سیستم های فازی و کاربردها
شاپای چاپی: ۲۷۱۷_۴۴۰۹
سال هفتم، شماره دوم (پائیز و زمستان ۱۴۰۳)
شاپای الکترونیکی: ۲۷۱۷_۳۹۸۴
صص. ۶۵ تا ۸۶
DOI:10.22034/JFSA.2024.470204.1239

ابرK_جبرهای فازی مشتق شده از یک ابرعمل فازی

فهیمه محمدزاده* و الهه محمدزاده

گروه علوم پایه، دانشگاه پیام نور، تهران، ایران
گروه علوم پایه، دانشگاه پیام نور، تهران، ایران

تاریخ دریافت: ۱۴۰۳/۰۵/۰۷ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۳/۰۹/۱۲

نوع مقاله: علمی_پژوهشی/علمی مروری

چکیده. در این مقاله ابتدا به کمک یک ابرعمل فازی مفاهیم ابرBCK_جبر فازی و ابرK_جبر فازی را که قبلا توسط برزویی و زاهدی بر مبنای مجموعه‌های فازی معرفی شده بود را بازتعریف می‌کنیم و نتایج آنها را با تعریف جدید خود بدست می‌آوریم. به عبارتی هرگاه یک ابر عمل فازی روی یک مجموعه در شرایطی صدق کند، آنگاه این مجموعه همراه با آن ابر عمل فازی را یک ابر K_ جبر فازی می‌نامیم. به ویژه، نشان می‌دهیم که تحت شرایطی اجتماع و حاصلضرب دو ابرK_جبر فازی یک ابرK_جبر فازی است. علاوه بر آن مفهوم ابر K_ایده‌آل (ضعیف) فازی را بر مبنای ابر عمل فازی نیز تعریف می‌کنیم و بررسی می‌کنیم که هر ابرK_ایده‌آل فازی یک ابرK_ایده‌آل ضعیف فازی است اما عکس آن برقرار نیست. همچنین به کمک رابطه همنهشتی روی ابرK_جبرهای فازی، ساختارهای خارج قسمتی به‌دست می‌آوریم. در پایان از یک ابرK_جبر فازی، ابرK_جبر می‌سازیم و برعکس.

2010 *Mathematics Subject Classification.* 20N20; 06F35; 08A72
* Corresponding author
E-mails: f.mohammadzadeh@pnu.ac.ir and mohamadzadeh@pnu.ac.ir.
عبارات و کلمات کلیدی. ابر BCK_جبر فازی، ابر K_جبر فازی، ابرK_ایده آل فازی، ابرK_جبر.

۱. سرآغاز

در دنیای واقعی یکی از مهمترین کاربردهای ریاضیات مدل سازی مسایل روزانه در قالب داده‌های ریاضی است. زمانی که سیستم‌های مدل سازی شده بر اساس قوانین خاص طراحی شده‌اند، این مدل سازی می‌تواند دقیقتر باشد. انگیزه معرفی زیر مجموعه‌های فازی به عنوان تعمیم زیر مجموعه‌های محض می‌تواند روشی برای استفاده گسترده از نظریه مجموعه‌ها باشد. این نظریه در سال ۱۹۶۵ توسط زاده [1] [۱۸]، معرفی شد که کاربردهای زیادی در شاخه‌های مختلف ریاضی و شیمی، علوم کامپیوتر و سایر علوم دارد. به خصوص، نظریه گروه‌های فازی را می‌توان به عنوان یکی از اولین کلاس‌های جبری در نظر گرفت که در سال ۱۹۷۱، توسط روزنفلد [2] [۱۵]، معرفی شد. سپس بسیاری از محققین مفاهیم جبر انتزاعی را در چارچوب مجموعه‌های فازی گسترش دادند. در سال ۱۹۹۱، شی [3] [۱۷]، مفهوم مجموعه‌های فازی را برای BCK ـ جبر فازی تعریف کرد و پس از آن زمان BCK (BCI) ـ جبر فازی توسط چندین محقق مطالعه شد [۱۰، ۱۲، ۱۳] .

مطالعه ابرساختارهای فازی موضوع تحقیقاتی جالب مجموعه‌های فازی است. مفهوم ابرگروه‌های فازی توسط کرسینی و توفان [۵]، معرفی شد. آنها به هر زوج از عناصر، مجموعه فازی نسبت دادند که ابرعمل فازی نامیده شد. در ادامه سن وهمکارانش [۱۶]، به کمک این ایده ابرساختارهای جبری را بررسی کردند. سپس به کمک مفهوم نیم‌ابرگروه فازی [۴، ۶، ۱۶]، لِئورینا [۱۱]، مفهوم ابرحلقه‌های فازی را معرفی کرد و ارتباط آنها را با ابرحلقه‌ها مطالعه کرد.

یکی از مفاهیم اساسی در جبرهای منطقی، BCKـ جبرها است که توسط دانشمندان زیادی مورد مطالعه قرار گرفته‌است. به ویژه، ابر BCKـ جبرهای فازی و ابر ایده‌آل های فازی به عنوان تعمیمی از -BCK جبرها بررسی شد ([۳، ۹، ۱۴]). علاوه برآن، نویسندگان مقاله در مرجع [۱۳] به کمک تعریف ابر عمل فازی که توسط کرسینی و توفان معرفی شده روی مفهوم جبرهای-BCI فازی کار را ادامه دادند و نتایجی در ابر BCIـ جبرهای فازی را بدست اورده اند. همچنین مفهوم ابر Kـ جبرها به عنوان توسیعی از BCKـ جبرها توسط برزویی و همکاران [۲]، معرفی شد. در سال ۲۰۰۰ در مرجع [۳]، ابر Kـ جبرفازی توسط برزویی و زاهدی بر مبنای تعریف مجموعه‌های فازی معرفی شد. آنها از یک مجموعه فازی روی ابر Kـ جبر با شرایطی توانستند یک ابر Kـ زیرجبر فازی را معرفی کنند. به عبارتی

[1] Zadeh
[2] Rosenfeld
[3] Xi

دیگر اگر μ یک مجموعه فازی روی ابر Kـجبر H باشد، آنگاه μ ابر Kـ زیرجبر فازی نامیده می‌شود هرگاه برای هر $x, y \in H$ و $t \in x \circ y$، رابطه $\mu(t) \geq min(\mu(x), \mu(y))$ برقرار باشد. علاوه بر آن در سال ۲۰۲۲ گریما [۸]، ایده زیرجبرهای فازی نقطه‌ای را روی ابر Kـزیرجبر فازی یک ابر Kـجبر به‌کار برد تا مفاهیم ابر Kـجبرنقطه فازی و ابر Kـ ایده‌آل نقطه فازی را معرفی کند. به عبارتی دیگر در تعریف او اگر μ یک ابر Kـزیر جبرفازی H باشد، آنگاه μ ابر Kـ زیرجبرنقطه فازی H نامیده می‌شود هرگاه برای هر $x, y \in H$ و $t \in x \circ y$، رابطه $\mu(t) \geq \mu(x) \cdot \mu(y)$ برقرار باشد.

استفاده از مجموعه فازی در تعریف ابر Kـ جبر فازی انگیزه ما را برای ادامه این کار و استفاده از یک ابرعمل فازی بجای یک مجموعه فازی بر طبق نظریه کرسینی برانگیخت. به عبارتی در این مقاله ما به کمک ابر عمل فازی کرسینی و توفان توانستیم مفهوم ابر Kـ جبرهای فازی را معرفی کنیم. در حقیقت هرگاه یک ابرعمل فازی روی یک مجموعه در شرایطی صدق کند، آنگاه این مجموعه همراه با آن ابر عمل فازی را یک ابر Kـ جبر فازی می‌نامیم. در ادامه مفاهیم ابرIـجبرهای فازی و ابرKـایده‌آل فازی (ضعیف) را با این روش جدید بیان می‌کنیم و سعی می‌کنیم تا نتایج مقاله برزویی و زاهدی در مرجع [۳]، را با تعریف جدید خود بدست آوریم. علاوه بر آن در قضیه‌ای رابطه بین ابرKـایده‌آل‌های فازی و ابرKـایده‌آل‌های حاصل‌ضرب را نشان می‌دهیم. همچنین از یک ابرKـجبر فازی یک ابرKـجبر می‌سازیم و برعکس.

