سیستم های فازی و کاربردها
سال هفتم، شماره اول (بهار و تابستان ۱۴۰۳)
صص. ۲۲۹ تا ۲۴۶
شاپای چاپی: ۲۷۱۷ـ ۴۴۰۹
شاپای الکترونیکی: ۲۷۱۷ـ ۳۹۸۴
DOI:10.22034/JFSA.2024.389592.1165

معرفی BCKـ فیلترهای استلزامی فازی در BCKـ جبرهای کراندار

صادق خسروی شعار
بخش ریاضی و علوم کامپیوتر، دانشگاه فسا، فسا، ایران

تاریخ دریافت: ۱۴۰۱/۱۲/۲۱ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۳/۰۷/۱۷

نوع مقاله: علمی ـ پژوهشی

چکیده. در این مقاله تعمیمی از BCKـ فیلترهای فازی یعنی BCKـ فیلترهای استلزامی فازی را در BCKـ جبرهای کراندار معرفی می‌کنیم؛ نشان می‌دهیم که هر BCKـ فیلتر استلزامی فازی یک BCKـ فیلتر فازی است در حالی که عکس این مطلب در حالت کلی برقرار نیست. ارتباط بین یک BCKـ فیلتر استلزامی فازی و مجموعه‌ی برشی آن را مطالعه کرده و نشان می‌دهیم یک مجموعه‌ی فازی یک BCKـ فیلتر استلزامی فازی است اگر و تنها اگر هر مجموعه‌ی برشی آن یک BCKـ فیلتر استلزامی باشد. در ادامه BCKـ فیلتر فازی تولید شده توسط یک BCKـ فیلتر استلزامی فازی را توصیف می‌کنیم و نشان می‌دهیم که در یک BCKـ جبر استلزامی کراندار، BCKـ فیلترهای فازی و BCKـ فیلترهای استلزامی فازی یکی هستند.

۱. سرآغاز

BCKـ جبرها به عنوان یکی از انواع جبرهای منطقی در واقع مجموعه‌های مرتب هستند و رده‌های خاصی از آنها مشبکه یا نیم مشبکه می‌باشند [۶]. امروزه کاربرد BCKـ جبرها در شاخه‌های مختلف ریاضی همچون نظریه گروه‌ها، آنالیز تابعی، نظریه احتمال و توپولوژی

2010 *Mathematics Subject Classification.* 06F35, 03B47
E-mails: khosravi.shoar@fasau.ac.ir.
عبارات و کلمات کلیدی. BCKـ فیلتر فازی، BCKـ فیلتر استلزامی فازی، BCKـ جبر پیچشی ، BCKـ جبرهای کراندار.

مطالعه می‌شود [۲، ۵]. برای بررسی ویژگی‌های این جبرها، ایده‌ال‌ها و فیلترها ابزارهای بسیار مناسبی هستند[۹، ۱۱، ۱۳]. منطق فازی در سال ۱۹۶۵ برای اولین بار توسط پروفسور لطفی عسکرزاده ارائه گردید [۱۵]. این نظریه دارای کاربردهای فراوان در صنعت، علوم فنی و ریاضی است. همچنین این ایده در ساختارهای جبری متعددی همچون نیم‌گروه‌ها، گروه‌ها، فضاهای برداری و مدول‌ها کاربرد دارد. برگ برنده منطق فازی را می‌توان انتخاب دقیق‌تر یا دادن درجه‌ی عضویت دقیق در بازه $[۰, ۱]$ به مجموعه‌ی مورد مطالعه، دانست. این در حالی است که در منطق کلاسیک یک مجموعه دارای درجه عضویت صفر یا یک می‌باشد که در نتیجه تصمیم گیری فازی دقیق‌تر و به حقیقت نزدیک‌تر است. برای نمونه از کاربرد منطق فازی در صنعت می توان تولید ماشین های لباس شویی با درجات مختلف شویندگی و تولید جارو برقی با درجه مکش های مختلف نام برد در حالی که اگر از منطق دو ارزشی یا کلاسیک استفاده می‌شد این وسایل در دو حالت خاموش یا روشن و یا دوحالت تند و کند ساخته می‌شدند و درنتیجه از کارایی لازم برخوردار نبودند. سیستم‌های پیچیده‌ای وجود دارد که مدلسازی آنها توسط ریاضیات و روشهای مدلسازی کلاسیک غیرممکن و یا بسیار دشوار است ولی با استفاده از منطق فازی می‌توان این سیستم‌ها را به آسانی و با انعطاف بیشتری مدلسازی کرد. جون و منگ نظریه BCKـ فیلترها و BCKـ فیلترهای فازی در BCKـ جبرها را ارائه دادند. کاربرد جبرهای بولی در مدارهای منطقی بر کسی پوشیده نیست و از آنجا که BCKـ جبرهای استلزامی کراندار در واقع همان جبرهای بولی هستند پس معرفی ایده‌ال‌ها و فیلترها در آنها دارای اهمیت است و در نتیجه BCKـ فیلترهای استلزامی معرفی شده است. در این مقاله همانطور که در چکیده بیان شد BCKـ فیلترهای استلزامی فازی در BCKـ جبرهای کراندار معرفی و مطالعه می‌شوند.

۲. تعریف‌ها و قضیه‌های مقدماتی

تعریف ۲.۱. [۴، ۶] فرض کنیم X یک مجموعه‌ی ناتهی، $*$ یک عمل دوتایی و $۰ \in X$ عنصر ثابتی باشد. در این‌صورت $(X; *, ۰)$ یک BCKـ جبر نامیده می‌شود اگر در شرایط زیر صدق کند:

$(BCK-۱)$ $((x*y)*(x*z))*(z*y)=۰$.

