سیستم های فازی و کاربردها
سال هفتم، شماره اول (بهار و تابستان ۱۴۰۳)
صص. ۲۰۹ تا ۲۲۸
شاپای چاپی: ۲۷۱۷ـ ۴۴۰۹
شاپای الکترونیکی: ۲۷۱۷ـ ۳۹۸۴
DOI:10.22034/JFSA.2024.467659.1233

مدیریت عدم قطعیت در DEA با استفاده از داده‌های فازی شهودی و پارامترهای راف فازی

امیر رحیمی، حسن میش مست نهی و فرانک حسین‌زاده سلجوقی*
گروه ریاضی، دانشکده ریاضی، دانشگاه سیستان و بلوچستان، زاهدان، ایران

تاریخ دریافت: ۱۴۰۳/۰۴/۲۳ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۳/۰۷/۱۶

نوع مقاله: علمی_ پژوهشی

چکیده. این مقاله به بررسی تاثیر عدم قطعیت به صورت داده‌های فازی شهودی و پارامترهای راف فازی در ارزیابی و مدیریت عملکرد با استفاده از تحلیل پوششی داده‌ها (DEA) می‌پردازد. هدف اصلی این تحقیق، بهبود دقت و مدیریت عدم قطعیت در مدل‌های DEA است . در پژوهش حاضر، از داده‌های نادقیق فازی شهودی که هر یک از پارامترهای آن راف فازی را تشکیل می‌دهند، استفاده شده است. مقدار مورد انتظار فازی شهودی و راف فازی، نقش مهمی در این پژوهش دارد. با توجه به اینکه پارامترهای راف فازی به مدل کمک می‌کنند تا با داده‌های نادقیق و نامشخص به‌طور مؤثرتری کار کند و داده‌های فازی شهودی نیز اطلاعات و جزئیات بیشتری درباره تغییرات و عدم قطعیت‌ها فراهم می‌کنند. با ترکیب این دو مفهوم، مدل‌های DEA می‌توانند با دقت و اطمینان بیشتری عملکرد واحدهای مختلف را ارزیابی و تحلیل کنند، که بهبود در مدیریت عدم قطعیت‌ها را به همراه دارد. با این حال، افزایش حجم مدل و محاسبات از محدودیت‌های این روش محسوب می‌شوند. رویکرد پیشنهادی را با یک مثال عددی تشریح کرده‌ایم. استفاده از نتایج مدل‌های پیشنهادی می‌تواند ابزاری مؤثر در ارزیابی عملکرد در سازمان‌ها و صنایع مختلف بوده و بهبود قابل توجهی در فرآیندهای تصمیم‌گیری ایجاد نماید.

2010 *Mathematics Subject Classification.* 90C29; 90C70
* Corresponding author
E-mails: amirrahimi525@gmail.com, hmnehi@hamoon.usb.ac.ir and saljooghi@math.usb.ac.ir.
عبارات و کلمات کلیدی. تحلیل پوششی داده‌ها، فازی شهودی، راف فازی.

۱. مقدمه

تحلیل پوششی داده‌ها (DEA)[1] به عنوان یک شیوه غیرپارامتری وسیله‌ای بسیار مساعد جهت ارزیابی کارایی و نحوه‌ی عملکرد واحدهای تصمیم‌گیری است. در عام‌ترین مدل‌های DEA تنها تحت شرط قطعیت داده‌های ورودی و خروجی، مورد بررسی قرار می‌گیرند. زمانی که داده‌ها به صورت نادقیق و یا به طور مبهمی توصیف شوند، ضرورت به کارگیری از نظریه فازی در نمایش این نوع از داده‌ها ایجاد می‌شود. از این رو، شیوه‌ی مدیریت اطلاعات یا ارزیابی مجموعه DMUها در محیط‌های فازی و یا بازه‌ای، می‌تواند یک مطالعه ارزشمند در بسیاری از مسائل تصمیم‌گیری باشد.

خصوصیات اصلی تئوری فازی این است که مجموع درجات عضویت و عدم عضویت برابر با ۱ می‌باشد. البته در کاربردهای دنیای واقعی، ما با اطلاعاتی سروکار داریم که بعضی اوقات مبهم هستند، و بنابراین این امکان وجود دارد که مجموع درجات عضویت و عدم عضویت یک عنصر ممکن است کمتر از ۱ باشد. این بدین معناست که درجاتی از تردید باقی می‌ماند. مسلماً تئوری سری فازی برای بررسی این نوع مسائل شرایط مناسب نیست؛ بلکه تئوری سری فازی شهودی (IFS)[2] مناسب‌تر است. سری فازی شهودی گسترشی از سری فازی است و اثبات شده است که برای بررسی ابهام خیلی مفید است. همچنین برای مدل‌سازی شرایط عدم قطعیت در محیط واقعی می‌توان یک محیط راف نیز مورد بررسی قرار داد.

تئوری مجموعه‌های راف روش جدیدی برای برخورد با ابهام است. در تئوری مجموعه‌های راف عدم شفافیت برخلاف تئوری فازی با استفاده از ناحیه مرزی نشان داده می‌شود. برتری استفاده از تئوری مجموعه‌های راف بر تئوری‌های دیگر مانند فازی عبارت‌اند از: نبود مشکل تخصص درجه عضویت در این تئوری، کاهش دخالت تصمیم‌گیرنده در تعیین نوع متغیر غیرقطعی، رفتار این تئوری ماهیت احتمالی دارد و به همین علت مدل‌سازی غیرقطعی بهتری ارائه می‌کند، این تئوری علاوه بر داشتن ویژگی‌های تئوری مجموعه‌های فازی، در بعضی مواقع تعمیم آن است.

در ادامه توسعه تئوری مجموعه‌های فازی، مجموعه فازی شهودی برای نخستین‌بار توسط آتاناسف[3] [۱] معرفی شد که تعمیم یافته منطق فازی است. پس از آن مقالات زیادی در مفهوم منطق فازی شهودی و اعمال روی آن توسط آتاناسف و سایرین نوشته شده است. ساحیل[4] و

---
[1] Data Envelopment Analysis
[2] Intuitionistic Fuzzy Sets
[3] Atanassov
[4] Sahil

همکاران[۲]، رویکرد DEA شبکه دو مرحله‌ای با استفاده از اعداد فازی شهودی پارا بولی برای حل مسائل با عدم قطعیت گسترش داده و به ارزیابی کارایی بانک‌های عمومی هند پرداختند.

نظریه مجموعه‌های راف توسط آقای پاولاک[1] در سال ۱۹۸۲ مطرح گردید[۳]. خانجانی و همکاران [۵] یک رویکرد برای مدل DEA راف فازی پیشنهاد دادند که در آن از رویکرد مقدار امکانی و مقدار انتظار برای بدست آوردن کارایی بهره می‌گرفتند. جعفرزاده و همکاران در مقاله‌ای به بررسی مجموعه‌های شهودی فازی راف پرداخته و ویژگی‌های آن را تحلیل کرده‌اند. آن‌ها در این پژوهش گسترشی از نظریه مجموعه‌های راف با استفاده از مفهوم مجموعه‌های شهودی فازی ارائه کرده و به بحث پیرامون کاهش دانش در سیستم‌های اطلاعاتی پاولاک کلاسیک و شهودی فازی پرداخته‌اند. در این راستا، کاهش دانش به کاهش ویژگی‌های اضافی در سیستم‌های اطلاعاتی اشاره دارد، که در این مقاله به‌طور خاص بررسی شده است[۶].

همچنین، ریضوی و همکارانش[2] در تحقیق خود، ترکیب نظریه مجموعه‌های راف و مجموعه‌های شهودی فازی را بررسی کرده‌اند. آن‌ها بیان کرده‌اند که نظریه مجموعه‌های شهودی فازی بیشتر به مدیریت ابهام مرتبط است، در حالی که نظریه مجموعه‌های راف به عدم کامل بودن داده‌ها توجه دارد. این مقاله به تعریفی مشابه تعریف مجموعه‌های فازی راف پرداخته و برخی قضایا و ویژگی‌ها در این حوزه را اثبات کرده است[۷]. در مقاله‌ای از کومار و همکارانش[3]، روشی نوین برای انتخاب نمونه‌ها و کاهش ویژگی‌ها در داده‌های نامتوازن ارائه شده است. این روش با ترکیب مجموعه‌های راف فازی شهودی و خوشه‌بندی فازی شهودی مبتنی بر هسته طراحی شده است. هدف آن مدیریت ابهام و عدم قطعیت داده‌ها با استفاده از درجات عضویت، عدم عضویت و تردید است[۸]. در مقاله‌ای جاین و همکارانش[4] به بررسی مدل مجموعه‌های راف فازی شهودی مبتنی بر خوشه‌بندی k نزدیک‌ترین همسایه برای پیش‌بینی جفت‌های تعامل‌کننده آپتامر–پروتئین پرداخته است. این مقاله به‌دنبال ارائه یک رویکرد محاسباتی برای شناسایی تعاملات آپتامر–پروتئین، که به دلیل اهمیت آپتامرها در درمان بیماری‌ها حائز اهمیت است، می‌باشد[۹]. نورجهان و همکارانش[5] در مقاله‌ای به بررسی توسعه یک رویکرد جدید برای ضریب همبستگی در مجموعه‌های راف فازی شهودی با هدف بهبود عملکرد جاروبرقی‌های رباتیک می‌پردازد. این مقاله از ترکیب مجموعه‌های فازی شهودی

---

[1] Pawlak
[2] Rizvi et al.
[3] Kumar et al.
[4] Jain et al.
[5] Noorjahan et al.

و مجموعه‌های راف به عنوان ابزاری برای مدیریت عدم قطعیت و ابهام در مدل‌های مبتنی بر گراف استفاده می‌کند[۱۰].