۲. مقدمه

فرض کنید H مجموعه غیرتهی باشد. تابع $\mu : H \to [۰, ۱]$ زیرمجموعه فازی H نامیده می‌شود. برای دو زیرمجموعه فازی μ و ν روی H داریم $\mu \subseteq \nu$ اگر و تنها اگر برای هر $x \in H$، $\mu(x) \leq \nu(x)$ باشد. مجموعه تمام زیرمجموعه‌های فازی H با $F(H)$ نشان داده می‌شود و $F^*(H) = F(H) \backslash \{۰\}$ که منظور از "۰"، مجموعه فازی صفر است. تابع $\circ$ از $H \times H$ به $F^*(H)$ ابرعمل فازی H نامیده می‌شود هرگاه برای هر دو عضو دلخواه $x_۱, x_۲$ در H، $x_۱ \circ x_۲$ زیرمجموعه فازی غیرصفر H باشد. دراین‌صورت $(H, \circ)$ ابرگروه‌وار فازی نامیده می‌شود (مرجع [۱۶] را ببینید).

تعریف ۱.۲ ([۱۶]). فرض کنید μ و ν زیرمجموعه‌های فازی از ابرگروه‌وار فازی $(H, \circ)$ باشند. دراین‌صورت برای هر زیرمجموعه غیرتهی A از H و هر $x_۱, x_۲, r \in H$ عمل‌های زیر را تعریف می‌کنیم:

(۱) $\odot : F(H) \times F(H) \to F(H)$ با ضابطه

$$(\mu \odot \nu)(r) = \bigvee_{p,q \in H} (\mu(p) \wedge (p \circ q)(r) \wedge \nu(q))$$

(۲) $* : H \times F(H) \to F(H)$ با ضابطه

$$(x_1 * \mu)(r) = \begin{cases} \bigvee_{t \in H} ((x_1 \circ t)(r) \wedge \mu(t)) & \mu \neq 0 \\ 0 & \mu = 0 \end{cases}$$

(۳) $\bullet : F(H) \times H \to F(H)$ با ضابطه

$$(\mu \bullet x_1)(r) = \begin{cases} \bigvee_{t \in H} (\mu(t) \wedge (t \circ x_1)(r)) & \mu \neq 0 \\ 0 & \mu = 0 \end{cases}$$

(۴) $\bigcirc : H \times P^*(H) \to F^*(H)$، مجموعه $P^*(H) = P(H) \backslash \{\varnothing\}$، با ضابطه

$$(x_2 \bigcirc A)(r) = \bigvee_{x_1 \in A} (x_2 \circ x_1)(r)$$

و $\star : P^*(H) \times H \to F^*(H)$ با ضابطه

$$(A \star x_2)(r) = \bigvee_{x_1 \in A} (x_1 \circ x_2)(r).$$

تعریف ۲.۲ ([۷]). ساختار جبری $(X, *, 0)$ را BCI ــ جبر گویند هرگاه برای هر $x, y, z \in X$ شرایط زیر برقرار باشد .

$(B1)$ $((x * y) * (x * z)) * (z * y) = 0$،

$(B2)$ $x * 0 = x$،

$(B3)$ اگر $x * y = y * x = 0$، آن‌گاه $x = y$.

در تعریف فوق هرگاه برای هر $x \in X$، $0 * x = 0$، آن‌گاه X را BCK ــ جبر گویند.

تعریف ۳.۲ ([۲]). مجموعه غیرتهی H همراه با ابرعمل "$*$" و عضو ثابت "0" که برای هر $x, y, z \in H$ در شرایط زیر صدق می‌کند، ابرKــ جبر نامیده می‌شود.

$(HK1)$ $(x * z) * (y * z) \prec x * y$،

$(HK2)$ $(x * y) * z = (x * z) * y$،

$(HK3)$ $x \prec x$،

$(HK۴)$ اگر $y \prec x$ و $x \prec y$، آن‌گاه $x = y$،

$(HK۵)$ برای هر $x \in H$، $\cdot \prec x$.

گوییم $x \prec y$ اگر و تنها اگر $\cdot \in x * y$ و برای زیر مجموعه‌های A, B از H گوییم $A \sqsubset B$ اگر و تنها اگر $a \in A$ و $b \in B$ موجود باشند به طوری که $a \prec b$.

۳. ابرKـ جبرفازی

در این بخش مفاهیم ابرBCKـ جبر فازی و ابرKـ جبر فازی را با ذکر مثال‌های مختلف بیان می‌کنیم. در ادامه بررسی می‌کنیم که تحت چه شرایطی حاصلضرب و اجتماع دو ابرKـ جبر فازی، ابرKـ جبر فازی است. لازم به ذکر است که در این مقاله از نمادهای تعریف ۱.۲، استفاده شده است مگر در مواردی که اشاره شود.

تعریف ۱.۳. فرض کنید $(H, \circ, \cdot)$ ابرگروه‌وار فازی باشد. دراین‌صورت H ابرBCKـ جبر فازی گفته می‌شود هرگاه برای هر $x_۱, x_۲, x_۳ \in H$ موارد زیر برقرار باشد:

$(FHK۱)$ $(x_۱ \circ x_۳) \odot (x_۲ \circ x_۳) \ll x_۱ \circ x_۲$،

$(FHK۲)$ $(x_۱ \circ x_۲) \bullet x_۳ = (x_۱ \circ x_۳) \bullet x_۲$،

$(FHK۳)$ $x_۱ \bigcirc H \ll \chi_{\{x_۱\}}$،

$(FHK۴)$ اگر $x_۱ < x_۲$ و $x_۲ < x_۱$، آن‌گاه $x_۱ = x_۲$.

گوییم $x_۱ < x_۲$ اگر و تنها اگر $(x_۱ \circ x_۲)(\cdot) > \cdot$ و برای زیر مجموعه‌های فازی μ، ν روی H گوییم $\mu \ll \nu$ اگروتنهااگر برای هر $r \in H$ بتوان $s \in H$ یافت به طوری‌که $\nu(s) > \cdot$، $\mu(r) > \cdot$ و $r < s$.

مثال ۲.۳. فرض کنید $(H, *, \cdot)$ یک BCKـ جبر با جدول زیر باشد:

$*$	۰	۱
۰	۰	۰
۱	۱	۰

اکنون روی H ابرعمل فازی " $\circ$ " را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$(x_۱ \circ x_۲)(r) = \begin{cases} ۰/۵ & r = x_۱ * x_۲ \\ ۰ & r \neq x_۱ * x_۲ \end{cases}$$

در این‌صورت $(H, \circ)$ یک ابرBCKـ جبر فازی است.

تعریف ۳.۳. مجموعه غیرتهی H همراه با ابرعمل فازی "$\circ$" و عضو ثابت ۰ که در شرایط زیر صدق می‌کند، ابرIـ جبر فازی نامیده می‌شود.

($HI1$) $x \circ y < (x \circ z) \odot (y \circ z)$،

($HI2$) $(x \circ y) \bullet z = (x \circ z) \bullet y$،

($HI3$) $x < x$،

($HI4$) اگر $x < y$ و $y < x$، آنگاه $x = y$،

که $x, y, z \in H$ و برای مجموعه‌های فازی $\mu, \nu \in F(H)$ گوییم $\mu < \nu$ اگروتنهااگر بتوان $r, s \in H$ یافت به طوری که $\mu(r) > 0$، $\nu(s) > 0$ و $r < s$.

اگر ابرIـ جبر فازی $(H, \circ, 0)$ در شرط ($HI5$) صدق کند، آنگاه $(H, \circ, 0)$ ابرKـ جبر فازی نامیده می‌شود.