$(BCK-۲)$ $(x*(x*y))*y=۰$.

$(BCK-۳)$ $x*x=۰$.

$(BCK-۴)$ اگر $x*y=y*x=۰$، آنگاه $x=y$.

$(BCK-۵)$ $۰ * x = ۰$.

[۳] ترتیب جزئی $\leq$ روی X به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$x \leq y$ اگر و تنها اگر $x * y = ۰$.

برای اعضای دلخواه x, y, z از BCKــجبر X موارد زیر برقرار می‌باشد.

(I) $(x * y) * z = (x * z) * y$.

(II) اگر $x \leq y$، آنگاه $z * y \leq z * x$ و $x * z \leq y * z$.

(III) $x * (x * (x * y)) = x * y$.

تعریف ۲.۲. [۱، ۳، ۴، ۱۴] فرض کنیم X یک BCKــجبر و x, y, z عضوهای دلخواهی از X باشند. در این‌صورت:

(۱) X را یک BCKــجبر استلزامی مثبت گویند هرگاه
$(x * y) * z = (x * z) * (y * z)$.

(۲) X را یک BCKــجبر استلزامی گویند هرگاه $x * (y * x) = x$.

(۳) X را یک BCKــجبر جابجایی گویند هرگاه $x * (x * y) = y * (y * x)$.

(۴) X را یک BCKــ جبر کراندار گویند هرگاه دارای بزرگترین عضو باشد (نسبت به ترتیب جزئی $\leq$) که آن را با ۱ نشان می‌دهند و قرار می‌دهیم $Nx = ۱ * x$.

(۵) BCKــجبر کراندار X را پیچشی گویند هرگاه $NNx = x$.

توجه: از این به بعد در این مقاله منظور از X یک BCKــجبر کراندار است مگر اینکه X چیز دیگری تعریف شده باشد.

گزاره ۳.۲. [۴، ۱۳] *فرض کنیم x, y, z عضوهای دلخواهی از X باشند. در این‌صورت:*

(۱) $N۱ = ۰$ و $N۰ = ۱$.

(۲) $NNx \leq x$.

(۳) $Nx * Ny \leq y * x$.

(۴) $Nx * y = Ny * x$.

(۵) $NNNx = Nx$.

تعریف ۴.۲. [۱۲] فرض کنیم I یک زیر مجموعه‌ی ناتهی X، $0 \in I$ و x, y, z عضوهای دلخواهی از BCKـ جبر X باشند. در این‌صورت:

(۱) I را یک ایده‌ال گویند اگر $y \in I$ و $x * y \in I$، آنگاه $x \in I$.

(۲) I را یک ایده‌ال استلزامی گویند اگر $z \in I$ و $(x * (y * x)) * z \in I$، آنگاه $x \in I$.

تعریف ۵.۲. [۱۱] فرض کنیم F یک زیر مجموعه‌ی ناتهی X، $1 \in F$ و x, y, z عضوهای دلخواهی از X باشند. در این‌صورت: F را یک BCKـ فیلتر گویند اگر $y \in F$ و $N(Nx * Ny) \in F$، آنگاه $x \in F$.

تعریف ۶.۲. [۱۵] فرض کنیم X یک مجموعه ناتهی باشد.

(۱) نگاشت $\mu : X \to [0, 1]$ را یک مجموعه‌ی فازی در X گویند.

(۲) اگر μ یک مجموعه‌ی فازی در X باشد. برای $t \in [0, 1]$ مجموعه‌ی $\mu_t = \{x \in X | \mu(x) \geq t\}$ زیرمجموعه tـ تراز یا زیرمجموعه tـ برش μ گویند.

تعریف ۷.۲. [۷] فرض کنیم μ یک مجموعه‌ی فازی در X باشد. در این‌صورت μ را یک BCKـ فیلتر فازی گویند هرگاه برای هر $x, y \in X$ موارد زیر برقرار باشد.

(۱) $\mu(1) \geq \mu(x)$.

(۲) $\mu(x) \geq min\{\mu(N(Nx * Ny)), \mu(y)\}$.

لم ۸.۲. [۷، ۱۰] *فرض کنیم μ یک BCKـ فیلتر فازی در X باشد. در این‌صورت برای هر $x, y \in X$ داریم:*

(۱) *اگر $Nx \leq Ny$، آنگاه $\mu(y) \leq \mu(x)$.*

(۲) *اگر $x \leq y$، آنگاه $\mu(x) \leq \mu(y)$.*

(۳) *اگر $t \in [0, 1]$، آنگاه μ_t یک BCKـ فیلتر است.*

۳. BCKـ فیلتر استلزامی فازی در BCKـ جبرهای کراندار

در این بخش ابتدا دو تساوی مهم در BCKـ جبرها را ثابت می‌کنیم و سپس یک BCKـ فیلتر استلزامی را معرفی کرده و با توجه به آن به معرفی و بررسی خواص یک BCKـ فیلتر استلزامی فازی می‌پردازیم. همچنین ارتباط بین یک BCKـ فیلتر استلزامی فازی و زیر

مجموعه‌ی برشی آن در قضیه ۱۰.۳، مورد بررسی قرار می‌گیرد. در نهایت BCKـ فیلتر فازی تولید شده توسط یک BCKـ فیلتر استلزامی فازی بررسی می‌شود.