پژوهش حاضر، اما، بر تعریف متغیر فازی شهودی راف تمرکز دارد، که در آن هر پارامتر شهودی فازی خود یک متغیر راف فازی است. در این پژوهش، پارامترهای نادقیق فازی شهودی توسط متغیرهای راف فازی مدیریت می‌شوند، که این رویکرد سطح عمیق‌تری از مدل‌سازی عدم قطعیت را فراهم می‌کند. تا کنون این سطح از جزئیات در مقالات پیشین به‌طور مشخص بررسی نشده است.

هدف اصلی این تحقیق، بهبود دقت و مدیریت عدم قطعیت در مدل‌های DEA با استفاده از داده‌های نادقیق فازی شهودی می‌باشد، که هر یک از پارامترهای آن راف فازی را تشکیل می‌دهند. برای این منظور سایر بخش‌های این نوشته در زیر سازماندهی می‌شود.

در بخش دوم، مفاهیم پایه مورد نیاز در مقاله بیان شده است. بخش سوم، قضایای مربوط به رویکرد پیشنهادی را در خود قرار داده است. بخش چهارم، رویکرد پیشنهادی برای بررسی کارایی واحدهای DEA با استفاده از داده‌های فازی شهودی و راف فازی ارائه شده است. در بخش پنجم، یک مثال عددی برای ارزیابی شش واحد تحت ارزیابی، بیان شده است. در بخش پایانی، نتیجه های اصلی از موضوع مورد بحث به همراه پیشنهادهایی مفید برای ادامه پژوهش آورده شده است.

۲. مفاهیم پایه‌ای

در این بخش به مرور و بررسی برخی مفاهیم پایه‌ای در زمینه‌ی فازی شهودی و راف فازی که در بخش‌های بعدی استفاده شده‌اند، پرداخته شده است.

۱.۲. مجموعه فازی شهودی. ابتدا به تعریف مجموعه فازی شهودی که توسط آتاناسف ارائه شده می‌پردازیم[۱].

تعریف ۱.۲. M^I را یک مجموعه فازی شهودی از X گوییم و آن را به صورت زیر نمایش می‌دهیم.

$$M^I = \{(x, \mu_{M^I}(x), v_{M^I}(x))|x \in X\}$$

که در آن $\mu^I_M(x)$ و $v^I_M(x)$ به ترتیب درجه عضویت و درجه عدم عضویت x به M^Iاست.

تعریف ۲.۲. مجموعه فازی شهودی M^Iروی مجموعه مرجع X را نرمال شهودی گوئیم اگر حداقل دو عضو از X مانند $x_۰$ و $x_۱$ وجود داشته باشد به‌طوری که $\mu_{M^I}(x_۰) = ۱$ و $v_{M^I}(x_۱) = ۱$ باشد. بنابراین به سادگی می‌بینیم که مجموعه فازی شهودی نرمال است اگر حداقل یک نقطه متعلق به M^Iباشد و حداقل یک نقطه متعلق به M^I نباشد[۱۲].

تعریف ۳.۲. زیر مجموعه فازی شهودی M^I از اعداد حقیقی را محدب شهودی گوئیم اگر $\forall x_۱, x_۲ \in R, \forall \lambda \in [۰, ۱];$ داشته باشیم:

$$\begin{cases} \mu_{M^I}(\lambda x_۱ + (۱-\lambda)x_۲) \geq \min\{\mu_{M^I}(x_۱), \mu_{M^I}(x_۲)\}, \\ v_{M^I}(\lambda x_۱ + (۱-\lambda)x_۲) \leq \min\{v_{M^I}(x_۱), v_{M^I}x(x_۲)\}, \end{cases} \tag{۱.۲}$$

تعریف ۴.۲. زیر مجموعه فازی شهودی M^I از محور اعداد حقیقی را یک عدد فازی شهودی نامیم اگر[۱۲]:

۱ـ M^I نرمال شهودی باشد. ۲ـ M^I محدب شهودی باشد. ۳ـ μ_{M^I} نیمه پیوسته بالایی و v_{M^I} نیمه پیوسته پائینی باشد.

نتیجه: $\widetilde{M}$ را یک عدد فازی شهودی ذوزنقه‌ای با پارامترهای $m_۱, m_۲, m_۳, m_۴, n_۱, n_۲, n_۳, n_۴$ که $n_۱ \leq m_۱ \leq n_۲ \leq m_۲ \leq m_۳ \leq n_۳ \leq m_۴ \leq n_۴$ گوئیم و با $\widetilde{M} = (m_۱, m_۲, m_۳, m_۴; n_۱, n_۲, n_۳, n_۴)$ نمایش می‌دهیم، اگر:

$$\mu_{\widetilde{M}}(x) = \begin{cases} ۰, & x \leq m_۱, \\ \frac{x-m_۱}{m_۲-m_۱}, & m_۱ \leq x \leq m_۲, \\ ۱, & m_۲ \leq x \leq m_۳ \\ \frac{x-m_۴}{m_۳-m_۴}, & m_۳ \leq x \leq m_۴ \\ ۰, & x \geq m_۴ \end{cases} \tag{۲.۲}$$

$$v_{\widetilde{M}}(x) = \begin{cases} ۱, & x \leq n_۱, \\ \frac{x-n_۲}{n_۱-n_۲}, & n_۱ \leq x \leq n_۲, \\ ۰, & n_۲ \leq x \leq n_۳ \\ \frac{x-n_۳}{n_۴-n_۳}, & n_۳ \leq x \leq n_۴ \\ ۱, & x \geq n_۴ \end{cases} \tag{۳.۲}$$

تعریف ۵.۲. بازه‌ی مورد انتظار یک عدد فازی شهودی مانند $\widetilde{M} = (m_1, m_2, m_3, m_4; n_1, n_2, n_3, n_4)$ یک بازه معمولی است، مانند $EI(\widetilde{M})$ که در آن:

$$EI(\widetilde{M}) = [\underline{E}(\widetilde{M}), \overline{E}(\widetilde{M})], \tag{۴.۲}$$

که به راحتی می‌توان محاسبه کرد:

$$\underline{E}(\widetilde{M}) = \frac{n_1+m_2}{2} + \frac{1}{2}\int_{n_1}^{n_2} h_{M^I}(x)dx - \frac{1}{2}\int_{m_1}^{m_2} f_{M^I}(x)dx \tag{۵.۲}$$

$$\overline{E}(\widetilde{M}) = \frac{m_3+n_4}{2} + \frac{1}{2}\int_{m_3}^{m_4} g_{M^I}(x)dx - \frac{1}{2}\int_{n_3}^{n_4} k_{M^I}(x)dx \tag{۶.۲}$$

مقدار انتظار یک IFN به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$EV(\widetilde{M}) = \frac{\underline{E}(\widetilde{M})+\overline{E}(\widetilde{M})}{2} \tag{۷.۲}$$

فرض کنید $\widetilde{M} = (m_1, m_2, m_3, m_4; n_1, n_2, n_3, n_4)$ یک $TrIFN$ باشد.لذا با توجه به مطالب فوق، $EI(\widetilde{M})$ به صورت زیر می‌باشد:

$$EI(\widetilde{M}) = [\underline{E}(\widetilde{M}), \overline{E}(\widetilde{M})] = [\frac{m_1+m_2+n_1+n_2}{4}, \frac{m_3+m_4+n_3+n_4}{4}], \tag{۸.۲}$$

با استفاده از (۸.۲)، $EV(\widetilde{M})$ به صورت زیر بدست می‌آید:

$$EV(\widetilde{M}) = \frac{\sum_{i=1}^{4}(m_i+n_i)}{8}, \tag{۹.۲}$$

۲.۲. مجموعه‌های راف. مجموعه‌های راف روش جدیدی برای برخورد با ابهام است. در تئوری مجموعه‌های راف عدم شفافیت برخلاف تئوری فازی که با استفاده از درجه عضویت نشان داده می‌شود با استفاده از ناحیه مرزی نشان داده می‌شود.

فرض کنید U مجموعه‌ای از اشیا باشد که مجموعه مرجع نامیده می‌شود و R یک رابطه هم ارزی روی U است. $(R \subset U \times U)$ رابطه R در اصل، شناخت در مورد اعضای U را نشان می‌دهد. اگر X یک زیر مجموعه U باشد، قصد داریم X را با توجه به رابطه R مشخص کنیم. برای درک مفهوم تئوری مجموعه‌های راف می‌توان تعاریف ابتدائی زیر را ارائه داد[۳]:

تعریف ۶.۲. تقریب بالا X، اعضایی هستند که احتمالاً متعلق به X هستند و با $\overline{R}(X)$ نشان داده می‌شود.

تعریف ۷.۲. تقریب پایین X، اعضایی هستند که حتماً متعلق به X هستند و با $\underline{R}(X)$ نشان داده می‌شود.

تعریف ۸.۲. مرز X، اعضایی هستند که نه دقیقا متعلق به X هستند و نه دقیقا متعلق به متمم X، یعنی اختلاف دو مجموعه تقریب پایین و تقریب بالا می‌باشد.

با این تعاریف، تعریف مجموعه راف عبارت است از:

تعریف ۹.۲. مجموعه X دقیق است اگر مرز آن تهی باشد و مجموعه X راف(غیر دقیق) است اگر مرز آن غیرتهی باشد.

تعریف ۱۰.۲. یک متغیر راف ζیک تابع مقیاس‌پذیر از فضای راف (Ω, Δ, A, π) به مجموعه اعداد حقیقی است. به عبارت دیگر، برای هر مجموعه بورل B از $\Re$، داریم[۴]:

$$\{\lambda \in \Omega | \zeta(\lambda) \in B\} \in A, \qquad (۱۰.۲)$$

تقریبات پایین و بالا برای متغیر راف به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\underline{\zeta} = \{\zeta(\lambda) | \lambda \in \Delta\}, \qquad \overline{\zeta} = \{\zeta(\lambda) | \lambda \in \Omega\} \qquad (۱۱.۲)$$

که در آن $\underline{\zeta}$ تقریب پایین متغیر راف ζ و $\overline{\zeta}$ تقریب بالا متغیر راف ζ است.