($HI5$) برای هر $x \in H$ داریم $x < 0$.

ملاحظه ۴.۳. در ابرKـ جبر فازی H اگر برای هر $x \in H$، $0 < x$ باشد، آنگاه بنابر ($HI5$) و ($HI4$) داریم $x = 0$.

تعریف ۵.۳ ([1]). مجموعه فازی μ را روی BCKـ جبر $(S, *)$ یک BCKـ زیرجبر فازی می‌گوییم هر گاه برای هر $x, y \in S$، $\mu(x * y) \geq \mu(x) \wedge \mu(y)$.

مثال ۶.۳. چند مثال از ابر Kـ جبر فازی ذکر می‌کنیم.

(۱) فرض کنید $H = \{0, a, b\}$ و جدول زیر را درنظر بگیرید. دراین‌صورت $(H, \circ, 0)$ ابرKـ جبر فازی است.

$\circ$	0	a	b
0	$\chi_{\{0\}}$	$\chi_{\{0\}}$	$\chi_{\{0\}}$
a	$\chi_{\{a\}}$	$\chi_{\{0,a\}}$	$\chi_{\{0,a\}}$
b	$\chi_{\{b\}}$	$\chi_{\{a,b\}}$	$\chi_{\{0,a,b\}}$

(۲) فرض کنید $(S, *)$یک BCKـ جبر و μ یک BCKـ زیرجبر فازی غیر صفر روی S باشد. برای $a, b \in S$ ابرعمل فازی $\circ$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$(a \circ b)(t) = \begin{cases} \mu(a) \wedge \mu(b) & t = a * b, \\ 0 & \text{در غیر این صورت.} \end{cases}$$

در این صورت $(S, \circ)$ ابرKـ جبر فازی است.

(۳) فرض کنید $(X, *, 0)$ یک BCKـ جبر باشد. برای هر $x, y \in X$ ابرعمل فازی "$\circ$" را به صورت $x \circ y = \chi_{x*y}$ تعریف می‌کنیم. دراین‌صورت $(X, \circ, 0)$ ابرKـ جبر فازی است.

قضیه ۷.۳. *فرض کنید $(H_1, \circ_1, 0)$ و $(H_2, \circ_2, 0)$ دو ابرKـ جبر فازی باشند به طوری که $H_1 \cap H_2 = \{0\}$، $H = H_1 \cup H_2$ و a عضو ثابت H باشد. در این صورت $(H, \circ, 0)$ یک ابرKـ جبر فازی است که در آن "$\circ$" به صورت زیر تعریف می شود:*

$$(x \circ y)(r) = \begin{cases} (x \circ_1 y)(r), & x, y, r \in H_1 \\ (x \circ_2 y)(r), & x, y, r \in H_2 \\ a, & x, y \in H_1, r \in H_2 \\ a, & x, y \in H_2, r \in H_1 \\ \chi_{\{x\}} & \text{در غیر این صورت.} \end{cases}$$

اثبات. $(HI1)$ فرض کنید

(الف) $x \in H_1$ و $y, z \in H_2$ باشند. می‌دانیم $(x \circ z) \circ (y \circ z) = \chi_x \circ (y \circ z)$. نشان می‌دهیم $0 < (\chi_x \circ (y \circ z))(0)$. برای این منظور می‌دانیم

$$\begin{aligned} (\chi_x \circ (y \circ z))(0) &= \bigvee_{p,q \in H} \chi_x(p) \wedge (p \circ q)(r) \wedge (y \circ z)(q) \\ &> \chi_x(x) \wedge (x \circ x)(0) \wedge (y \circ z)(x) \\ &> 0. \end{aligned}$$

بنابراین $x \in H$, 0 یافت شدند به طوری که $0 < (\chi_x \circ (y \circ z))(0)$ و $\chi_x(x) > 0$. بنا بر $(HI5)$، $0 < x$. در نتیجه $x \circ y < (x \circ z) \circ (y \circ z)$.

(ب) فرض کنید $z \in H_۲$ و $x, y \in H_۱$ باشند. در این صورت چون $x \circ y \in F^*(H_۱)$ برای هر $r_۱ \in H_۱$ داریم

$$\begin{aligned} ((x \circ z) \circ (y \circ z))(r_۱) &= (\chi_x \circ \chi_y)(r_۱) \\ &= \bigvee_{p,q \in H} \chi_x(p) \wedge (p \circ q)(r_۱) \wedge \chi_y(q) \\ &> \chi_x(x) \wedge (x \circ y)(r_۱) \wedge \chi_y(y) \\ &> ۰. \end{aligned}$$

کافی است نشان دهیم $x \circ y < \chi_x \circ \chi_y$. می‌دانیم

$$(x \circ y)(r_۱) > ۰, \quad (\chi_x \circ \chi_y)(r_۱) > ۰, \; r_۱ < r_۱.$$

بنابراین $x \circ y < (x \circ z) \circ (y \circ z)$.

(ج) فرض کنید $x, z \in H_۱$، $y \in H_۲$ باشند. در این‌صورت

$$(x \circ z) \circ (y \circ z) = (x \circ z) \circ \chi_y.$$

پس برای هر $r \in H_۱$ داریم

$$\begin{aligned} ((x \circ z) \circ \chi_y)(x) &= \bigvee_{p,q \in H} (x \circ z)(p) \wedge (p \circ q)(x) \wedge \chi_y(q) \\ &> (x \circ z)(x) \wedge (x \circ y)(x) \wedge \chi_y(y) > ۰. \end{aligned}$$

بنابراین $x \circ y < (x \circ z) \circ (y \circ z)$.

$(HI۲)$ (الف) برای $x \in H_۱$ و $y, z \in H_۲$ داریم

$$(x \circ z) \circ y = \chi_x \circ y, \quad (x \circ y) \circ z = \chi_x \circ z.$$

نشان می دهیم $\chi_x \circ y = \chi_x \circ z$. برای $r \in H$ داریم

$$(\chi_x \circ y)(r) = \bigvee_{t \in H} \chi_x(t) \wedge (t \circ y)(r) > \chi_x(x) \wedge (x \circ y)(x) = ۱.$$

به طور مشابه $(\chi_x \circ z)(r) = ۱$. درنتیجه $\chi_x \circ z = \chi_x \circ y$. لذا $(x \circ y) \circ z = (x \circ z) \circ y$.

(ب) به طور مشابه برای $x, y \in H_۱$ ، $z \in H_۲$، $r \in H$ داریم $(x \circ y) \circ z = (x \circ z) \circ y$.

$(HI۳)$ $x < x$ بدیهی است.

$(HI4)$ اگر $x < y$ و $y < x$ آن‌گاه $x = y$ زیرا در حالتی که $x, y \in H_1$ یا $x, y \in H_2$ تساوی برقرار است و در حالتی که $x \in H_1$ ، $y \in H_2$ داریم $(x \circ y)(0) > 0$ و $(y \circ x)(0) > 0$. بنابراین $\chi_y(0) > 0$ و $\chi_x(0) > 0$. پس $x = 0 = y$ و حکم برقرار است. □

گزاره ۸.۳. *فرض کنید $(H, \circ, 0)$ ابرKـ جبر فازی باشد. دراین‌صورت برای هر $x, y \in H$، $x \circ y < \chi_{\{x\}}$.*

اثبات. بنا به $(HI5)$ داریم $y < 0$ ، یعنی $(0 \circ y)(0) > 0$. بنابراین

$$((x \circ x) \bullet y)(0) = \bigvee_t (x \circ x)(t) \wedge (t \circ y)(0) \geq (x \circ x)(0) \wedge (0 \circ y)(0).$$

با توجه به اینکه $(0 \circ y)(0) > 0$ و $(x \circ x)(0) > 0$ داریم

$$\begin{aligned} 0 < ((x \circ x) \bullet y)(0) &= ((x \circ y) \bullet x)(0) \\ &= \bigvee_t (x \circ y)(t) \wedge (t \circ x)(0). \end{aligned}$$