لم ۱.۳. *فرض کنیم x, y عضوهای دلخواهی از X باشند. در این‌صورت موارد زیر برقرار است.*

(۱) $NN(NNx * y) = NNx * y$.

(۲) $NN(Nx * y) = Nx * y$.

اثبات. برای بدست آوردن تساوی (۱) فرض کنیم x, y عضوهای دلخواهی از X باشند. باتوجه به $BCK - ۲$ داریم $NN(NNx * y) * (NNx * y) = ۰$ از طرفی بنا به (I) و گزاره ۳.۲ (۵) داریم:

$$\begin{aligned}(NNx * y) * NN(NNx * y) &= (NNx * NN(NNx * y)) * y \\ &= (NNN(NNx * y) * Nx) * y \\ &= (N(NNx * y) * Nx) * y \\ &= (NNx * (NNx * y)) * y \\ &= (NNx * y) * (NNx * y) \\ &= ۰\end{aligned}$$

در نتیجه باتوجه به $BCK - ۴$ بدست می‌آوریم $NN(NNx * y) = NNx * y$.
باتوجه به گزاره ۳.۲ (۵) و تساوی (۱) براحتی می‌توان تساوی (۲) را ثابت کرد. □

تعریف ۲.۳. زیر مجموعه ناتهی F از X را یک BCKـ فیلتر استلزامی گویند اگر برای هر $x, y, z \in X$ موارد زیر برقرار باشند:

(۱) $۱ \in F$.

(۲) اگر $z \in F$ و $N((Nx * (Ny * Nx)) * Nz) \in F$، آنگاه $x \in F$.

برای نمونه در مثال ۷.۳، براحتی می توان بررسی کرد که $\{b, ۱\}$ یک BCKـ فیلتر استلزامی است.

لم ۳.۳. *فرض کنیم F یک BCKـ فیلتر از X باشد. در این صورت F یک BCKـ فیلتر استلزامی است اگر و تنها اگر $N(Nx * (Ny * Nx)) \in F$، آنگاه $x \in F$.*

اثبات. ($\Leftarrow$) فرض کنیم F یک BCKـ فیلتر استلزامی است و $N(Nx*(Ny*Nx))\in F$ در این‌صورت چون $۱\in F$ و از طرفی

$$\begin{aligned} N((Nx*(Ny*Nx))*N۱) &= N((Nx*(Ny*Nx))*۰) \\ &= N(Nx*(Ny*Nx))\in F \end{aligned}$$

درنتیجه بنا به تعریف ۲.۳، $x\in F$.

($\Rightarrow$) فرض کنیم $z\in F$ و $N((Nx*(Ny*Nx))*Nz)\in F$ در این‌صورت بنابه لم ۱.۳، داریم

$$N((NN(Nx*(Ny*Nx)))*Nz)=N((Nx*(Ny*Nx))*Nz)\in F$$

از طرفی چون F یک BCKـ فیلتر است داریم $N(Nx*(Ny*Nx))\in F$ و بنابراین طبق فرض نتیجه می‌گیریم $x\in F$. □

تعریف ۴.۳. فرض کنیم μ یک مجموعه‌ی فازی در X و x,y,z عضوهای دلخواهی از X باشند. در این‌صورت μ را یک BCKـ فیلتر استلزامی فازی گویند هرگاه:

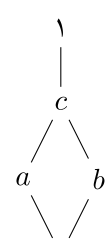
(۱) $\mu(۱)\geq\mu(x)$.

(۲) $\mu(x)\geq min\{\mu(N((Nx*(Ny*Nx))*Nz)),\mu(z)\}$.

مثال زیر بیانگر وجود یک BCKـ فیلتر استلزامی فازی است.

مثال ۵.۳. فرض کنیم $X=\{۰,a,b,c,۱\}$ و عمل $*$ روی X مطابق زیر تعریف شده باشد.

$*$	۰	a	b	c	۱
۰	۰	۰	۰	۰	۰
a	a	۰	a	۰	۰
b	b	b	۰	۰	۰
c	c	c	c	۰	۰
۱	۱	c	۱	a	۰



در این‌صورت $(X, \leq, ۰, ۱)$ یک BCKـ جبر کراندار است و براحتی می‌توان بررسی کرد که مجموعه‌ی فازی μ با ضابطه

$$\mu(x) = \begin{cases} ۱ & \text{if } x \in \{۱, c\} \\ ۰/۲ & x \in \{۰, a, b\} \end{cases}$$

یک BCKـ فیلتر استلزامی فازی است.

قضیه ۶.۳. *هر BCKـ فیلتر استلزامی فازی μ در X یک BCKـ فیلتر فازی است.*

اثبات. فرض کنیم μ یک BCKـ فیلتر استلزامی فازی در X باشد. در این‌صورت داریم:

$$\begin{aligned} \mu(x) &\geq min\{\mu(N((Nx * (N۱ * Nx)) * Ny)), \mu(y)\} \\ &= min\{\mu(N((Nx * ۰) * Ny)), \mu(y)\} \\ &= min\{\mu(N(Nx * Ny)), \mu(y)\} \end{aligned}$$

در نتیجه طبق تعریف ۷.۲، μ یک BCKـ فیلتر فازی است. □

مثال زیر نشان می‌دهد که عکس قضیه ۶.۳ در حالت کلی برقرار نیست.

مثال ۷.۳. فرض کنیم $X = \{۰, a, b, ۱\}$ و عمل $*$ روی X مطابق زیر تعریف شده باشد.