همچنین یک متغیر راف به شکل $([m, n], [p, q])$ که $p \leq m \leq n \leq q$ است و نشان دهنده تابع مشخصه $\zeta(\lambda) = \lambda$ از فضای راف (Ω, Δ, A, π) به مجموعه اعداد حقیقی است که $\Omega = \{\lambda | p \leq \lambda \leq q\}$، $\Delta = \{\lambda | m \leq \lambda \leq n\}$، A جبر بورل روی Ω و π سنجه لبگ است.

تعریف ۱۱.۲. فرض کنید ζ یک متغیر راف روی فضای راف (Ω, Δ, A, π) باشد. بنابراین مقدار انتظار ζ به صورت زیر بیان می‌شود:

$$E(\zeta) = \int_{۰}^{+\infty} Tr\{\zeta \geq r\} dr - \int_{-\infty}^{۰} Tr\{\zeta \leq r\} dr, \qquad (۱۲.۲)$$

به شرط اینکه بایستی یکی از دو انتگرال متناهی باشد.

تعریف ۱۲.۲. فرض کنید ζ یک متغیر راف فازی باشد. بنابراین مقدار انتظار متغیر راف فازی به صورت زیر بیان می‌شود:

$$E(\zeta) = \int_{۰}^{+\infty} Tr\{\lambda \in \Omega | E[\zeta(\lambda)] \geq r\} dr - \int_{-\infty}^{۰} Tr\{\lambda \in \Omega | E[\zeta(\lambda)] \leq r\} dr,$$

۳. رویکرد پیشنهادی

در سال‌های اخیر، روش‌های نوین برای تحلیل داده‌های نادقیق و نامطمئن اهمیت فراوانی پیدا کرده‌اند. از جمله این روش‌ها، داده‌های فازی شهودی و پارامترهای راف فازی هستند که هر کدام به تنهایی قادر به مدیریت عدم قطعیت‌ها و تحلیل داده‌های ناپایدار بوده‌اند. ترکیب این دو روش، توانایی تحلیل و پیش‌بینی دقیق‌تر مقادیر مورد انتظار را در شرایط عدم قطعیت بهبود می‌بخشد. این ترکیب به عنوان یک ابزار در ارزیابی و مدیریت عملکرد در شرایط عدم قطعیت عمل کرده و می‌تواند دقت مدل‌های تحلیلی را بهبود بخشد.

تعریف ۱.۳. متغیر ζ یک متغیر فازی شهودی راف است که در آن هر یک از پارامترهای فازی شهودی توسط یک متغیر راف فازی تعریف می‌شود. به عبارت دیگر، این متغیر ترکیبی از دو مفهوم فازی شهودی و راف فازی است که در آن پارامترهای فازی شهودی با استفاده از متغیرهای راف فازی تشکیل می‌شوند.

متغیر فازی شهودی راف دیدگاه جدیدی به داده‌های نادقیق در دنیای واقعی ارائه می‌دهد. در این پژوهش، ما متغیرهای فازی شهودی را بررسی کرده‌ایم که هر یک از پارامترهای نادقیق آن، به تشکیل یک راف فازی منجر می‌شود. به همین دلیل، این متغیرها را متغیرهای فازی شهودی راف می‌نامیم.

قضیه ۲.۳. *فرض کنید ζ یک متغیر فازی شهودی راف ذوزنقه‌ای با تابع عضویت و عدم عضویت متغیر فازی شهودی راف به شکل زیر باشد.*

$$\mu_\zeta(x)=\begin{cases} f_\zeta(x), & m_۱\le x\le m_۲,\\ ۱, & m_۲\le x\le m_۳,\\ g_\zeta(x), & m_۳\le x\le m_۴\\ ۰, & o.w\end{cases} \tag{۱.۳}$$

$$v_\zeta(x)=\begin{cases} h_\zeta(x), & n_۱\le x\le n_۲,\\ ۰, & n_۲\le x\le n_۳,\\ k_\zeta(x), & n_۳\le x\le n_۴\\ ۰, & o.w\end{cases} \tag{۲.۳}$$

که $۰\le \mu_\zeta(x)+v_\zeta(x)\le ۱$ و $(m_۱,m_۲,m_۳,m_۴;n_۱,n_۲,n_۳,n_۴)$ متغیرهای راف فازی به شرح زیر می‌باشند:

$m_1 = ([c_2, c_3], [c_1, c_4]), 0 < c_1 \leq c_2 \leq c_3 \leq c_4;$
$m_2 = ([d_2, d_3], [d_1, d_4]), 0 < d_1 \leq d_2 \leq d_3 \leq d_4;$
$m_3 = ([e_2, e_3], [e_1, e_4]), 0 < e_1 \leq e_2 \leq e_3 \leq e_4;$
$m_4 = ([f_2, f_3], [f_1, f_4]), 0 < f_1 \leq f_2 \leq f_3 \leq f_4;$
$n_1 = ([l_2, l_3], [l_1, l_4]), 0 < l_1 \leq l_2 \leq l_3 \leq l_4;$
$n_2 = ([s_2, s_3], [s_1, s_4]), 0 < s_1 \leq s_2 \leq s_3 \leq s_4;$
$n_3 = ([t_2, t_3], [t_1, t_4]), 0 < t_1 \leq t_2 \leq t_3 \leq t_4;$
$n_4 = ([w_2, w_3], [w_1, w_4]), 0 < w_1 \leq w_2 \leq w_3 \leq w_4;$

بنابراین مقدار مورد انتظار ζ برابر است با:

$$EV(\zeta) = \frac{(\underline{E}(\zeta)+\overline{E}(\zeta))}{2} = \frac{\sum_{i=1}^{4}(c_i+d_i+e_i+f_i+l_i+s_i+t_i+w_i)}{32},$$

اثبات. با توجه به تعریف مقدار انتظار شهودی داریم:

$$\underline{E}(\zeta) = \frac{n_1+m_2}{2} + \frac{1}{2}\int_{n_1}^{n_2} h_\zeta(x)dx - \frac{1}{2}\int_{m_1}^{m_2} f_\zeta(x)dx = \frac{n_1+n_2+m_1+m_2}{4}$$

$$\overline{E}(\zeta) = \frac{m_3+n_4}{2} + \frac{1}{2}\int_{m_3}^{m_4} g_\zeta(x)dx - \frac{1}{2}\int_{n_3}^{n_4} k_\zeta(x)dx = \frac{n_3+n_4+m_3+m_4}{4}$$

بازه‌ی انتظار یک متغیر شهودی راف، یک بازه بسته‌ی قطعی است:

$$E(\zeta) = [\underline{E}(\zeta), \overline{E}(\zeta)] = [\frac{n_1+n_2+m_1+m_2}{4}, \frac{n_3+n_4+m_3+m_4}{4}];$$

بنابراین، مقدار مورد انتظار یک عدد فازی شهودی راف به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$EV(\zeta) = \frac{(\underline{E}(\zeta)+\overline{E}(\zeta))}{2} = \frac{m_1+m_2+m_3+m_4+n_1+n_2+n_3+n_4}{8};$$

از طرفی چون $(m_1, m_2, m_3, m_4; n_1, n_2, n_3, n_4)$متغیرهای راف هستند. لذا بنا به تعریف (۷.۳) داریم:

$$\begin{aligned}
&m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = \\
&= ([c_2 + d_2 + e_2 + f_2 + l_2 + s_2 + t_2 + w_2, \\
&c_3 + d_3 + e_3 + f_3 + l_3 + s_3 + t_3 + w_3], \\
&[c_1 + d_1 + e_1 + f_1 + l_1 + s_1 + t_1 + w_1, \\
&c_4 + d_4 + e_4 + f_4 + l_4 + s_4 + t_4 + w_4]),
\end{aligned}$$

اکنون بنا به تعریف مقدار مورد انتظار فازی شهودی، مقدار مورد انتظار متغیر فازی شهودی راف ذوزنقه‌ای به صورت زیر خواهد شد:

$$EV(\zeta) = \frac{(\underline{E}(\zeta)+\overline{E}(\zeta))}{۲} = \frac{\sum_{i=۱}^{۴}(c_i+d_i+e_i+f_i+l_i+s_i+t_i+w_i)}{۳۲},$$

از این رو اثبات تمام است. □

قضیه ۳.۳. *فرض کنید* $\zeta = (p_۱, p_۲, p_۳; \acute{p}_۱, p_۲, \acute{p}_۳)$ *یک متغیر فازی شهودی راف مثلثی باشد، که* $p_۱, p_۲, p_۳, \acute{p}_۱, p_۲, \acute{p}_۳$ *متغیرهای راف روی* (Ω, Δ, A, π) *تعریف می‌شوند:*

$p_۱ = ([r_۲, r_۳], [r_۱, r_۴]), ۰ < r_۱ \leq r_۲ \leq r_۳ \leq r_۴;$
$p_۲ = ([z_۲, z_۳], [z_۱, z_۴]), ۰ < z_۱ \leq z_۲ \leq z_۳ \leq z_۴;$
$p_۳ = ([u_۲, u_۳], [u_۱, u_۴]), ۰ < u_۱ \leq u_۲ \leq u_۳ \leq u_۴$
$\acute{p}_۱ = ([\acute{r}_۲, \acute{r}_۳], [\acute{r}_۱, \acute{r}_۴]), ۰ < \acute{r}_۱ \leq \acute{r}_۲ \leq \acute{r}_۳ \leq \acute{r}_۴$
$\acute{p}_۳ = ([\acute{u}_۲, \acute{u}_۳], [\acute{u}_۱, \acute{u}_۴]), ۰ < \acute{u}_۱ \leq \acute{u}_۲ \leq \acute{u}_۳ \leq \acute{u}_۴$