پس می‌توان $t \in H$ یافت به طوری‌که

$$(x \circ y)(t) > 0, \qquad (t \circ x)(0) > 0.$$

بنابراین $t < x$. در نتیجه $x \circ y < \chi_{\{x\}}$. □

قضیه ۹.۳. *فرض کنید $(H_1, \circ_1, 0_1)$ و $(H_2, \circ_2, 0_2)$ ابرKـ جبر فازی (ابرBCKـ جبر فازی) و $H = H_1 \times H_2$ باشد. برای هر $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in H$ ابرعمل فازی "$\circ$" را روی H به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:*

$$(a_1, b_1) \circ (a_2, b_2) = (a_1 \circ_1 a_2, b_1 \circ_2 b_2) \tag{1.3}$$

به طوری‌که برای هر $\nu \in F(H_2)$ ، $\mu \in F(H_1)$ ، $r \in H_1$ و $s \in H_2$ داریم

$$(\mu, \nu)(r, s) = (\mu(r), \nu(s)). \tag{2.3}$$

همچنین تعریف می‌کنیم:

$$(a_1, b_1) < (a_2, b_2) \Leftrightarrow a_1 < a_2, \quad b_1 < b_2.$$

دراین‌صورت $(H, \circ, (\circ_1, \circ_2))$ ابرKـ جبر فازی (ابرBCKـ جبر فازی) است و آن را ابر Kـ حاصل‌ضرب فازی (یا ابر BCKـ حاصل‌ضرب فازی) H_1 و H_2 می‌نامیم.

اثبات. قضیه را برای ابرKـ جبر فازی اثبات می‌کنیم و برهان حالت دیگر نیز به‌طور مشابه است.

$(HI1)$ فرض کنید $a = (a_1, b_1)$، $b = (a_2, b_2)$ و $c = (a_3, b_3)$. دراین‌صورت با توجه به رابطه‌های (۱.۳) و (۲.۳) برای هر $(x, y) \in H$ داریم:

$$
\begin{aligned}
&((a \circ c) \odot (b \circ c))(x, y) \\
&= ((a_1 \circ_1 a_3) \odot_1 (a_2 \circ_1 a_3), (b_1 \circ_2 b_3) \odot_2 (b_2 \circ_2 b_3))(x, y) \\
&= (((a_1 \circ_1 a_3) \odot_1 (a_2 \circ_1 a_3)(x), ((b_1 \circ_2 b_3) \odot_2 (b_2 \circ_2 b_3))(y) \\
&< (a_1 \circ_1 a_2)(x), (b_1 \circ_2 b_2)(y)) \qquad (\text{بنا به رابطه (۱.۳)}) \\
&= (a_1 \circ_1 a_2, b_1 \circ_2 b_2)(x, y) \\
&= (a \circ b)(x, y) \qquad (\text{بنا به رابطه (۲.۳)})
\end{aligned}
$$

$(HI2)$ فرض کنید $a = (a_1, b_1)$، $b = (a_2, b_2)$ و $c = (a_3, b_3)$. دراین‌صورت برای هر $(x, y) \in H$ داریم

$$
\begin{aligned}
((a \circ b) \bullet c)(x, y) &= ((a_1 \circ_1 a_2) \bullet_1 a_3, (b_1 \circ_2 b_2) \bullet_2 b_3)(x, y) \\
&= ((a_1 \circ_1 a_2) \bullet_1 a_3)(x), (b_1 \circ_2 b_2) \bullet_2 b_3)(y)) \\
&= ((a_1 \circ_1 a_3) \bullet_1 a_2)(x), (b_1 \circ_2 b_3) \bullet_2 b_2)(y)) \\
&= ((a_1 \circ_1 a_3) \bullet_1 a_2, (b_1 \circ_2 b_3) \bullet_2 b_2)(x, y) \\
&= ((a \circ c) \bullet b)(x, y)
\end{aligned}
$$

برهان‌های $(HI3)$، $(HI4)$ و $(HI5)$ بدیهی است. □

مثال زیر نشان می‌دهد هرگاه H_1 ابرKـ جبر فازی و H_2 ابرBCKـ جبر فازی باشند، آن‌گاه $H_1 \times H_2$ در حالتی کلی ابرBCKـ جبر فازی نیست.

مثال ۱۰.۳. فرض کنید $H_۱$ و $H_۲$ به ترتیب ابرKـ جبرهای فازی مثال‌های ۶.۳ و ۲.۳، باشند. دراین‌صورت $H_۱ \times H_۲$ ابرBCKـ جبر فازی نیست. زیرا بنا به تعریف ۱.۳

$$((x,a)\circ(x,a))\odot((۰,a)\circ(x,a)) \not\ll (x,a)\circ(۰,a).$$

۴. ابر Kـ ایده‌آل (ضعیف) فازی

در ادامه مفهوم ابرKـ ایده‌آل فازی را تعریف می‌کنیم و نشان می‌دهیم هر ابرKـ ایده‌آل فازی از ابرKـ حاصلضرب فازی به صورت حاصلضرب دو ابرایده‌آل فازی است.

تعریف ۱.۴. فرض کنید $(H,\circ,۰)$ ابرIـ جبر فازی باشد ، $\mu \in F(H)$ و $J \subseteq H$ باشد. دراین‌صورت می‌گوییم $J \subseteq \mu$ است هرگاه برای هر $r \in H$ که $\mu(r) > ۰$، داشته باشیم $r \in J$.

مثال ۲.۴. در مثال ۶.۳(۱)، فرض کنید $\mu = \chi_{\{a\}}$ و $J = \{۰,a\}$. دراین‌صورت $J \subseteq \mu$. همچنین اگر $J = \{۰,b\}$، آنگاه $J \not\subseteq \mu$.

تعریف ۳.۴. فرض کنید I زیرمجموعه غیرتهی ابرKـ جبر فازی $(H,\circ,۰)$ باشد. دراین‌صورت I ابرKـ ایده‌آل ضعیف فازی H گفته می‌شود اگر برای هر $x,y \in H$ خواص زیر برقرار باشد

$(H۱)$ $۰ \in I$،

(WHK) اگر $x \circ y \subseteq I$ و $y \in I$، آنگاه $x \in I$.

مثال ۴.۴. در مثال ۶.۳(۱) مجموعه $I = \{۰,b\}$ ابرKـ ایده‌آل ضعیف فازی است.

گزاره ۵.۴. *اگر $\{I_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ خانواده‌ای از ابرایده‌آل‌های ضعیف فازی از ابرKـ جبر فازی $(H,\circ,۰)$ باشد، آنگاه $\cap\{I_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ ابرایده‌آل ضعیف فازی H است.*

اثبات. فرض کنید $K = \cap\{I_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$. در این صورت برای هر $\lambda \in \Lambda$ $۰ \in I_\lambda$، بنابراین $۰ \in K$. همچنین اگر $x\circ y \subseteq I_\lambda$ و $y \in I_\lambda$، آنگاه $x \in I_\lambda$. بنابراین $x \in K$. □

تعریف ۶.۴. فرض کنید I زیرمجموعه‌ای غیرتهی از ابرKـ جبر فازی $(H,\circ,۰)$ باشد. اگر شرایط زیر برقرار باشد، آنگاه I ابرKـ ایده‌آل فازی H نامیده می‌شود.

$(H۱)$ $۰ \in I$،

(HK) برای هر $x,y \in H$ هرگاه $x \circ y < \chi_I$ و $y \in I$، آنگاه $x \in I$.

مثال ۷.۴. در مثال ۶.۳(۱) مجموعه $I = \{۰, a\}$ ابرKـ ایده‌آل فازی است.