$*$	۰	a	b	۱
۰	۰	۰	۰	۰
a	a	۰	۰	۰
b	b	b	۰	۰
۱	۱	b	a	۰

در این‌صورت $(X, \leq, ۰, ۱)$ یک BCKـ جبر کراندار است. با کمی محاسبه می‌توان بررسی نمود که مجموعه‌ی فازی μ با ضابطه

$$\mu(x) = \begin{cases} ۱ & \text{if } x = ۱ \\ ۰/۷ & \text{if } x = b \\ ۰ & \text{if } x \in \{۰, a\} \end{cases}$$

یک BCKـ فیلتر فازی است اما یک BCKـ فیلتر استلزامی فازی نیست زیرا

$$\begin{aligned} \mu(b) &\geq min\{\mu(N((Nb*(N۰*Nb))*N۱)),\mu(۱)\} \\ &= \mu(N((a*(۱*a))*۰)) \\ &= \mu(N(a*b))=\mu(N۰)=\mu(۱)=۱ \end{aligned}$$

درنتیجه $\mu(b)=۱$ که با توجه به ضابطه μ غیرممکن است، یعنی μ در شرط BCKـ فیلتر استلزامی فازی صدق نمی‌کند.

قضیه ۸.۳. *فرض کنیم که μ یک BCKـ فیلتر فازی در X باشد. در این‌صورت برای هر $x,y\in X$ موارد زیر معادلند:*

(۱) *μ یک BCKـ فیلتر استلزامی فازی است.*
(۲) $\mu(N(Nx*(Ny*Nx)))\leq\mu(x)$.
(۳) $\mu(N(Nx*x))\leq\mu(x)$.

اثبات. (۱) $\Leftarrow$ (۲) فرض کنیم μ یک BCKـ فیلتر استلزامی فازی در X است. در این‌صورت بنابه تعریف ۴.۳، داریم

$$\begin{aligned} \mu(x) &\geq min\{\mu(N((Nx*(Ny*Nx))*N۱)),\mu(۱)\} \\ &= min\{\mu(N((Nx*(Ny*Nx)))),\mu(۱)\} \\ &= \mu(N(Nx*(Ny*Nx))) \end{aligned}$$

(۲) $\Leftarrow$ (۳) فرض کنیم (۲) برقرار باشد. در این‌صورت باتوجه به گزاره۳.۲ (۵) و (I) داریم

$$\begin{aligned} \mu(N(Nx*x)) &= \mu(N(NNNx*x)) \\ &= \mu(N(Nx*NNx)) \\ &= \mu(N(Nx*(N۰*Nx)))\leq\mu(x) \end{aligned}$$

(۳) $\Leftarrow$ (۲) فرض کنیم (۳) برقرار باشد. بنابه (II) داریم
$Ny*Nx\leq ۱*Nx=NNx$ پس $Nx*NNx\leq Nx*(Ny*Nx)$
درنتیجه بنابه (II) $N(Nx*(Ny*Nx))\leq N(Nx*NNx)$

حال باتوجه به لم ۸.۲(۲) و فرض داریم

$$\mu(N(Nx*(Ny*Nx))) \leq \mu(N(Nx*NNx)) \leq \mu(x)$$

(۲) $\Leftarrow$ (۱) قرار دهیم $U = Nx*(Ny*Nx)$ درنتیجه بنا به ۳.۲ (۷) داریم
$NNU = NN(Nx*(Ny*Nx)) = Nx*(Ny*Nx) = U$
حال باتوجه به تعریف ۷.۲ و فرض (۲) داریم

$$\begin{aligned} min\{\mu(N((Nx*(Ny*Nx))*Nz)), \mu(z)\} &= \\ min\{\mu(N(NNU*Nz)), \mu(z)\} &\leq \\ \mu(NU) = \mu(N(Nx*(Ny*Nx))) &\leq \mu(x) \end{aligned}$$

پس بنابه تعریف ۴.۳، μ یک BCKـ فیلتر استلزامی فازی است. □

قضیه ۹.۳. *فرض کنیم که μ یک BCKـ فیلتر فازی در X باشد. در این‌صورت برای هر $x, y, z \in X$ موارد زیر معادلند:*

(۱) *μ یک BCKـ فیلتر استلزامی فازی است.*
(۲) $\mu(N((Nx*Ny)*Ny)) \leq \mu(N(Nx*Ny))$.
(۳) $\mu(N((Nx*Ny)*Nz)) \leq \mu(N((Nx*Nz)*(Ny*Nz)))$.

اثبات. (۱) $\Leftarrow$ (۲) فرض کنیم μ یک BCKـ فیلتر استلزامی فازی در X است. قرار می‌دهیم $u = N(Nx*Ny)$. بنابه (III) و لم ۱.۳ (۲) داریم

$$\begin{aligned} V = (Nx*Ny)*Ny &= (Nx*(Nx*(Nx*Ny)))*Ny \\ &= (Nx*Ny)*(Nx*(Nx*Ny)) \\ &= NN(Nx*Ny)*(Nx*NN(Nx*Ny)) \quad (۱۰۹) \end{aligned}$$

پس باتوجه به قضیه ۸.۳ (۲) و (۱۰۹) داریم

$$\begin{aligned} \mu(V) = \mu(NN(Nx*Ny)*(Nx*NN(Nx*Ny))) &= \\ \mu(Nu*(Nx*Nu)) &\leq \mu(u) \\ &= \mu(N(Nx*Ny)) \end{aligned}$$