مقدار مورد انتظار متغیر فازی شهودی راف مثلثی به صورت زیر می‌باشد:

$$EV(\zeta) = \frac{\sum_{i=۱}^{۴}(\acute{r}_i+r_i+۴z_i+u_i+\acute{u}_i)}{۳۲};$$

اثبات. مشابه قضیه قبل اثبات برقرار است. □

۴. بررسی کارایی با مقدار مورد انتظار شهودی راف

فرض کنید n واحد تصمیم‌گیری(DMUs) برای ارزیابی وجود دارد. هر DMU مقدار متفاوتی از m ورودی برای تولید s خروجی به‌کار می‌برد. در فرمول‌بندی مدل، $x_{io}(i = ۱, \cdots, m)$ و $y_{ro}(r = ۱, \cdots, s)$ به ترتیب بیان‌گر بردارهای قطعی نامنفی مقادیر ورودی و خروجی DMU_o هستند. بنابراین، مدل برنامه‌ریزی خطی DEA یعنی مدل مضربی CCR (ورودی محور) به صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{aligned}
\max \quad & Z_o = \sum_{r=۱}^{s} u_r y_{ro} & \\
s.t. \quad & \sum_{i=۱}^{m} v_i x_{io} = ۱, & \\
& \sum_{r=۱}^{s} u_r y_{rj} - \sum_{i=۱}^{m} v_i x_{ij} \leq ۰, & j = ۱, ۲, \ldots, n, \\
& v_i \geq ۰, & i = ۱, ۲, \ldots, m, \\
& u_r \geq ۰, & r = ۱, ۲, \ldots, s.
\end{aligned} \tag{۱.۴}$$

تعریف ۱.۴. DMU_o یک مجموعه کاراست اگر $Z_o^* = ۱$ باشد.

۱.۴. مدل DEA با متغیرهای شهودی راف. مدل فوق تنها می‌تواند در حالتی که داده‌ها دقیق بوده مورد استفاده قرار گیرد. در دنیای واقعی، تصمیمات براساس داده‌های کیفی و کمی است؛ از طرفی DEA فازی یک ابزار قدرتمند برای ارزیابی عملکرد DMUها با داده‌های نادقیق است. ترکیب تحلیل پوششی داده‌ها با فازی شهودی و راف فازی، توانایی‌های منحصر به فردی در ارزیابی کارایی و بهبود تصمیم‌گیری‌ها در شرایط پیچیده و ناپایدار دارد. این روش با مدل‌سازی دقیق‌تر عدم قطعیت‌ها و تحلیل داده‌های نادقیق، به بهبود کیفیت ارزیابی‌ها و ارائه راهکارهای بهینه منجر می‌شود. به همین دلیل، این ترکیب نوآورانه می‌تواند به عنوان یک ابزار قدرتمند در دست مدیران و تصمیم‌گیرندگان، برای مواجهه با چالش‌های مدرن و پیچیده به کار گرفته شود. با توجه به مزایای بی‌شمار این رویکرد، تحقیقات بیشتر و کاربردهای عملی گسترده‌تر در آینده می‌تواند به توسعه و بهبود بیشتر این روش‌ها کمک کند.

فرض کنید که همه داده‌های $\widetilde{x}_{rj}^{IR}(i = ۱, \cdots, m)$ و $\widetilde{y}_{rj}^{IR}(r = ۱, \cdots, s)$ به علت وجود عدم قطعیت به طور دقیق قابل تعیین نیستند. در اینجا $\widetilde{x}_{rj}^{IR} \geq ۰$ و $\widetilde{y}_{rj}^{IR} \geq ۰$. به عبارتی دیگر ورودی ها و خروجی ها اعداد فازی شهودی هستند که هر کدام از پارامترهای آن راف فازی را تشکیل می دهند. مدل‌های DEA فازی شهودی به شکل مدل‌های برنامه‌ریزی خطی فازی می‌باشند. بنابراین، مدل CCR با ضرایب فازی شهودی راف بصورت زیر می‌باشد.

$$
\begin{aligned}
\max \quad & \widetilde{Z}_o^{IR} = \sum_{r=۱}^{s} u_r \widetilde{y}_{ro}^{IR} \\
s.t. \quad & \sum_{i=۱}^{m} v_i \widetilde{x}_{io}^{IR} = \widetilde{۱}^{IR}, \\
& \sum_{r=۱}^{s} u_r \widetilde{y}_{rj}^{IR} - \sum_{i=۱}^{m} v_i \widetilde{x}_{ij}^{IR} \leq \widetilde{۰}^{IR}, \quad && j = ۱, ۲, \ldots, n, \\
& v_i \geq ۰, && i = ۱, ۲, \ldots, m, \\
& u_r \geq ۰, && r = ۱, ۲, \ldots, s.
\end{aligned} \tag{۲.۴}
$$

در میان انواع مختلف اعداد فازی شهودی، اعداد فازی شهودی ذوزنقه‌ای و مثلثی از اهمیت ویژه‌ای برخوردار هستند. بنابراین، ورودی‌های فازی و خروجی‌های فازی DMUها را بصورت

اعداد فازی شهودی ذوزنقه‌ای با پارامترهای راف فازی در نظر می‌گیریم.

$$\sum_{i=۱}^{m} v_i \widetilde{x}_{ij}^{IR} = (\sum_{i=۱}^{m} v_i x_{ij}^{m_۱}, \sum_{i=۱}^{m} v_i x_{ij}^{m_۲}, \sum_{i=۱}^{m} v_i x_{ij}^{m_۳}, \sum_{i=۱}^{m} v_i x_{ij}^{m_۴};$$
$$\sum_{i=۱}^{m} v_i x_{ij}^{n_۱}, \sum_{i=۱}^{m} v_i x_{ij}^{n_۲}, \sum_{i=۱}^{m} v_i x_{ij}^{n_۳}, \sum_{i=۱}^{m} v_i x_{ij}^{n_۴});$$

$$\sum_{r=۱}^{s} u_r \widetilde{y}_{rj}^{IR} = (\sum_{r=۱}^{s} u_r y_{rj}^{m_۱}, \sum_{r=۱}^{s} u_r y_{rj}^{m_۲}, \sum_{r=۱}^{s} u_r y_{rj}^{m_۳}, \sum_{r=۱}^{s} u_r y_{rj}^{m_۴};$$
$$\sum_{r=۱}^{s} u_r y_{rj}^{n_۱}, \sum_{r=۱}^{s} u_r y_{rj}^{n_۲}, \sum_{r=۱}^{s} u_r y_{rj}^{n_۳}, \sum_{r=۱}^{s} u_r y_{rj}^{n_۴});$$

که هر کدام از ورودی‌ها به صورت جدول (۱) می‌باشند:

و هر کدام از خروجی‌ها به صورت جدول (۲) می‌باشد:

در اختیار داشتن یک مدل CCR با ضرایب فازی شهودی راف (مدل ۲.۴)، امکان تحلیل‌های پیچیده‌تری از داده‌های نادقیق را فراهم می‌کند. لذا، با توجه به قضیه مقدار مورد انتظار فازی شهودی راف (۲.۳) مدل (۲.۴) می‌تواند به صورت زیر بازنویسی شود:

$$\begin{aligned}
\max \quad & Z_o^{IR} = \tfrac{۱}{۳۲}(\sum_{r=۱}^{s} u_r(\sum_{p=۱}^{۴}(y_{ro}^{m_۱-c_p} + y_{ro}^{m_۲-d_p} + y_{ro}^{m_۳-e_p} + y_{ro}^{m_۴-f_p}))) \\
& (((+y_{ro}^{n_۱-l_p} + y_{ro}^{n_۲-s_p} + y_{ro}^{n_۳-t_p} + y_{ro}^{n_۴-k_p}))) \\
s.t. \quad & \sum_{i=۱}^{m} v_i(\sum_{p=۱}^{۴}(x_{io}^{m_۱-c_p} + x_{io}^{m_۲-d_p} + x_{io}^{m_۳-e_p} + x_{io}^{m_۴-f_p})) \\
& ((+x_{io}^{n_۱-l_p} + x_{io}^{n_۲-s_p} + x_{io}^{n_۳-t_p} + x_{io}^{n_۴-k_p})) = ۳۲, \\
& \sum_{r=۱}^{s} u_r(\sum_{p=۱}^{۴}(y_{rj}^{m_۱-c_p} + y_{rj}^{m_۲-d_p} + y_{rj}^{m_۳-e_p} + y_{rj}^{m_۴-f_p}))) \\
& (((+y_{rj}^{n_۱-l_p} + y_{rj}^{n_۲-s_p} + y_{rj}^{n_۳-t_p} + y_{rj}^{n_۴-k_p}))) \\
& -\sum_{i=۱}^{m} v_i(\sum_{p=۱}^{۴}(x_{ij}^{m_۱-c_p} + x_{ij}^{m_۲-d_p} + x_{ij}^{m_۳-e_p} + x_{ij}^{m_۴-f_p})) \\
& ((+x_{ij}^{n_۱-l_p} + x_{ij}^{n_۲-s_p} + x_{ij}^{n_۳-t_p} + x_{ij}^{n_۴-k_p})) \leq ۰, \quad j = ۱, ۲, \ldots, n, \\
& v_i \geq ۰, \quad i = ۱, ۲, \ldots, m, \\
& u_r \geq ۰, \quad r = ۱, ۲, \ldots, s.
\end{aligned}$$