گزاره ۸.۴. *فرض کنید $(H, \circ, ۰)$ ابرKـ جبر فازی باشد و I ابرKـ ایده‌آل فازی H باشد. دراین‌صورت I ابرKـ ایده‌آل ضعیف فازی H است.*

اثبات. فرض کنید $x, y \in H$، $x \circ y \subseteq I$ و $y \in I$. در این صورت $x \circ y < \chi_I$. بنابه این‌که I ابرKـ ایده آل فازی H است داریم $x \in I$ و برهان کامل است. □

مثال زیر نشان می‌دهد که عکس گزاره ۸.۴ در حالت کلی برقرار نیست.

مثال ۹.۴. مثال ۶.۳ (۱) را درنظر بگیرید. مجموعه $I = \{۰, b\}$ ابرKـ ایده‌آل ضعیف فازی است اما ابرKـ ایده‌آل فازی نیست. زیرا $a \circ b < \chi_I$ و $b \in I$ اما $a \notin I$.

گزاره ۱۰.۴. *فرض کنید $\{I_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ یک خانواده از ابرKـ ایده‌آل‌های فازی از ابرKـ جبر فازی $(H, \circ, ۰)$ باشد. دراین‌صورت $\bigcap\{I_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ ابرKـ ایده‌آل فازی H است.*

اثبات. فرض کنید $K = \cap\{I_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$. در این صورت برای هر $\lambda \in \Lambda$ داریم $۰ \in I_\lambda$، بنابراین $۰ \in K$. همچنین اگر $x \circ y < \chi_{I_\Lambda}$ و $y \in I_\Lambda$، آنگاه $x \in I_\Lambda$. بنابراین $x \in K$. □

لم ۱۱.۴. *فرض کنید H ابرKـ جبر فازی و I ابرKـ ایده‌آل فازی H باشد. اگر $x < y$ و $y \in I$، آنگاه $x \in I$.*

اثبات. می‌دانیم $x < y$ پس $(x \circ y)(۰) > ۰$. از طرفی $۰ \in I$. بنابراین $x \circ y < \chi_I$. حال با توجه به (HK)، $x \in I$ و برهان کامل است. □

قضیه ۱۲.۴. *فرض کنید $(H_۱, \circ_۱, ۰_۱)$ و $(H_۲, \circ_۲, ۰_۲)$ ابرKـ جبر فازی باشند. ابرKـ جبر فازی $(H_۱ \times H_۲, (۰_۱, ۰_۲))$ را درنظر بگیرید. دراین‌صورت موارد زیر برقرار است:*

(۱) اگر $I_۱$ و $I_۲$ به ترتیب ابرKـ ایده‌آل فازی $H_۱$ و $H_۲$ باشند، آن‌گاه $I_۱ \times I_۲$ ابرKـ ایده‌آل فازی $H_۱ \times H_۲$ می‌باشد،

(۲) اگر I ابرKـ ایده‌آل فازی $H_۱ \times H_۲$ باشد، آن‌گاه ابرKـ ایده‌آل‌های فازی یکتایی مانند $I_۱$ و $I_۲$ از $H_۱$ و $H_۲$ یافت می‌شوند به طوری‌که $I = I_۱ \times I_۲$.

اثبات. (۱) داریم $0_1 \in I_1$ و $0_2 \in I_2$. فرض کنید $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in H_1 \times H_2$ به‌طوری که $(x_1, y_1) \circ (x_2, y_2) < \chi_{I_1 \times I_2}$ و $(x_2, y_2) \in I_1 \times I_2$ دراین‌صورت داریم

$$(x_1 \circ_1 x_2, y_1 \circ_2 y_2) < \chi_{I_1 \times I_2}, \qquad x_2 \in I_1,\ y_2 \in I_2$$

بنابراین میتوان $(a, b) \in H_1 \times H_2$ و $(c, d) \in I_1 \times I_2$ یافت به طوری‌که

$$(x_1 \circ_1 x_2, y_1 \circ_2 y_2)(a, b) > 0, \qquad \chi_{I_1 \times I_2}(c, d) > 0$$

و $(a, b) < (c, d)$. درنتیجه:

$$(x_1 \circ_1 x_2)(a) > 0,\ (y_1 \circ_2 y_2)(b) > 0,\ c \in I_1,\ d \in I_2,\ a < c, b < d.$$

بنابراین $x_1 \circ x_2 < \chi_{I_1}$ و $y_1 \circ y_2 < \chi_{I_2}$. از طرفی چون $x_2 \in I_1$ و $y_2 \in I_2$ و I_1 و I_2 ابرKــایده‌آل فازی H_1 و H_2 . بنابراین $x_1 \in I_1$ و $y_1 \in I_2$ هستند. یعنی $(x_1, y_1) \in I_1 \times I_2$.

(۲) فرض کنید I فازی ابرKــایده‌آل از $H_1 \times H_2$ باشد. قرار دهید

$$I_1 = \{a \in H_1 \mid \exists b \in H_2,\ (a, b) \in I\}$$

و

$$I_2 = \{b \in H_2 \mid \exists a \in H_1,\ (a, b) \in I\}$$

اکنون نشان می‌دهیم که I_1 ابرKــایده‌آل فازی از H_1 می‌باشد و به روش مشابه می‌توان نشان داد که I_2 ابرKــایده‌آل فازی H_2 می‌باشد. فرض کنید $x_1, y_1 \in H_1$ به طوری‌که

$$x_1 \circ_1 y_1 < \chi_{I_1},\ y_1 \in I_1.$$

قرار دهید $x = (x_1, 0_2)$ و $y = (y_1, 0_2)$. چون $x_1 \circ_1 y_1 < \chi_{I_1}$، پس $r \in H_1$ و $t \in I_1$ یافت می‌شود که $(x_1 \circ y_1)(r) > 0$ و $r < t$. اکنون با توجه به اینکه $t \in I_1$ پس می‌توان $b \in H_2$ یافت به طوری‌که $z = (t, b) \in I$. اکنون نشان می‌دهیم $x \circ y < \chi_t \circ \chi_b$. داریم

$$\begin{aligned}(x \circ y)(r, 0_2) &= ((x_1, 0_2) \circ (y_1, 0_2))(r, 0_2)\\ &= (x_1 \circ_1 y_1, 0_2 \circ_2 0_2)(r, 0_2)\\ &= ((x_1 \circ_1 y_1)(r), (0_2 \circ_2 0_2)(0_2))\end{aligned}$$

حال با توجه به این‌که $(x_۱ \circ_۱ y_۱)(r) > ۰$، $(۰_۲ \circ_۲ ۰_۲)(۰_۲) > ۰$، t و $r < t$ و $۰ < b$ داریم $(x \circ y)(r, ۰_۲) > ۰$ و $(r, ۰_۲) < (t, b)$، یعنی $x \circ y < (\chi_t, \chi_b)$. از طرفی چون $z = (t, b) \in I$، داریم $x \circ y < \chi_I$. همچنین با توجه به این‌که $y_۱ \in I_۱$ پس می‌توان $b_۱ \in H_۲$ یافت به طوری‌که $(y_۱, b_۱) \in I$. اکنون بنا به لم ۱۱.۴ و $(y_۱, ۰_۲) < (y_۱, b_۱)$ داریم $y = (y_۱, ۰_۲) \in I$. بنابراین چون I ابرKـ ایده‌آل فازی است و $x \circ y < \chi_I$ پس $x \in I$، به عبارتی $(x_۱, ۰_۲) \in I$. درنتیجه $x_۱ \in I_۱$ و $I_۱$ ابرKـ ایده‌آل فازی $H_۱$ است. در ادامه نشان می‌دهیم که $I = I_۱ \times I_۲$. فرض کنید $x \in I$، دراین‌صورت $a \in H_۱$ و $b \in H_۲$ وجود دارند به‌طوری‌که $x = (a, b)$. بنا به تعریف $I_۱$ و $I_۲$ داریم $a \in I_۱$ و $b \in I_۲$. پس $x = (a, b) \in I_۱ \times I_۲$ یعنی $I \subseteq I_۱ \times I_۲$. کافی است نشان دهیم $I_۱ \times I_۲ \subseteq I$. فرض کنید $(a, b) \in I_۱ \times I_۲$، چون $a \in I_۱$ و $b \in I_۲$، پس می‌توان $b_۱ \in H_۲$ و $a_۱ \in H_۱$ یافت به طوری‌که $(a, b_۱) \in I_۱$ و $(a_۱, b) \in I$. بنابراین داریم

$$\begin{aligned}((a \circ_۱ a_۱) \bullet_۱ a)(۰_۱) &= ((a \circ_۱ a) \bullet_۱ a_۱)(۰_۱)\\ &= \bigvee_t (a \circ_۱ a)(t) \wedge (t \circ_۱ a_۱)(۰_۱)\\ &> (a \circ_۱ a)(۰_۱) \wedge (۰_۱ \circ_۱ a)(۰_۱) > ۰.\end{aligned}$$

