

توسعه مفهوم درجه اطمینان روی مسایل درجه دوم کنترل بهینه کسری فازی

مجتبی کریم یار جهرمی*

بخش ریاضی، دانشگاه جهرم، جهرم، ایران

تاریخ دریافت: ۱۴۰۳/۱۱/۱۰

تاریخ پذیرش: ۱۴۰۴/۰۱/۱۴

نوع مقاله: علمی-پژوهشی

چکیده. برای انطباق بیشتر مسایل کنترل بهینه با پدیده های دنیای واقعی و همچنین به دلیل استفاده از داده های نادقیق ابزارهای اندازه گیری در مدل‌های مهندسی، از دو مفهوم فازی و مشتقات مرتبه کسری، به عنوان دو بال برای ارتقای این دسته از مسایل استفاده می کنیم. مساله کنترل بهینه کسری فازی را می توان به کمک مفهوم α -برش به دو مساله کنترل بهینه کسری تبدیل کرد و سپس با استفاده از اصل کمینه پونتریاگین برای مساله کنترل بهینه کسری، مسیر بهینه و کنترل بهینه آن را به دست آورد. برپایه این مطالب، با بیان مفهوم درجه اطمینان برای این دسته از مسایل، شخص تصمیم گیرنده می تواند با اختیار کردن مقدار اطمینان α ، مسیر بهینه و کنترل بهینه مساله مذکور را به صورت یک بازه محاسبه کند. این در حالی است که هرچه مقدار α به یک نزدیکتر باشد، کران بالا و پایین بازه های به دست آمده برای مسیر بهینه و کنترل بهینه، به مسیر و کنترل بهینه برای حالت دقیق (غیر فازی) مساله نزدیک و نزدیکتر می شوند.

در پایان این مقاله، یک مثال عددی را با روش ارائه شده در این مقاله بر حسب (ادامه دارد)

برشهای مختلف α و همچنین مشتقات کسری مراتب مختلف β حل می‌کنیم و نشان می‌دهیم که کنترل بهینه و مسیر بهینه به دست آمده در حالت $\alpha = \beta = 1$ با جوابهای بهینه به دست آمده در حالت غیر فازی و با مشتقات مرتبه یک مطابقت دارد.

۱. سرآغاز

موضوع کنترل بهینه یک استراتژی بهینه برای کنترل سیستمهای دینامیکی و بسیاری از رویدادهای دیگر است که نیاز به کنترل شدن دارند تا مفید واقع شوند. به طور طبیعی، بسیاری از مدل‌های دنیای واقعی با داده‌های غیر دقیق در متغیرهای ورودی و خروجی و حتی رفتار آنها، مواجه هستند. بر اساس این حقیقت، ما از فازی سازی به عنوان یک روش برای بیان این دسته از مدلها در دنیای واقعی استفاده می‌کنیم. با دانستن اهمیت فازی سازی مساله کنترل بهینه، ما می‌توانیم نمایش بهتری از پارامتر کنترل در مدل‌های فیزیکی و همچنین سیستمهای دینامیکی در دنیای واقعی ارائه دهیم. در سالهای اخیر، محاسبات مرتبه کسری نقش مهمی را در ریاضیات، مهندسی مکانیک و سایر زمینه‌های علمی ایفا می‌کند. بسیاری از سیستمهای دینامیکی و مدل‌های حوادث دنیای واقعی با استفاده از معادلات دیفرانسیل مرتبه کسری عملکرد بهتری از خود نشان می‌دهند. این دلایل ما را به بحث و بررسی و مطالعه مسایل کنترل بهینه کسری فازی، رهنمون می‌سازد. اگرچه یک معادله دیفرانسیل فازی با مشتقات از مرتبه کسری دارای یک متغیر کنترل باشد، آن را یک مساله کنترل بهینه کسری فازی می‌نامیم. زو [۳۳] اصل بهینه بلمن را در سال ۱۹۸۷ برای مساله کنترل فازی بکار برد؛ دیموند و کلویدن [۱۱] روی وجود جواب برای این دسته از مسایل کنترلی بحث و اظهار نظر کردند. سپس، پارک و دیگران [۲۸] شرایط لازم بهینگی برای یک سیستم کنترلی فازی را به دست آوردند. فیلیو و آنجلاو [۱۲] یک مساله کنترلی فازی با یک دستگاه غیرخطی را بیان و حل آن را به انجام رساندند. ز. کین [۳۳] یک مساله کنترل بهینه فازی زمان همگن را مطرح و به بررسی و مطالعه آن پرداختند. در [۵] با توجه به در نظر گرفتن قابلیت مشتق پذیری، نویسندگان روش جدیدی را برای یک سیستم با دو نقطه مرزی فازی با مشتق‌پذیری هاکوها را بیان کردند. گال و دیگران [۱۳] روی معادلات دیفرانسیل فازی مرتبه بالاتر با شرایط اولیه بحث و اظهار نظر در مورد آن پرداختند. نیتو و دیگران [۲۷] روشهای عددی برای حل معادلات دیفرانسیل فازی ارائه دادند. آگراوال [۴] روش ضرایب لاگرانژ را برای بدست آوردن شرایط لازم برای مساله کنترل بهینه فازی پیاده کردند.