جدول ۱: ورودی‌ها

$\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij}^{m_1} = ([\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij}^{m_1-c_2}, \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij}^{m_1-c_3}], [\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij}^{m_1-c_1}, \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij}^{m_1-c_4}]);$ $0 < x_{ij}^{m_1-c_1} \leq x_{ij}^{m_1-c_2} \leq x_{ij}^{m_1-c_3} \leq x_{ij}^{m_1-c_4};$
$\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij}^{m_2} = ([\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij}^{m_2-d_2}, \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij}^{m_2-d_3}], [\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij}^{m_2-d_1}, \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij}^{m_2-d_4}]);$ $0 < x_{ij}^{m_2-d_1} \leq x_{ij}^{m_2-d_2} \leq x_{ij}^{m_2-d_3} \leq x_{ij}^{m_2-d_4};$
$\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij}^{m_3} = ([\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij}^{m_3-e_2}, \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij}^{m_3-e_3}], [\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij}^{m_3-e_1}, \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij}^{m_3-e_4}]);$ $0 < x_{ij}^{m_3-e_1} \leq x_{ij}^{m_3-e_2} \leq x_{ij}^{m_3-e_1} \leq x_{ij}^{m_3-e_4};$
$\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij}^{m_4} = ([\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij}^{m_4-f_2}, \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij}^{m_4-f_3}], [\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij}^{m_4-f_1}, \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij}^{m_4-f_4}]);$ $0 < x_{ij}^{m_4-f_1} \leq x_{ij}^{m_4-f_2} \leq x_{ij}^{m_4-f_3} \leq x_{ij}^{m_4-f_4};$
$\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij}^{n_1} = ([\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij}^{n_1-l_2}, \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij}^{n_1-l_3}], [\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij}^{n_1-l_1}, \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij}^{n_1-l_4}]);$ $0 < x_{ij}^{n_1-l_1} \leq x_{ij}^{n_1-l_2} \leq x_{ij}^{n_1-l_3} \leq x_{ij}^{n_1-l_4};$
$\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij}^{n_2} = ([\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij}^{n_2-s_2}, \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij}^{n_2-s_3}], [\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij}^{n_2-s_1}, \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij}^{n_2-s_4}]);$ $0 < x_{ij}^{n_2-s_1} \leq x_{ij}^{n_2-s_2} \leq x_{ij}^{n_2-s_3} \leq x_{ij}^{n_2-s_4};$
$\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij}^{n_3} = ([\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij}^{n_3-t_2}, \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij}^{n_3-t_3}], [\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij}^{n_3-t_1}, \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij}^{n_3-t_4}]);$ $0 < x_{ij}^{n_3-t_1} \leq x_{ij}^{n_3-t_2} \leq x_{ij}^{n_3-t_3} \leq x_{ij}^{n_3-t_4};$
$\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij}^{n_4} = ([\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij}^{n_4-k_2}, \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij}^{n_4-k_3}], [\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij}^{n_4-k_1}, \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij}^{n_4-k_4}]);$ $0 < x_{ij}^{n_4-k_1} \leq x_{ij}^{n_4-k_2} \leq x_{ij}^{n_4-k_3} \leq x_{ij}^{n_4-k_4};$

تعریف ۲.۴. DMU_o یک مجموعه کاراست اگر $Z_0^{IR*} = 1$ باشد. در غیر این صورت واحد تحت ارزیابی ناکارا می‌باشد.

۵. مثال عددی

در این مثال عددی، به بررسی تحلیل پوششی داده‌ها با استفاده از رویکرد فازی شهودی راف می‌پردازیم. به عبارت دیگر، در اینجا داده‌هایی از فازی شهودی داریم که هر کدام از پارامترهای آن خود نیز راف فازی را تشکیل می‌دهند. در این مثال عددی، ما به تفکیک بیشتری از روش تحلیل پوششی داده‌ها با استفاده از فازی شهودی راف پرداخته و نتایج به دست آمده

جدول ۲: خروجی‌ها

$\sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj}^{m_1} = ([\sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj}^{m_1-c_2}, \sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj}^{m_1-c_3}], [\sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj}^{m_1-c_1}, \sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj}^{m_1-c_4}]);$ $0 < u_r y_{rj}^{m_1-c_1} \leq u_r y_{rj}^{m_1-c_2} \leq u_r y_{rj}^{m_1-c_3} \leq u_r y_{rj}^{m_1-c_4};$
$\sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj}^{m_2} = ([\sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj}^{m_2-d_2}, \sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj}^{m_2-d_3}], [\sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj}^{m_2-d_1}, \sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj}^{m_2-d_4}]);$ $0 < y_{rj}^{m_2-d_1} \leq y_{rj}^{m_2-d_2} \leq y_{rj}^{m_2-d_3} \leq y_{rj}^{m_2-d_4};$
$\sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj}^{m_3} = ([\sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj}^{m_3-e_2}, \sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj}^{m_3-e_3}], [\sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj}^{m_3-e_1}, \sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj}^{m_3-e_4}]);$ $0 < y_{rj}^{m_3-e_1} \leq y_{rj}^{m_3-e_2} \leq y_{rj}^{m_3-e_3} \leq y_{rj}^{m_3-e_4};$
$\sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj}^{m_4} = ([\sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj}^{m_4-f_2}, \sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj}^{m_4-f_3}], [\sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj}^{m_4-f_1}, \sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj}^{m_4-f_4}]);$ $0 < y_{rj}^{m_4-f_1} \leq y_{rj}^{m_4-f_2} \leq y_{rj}^{m_4-f_3} \leq y_{rj}^{m_4-f_4};$
$\sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj}^{n_1} = ([\sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj}^{n_1-l_2}, \sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj}^{n_1-l_3}], [\sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj}^{n_1-l_1}, \sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj}^{n_1-l_4}]);$ $0 < y_{rj}^{n_1-l_1} \leq y_{rj}^{n_1-l_2} \leq y_{rj}^{n_1-l_3} \leq y_{rj}^{n_1-l_4};$
$\sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj}^{n_2} = ([\sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj}^{n_2-s_2}, \sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj}^{n_2-s_3}], [\sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj}^{n_2-s_1}, \sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj}^{n_2-s_4}]);$ $0 < y_{rj}^{n_2-s_1} \leq y_{rj}^{n_2-s_2} \leq y_{rj}^{n_2-s_3} \leq y_{rj}^{n_2-s_4};$
$\sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj}^{n_3} = ([\sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj}^{n_3-t_2}, \sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj}^{n_3-t_3}], [\sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj}^{n_3-t_1}, \sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj}^{n_3-t_4}]);$ $0 < y_{rj}^{n_3-t_1} \leq y_{rj}^{n_3-t_2} \leq y_{rj}^{n_3-t_3} \leq y_{rj}^{n_3-t_4};$
$\sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj}^{n_4} = ([\sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj}^{n_4-k_2}, \sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj}^{n_4-k_3}], [\sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj}^{n_4-k_1}, \sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj}^{n_4-k_4}]);$ $0 < y_{rj}^{n_4-k_1} \leq y_{rj}^{n_4-k_2} \leq y_{rj}^{n_4-k_3} \leq y_{rj}^{n_4-k_4};$

را تحلیل خواهیم کرد تا نشان دهیم که این روش‌ها به چه میزان می‌توانند در بهبود درک ما از داده‌ها و پوشش آن‌ها مؤثر باشند.

حال، با توجه به داده‌های موجود در جداول ((۳) تا (۵)) و قضایای (۲.۳) و (۳.۳) می‌توان مدل را برای بدست آوردن کارایی پیاده‌سازی کرد.

در دنیای امروز، ارزیابی کارایی واحدهای تصمیم‌گیری (DMU) به منظور بهبود عملکرد و تخصیص بهینه منابع، از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. استفاده از تکنیک‌های نوین مانند داده‌های فازی شهودی و راف فازی، می‌تواند دقت و قابلیت اطمینان تحلیل‌ها را افزایش دهد. در این گزارش، نتایج ارزیابی کارایی دوازده واحد تصمیم‌گیری (DMU) با استفاده از این روش‌ها ارائه و تحلیل شده است. برای ارزیابی کارایی واحدها، از ترکیبی از داده‌های فازی