پس

$$۰ < ((a \circ_۱ a_۱) \bullet_۱ a)(۰_۱) = \bigvee_t (a \circ_۱ a_۱)(t) \wedge (t \circ_۱ a)(۰_۱)$$

بنابراین می‌توان $d \in H_۱$ یافت به طوری‌که

$$(d \circ_۱ a)(۰_۱) > ۰ \tag{۱.۴}$$

$$(a \circ_۱ a_۱)(d) > ۰ \tag{۲.۴}$$

از طرفی داریم

$$((d, ۰_۲) \circ (a, b_۱))(۰_۱, ۰_۲) = (d \circ_۱ a)(۰_۱), (۰_۲ \circ_۲ b_۱)(۰_۲))$$

بنابراین با توجه به (۱.۴) و ($HI۵$) داریم

$$(d, ۰_۲) \circ (a, b_۱) < \chi_I.$$

چون I ابرKـ ایده‌آل فازی است داریم $(d,\cdot_2)\in I$ اما

$$\begin{aligned}((a,b)\circ(a_1,b))(d,\cdot_2)&=(a\circ_1 a_1,b\circ_2 b)(d,\cdot_2)\\&=((a\circ_1 a_1)(d),(b\circ_2 b)(\cdot_2)).\end{aligned}$$

بنا به (۲.۴) و اینکه $b<b$ داریم

$$(a,b)\circ(a_1,b)<\chi_I.$$

از طرفی از این‌که $(a_1,b)\subseteq I$ و I ابرKـ ایده‌آل فازی است داریم $(a,b)\in I$. پس $I_1\times I_2\subseteq I$. درنتیجه $I=I_1\times I_2$. برهان یکتایی I_1 و I_2 نیز بدیهی است. □

۵. روشهایی برای ساخت ابرKـ جبر فازی و ابرKـ جبر

در این بخش ابتدا نشان می‌دهیم هر ابرBCKـ جبر فازی، یک ابرKـ جبر فازی است ولی عکس آن برقرار نیست. سپس با دو روش متفاوت سعی می‌کنیم از یک ابرKـ جبر فازی یک ابر Kـ جبر بسازیم و برعکس.

قضیه ۱.۵. *هر ابرBCKـ جبر فازی، یک ابرKـ جبر فازی است.*

اثبات. بنا به تعریف BCK ـ جبر فازی خواص $(HI1),(HI2)$ و $(HI4)$ برقرار است. همچنین بنا به $(FHK3)$ ، $x\bigcirc H\ll\chi_{\{x\}}$. بنابراین برای هر $r\in H$، می‌توان $x\in H$ یافت به طوری‌که $(x_1\circ\cdot)(r)>\cdot$ و $r<x$. حال اگر $r=\cdot$ باشد. داریم $\cdot<x$ و اگر $r=x$ باشد، داریم $x<x$. بنابراین خواص $(HI3)$ و $(HI5)$ نیز برقرارند. □

مثال‌های زیر نشان می‌دهد که عکس قضیه فوق برقرار نیست.

مثال ۲.۵. فرض کنید $H=\{\cdot,x,y\}$ و جدول زیر را درنظر بگیرید. دراین‌صورت $(H,\circ,\cdot)$ ابرKـ جبر فازی است اما ابر BCKـ جبر فازی نیست زیرا $x\circ y\not\ll\chi_{\{x\}}$.

$\circ$	$\cdot$	x	y
$\cdot$	$\chi_{\{\cdot\}}$	$\chi_{\{\cdot,x,y\}}$	$\chi_{\{\cdot,x,y\}}$
x	$\chi_{\{x\}}$	$\chi_{\{\cdot,x,y\}}$	$\chi_{\{\cdot,x,y\}}$
y	$\chi_{\{y\}}$	$\chi_{\{x,y\}}$	$\chi_{\{\cdot,x,y\}}$

مثال ۳.۵. فرض کنید $H_۱$ و $H_۲$ به ترتیب ابرKـ جبرهای فازی مثالهای ۶.۳(۱) و ۲.۵، باشند. دراین‌صورت با توجه به قضیه ۷.۳، $H_۱ \cup H_۲$ ابرKـ جبر فازی است. اما یک ابرBCKـ جبر فازی نیست زیرا

$$(x \circ x) \odot (۰ \circ x) \not\ll x \circ ۰.$$

برای این منظور نشان می‌دهیم برای $y \in H_۱$، $((x\circ x)\odot(۰\circ x))(y) > ۰$ و $(x\circ ۰)(x) > ۰$ اما $(y \circ x)(۰) \not> ۰$، یعنی $y \not< x$.

$$\begin{aligned}((x \circ x) \odot (۰ \circ x))(y) &= (\chi_{\{۰,x,y\}} \odot \chi_{\{۰,x,y\}})(y)\\ &= \bigvee_{p,q} \chi_{\{۰,x,y\}}(p) \wedge (p \circ q)(y) \wedge \chi_{\{۰,x,y\}}(q)\\ &> \chi_{\{۰,x,y\}}(x) \wedge (x \circ y)(y) \wedge \chi_{\{۰,x,y\}}(y) > ۰.\end{aligned}$$

مثال ۴.۵. فرض کنید $H_۱$ و $H_۲$ ابرساختارهای فازی در مثال‌های ۲.۵ و ۲.۳، باشند. در این صورت بنا به قضیه ۱.۵، $H_۲$ یک ابرKـ جبر فازی است . بنابراین از مثال ۱۰.۳ و قضیه ۹.۳ نتیجه می شود که $H_۱ \times H_۲$ یک ابرKـ جبر فازی است اما ابرBCKـ جبر فازی نیست. پس عکس قضیه ۱.۵ برقرار نیست.

فرض کنید $Y \subseteq X$ و $t \in [۰,۱]$. مجموعه فازی t_Y را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$t_Y(x) = \begin{cases} t & x \in Y \\ ۰ & x \notin Y \end{cases}$$

به‌ویژه هرگاه Y مجموعه یکانی مانند $\{y\}$، باشد $t_{\{y\}}$ نقطه فازی نامیده می‌شود و با t_y نشان داده می‌شود.

