.1016/j.isatra.2015.03.016>.
- [21] Muthukumar P., Balasubramaniam P., Ratnavelu K. (2016) T-S fuzzy predictive control for fractional order and its applications. *Nonlinear Dynamics. An International Journal of Nonlinear Dynamics and Chaos in Engineering Systems*. Springer.
- [22] Ogunjo S. T., Ojo K. S., Fuwape I. A. (2017) Comparison of Three Different Synchronization Schemes for Fractional Chaotic Systems. Springer International Publishing AG.
- [23] Onma O.S., Njah A. N. (2014) Control and Synchronization of Chaotic and Hyperchaotic Lorenz Systems via Extended Backstepping Techniques. Hindawi Publishing Corporation *Journal of Nonlinear Dynamics*, 2014, Article ID 861727, 15 pages.
- [24] Podlubny I. (1999) *Fractional differential equations*. Academic Press, New York.
- [25] Prajna S., Papachristodoulou A., Parrilo P. A. (2002) SOSTOOLS –Sum of Squares Optimization Toolbox, User’s Guide. Available at <http://www.cds.caltech.edu/sostools>.
- [26] Sabzalian M., Mohammadzadeh A., Zhang W., Jemsittiparsert K. (2021) General type-2 fuzzy multi-switching synchronization of fractional-order chaotic systems. *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, 100, 104-163. <https://doi.org/10.1016/j.engappai.2021.104163>.
- [27] Selvaraj P., Kwon O.M., Lee S.H., Sakthivel R. (2023) Robust fault-tolerant control design for polynomial fuzzy systems . *Fuzzy Sets and Systems*, 464, 108406. <https://doi.org/10.1016/j.fss.2022.09.012>.

- [28] Senouci A., Boukabou A. (2016) Fuzzy modeling, stabilization and synchronization of multi-scroll chaotic systems. *Optik* 127 5351–5358.
- [29] Shao S., Chen M., Yan X. (2015) Adaptive sliding mode synchronization for a class of fractional-order chaotic systems with disturbance. *Nonlinear Dynamics*.
- [30] Tabasi M., Balochian S. (2018) Synchronization of the Chaotic Fractional-Order Genesio–Tesi Systems Using the Adaptive Sliding Mode Fractional-Order Controller. *Journal of Control, Automation and Electrical Systems*, 29, 15-21.
- [31] Tanaka K., Wang H. O. (2001) *Fuzzy Control Systems Design and Analysis: A Linear Matrix Inequality Approach*. John Wiley Sons, Inc.
- [32] Tanaka K., Yoshida H., Wang H. O. (2009) A sum-of-squares approach to modeling and control of nonlinear dynamical systems with polynomial fuzzy systems. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 17, 4.
- [33] Tirandaz H., Hajipour A. (2017) Adaptive synchronization and anti-synchronization of TSUCS and Lü unified chaotic systems with unknown parameters. *Optik*, 130, 543-549.
- [34] Vaidyanathan S., Boulkroune, A. (2016) A Novel 4-D Hyperchaotic Chemical Reactor System and Its Adaptive Control. In: Vaidyanathan S., Volos C. (eds) *Advances and Applications in Chaotic Systems*. Studies in Computational Intelligence, 636. Springer, Cham.
- [35] Zhang X., Li D., Zhang X. (2017) Adaptive fuzzy impulsive synchronization of chaotic systems with random parameters. *Chaos, Solitons and Fractals* 104, 77–83. <http://dx.doi.org/10.1016/j.chaos.2017.08.006>.
- [36] Zhou S. S., Jahanshahi H., Din Q., Bekiros S., Alcaraz R., Alassafi M., Alsaadi F. E., and Chu Y. M. (2020) Discrete-time macroeconomic system: Bifurcation analysis and synchronization using fuzzy-based activation feedback control. *Chaos, Solitons and Fractals* 14, 110378. <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2020.110378>.
- [37] Zhu Z., Zhao Z., J. Zhang, Wang R. (2020) Adaptive fuzzy control design for synchronization of chaotic time-delay system. *Information Sciences*, 535, 225–241. <https://doi.org/10.1016/j.ins.2020.05.056>.