جدول ۳: داده‌های موجود فازی شهودی راف

DMU_s	داده‌ها
ورودی۱ $DMU_۱$	(([۳/۶, ۳/۷], [۳/۵, ۳/۸]), ([۴/۱, ۴/۲], [۴, ۴/۳]), ([۴/۴, ۴/۵], [۴/۳, ۴/۶]); ([۳/۳, ۳/۴], [۳/۲, ۳/۵]), ([۴/۱, ۴/۲], [۴, ۴/۳]), ([۴/۸, ۴/۹], [۴/۷, ۵]))
ورودی ۲ $DMU_۱$	(([۲, ۲/۱], [۱/۹, ۲/۲]), ([۲/۲, ۲/۳], [۲/۱, ۲/۴]), ([۲/۴, ۲/۵], [۲/۳, ۲/۶]); ([۱/۶, ۱/۷], [۱/۵, ۱/۸]), ([۲/۲, ۲/۳], [۲/۱, ۲/۴]), ([۲/۸, ۲/۹], [۲/۷, ۳]))
خروجی ۱ $DMU_۱$	(([۲/۵, ۲/۶], [۲/۴, ۲/۷]), ([۲/۷, ۲/۸], [۲/۶, ۲/۹]), ([۲/۹, ۳], [۲/۸, ۳/۱]); ([۲/۳, ۲/۴], [۲/۲, ۲/۵]), ([۲/۷, ۲/۸], [۲/۶, ۲/۹]), ([۳/۱, ۳/۲], [۳, ۳/۳]))
خروجی ۲ $DMU_۱$	(([۳/۹, ۴], [۳/۸, ۴/۱]), ([۴/۲, ۴/۳], [۴/۱, ۴/۴]), ([۴/۵, ۴/۶], [۴/۴, ۴/۷]); ([۳/۷, ۳/۸], [۳/۶, ۳/۹]), ([۴/۲, ۴/۳], [۴/۱, ۴/۴]), ([۴/۷, ۴/۸], [۴/۶, ۴/۹]))
ورودی ۱ $DMU_۲$	([۲/۹, ۲/۹], [۲/۹, ۲/۹]), ([۲/۹, ۲/۹], [۲/۹, ۲/۹]), ([۲/۹, ۲/۹], [۲/۹, ۲/۹]); ([۲/۹, ۲/۹], [۲/۹, ۲/۹]), ([۲/۹, ۲/۹], [۲/۹, ۲/۹]), ([۲/۹, ۲/۹], [۲/۹, ۲/۹]))
ورودی ۲ $DMU_۲$	(([۱/۵, ۱/۶], [۱/۴, ۱/۷]), ([۱/۶, ۱/۷], [۱/۵, ۱/۸]), ([۱/۷, ۱/۸], [۱/۶, ۱/۹]); ([۱/۱, ۱/۲], [۱, ۱/۳]), ([۱/۶, ۱/۷], [۱/۵, ۱/۸]), ([۲/۱, ۲/۲], [۲, ۲/۳]))
خروجی ۱ $DMU_۲$	(([۲/۲, ۲/۲], [۲/۲, ۲/۲]), ([۲/۲, ۲/۲], [۲/۲, ۲/۲]), ([۲/۲, ۲/۲], [۲/۲, ۲/۲]); ([۲/۲, ۲/۲], [۲/۲, ۲/۲]), ([۲/۲, ۲/۲], [۲/۲, ۲/۲]), ([۲/۲, ۲/۲], [۲/۲, ۲/۲]))
خروجی ۲ $DMU_۲$	(([۳/۴, ۳/۵], [۳/۳, ۳/۶]), ([۳/۶, ۳/۷], [۳/۵, ۳/۸]), ([۳/۸, ۳/۹].[۳/۷, ۴]); ([۳/۱, ۳/۲], [۳, ۳/۲]), ([۳/۶, ۳/۷], [۳/۵, ۳/۸]), ([۴, ۴/۱], [۳/۹, ۴/۲]))
ورودی ۱ $DMU_۳$	(([۴/۵, ۴/۶], [۴/۴, ۴/۷]), ([۵, ۵/۱], [۴/۹, ۵/۲]), ([۵/۵, ۵/۶], [۵/۴, ۵/۷]); ([۴/۱, ۴/۲], [۴, ۴/۳]), ([۵, ۵/۱], [۴/۹, ۵/۲]), ([۵/۷, ۵/۸], [۵/۶, ۵/۹]))
ورودی ۲ $DMU_۳$	(([۲/۳, ۲/۴], [۲/۲, ۲/۵]), ([۲/۷, ۲/۸], [۲/۶, ۲/۹]), ([۳/۱, ۳/۲], [۳, ۳/۳]); ([۲/۱, ۲/۲], [۲, ۲/۳]), ([۲/۷, ۲/۸], [۲/۶, ۲/۹]), ([۳/۵, ۳/۶], [۳/۴, ۳/۷]))
خروجی ۱ $DMU_۳$	(([۲/۸, ۲/۹], [۲/۷, ۳]), ([۳/۳, ۳/۴], [۳/۲, ۳/۵]), ([۳/۸, ۳/۹], [۳/۷, ۴]); ([۲/۶, ۲/۷], [۲/۵, ۲/۸]), ([۳/۳, ۳/۴], [۳/۲, ۳/۵]), ([۴, ۴/۱], [۳/۹, ۴/۲]))
خروجی ۲ $DMU_۳$	(([۴/۴, ۴/۵], [۴/۳, ۴/۶]), ([۵/۲, ۵/۳], [۵/۱, ۵/۴]), ([۶, ۶/۱], [۵/۹, ۶/۲]); ([۴/۱, ۴/۲], [۴, ۴/۳]), ([۵/۲, ۵/۳], [۵/۱, ۵/۴]), ([۶/۳, ۶/۴], [۶/۲, ۶/۵]))
ورودی ۱ $DMU_۴$	(([۳/۵, ۳/۶], [۳/۴, ۳/۷]), ([۴/۲, ۴/۳], [۴/۱, ۴/۴]), ([۴/۹, ۵], [۴/۸, ۵/۱]); ([۳/۱, ۳/۲], [۳, ۳/۳]), ([۴/۲, ۴/۳], [۴/۱, ۴/۴]), ([۵/۳, ۵/۴], [۵/۲, ۵/۵]))
ورودی ۲ $DMU_۴$	(([۲/۳, ۲/۴], [۲/۲, ۲/۵]), ([۲/۴, ۲/۵], [۲/۳, ۲/۶]), ([۲/۵, ۲/۶], [۲/۴, ۲/۷]); ([۲/۱, ۲/۲], [۲, ۲/۳]), ([۲/۴, ۲/۵], [۲/۳, ۲/۶]), ([۲/۸, ۲/۹], [۲/۷, ۳]))
خروجی ۱ $DMU_۴$	(([۲/۶, ۲/۷], [۲/۵, ۲/۸]), ([۳, ۳/۱], [۲/۹, ۳/۲]), ([۳/۴, ۳/۵], [۳/۳, ۳/۶]); ([۲/۲, ۲/۳], [۲/۱, ۲/۴]), ([۳, ۳/۱], [۲/۹, ۳/۲]), ([۳/۷, ۳/۸], [۳/۶, ۳/۹]))
خروجی ۲ $DMU_۴$	(([۵/۶, ۵/۷], [۵/۵, ۵/۸]), ([۵/۸, ۵/۹], [۵/۷, ۶]), ([۶, ۶/۱], [۵/۹, ۶/۲]); ([۵/۴, ۵/۵], [۵/۳, ۵/۶]), ([۵/۸, ۵/۹], [۵/۷, ۶]), ([۶/۳, ۶/۴], [۶/۲, ۶/۵]))

جدول ۴: ادامه داده‌های موجود فازی شهودی راف

DMU_s	داده‌ها
ورودی ۱ $DMU_{۵}$	(([۶, ۶/۱], [۵/۹, ۶/۲]), ([۶/۶, ۶/۷], [۶/۵, ۶/۹]), ([۷/۲, ۷/۳], [۷/۱, ۷/۴]); ([۵/۶, ۵/۷], [۵/۵, ۵/۸]), ([۶/۶, ۶/۷], [۶/۵, ۶/۹]), ([۷/۶, ۷/۷], [۷/۵, ۷/۸]))
ورودی ۲ $DMU_{۵}$	(([۳/۷, ۳/۸], [۳/۶, ۳/۹]), ([۴/۲, ۴/۳], [۴/۱, ۴/۴]), ([۴/۷, ۴/۸], [۴/۶, ۴/۹]); ([۳/۳, ۳/۴], [۳/۲, ۳/۵]), ([۴/۲, ۴/۳], [۴/۱, ۴/۴]), ([۵/۱, ۵/۲], [۵, ۵/۳]))
خروجی ۱ $DMU_{۵}$	(([۴/۵, ۴/۶], [۴/۴, ۴/۷]), ([۵/۲, ۵/۳], [۵/۱, ۵/۴]), ([۵/۹, ۶], [۵/۸, ۶/۱]); ([۴/۱, ۴/۲], [۴, ۴/۳]), ([۵/۲, ۵/۳], [۵/۱, ۵/۴]), ([۶/۷, ۶/۸], [۶/۶, ۶/۹]))
خروجی ۲ $DMU_{۵}$	(([۶/۶, ۶/۷], [۶/۵, ۶/۸]), ([۷/۵, ۷/۶], [۷/۴, ۷/۷]), ([۸/۴, ۸/۵], [۸/۳, ۸/۶]); ([۵/۷, ۵/۸], [۵/۶, ۵/۹]), ([۷/۵, ۷/۶], [۷/۴, ۷/۷]), ([۹/۳, ۹/۴]), [۹/۲, ۹/۵]))
ورودی ۱ $DMU_{۶}$	(([۳/۶, ۳/۷], [۳/۵, ۳/۹]), ([۴/۱, ۴/۲], [۴, ۴/۳]), ([۵, ۵/۱], [۴/۹, ۵/۲]); ([۳/۱, ۳/۲], [۳, ۳/۳]), ([۴/۱, ۴/۲], [۴, ۴/۳]), ([۵/۶, ۵/۷], [۵/۵, ۵/۹]))
ورودی ۲ $DMU_{۶}$	(([۴/۲, ۴/۲], [۴/۲, ۴/۲]), ([۴/۲, ۴/۲], [۴/۲, ۴/۲]), ([۴/۲, ۴/۲], [۴/۲, ۴/۲]); ([۴/۲, ۴/۲], [۴/۲, ۴/۲]), ([۴/۲, ۴/۲], [۴/۲, ۴/۲]), ([۴/۲, ۴/۲], [۴/۲, ۴/۲]))
خروجی ۱ $DMU_{۶}$	(([۲/۳, ۲/۴], [۲/۲, ۲/۵]), ([۳/۱, ۳/۲], [۳, ۳/۳]), ([۴/۱, ۴/۲], [۴, ۴/۳]); ([۱/۳, ۱/۴], [۱/۲, ۱/۵]), ([۳/۱, ۳/۲], [۳, ۳/۳]), ([۵/۱, ۵/۲], [۵, ۵/۳]))
خروجی ۲ $DMU_{۶}$	(([۵/۲, ۵/۲], [۵/۲, ۵/۲]), ([۵/۲, ۵/۲], [۵/۲, ۵/۲]), ([۵/۲, ۵/۲], [۵/۲, ۵/۲]); ([۵/۲, ۵/۲], [۵/۲, ۵/۲]), ([۵/۲, ۵/۲], [۵/۲, ۵/۲]), ([۵/۲, ۵/۲], [۵/۲, ۵/۲]))
ورودی ۱ $DMU_{۷}$	(([۱/۶, ۱/۷], [۱/۵, ۱/۸]), ([۲, ۲/۱], [۱/۹, ۲/۲]), ([۲/۵, ۲/۶], [۲/۴, ۲/۷]); ([۱/۲, ۱/۳], [۱, ۱/۴]), ([۲, ۲/۱], [۱/۹, ۲/۲]), ([۳/۱, ۳/۲], [۳, ۳/۳]))
ورودی ۲ $DMU_{۷}$	(([۳/۱, ۳/۲], [۳, ۳/۳]), ([۴/۱, ۴/۲], [۴, ۴/۳]), ([۵/۱, ۵/۲], [۵, ۵/۳]); ([۲/۱, ۲/۲], [۲, ۲/۳]), ([۴/۱, ۴/۲], [۴, ۴/۳]), ([۶/۱, ۶/۲], [۶, ۶/۳]))
خروجی ۱ $DMU_{۷}$	(([۴/۲, ۴/۴], [۴, ۴/۶]), ([۵/۲, ۵/۴], [۵, ۵/۶]), ([۶/۲, ۶/۴], [۶, ۶/۶]); ([۳/۲, ۳/۴], [۳, ۳/۶]), ([۵/۲, ۵/۴], [۵, ۵/۶]), ([۷/۲, ۷/۴], [۷, ۷/۶]))
خروجی ۲ $DMU_{۷}$	(([۲/۵, ۳], [۲, ۳/۵]), ([۴/۵, ۵], [۴, ۵/۵]), ([۶/۵, ۷], [۶, ۷/۵]); ([۰/۵, ۱], [۰, ۱/۵]), ([۴/۵, ۵], [۴, ۵/۵]), ([۸/۵, ۹]), [۸, ۹/۵]))
ورودی ۱ $DMU_{۸}$	(([۳/۴, ۳/۸], [۳, ۴/۲]), ([۵/۴, ۵/۸], [۵, ۶/۲]), ([۷/۴, ۷/۸], [۷, ۸/۲]); ([۱/۴, ۱/۸], [۱, ۲/۲]), ([۵/۴, ۵/۸], [۵, ۶/۲]), ([۹/۴, ۹/۸], [۹, ۱۰/۲]))
ورودی ۲ $DMU_{۸}$	(([۲/۱, ۲/۲], [۲, ۲/۳]), ([۳/۱, ۳/۲], [۳, ۳/۳]), ([۴/۱, ۴/۲], [۴, ۴/۳]); ([۱/۱, ۱/۲], [۱, ۱/۳]), ([۳/۱, ۳/۲], [۳, ۳/۳]), ([۵/۱, ۵/۲], [۵, ۵/۳]))
خروجی ۱ $DMU_{۸}$	(([۴/۴, ۴/۶], [۴/۱, ۴/۸]), ([۵/۴, ۵/۶], [۵/۱, ۵/۸]), ([۶/۲, ۶/۴], [۶/۱, ۶/۶]); ([۳/۴, ۳/۶], [۳/۱, ۳/۸]), ([۵/۴, ۵/۶], [۵/۱, ۵/۸]), ([۷/۲, ۷/۴], [۷/۱, ۷/۶]))
خروجی۲ $DMU_{۸}$	(([۷/۲, ۷/۴], [۷, ۷/۶]), ([۶/۶, ۶/۹], [۶/۵, ۷]), ([۷/۲, ۷/۳], [۷/۱, ۷/۴]); ([۵/۲, ۵/۴], [۵, ۵/۶]), ([۶/۶, ۶/۹], [۶/۵, ۷]), ([۷/۶, ۷/۷], [۷/۵, ۷/۸]))