قضیه ۵.۵. *فرض‌کنید $(H,*)$ ابرKـ جبر و $a \in (۰,۱]$ باشد. در این‌صورت $(H,\circ)$ ابرKـ جبر فازی است که در آن برای هر $x,y \in H$، $x \circ y = a_{x \cdot y}$.*

اثبات. $(HI۱)$ فرض‌کنید $x,y,z \in H$. نشان می‌دهیم $(x \circ z) \circ (y \circ z) < x \circ y$. باتوجه به این‌که H ابرKـ جبر است داریم $(x*z)*(y*z) \prec x*y$. پس می‌توان $r,s \in H$ یافت به طوری‌که $r \in (x*z)*(y*z)$، $s \in x*y$ و $r \sqsubset s$. در نتیجه $p \in x*z$ و

$q \in y * z$ وجود دارند به طوری‌که $r \in p * q$. بنابراین

$$\begin{aligned}((x \circ z) \circ (y \circ z))(r) &= (a_{x*z} \circ a_{y*z})(r) \\ &= \bigvee_{p,q \in H} a_{x*z}(p) \wedge a_{y*z}(q) \wedge (p \circ q)(r) \\ &> a_{x*z}(p) \wedge a_{y*z}(q) \wedge a_{p*q}(r) = a > ۰.\end{aligned}$$

از طرفی داریم $(x \circ y)(s) = a_{x*y}(s) = a > ۰$ و $(r \circ s)(۰) = a_{r*s}(۰) = a > ۰$.
در نتیجه $(x \circ z) \circ (y \circ z) < x \circ y$.
به طور مشابه می‌توان سایر خواص ابرKــ جبر فازی را برای $(H, \circ)$ بررسی کرد. $\square$

قضیه ۶.۵. *فرض کنید $(H, \circ)$ ابرKــ جبر فازی باشد. در این صورت $(H, *)$ ابرKــ جبر است که در آن برای هر $x_۱, x_۲ \in H$،*

$$x_۱ * x_۲ = \{a \in H | (x_۱ \circ x_۲)(a) > ۰\}.$$

اثبات. برای هر $x, y, z \in H$ نشان می‌دهیم $(x * z) * (y * z) \prec x * y$. با توجه به این‌که $(H, \circ)$ ابرKــ جبر فازی است، داریم $(x \circ z) \circ (y \circ z) < x \circ y$. یعنی می‌توان $a, b \in H$ یافت که $((x \circ z) \circ (y \circ z))(a) > ۰, (x \circ y)(b) > ۰$ و $a < b$. از طرفی داریم

$$۰ < ((x \circ z) \circ (y \circ z))(a) = \bigvee_{p,q} (z \circ z)(p) \wedge (p \circ q)(a) \wedge (y \circ z)(q)$$

بنابراین می‌توان $p, q \in H$ یافت به طوری که

$$(x \circ z)(p) > ۰, (p \circ q)(a) > ۰, (y \circ z)(q) > ۰, (a \circ b)(۰) > ۰.$$

بنا به تعریف رابطه $(*)$ داریم

$$p \in x * z, a \in p * q, q \in y * z, b \in x * y, ۰ \in a * b$$

در نتیجه $a \in (x * z) * (y * z), b \in x * y$ و $a \sqsubset b$. به عبارتی $(x * z) * (y * z) \prec x * y$.
به طور مشابه می‌توان سایر خواص را بررسی کرد. $\square$

تعریف ۷.۵. (i) ابرساختار جبری $(H,*)$ ابر Kـ جبر آبلی نامیده می‌شود هرگاه برای هر $x,y\in H$ داشته باشیم $x*y=y*x$.
(ii) ابرساختار جبری $(H,\circ)$ ابر Kـ جبر فازی آبلی نامیده می‌شود هرگاه برای هر $x,y\in H$ داشته باشیم $x\circ y=y\circ x$.

با توجه به تعریف بالا و قضایای ۶.۵ و ۵.۵ می‌توان نشان داد که اگر $(H,\circ)$ یک ابر Kـ جبر فازی آبلی باشد، آنگاه $(H,*)$ ابر Kـ جبر آبلی است و برعکس. بنابراین به کمک قضایای بالا توانستیم از آبلی بودن یکی از ساختارها، آبلی بودن ساختار دیگر را بررسی کنیم.

تعریف ۸.۵. فرض‌کنید $(H,\circ)$ ابرKـ جبر فازی و θ رابطه هم‌ارزی روی Hباشد. در این‌صورت تعاریف زیر را بیان می‌کنیم.
(۱) به ازای هر دو مجموعه فازی μ و ν روی H گوییم $\mu\theta\nu$ اگر برای هر $a\in H$ که $\mu(a)>۰$ بتوان $b\in H$ یافت به طوری که $\nu(b)>۰$ و $a\theta b$. همچنین برای هر $b\in H$ که $\nu(b)>۰$ بتوان $a\in H$ یافت به طوری‌که $\mu(a)>۰$ و $a\theta b$.
(۲) رابطه هم‌ارزی θ را همنهشتی روی H گوییم هر گاه برای هر $x,y,u,v\in H$ اگر $u\theta v$ و $x\theta y$، آنگاه $x\circ u\theta y\circ v$.

تعریف ۹.۵. فرض‌کنید θ رابطه همنهشتی روی ابرKـ جبر فازی $(H,\circ)$ باشد و

$$H/\theta=\{[x]:x\in H\}$$

که در آن $[x]=\{y\in H:y\theta x\}$. ابرعمل‌های $\bar{\circ}$ ، $\bar{\bullet}$ و رابطه $\lesssim$ روی H/θ را برای هر $[x],[y]\in H/\theta$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم:
(۱) $[x]\bar{\circ}[y]=\{[a],(x\circ y)(a)>۰\}$،
(۲) $[x]\bar{\bullet}[y]=\chi_{[a]}$، که در آن $(x\circ y)(a)>۰$ ،
(۳) $[x]\lesssim[y]$ اگروتنهااگر $[۰]\in[x]\bar{\circ}[y]$.

بدیهی است که اگر $x<y$، آنگاه $[x]\lesssim[y]$.
در دو قضیه زیر به کمک یک رابطه همنهشتی، از یک ابرKـ جبر فازی یک ابر K ـ جبر خارج قسمتی و یک ابر K ـ جبر فازی خارج قسمتی می‌سازیم.

قضیه ۱۰.۵. *با توجه به نمادهای تعریف قبل $(H/\theta,\bar{\circ},[۰])$ ابرKـ جبر است.*

اثبات. ابتدا ثابت می‌کنیم که $\bar{\circ}$ خوش‌تعریف است. فرض کنید که $x_۱, x_۲, y_۱, y_۲ \in H$ و $[x_۱] = [x_۲]$ و $[y_۱] = [y_۲]$. دراین‌صورت $x_۱ \theta x_۲$ و $y_۱ \theta y_۲$. بنابراین

$$x_۱ \circ y_۱ \theta x_۲ \circ y_۲ \qquad (۱.۵)$$

فرض کنید $[b] \in [x_۱]\bar{\circ}[y_۱]$. پس $(x_۱ \circ y_۱)(b) > ۰$ از طرفی بنا به رابطه ۱.۵، می‌توان $c \in H$ یافت به طوری‌که $(x_۲ \circ y_۲)(c) > ۰$ و $b\theta c$. بنابراین $[c] = [b]$. در این صورت $[c] \in [x_۲]\bar{\circ}[y_۲]$. در نتیجه $[x_۱]\bar{\circ}[y_۱] \subseteq [x_۲]\bar{\circ}[y_۲]$. به همین ترتیب $[x_۲]\bar{\circ}[y_۲] \subseteq [x_۱]\bar{\circ}[y_۱]$. بنابراین $\bar{\circ}$ خوش‌تعریف است.

$(HK۳)$ فرض کنید $x \in H$ از آنجایی که برای هر $x \in H$، $x < x$ داریم $[x] \lesssim [x]$.
$(HK۴)$ اگر $[y] \lesssim [x]$ و $[x] \lesssim [y]$، آنگاه $[۰] \in [x]\bar{\circ}[y]$ و $[۰] \in [y]\bar{\circ}[x]$. در نتیجه $(x \circ y)(۰) > ۰$ و $(y \circ x)(۰) > ۰$. پس $y < x$ و $x < y$. حال با توجه به $(HI۴)$، $x = y$. بنابراین $[x] = [y]$.
$(HK۵)$ با توجه به این‌که H ابرKـ‌جبر فازی است، داریم $x < ۰$. در نتیجه $[x] \lesssim [۰]$.
به طور مشابه می‌توان درستی خواص $(HK۱), (HK۲)$ را بررسی کرد. بنابراین برهان کامل است. □

مثال ۱۱.۵. فرض کنید $(H, \circ, ۰)$ ابرKـ‌جبر فازی مثال ۶.۳(۱)، باشد و $\theta = \{(۰,۰), (a,a), (b,b)\}$ باشد. دراین‌صورت θ رابطه همنهشتی روی H است و $H/\theta = \{[۰], [a], [b]\} = \{\{۰\}, \{a\}, \{b\}\}$ ابرKـ‌جبر است.