(۲) $\Leftarrow$ (۱) باتوجه به قضیه۸.۳، کافی است ثابت کنیم برای هر $x \in X$، $\mu(N(Nx*x)) \leq \mu(x)$. برای این‌منظور باتوجه به گزاره ۳.۲(۴) و (I) داریم

$$\begin{aligned} (N(Nx * NNx) * NNx) * NNx &= \\ (NNNx * (Nx * NNx)) * NNx &= \\ (Nx * NNx) * (Nx * NNx) &= ۰ \end{aligned}$$

درنتیجه

$$\mu(N((N(Nx * NNx) * NNx) * NNx)) = \mu(N(۰)) = \mu(۱)$$

پس بنا به (۲)، داریم

$$\mu(N((N(Nx * NNx) * NNx) * NNx)) \leq \mu(N(N(Nx * NNx) * NNx))$$

که این نتیجه می‌دهد

$$\mu(N(N(Nx * NNx) * NNx)) = \mu(۱) \; (۲ \cdot ۹)$$

ازطرفی باتوجه به گزاره ۳.۲ (۴)، ۳.۲ (۵)، (I) و (۲ ۰ ۹) داریم

$$\begin{aligned} \mu(N(Nx * NN(Nx * x))) &= \mu(N(NNNx * NN(Nx * x))) \\ &= \mu(N(NNN(Nx * x) * NNx)) \\ &= \mu(N(N(Nx * x) * NNx)) \\ &= \mu(N(N(NNNx * x) * NNx)) \\ &= \mu(N(N(Nx * NNx) * NNx)) \\ &= \mu(۱) \; (۳ \cdot ۹) \end{aligned}$$

حال چون μ یک BCKـ فیلتر فازی است و باتوجه به (۳ ۰ ۹) داریم:

$$\begin{aligned} \mu(x) &\geq min\{(\mu(N(Nx * NN(Nx * x))), \mu(N(Nx * x)))\} \\ &= min\{\mu(۱), \mu(N(Nx * x))\} = \mu(N(Nx * x)) \end{aligned}$$

(۲) $\Leftarrow$ (۳) باتوجه به $(BCK-۱)$ و (I) داریم
$(Nx*(Ny*Nz))*Nz=(Nx*Nz)*(Ny*Nz)\leq Nx*Ny$
در نتیجه با توجه به (II) داریم

$$N((Nx*Ny)*Nz)\leq N(((Nx*(Ny*Nz))*Nz)*Nz)$$

در نتیجه بنا به لم ۸.۲ (۲)، داریم

$$\mu(N((Nx*Ny)*Nz))\leq \mu(N(((Nx*(Ny*Nz))*Nz)*Nz)) \quad (۴\cdot۹)$$

از طرفی با توجه به (۲)

$$\mu(N(((Nx*(Ny*Nz))*Nz)*Nz))\leq \mu(N(((Nx*(Ny*Nz))*Nz))$$

حال باتوجه به (۴ · ۹) نتیجه می‌گیریم

$$\begin{aligned}\mu(N((Nx*Ny)*Nz)) &\leq \mu(N(((Nx*(Ny*Nz))*Nz))\\ &= \mu(N((Nx*Nz)*(Ny*Nz)))\end{aligned}$$

(۳) $\Leftarrow$ (۲) با قرار دادن $y=z$ در (۳)، براحتی (۲) حاصل می‌شود $\square$

قضیه ۱۰.۳. *فرض کنیم μ یک مجموعه‌ی فازی از X به توی $[۰,۱]$ باشد. در این‌صورت μ یک BCKـ فیلتر استلزامی فازی است اگر و تنها اگر برای هر $t\in Img(\mu)$، μ_t یک BCKـ فیلتر استلزامی باشد.*

اثبات. $(\Leftarrow)$ فرض کنیم μ یک BCKـ فیلتر استلزامی فازی در X باشد.
باتوجه به قضیه ۶.۳، μ یک BCKـ فیلتر فازی است و در نتیجه طبق لم ۸.۲ (۳)، μ_t یک BCKـ فیلتر است. فرض کنیم $N(Nx*(Ny*Nx))\in\mu_t$ بنابه تعریف زیرمجموعه‌ی تراز و قضیه ۸.۳ ، داریم
$\mu(x)\geq\mu(N(Nx*(Ny*Nx)))\geq t$ درنتیجه $x\in\mu_t$ و باتوجه به لم۳.۳، μ_t یک BCKـ فیلتر استلزامی است.
$\Rightarrow$ برعکس فرض کنیم برای هر $t\in Imag(\mu)$، μ_t یک BCKـ فیلتر استلزامی باشد. اگر برای هر $x\in X$ داشته باشیم $\mu(x)\geq\mu(N(Nx*(Ny*Nx)))$ که بنابه قصیه ۸.۳ ، μ یک BCKـ فیلتر استلزامی فازی است و قضیه ثابت می‌شود. درغیر این‌صورت داریم $\mu(x)<\mu(N(Nx*(Ny*Nx)))$. درنتیجه $t_۱,t_۲\in Imag(\mu)$ هست به طوری که

$\mu(x) = t_۱ < \mu(N(Nx * (Ny * Nx))) = t_۲$ باتوجه به تعریف زیر مجموعه‌های تراز واضح است که $\mu(N(Nx * (Ny * Nx))) \in \mu_{t_۲}$ اما چون $\mu(x) < t_۲$ پس $x \notin \mu_{t_۲}$ که نشان می‌دهد $\mu_{t_۲}$ یک BCKـ فیلتر استلزامی نیست و این با فرض قضیه در تناقض است.