جدول ۵: داده‌های موجود فازی شهودی راف

DMU_s	داده‌ها
ورودی ۱ $DMU_{۹}$	(([۲, ۲/۱], [۱/۹, ۲/۵])([۲/۴, ۲/۵], [۲/۳, ۲/۶]), ([۲/۹, ۳], [۲/۸, ۳/۱]), ; ([۱/۶, ۱/۷], [۱/۴, ۱/۸]), ([۲/۴, ۲/۵], [۲/۳, ۲/۶]), ([۳/۵, ۳/۶], [۳/۴, ۳/۷]))
ورودی ۲ $DMU_{۹}$	(([۲/۲, ۲/۴], [۲/۱, ۲/۵]), ([۳/۱, ۳/۲], [۳, ۳/۳]), ([۳/۵, ۳/۶], [۳/۴, ۳/۷]); ([۱/۴, ۱/۵], [۱/۳, ۱/۶]), ([۳/۱, ۳/۲], [۳, ۳/۳]), ([۴/۱, ۴/۲], [۴, ۴/۳]))
خروجی ۱ $DMU_{۹}$	(([۲/۸, ۳/۱], [۲/۷, ۳/۳]), ([۴/۱, ۴/۲], [۴, ۴/۳]), ([۴/۶, ۴/۷], [۴/۵, ۴/۸]); ([۲/۳, ۲/۴], [۲/۲, ۲/۵]), ([۴/۱, ۴/۲], [۴, ۴/۳]), ([۵/۱, ۵/۲], [۵, ۵/۳]))
خروجی ۲ $DMU_{۹}$	(([۴/۵, ۴/۵], [۴/۵, ۴/۵])([۴/۵, ۴/۵], [۴/۵, ۴/۵]), ([۴/۵, ۴/۵], [۴/۵, ۴/۵]), ; ([۴/۵, ۴/۵], [۴/۵, ۴/۵]), ([۴/۵, ۴/۵], [۴/۵, ۴/۵]), ([۴/۵, ۴/۵], [۴/۵, ۴/۵]))
ورودی ۱ $DMU_{۱۰}$	([۳/۲, ۳/۲], [۳/۲, ۳/۲]), ([۳/۲, ۳/۲], [۳/۲, ۳/۲]), ([۳/۲, ۳/۲], [۳/۲, ۳/۲]); ([۳/۲, ۳/۲], [۳/۲, ۳/۲]), ([۳/۲, ۳/۲], [۳/۲, ۳/۲]), ([۳/۲, ۳/۲], [۳/۲, ۳/۲]))
ورودی ۲ $DMU_{۱۰}$	(([۳/۱, ۳/۲], [۳, ۳/۳]), ([۴/۱, ۴/۲], [۴, ۴/۳]), ([۵/۱, ۵/۲], [۵, ۵/۳]); ([۲/۱, ۲/۲], [۲, ۲/۳]), ([۴/۱, ۴/۲], [۴, ۴/۳]), ([۶/۱, ۶/۲], [۶, ۶/۳]))
خروجی ۱ $DMU_{۱۰}$	(([۴/۴, ۴/۵], [۴/۳, ۴/۶]), ([۵/۲, ۵/۳], [۵/۱, ۵/۴]), ([۶, ۶/۱], [۵/۹, ۶/۲]); ([۴/۱, ۴/۲], [۴, ۴/۳]), ([۵/۲, ۵/۳], [۵/۱, ۵/۴]), ([۶/۳, ۶/۴], [۶/۲, ۶/۵]))
خروجی ۲ $DMU_{۱۰}$	(([۳/۴, ۳/۵], [۳/۳, ۳/۶]), ([۳/۶, ۳/۷], [۳/۵, ۳/۸]), ([۳/۸, ۳/۹].[۳/۷, ۴]); ([۳/۱, ۳/۲], [۳, ۳/۲]), ([۳/۶, ۳/۷], [۳/۵, ۳/۸]), ([۴, ۴/۱], [۳/۹, ۴/۲]))
ورودی ۱ $DMU_{۱۱}$	(([۴/۴, ۴/۷], [۴/۵, ۴/۶]), ([۴/۹, ۵/۳], [۵, ۵/۲]), ([۵/۴, ۵/۵], [۵/۳, ۵/۴]); ([۴/۱, ۴/۲], [۴, ۴/۳]), ([۴/۹, ۵/۳], [۵, ۵/۲]), ([۵/۷, ۵/۸], [۵/۶, ۵/۹]))
ورودی ۲ $DMU_{۱۱}$	(([۲/۳, ۲/۴], [۲/۲, ۲/۵]), ([۲/۶, ۲/۹], [۲/۷, ۲/۸]), ([۳, ۳/۳], [۳/۱, ۳/۲]); ([۲/۱, ۲/۲], [۲, ۲/۳]), ([۲/۶, ۲/۹], [۲/۷, ۲/۸]), ([۳/۵, ۳/۶], [۳/۴, ۳/۷]))
خروجی ۱ $DMU_{۱۱}$	(([۲/۸, ۲/۹], [۲/۷, ۳]), ([۳/۳, ۳/۴], [۳/۲, ۳/۵]), ([۳/۸, ۳/۹], [۳/۷, ۴]); ([۲/۶, ۲/۷], [۲/۵, ۲/۸]), ([۳/۳, ۳/۴], [۳/۲, ۳/۵]), ([۴, ۴/۱], [۳/۹, ۴/۲]))
خروجی ۲ $DMU_{۱۱}$	(([۴/۴, ۴/۵], [۴/۳, ۴/۶]), ([۵/۲, ۵/۳], [۵/۱, ۵/۴]), ([۶, ۶/۱], [۵/۹, ۶/۲]); ([۴/۱, ۴/۲], [۴, ۴/۳]), ([۵/۲, ۵/۳], [۵/۱, ۵/۴]), ([۶/۳, ۶/۴], [۶/۲, ۶/۵]))
ورودی۱ $DMU_{۱۲}$	(([۴/۵, ۴/۶], [۴/۴, ۴/۷]), ([۵/۲, ۵/۳], [۵/۱, ۵/۴]), ([۵/۹, ۶], [۵/۸, ۶/۱]); ([۴/۱, ۴/۲], [۴, ۴/۳]), ([۵/۲, ۵/۳], [۵/۱, ۵/۴]), ([۶/۷, ۶/۸], [۶/۶, ۶/۹]))
ورودی ۲ $DMU_{۱۲}$	(([۲/۲, ۲/۴], [۲/۱, ۲/۵]), ([۳/۱, ۳/۲], [۳, ۳/۳]), ([۳/۵, ۳/۶], [۳/۴, ۳/۷]); ([۱/۴, ۱/۵], [۱/۳, ۱/۶]), ([۳/۱, ۳/۲], [۳, ۳/۳]), ([۴/۱, ۴/۲], [۴, ۴/۳]))
خروجی ۱ $DMU_{۱۲}$	(([۱/۶, ۱/۷], [۱/۵, ۱/۸]), ([۲, ۲/۱], [۱/۹, ۲/۲]), ([۲/۵, ۲/۶], [۲/۴, ۲/۷]); ([۱/۲, ۱/۳], [۱, ۱/۴]), ([۲, ۲/۱], [۱/۹, ۲/۲]), ([۳/۱, ۳/۲], [۳, ۳/۳]))
خروجی ۲ $DMU_{۱۲}$	(([۶/۶, ۶/۷], [۶/۵, ۶/۸]), ([۷/۵, ۷/۶], [۷/۴, ۷/۷]), ([۸/۴, ۸/۵], [۸/۳, ۸/۶]); ([۵/۷, ۵/۸], [۵/۶, ۵/۹]), ([۷/۵, ۷/۶], [۷/۴, ۷/۷]), ([۹/۳, ۹/۴]), [۹/۲, ۹/۵]))