قضیه ۱۲.۵. *با توجه به نمادهای تعریف قبل $(H/\theta, \bar{\bullet})$ ابر Kـ‌جبر فازی است*

اثبات. ابتدا نشان می‌دهیم $\bar{\bullet}$ خوش‌تعریف است. فرض کنید $x_۱, y_۱, x_۲, y_۲ \in H$ و $[x_۱] = [x_۲]$ و $[y_۲] = [x_۲]$. در این‌صورت $x_۱\theta x_۲$ و $y_۲\theta y_۱$. بنابراین

$$x_۱ \circ y_۱ \theta x_۲ \circ y_۲. \qquad (۲.۵)$$

حال نشان می‌دهیم $[x_۲]\bar{\bullet}[y_۲] = [x_۱]\bar{\bullet}[y_۱]$. بنا به تعریف $[x_۱]\bar{\bullet}[y_۱] = \chi_{[a]}$ که در آن $(x_۱ \circ y_۱)(a) > ۰$. حال بنا به رابطه ۲.۵، می‌توان $c \in H$ یافت به طوری که

$(x_2 \circ y_2)(c) > 0$. یعنی $[x_2]\bar{\bullet}[y_2] = \chi_{[c]}$ و $a\theta c$. حال کافی است نشان دهیم $\chi_{[a]} = \chi_{[c]}$. فرض کنید $x \in [a]$. پس $x\theta a$ و $\chi[a](x) = 1$. اکنون بنا به خاصیت تعدی θ داریم $x\theta c$ یعنی $x \in [c]$. بنابراین $\chi_{[c]}(x) = 1$ و برهان کامل است.

$(HI4)$ فرض کنید $[x] \lesssim [y]$ و $[y] \lesssim [x]$. در این‌صورت $[0] \in [x]\bar{\circ}[y]$ و $[0] \in [y]\bar{\circ}[x]$. بنابراین $(x \circ y)(0) > 0$ و $(y \circ x)(0) > 0$. بنابراین $(x \circ y)(0) > 0$ و $(y \circ x)(0) > 0$. یعنی $x < y$ و $y < x$. در این‌صورت $x = y$. در نتیجه $[x] = [y]$. $\square$

در انتهای این بخش ارتباط بین ساختارهای مورد مطالعه به صورت نمودار ارئه می شود.

$$\begin{tikzcd}
 & \text{ابر K جبر}(\frac{H}{\theta}, \bar{\circ}) & \\
\text{ابرBCK جبر فازی} \arrow[r] & \text{ابر K جبر فازی}(H, \circ) \arrow[u, "(3)"] \arrow[r, "(1)"] & \text{ابر K جبر }(H, *) \arrow[d] \\
 & \bullet \arrow[u] & \bullet \arrow[l, "(2)"]
\end{tikzcd}$$

$$x * y = \{a \in H | (x \circ y)(a) > 0\}, \quad \forall x, y \in H \qquad (1)$$

$$x \circ y = a_{x*y}, \quad \forall x, y \in H \qquad (2)$$

$$[x]\bar{\circ}[y] = \{[a], (x \circ y)(a) > 0\}, \quad \forall [x], [y] \in H/\theta \qquad (3)$$

۶. نتیجه گیری

مفاهیم ابر Kـ جبر فازی توسط محققانی، به کمک مفهوم مجموعه های فازی، مطالعه شده اما در این مقاله به کمک مفاهیم ابرعمل فازی، تعاریف ابرKـ جبرفازی، ابرBCKـ جبر فازی و ابر Kـ ایده‌آل (ضعیف) فازی را بیان و رابطه بین آنها را بررسی کردیم. به ویژه، نشان دادیم که هر ابرBCKـ جبر فازی یک ابر Kـ جبر فازی است اما عکس آن برقرار نیست. علاوه بر این، هر ابر Kـ ایده‌آل فازی حاصلضربی را می‌توان به صورت حاصلضرب دو ابر Kـ ایده‌آل فاری نوشت. همچنین به کمک رابطه همنهشتی روی ابرKـ جبرهای فازی، ابرKـ جبرفازی خارج قسمتی به دست آوردیم. در ادامه از یک ابرKـ جبر فازی با دو روش متفاوت که یکی استفاده از رابطه همنهشتی و دیگری تعریف یک ابرعمل است توانستیم یک ابرKـ جبر بسازیم و همچنین از یک ابرKـ جبر با تعریف یک ابرعمل فازی توانستیم یک ابرKـ جبرفاری بسازیم.

ï

این مقاله توسط نویسنده دوم، الهه محمدزاده، به صورت طرح پژوهشی(گرنت) در دانشگاه پیام نور ارائه خواهد شد.

تشکر و قدردانی

در اینجا از تمامی داوران محترم که در بهبود مقاله، ما را یاری نموده‌اند کمال تشکر و قدردانی را داریم.

مراجع

[1] Ahmed, M.A. and Amhed, E.A. (2020) Fuzzy BCK-Algebras. Journal of Applied Mathematics and Physics, 8, 927-932.

[2] Borzooei, R.A., Hasankhani, A., Zahedi, M.M. and Jun, Y.B. (2000) On hyper K-algebras. Japanese Journal of Mathematics, 52(1), 113–121.

[3] Borzooei, R.A. and zahedi, M.M. (2002) Fuzzy structures on hyper K-algebras. International Journal of uncertainty, fuzziness and knowledge-based systems, 10(01), 97-93.

[4] Corsini, P. (1991) Prolegomena of Hypergroup Theory. Aviani Editore, Italy .

[5] Corsini, P. and Tofan, I. (1997) On fuzzy hypergroups. Pure Mathematics and Applications, 8(1) , 29-37.

[6] Davvaz, B. and Cristea, I. (2015) Fuzzy Algebraic Hyperstructures-An Introduction. Studies in Fuzziness and Soft Computing, Springer, Cham 321, .

[7] Dvurečenskij, A. and Pulmannová, S. (2000) BCK-algebras. New Trends in Quantum Structures. Mathematics and its Applications, Springer, Dordrecht 516 .

[8] Gerima, D.T. (2022) On fuzzy dot hyper K-ideal of a hyper K-algebra. Annals of Fuzzy Mathematics and Informatic, 23(3), 285-294.

[9] Jun, Y.B. (2020) Multipolar fuzzy hyper BCK-ideals of hyper BCK-algebras. Journal of Algebraic Hyperstructures and Logical Algebras, 1(1), 37-47.

[10] Jun, Y.B., Hong, S.M., Meng, J. and Xin, X.L. (1994) Characterizations of fuzzy positive implicative ideals in BCK-algebras. Mathematica. Japonica, 40 , 503-507.

[11] Leoreanu-Fotea, V. and Davvaz, B. (2009) Fuzzy hyperrings. Fuzzy Sets and Systems, 160(16) , 2366-2378.

[12] Meng, J., Jun, Y.B. and Kim, H.S. (1997) Fuzzy implicative ideals of BCK-algebras. Fuzzy Sets Systems, 89 , 243-248.

[13] Muhiuddin, G., Mohammadzade, E., Mohammadzadeh, F. and Borzooei, R.A. (2023) Construction of Fuzzy Hyper BCI-Algebras Using Fuzzy Hypergroupoid. New Mathematics and Natural Computation , 1–21.

[14] Nisar, F., Tariq, R.S. and Bhatti, S. (2012) Fuzzy Ideals in Hyper BCI-Algebras. World Applied Sciences Journal, 16(12) , 1771-1777.

[15] Rosenfeld, A. (1971) Fuzzy groups. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 35 , 512-517.

[16] Sen, M.K., Ameri, R. and Chowdhury, G. (2008) Fuzzy hypersemigroups. Soft Computing, 12, 891-900.

[17] Xi, O.G. (1991) Fuzzy BCK-algebras, Mathematica Japonica, 36, 935-942.

[18] Zadeh, L.A. (1965) Fuzzy sets. Information and Control, 8, 338-353.