□

قضیه ۱۱.۳. *فرض کنیم μ و θ دو BCKـ فیلتر فازی در X باشند، $\theta \subseteq \mu$ و $\theta(۱) = \mu(۱)$. در این‌صورت اگر μ یک BCKـ فیلتر استلزامی فازی باشد، آنگاه θ نیز یک BCKـ فیلتر استلزامی فازی است.*

اثبات. فرض کنیم μ یک BCKـ فیلتر استلزامی فازی و θ یک BCKـ فیلتر فازی باشد و $\theta \subseteq \mu$. در نتیجه بنابه قضیه۹.۳، کافی است ثابت کنیم برای هر $x, y \in X$، $\theta(N((Nx*Ny)*Ny)) \leq \theta(N(Nx*Ny))$. قرار می‌دهیم $V = (Nx*Ny)*Ny$ و $z = N(Nx*V)$ چون μ یک BCKـ فیلتر استلزامی فازی است پس بنابه قضیه ۹.۳(۲)، فرض و لم ۱.۳(۲)، داریم:

$$\begin{aligned}
\theta(N(((Nx * V) * Ny) * Ny)) &= \theta(N(((Nx * Ny) * V) * Ny)) \\
&= \theta(N(((Nx * Ny) * Ny) * V)) \\
&= \theta(N(V * V)) \\
&= \theta(N(۰)) = \theta(۱) = \mu(۱) \\
&= \mu(N(((Nx * V) * Ny) * Ny)) \\
&= \mu(N((NN(Nx * V) * Ny) * Ny)) \\
&= \mu(N((Nz * Ny) * Ny)) \\
&\leq \mu(N(Nz * Ny)) \\
&= \mu(N(NN(Nx * V) * Ny)) \\
&= \mu(N((Nx * V) * Ny)) \\
&= \mu(N((Nx * Ny) * V))
\end{aligned}$$

بنابراین $\mu(N((Nx*Ny)*V)) \leq \mu(۱)$ باید توجه داشت $\mu(۱)$ بزرگترین مقدار μ است پس

$$\mu(N((Nx*Ny)*V)) = \mu(۱) = \theta(۱) = \theta(N((Nx*Ny)*V)) \quad (۱ \cdot ۸)$$

ازطرفی بنا به گزاره ۳.۲(۳)، داریم $NN(Nx*Ny)*NNV \leq (Nx*Ny)*V$ پس
$N((Nx*Ny)*V) \leq N(NN(Nx*Ny)*NNV)$
در نتیجه بنا به لم ۸.۲(۲) داریم

$$\mu(N((Nx*Ny)*V)) \leq \mu(N(NN(Nx*Ny)*NNV)) \quad (۲ \cdot ۸)$$

حال با توجه به (۱ ۰ ۸) و (۲ ۰ ۸) داریم

$$\begin{aligned} \mu(N(NN(Nx*Ny)*NNV)) &= \mu(۱) = \theta(۱) \\ &= \theta(N(NN(Nx*Ny)*NNV)) \quad (۳ \cdot ۸) \end{aligned}$$

θ یک BCKــ فیلتر فازی است، پس با توجه به تعریف ۷.۲ و (۳ ۰ ۸) داریم

$$\begin{aligned} \theta(N((Nx*Ny)*Ny)) &= \theta(NV) \\ &= min\{\theta(۱), \theta(NV)\} \\ &= min\{\theta(N(NN(Nx*Ny)*NNV)), \theta(NV)\} \\ &\leq \theta(N(Nx*Ny)) \end{aligned}$$

و این اثبات را تکمیل می‌کند. □

تعریف ۱۲.۳. فرض کنیم μ یک BCKــ فیلتر فازی در X و $y \in X$. در این‌صورت مجموعه‌ی فازی مرتبط با μ و y را با ضابطه $\theta_y^\mu(x) = \mu(N(Nx*Ny))$ تعریف می‌کنیم.

قضیه ۱۳.۳. *فرض کنیم μ یک BCKــ فیلتر فازی در X است. در این‌صورت μ یک BCKــ فیلتر استلزامی فازی است اگر و تنها اگر برای هر $y \in X$، θ_y^μ یک BCKــ فیلتر فازی در X باشد.*

اثبات. فرض کنیم μ یک BCKــ فیلتر فازی در X است. در این‌صورت برای $y \in X$ داریم $\theta_y^\mu(۱) = \mu(N(N۱*Ny)) = \mu(N(۰*Ny)) = \mu(N(۰)) = \mu(۱)$ از طرفی چون برای $y \in X$، $N(Nx*Ny) \leq ۱$ پس بنا به لم ۸.۲ (۲)، برای هر $x \in X$ نتیجه

می‌شود $\theta_y^\mu(x) = \mu(N(Nx * Ny)) \leq \mu(۱) = \theta_y^\mu(۱)$
پس خاصیت (۱) تعریف ۷.۲، برای θ_y^μ برقرار است. همچنین
$\theta_y^\mu(y) = \mu(N(Ny * Ny)) = \mu(N(۰)) = \mu(۱)$ (۱۰ ۰ ۱)

اگر μ یک BCKـ فیلتر استلزامی فازی باشد، آنگاه با توجه به قضیه ۹.۳، لم ۱.۳(۲) و (۱۰ ۰ ۱) داریم

$$\begin{aligned}
min\{\theta_y^\mu(N(Nx * Ny)), \theta_y^\mu(y)\} &= min\{\mu(N(NN(Nx * Ny) * Ny)), \mu(۱)\}\\
&= \mu(N(NN(Nx * Ny) * Ny))\\
&= \mu(N((Nx * Ny) * Ny))\\
&\leq \mu(N(Nx * Ny)) = \theta_y^\mu(x)
\end{aligned}$$