جدول ۶: جدول نتایج رویکرد پیشنهادی

	$DMU_{۱}$	$DMU_{۲}$	$DMU_{۳}$	$DMU_{۴}$	$DMU_{۵}$	$DMU_{۶}$
کارایی	۰/۸۳۰۲	۰/۹۵۴۹	۰/۸۳۴۲	۱/۰۰۰۰	۰/۸۴۵۳	۰/۷۲۹۸

جدول ۷: جدول نتایج رویکرد پیشنهادی

	$DMU_{۷}$	$DMU_{۸}$	$DMU_{۹}$	$DMU_{۱۰}$	$DMU_{۱۱}$	$DMU_{۱۲}$
کارایی	۱/۰۰۰۰	۱/۰۰۰۰	۱/۰۰۰۰	۰/۹۳۹۶	۰/۸۲۸۹	۱/۰۰۰۰

شهودی و راف فازی استفاده شده است. داده‌های فازی شهودی به ما امکان می‌دهند تا عدم قطعیت‌ها و نوسانات موجود در داده‌ها را بهتر مدیریت کنیم و راف فازی با فراهم کردن روشی برای کاهش پیچیدگی داده‌ها، کارایی تحلیل‌ها را افزایش می‌دهد.

در جدول‌های (۶) و (۷) نتایج به‌دست‌آمده در استفاده از رویکرد پیشنهادی مجموعه‌های فازی شهودی راف برای ارزیابی کارایی ۱۲ واحد تصمیم‌گیرنده (DMU) ارائه شده است. این نتایج نشان‌دهنده میزان کارایی هر واحد در نسبت به بهترین عملکرد موجود در مجموعه بررسی شده می‌باشند.

از مجموعِ ۱۲ واحد مورد بررسی، ۵ واحد $(DMU۴, DMU۷, DMU۸, DMU۹,$ $DMU۱۲)$ با نمره کارایی برابر با ۱/۰۰۰۰ شناخته شده‌اند که نشان‌دهنده عملکرد بهینه و کارآمد آن‌ها در مقایسه با سایر واحدها می‌باشد. این واحدها به عنوان مرجع‌های کارآمد در سیستم‌های تصمیم‌گیری شناخته می‌شوند و سایر واحدها می‌توانند با استفاده از راهکارهای بهبود یافته، سعی در نزدیک‌تر شدن به این مرجع‌ها داشته باشند.

سایر واحدها دارای کارایی کمتر از ۱ هستند. برای مثال، $DMU۶$ با کارایی ۰/۷۲۹۸ کمترین کارایی را دارد، که نشان می‌دهد این واحد نسبت به واحدهای دیگر به منابع بیشتری نیاز دارد تا به همان خروجی برسد. واحدهایی مانند $DMU۱(۰/۸۳۰۲)$ و $DMU۵(۰/۸۴۵۳)$ نیز به دلیل کارایی زیر ۱، به بهبود در نحوه استفاده از منابع نیاز دارند.

نتایج به دست آمده نشان‌دهنده‌ی تفاوت‌های عملکردی بین واحدهای مختلف است. این نتایج می‌تواند به مدیران و تصمیم‌گیران کمک کند تا اقدامات مناسبی برای بهبود کارایی

واحدهای کمتر کارآمد اتخاذ کنند و بهترین عملکرد را از واحدهای کارآمد حفظ نمایند.

۶. نتیجه‌گیری

در این مقاله، ما به بررسی مدیریت عدم قطعیت در تحلیل پوششی داده‌ها (DEA) با استفاده از داده‌های فازی شهودی و پارامترهای راف فازی پرداختیم. هدف اصلی این تحقیق، بهبود دقت و مدیریت عدم قطعیت در مدل‌های DEA با استفاده از داده‌های نادقیق فازی شهودی بود که هر یک از پارامترهای آن راف فازی را تشکیل می‌دهند. نتایج این تحقیق نشان داد که ترکیب داده‌های فازی شهودی با پارامترهای راف فازی می‌تواند در مدیریت عدم قطعیت در مدل‌های DEA راهکاری جدید ایجاد کند. در داده‌های نادقیق، در حالتی که هر کدام از پارامترها نیز نادقیق باشند، این ترکیب و ایده می‌تواند دقت و اطمینان در ارزیابی عملکرد واحدهای تصمیم‌گیرنده را افزایش دهد. همچنین، می‌توان از این روش به‌عنوان یک ابزار برای بهبود فرآیندهای تصمیم‌گیری و ارزیابی کارایی استفاده کرد. تحلیل نتایج نشان می‌دهد که استفاده از داده‌های فازی شهودی با پارامترهای راف فازی، توانایی مدل‌های DEA را در مدیریت داده‌های نامطمئن و مبهم بهبود می‌بخشد. این روش امکان تحلیل دقیق‌تر و جامع‌تر عملکرد واحدها را فراهم می‌کند و نشان می‌دهد که ترکیب این دو رویکرد می‌تواند به طور مؤثری عدم قطعیت‌های موجود در داده‌ها را مدیریت کند. این تحقیق با محدودیت پیچیدگی محاسباتی ناشی از ترکیب داده‌های فازی شهودی و پارامترهای راف فازی نیازمند دانش فنی و تخصصی بالایی در زمینه روش‌های فازی و تحلیل پوششی داده‌ها است، مواجه بود. با توجه به نتایج به‌دست‌آمده، پیشنهاد می‌شود که در تحقیقات آینده، کاربرد عملی این روش در صنایع مختلف مورد بررسی قرار گیرد. همچنین، بررسی ارزیابی واحدها با داده‌های راف فازی که هر کدام از پارامترهای آن فازی شهودی را تشکیل می‌دهند، می‌تواند جذابیت‌های خاص خود را داشته باشد. ترکیب داده‌های راف فازی با فازی مردد نیز به‌عنوان یک رویکرد جدید می‌تواند مورد مطالعه قرار گیرد. نتایج این تحقیق اهمیت استفاده از روش‌های پیشرفته فازی و راف را در تحلیل پوششی داده‌ها نشان می‌دهد. این روش‌ها می‌توانند به عنوان ابزارهای در بهبود فرآیندهای تصمیم‌گیری و ارزیابی عملکرد در سازمان‌ها و صنایع مختلف به کار گرفته شوند و به مدیران کمک کنند تا با دقت بیشتری عملکرد واحدها را ارزیابی و تصمیمات بهتری اتخاذ کنند.

مراجع

[1] Atanassov, K. (1986) Intuitionistic fuzzy sets. Fuzzy Sets and Systems, 20, 87-96.

[2] Sahil, M., A., & Lohani, D. (2024) Comprehensive intuitionistic fuzzy network data envelopment analysis incorporating undesirable outputs and shared resources, MethodsX,, 12, https://doi.org/10.1016/j.mex.2024.102710.

[3] Pawlak, Z. (1982) Rough sets. International Journal of Parallel Programming, Vol. 11, pp. 341-356.

[4] Liu, B.D. (2004) Uncertain Theory: An Introduction to its Axiomatic Foundation. Springer, Berlin.

[5] Khanjani, R., Charles, V., and Jalalzadeh, L, (2014) Fuzzy rough DEA model: A possibility and expected value approaches. Expert Systems with Applications, 41, 434–444.

[6] Jafarzadeh, M., Davvaz, B. (2013) Rough Intuitionistic Fuzzy Information Systems. Fuzzy Information and Engineering, 5:4, 445-458.

[7] Rizvi, R., Naqvi, H. J., Nadeem, D., (2002) Rough Intuitionistic Fuzzy Sets. Conference: Proceedings of the 6th Joint Conference on Information Science.

[8] Kumar, A. T., Nath, A., Kumar, R. P., Maratha, P., (2024) A novel intuitionistic fuzzy rough instance selection and attribute reduction with kernelized intuitionistic fuzzy C-means clustering to handle imbalanced datasets. Expert Systems with Applications, 251, 437 -449.

[9] Jain, P., Tiwari, A. & Som, T. (2024) Intuitionistic fuzzy rough set model based on k-means and its application to enhance prediction of aptamer–protein interacting pairs. J Ambient Intell Human Comput, 15, 3575–3586.

[10] Noorjahan S., Sharief Basha S. (2024) Developing an intuitionistic fuzzy rough new correlation coefficient approach for enhancing robotic vacuum cleaner. Science Progress. 107(3).

[11] Burillo, P. Bustince, H. (1996) Entropy on intuitionistic fuzzy sets and on interval-valued fuzzy sets, Fuzzy Sets and Systems, 78(3), 305 – 316.

[12] Grzegorzewski, p., (2002) Intuitionistic fuzzy numbers. Accepted for the precedingof the IFSA, 2003, world Congress.

[13] Zadeh, L. A. (1978) Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility. Fuzzy Sets and Systems, 1, 9-34.