و این نشان می‌دهد که خاصیت (۲) تعریف ۷.۲، نیز برای θ_y^μ برقرار است در نتیجه θ_y^μ یک BCKـ فیلتر است. مشابه قسمت بالا بافرض اینکه برای هر $y \in X$، θ_y^μ یک BCKـ فیلتر فازی است ثابت می‌کنیم μ یک BCKـ فیلتر استلزامی فازی در X است

$$\begin{aligned}
\mu(N((Nx * Ny) * Ny)) &= \mu(N(NN(Nx * Ny) * Ny))\\
&= min\{\mu(N(NN(Nx * Ny) * Ny)), \mu(۱)\}\\
&= min\{\theta_y^\mu(N(Nx * Ny)), \theta_y^\mu(y)\}\\
&\leq \theta_y^\mu(x) = \mu(N(Nx * Ny))
\end{aligned}$$

حال با توجه به قضیه ۹.۳، نتیجه می‌گیریم که μ یک BCKـ فیلتر استلزامی فازی است. □

قضیه ۱۴.۳. *فرض کنیم μ یک BCKـ فیلتر استلزامی فازی است. در این‌صورت برای $y \in X$، θ_y^μ کوچکترین BCKـ فیلتر فازی شامل μ است که در نقطه y برابر با $\mu(۱)$ است.*

اثبات. فرض کنیم μ یک BCKـ فیلتر استلزامی فازی باشد. در این‌صورت با توجه به تعریف۷.۲، داریم

$$\begin{aligned} \mu(x) = min\{\mu(۱), \mu(x)\} &= min\{\mu(N(NN(Nx * Ny) * Nx)), \mu(x)\} \\ &\leq \mu(N(Nx * Ny)) \\ &= \theta_y^\mu(x) \end{aligned}$$

از طرفی فرض کنیم α یک BCKـ فیلتر فازی باشد به‌طوری که $\mu \subseteq \alpha$ و $\alpha(y) = \mu(۱)$. در این‌صورت داریم

$$\begin{aligned} \theta_y^\mu(x) &= \mu(N(Nx * Ny)) \\ &= min\{(N(Nx * Ny)), \mu(۱)\} \\ &\leq min\{\alpha(N(Nx * Ny)), \alpha(y)\} \\ &\leq \alpha(x) \end{aligned}$$

و این نشان می‌دهد $\theta_y^\mu(x)$ کوچکترین BCKـ فیلترهای فازی است که در شرط $\theta_y^\mu(y) =$ $\mu(۱)$ صدق می‌کند. □

مثال ۱۵.۳. در مثال ۷.۳، μ یک BCKـ فیلتر فازی است در نتیجه برای هر $y \in X$ طبق تعریف θ_y^μ یک مجموعه‌ی فازی است. چون μ یک BCKـ فیلتر استلزامی فازی نیست پس شرایط قضیه ۱۳.۳، برقرار نیست. بنابراین θ_y^μ یک BCKـ فیلتر فازی نمی‌باشد بطور مثال اگر قرار دهیم $y = a$ داریم:

$$\theta_a^\mu(۰) = \mu(N(N۰ * Na)) = \mu(N(۱ * b)) = \mu(۱ * a) = \mu(b) = ۰/۷$$

$$\theta_a^\mu(b) = \mu(N(Nb * Na)) = \mu(N(a * b)) = \mu(۱ * ۰) = \mu(۱) = ۱$$

$$\theta_a^\mu(a) = \mu(N(Na * Na)) = \mu(N(۰)) = \mu(۱ * ۰) = \mu(۱) = ۱$$

اما شرط BCKـ فیلتر فازی برای θ_y^μ برقرار نیست چون

$$\begin{aligned} \theta_a^\mu(۰) &= ۰/۷ \ngeq min\{\theta_a^\mu(N(N۰ * Na)), \theta_a^\mu(a)\} \\ &= min\{\theta_a^\mu(N(۱ * b)), \mu(۱)\} = min\{\theta_a^\mu(b), \mu(۱)\} = \mu(۱) = ۱ \end{aligned}$$

تعریف ۱۶.۳. فرض کنیم X یک BCKـ جبر کراندار با بزرگترین عضو d باشد. مجموعه‌ی فازی μ^d، باضابطه زیر یک BCKـ فیلتر فازی بدیهی در X می‌نامیم

$$\mu^d(x) = \begin{cases} ۱ & \text{if } x = d \\ ۰ & x \neq d \end{cases}$$

توجه در اینجا بزرگترین مقدار X، به جای ۱، d انتخاب شده تا با مقدار $\mu^d(x) = ۱$، اشتباه نشود.

قضیه ۱۷.۳. *فرض کنید X یک BCKـ جبر پیچشی با بزرگترین عنصر d باشد. در این‌صورت موارد زیر معادلند:*

(۱) *μ^d یک BCKـ فیلتر استلزامی فازی است.*

(۲) *هر BCKـ فیلتر فازی در X، یک BCKـ فیلتر استلزامی فازی است.*

(۳) *برای هر $y \in X$، $\theta_y^{\mu^d}$ یک BCKـ فیلتر استلزامی فازی است.*

(۴) *X یک BCKـ جبر استلزامی است.*

اثبات. (۱) $\Leftarrow$ (۲) فرض کنیم X یک BCKـ جبر کراندار با بزرگترین عضو d، δ یک BCKـ فیلتر فازی دلخواه و μ^d یک BCKـ فیلتر استلزامی فازی در X باشد. چون $\mu^d(d) = \delta(d) = ۱$ با توجه به ضابطه μ^d واضح است که $\mu^d \subseteq \delta$، درنتیجه طبق قضیه ۱۱.۳، δ یک BCKـ فیلتر استلزامی فازی در X است.

(۲) $\Leftarrow$ (۱) واضح است.

(۲) $\Leftarrow$ (۳) چون μ^d یک BCKـ فیلتر فازی است پس طبق (۲)، μ^d یک BCKـ فیلتر استلزامی فازی در X است و با استفاده از قضیه۱۳.۳، نتیجه می‌گیریم $\theta_y^{\mu^d}$ یک BCKـ فیلتر فازی است که با استفاده مجدد از (۲) نتیجه می‌گیریم $\theta_y^{\mu^d}$ یک BCKـ فیلتر استلزامی فازی در X است.

(۳) $\Leftarrow$ (۴) طبق (I) و $(BCK - ۵)$ واضح است که $x * (y * x) \leq x$، پس کافی است نشان دهیم برای هر x, y دلخواه در X، $x \leq x*(y*x)$. قرار می‌دهیم $v = N(x*(y*x))$ چون X پیچشی است، $g, h \in X$ وجود دارند به‌طوری که $h = Ny$ و $g = Nx$ در نتیجه $v = N(Ng * (Nh * Ng))$ می‌دانیم $\theta_v^{\mu^d}(v) = ۱$ از طرفی $\theta_v^{\mu^d}$ یک BCKـ فیلتر استلزامی فازی است پس:

$$۱ = \theta_v^{\mu^d}(v) = \theta_v^{\mu^d}(N(Ng * (Nh * Ng))) \leq \theta_v^{\mu^d}(Ng)$$

در نتیجه داریم $\theta_v^{\mu^d}(Ng) = \mu^d(N(Ng * Nv)) = ۱$ و این نتیجه می‌دهد
$N(Ng * Nv) = d$ پس

$$NN(Ng * NN(x * (y * x))) = x * (x * (y * x)) = Nd = d * d = ۰$$

(۴) $\Leftarrow$ (۱) فرض کنیم X یک BCKــ جبر استلزامی است، پس برای هر $x, y \in X$ داریم $\mu^d(N(Nx*(Ny*Nx))) = \mu^d(NNx) = \mu^d(x)$ که طبق قضیه ۸.۳، نتیجه می‌گیریم μ^d یک BCKــ فیلتر استلزامی است. $\square$

نتیجه

بدون شک نقش ایده‌ال‌ها و فیلترها در تجزیه و تحلیل جبرهای منطقی نظیر BCKــ جبرها قابل انکار نمی‌باشد. از طرفی کاربرد منطق فازی به عنوان یک توسیع از منطق کلاسیک در تعریف ایده‌ال‌ها و فیلترهای فازی حائز اهمیت است. در این مقاله تعمیمی از BCKــ فیلتر فازی، یعنی BCKــ فیلتر استلزامی فازی معرفی شده است. در نهایت چیزی که مهم است پیدا کردن ارتباط بین BCKــ فیلتر استلزامی فازی و زیر جبرهای منطقی BCKــ جبرها است که در قضیه ۱۷.۳، در یک BCKــ جبر پیچشی به آن اشاره شده است.

تشکر و قدردانی

در پایان از داوران و ویراستار محترم که با پیشنهادها و نظرات سازنده باعث ارتقاء کیفی و کمی مقاله شدند، کمال تشکر را دارم.

مراجع

[1] C. Bărbăcioru , Positive implicative BCK-algebras, Mathematica Japonica, 36 (1967), 11-59.

[2] A. Dvurečenskij, S. Pulmannová, New trends in quantum structures, Springer Science 2000.

[3] Y. Huang, BCI-algebras, Science Press, 2006.

[4] Y. Huang, On involutory BCK-algebras, Soochow Journal of Mathematics, 32(1), (2006), 51-57.

[5] I. H. Hwang, H. S. Kim, J. Neggers, Some implicativities for groupoids and BCK-algebras, Mathematics, 2019, 7(10), 973.

[6] Y. Imai, K. Iséki, On axiom systems of propositional calculi XIV, Proceedings of the Japan Academy, Series A, 42 (1966), 19-22.

[7] Y. B. Jun, S. M. Hong and J. Meng, Fuzzy BCK-filters, Scientiae Mathematicae Japonicae, 47(1) (1998), 45–49.

[8] S. Khosravi Shoar, R. A. Borzooei, R. Moradian, A. Radfar, PC-lattices, a class of bounded BCK-algebras, Bulletin of the Section of Logic, 47/1 (2018), 33–44.

[9] S. Khosravi Shoar, Ei, involutory and EQI-ideal in bounded BCK-algebras, Afrika Matematika, 27 (2016) 313-324.

[10] B. L. Meng, Some reuslts of BCK-filters, Information Sciences, 130 (2000) 185-194.

[11] J. Meng, BCK-filters, Mathematica Japonica, 44 (1996), 119-129.

[12] J. Meng, On ideals in BCK-algebras, Mathematica Japonica, 40, 143-154 (1994).

[13] J. Meng, Y. B. Jun, BCK-algebra, Kyung Moosa, Seoul, Korea, 1994.

[14] S. Tanaka, A new class of algebras, Mathematics Seminar Notes 3 (1975), 37-43.

[15] L.A. Zadeh, Fuzzy sets, Information Control, 8 (1965) 338-353.