مدل‌سازی و کنترل سیستم‌های دنیای واقعی، اغلب با عدم قطعیت‌ها و ابهاماتی همراه است که مدل‌های ریاضی دقیق قادر به پوشش آنها نیستند. در این شرایط، داده‌های فازی و معادلات

دیفرانسیل با مشتقات کسری می‌توانند به عنوان ابزاری قدرتمند برای مدیریت این عدم قطعیت‌ها و طراحی سیستم‌های کنترلی کارآمد مورد استفاده قرار گیرند. برخی از این کاربردهای مسایل کنترل بهینه کسری فازی عبارتند از:

کنترل رباتیک: بهینه‌سازی مسیر حرکت ربات‌ها، کاهش مصرف انرژی، افزایش دقت در انجام وظایف، کنترل حرکت و تعادل ربات‌ها به ویژه در محیط‌های ناهموار و غیرقابل پیش‌بینی.

کنترل فرآیندهای صنعتی: بهینه‌سازی پارامترهای فرآیند، کاهش ضایعات، و افزایش کیفیت محصولات، کنترل دما، فشار، جریان و سایر متغیرها در فرآیندهای شیمیایی نفت و گاز.

کنترل سیستم‌های قدرت: بهینه‌سازی تولید و توزیع برق، کاهش تلفات، کنترل ولتاژ، فرکانس و توان در شبکه‌های برق به منظور بهبود پایداری و کارایی سیستم.

کنترل سیستم‌های حمل و نقل: بهینه‌سازی ترافیک، کاهش مصرف سوخت، افزایش ایمنی خودروها، بهینه‌سازی عملکرد سیستم‌های تعلیق خودرو و سیستم‌های ناوبری.

کنترل سیستم‌های زیستی: بهینه‌سازی درمان بیماری‌ها، کنترل قند خون در بیماران دیابتی، بهبود عملکرد اندام‌های مصنوعی، مدل‌سازی و کنترل سیستم‌های فیزیولوژیکی مانند قلب، عروق و سیستم‌های ایمنی.

سیستم‌های تهویه مطبوع و گرمایش: بهینه‌سازی مصرف انرژی، حفظ دمای مطلوب و بهبود کیفیت هوای داخل ساختمان.

به عنوان مثال، در یک سیستم رباتیک، هدف ممکن است یافتن بهترین مسیر برای حرکت ربات باشد که هم به سرعت به هدف برسد و هم مصرف انرژی را به حداقل برساند. یا در یک فرآیند شیمیایی، هدف ممکن است یافتن بهترین تنظیمات برای دما و فشار باشد که هم محصول با کیفیت تولید شود و هم هزینه‌ها کاهش یابد. در همه این موارد ممکن است با بهینه‌سازی مدلهایی با داده‌های نادقیق و محدودیتهایی با معادلات دیفرانسیل از مرتبه کسری رو به رو باشیم.

در نهایت، کنترل بهینه کسری فازی ابزاری قدرتمند برای بهبود عملکرد و بهینه‌سازی سیستم‌های پیچیده است که دارای داده‌های نادقیق هستند. این روش کنترل، با ترکیب منطق فازی، حساب دیفرانسیل و انتگرال کسری، و تکنیک‌های بهینه‌سازی، امکان طراحی سیستم‌های کنترلی کارآمد، مقاوم، و هوشمند را فراهم می‌کند.

در این مقاله مساله کنترل بهینه کسری فازی و روش حل تحلیلی برای آن ارایه شده است. در ادامه کار، مفهوم جدید درجه اطمینان برای این گونه از مسایل کنترلی را بیان و آن را روی یک مثال عددی پیاده‌سازی می‌کنیم.

مساله کنترل بهینه کسری فازی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \text{Min} : & \int_a^b f_0(t, \tilde{x}(t), \tilde{u}(t)) dt \\ \text{S. to} : & \begin{cases} \left(D_{a+}^{\beta} \tilde{x} \right) (t) = f(t, \tilde{x}(t), \tilde{u}(t)); \\ \tilde{x}(a) = \tilde{x}_0 \end{cases} \end{aligned} \quad (1.1)$$

جایی که $t \in (a, b) \subseteq \mathbb{R}$ یک متغیر فازی، \tilde{x}_0 یک عدد فازی، \tilde{u} متغیر کنترل فازی، f و f_0 دو تابع پیوسته بر حسب t ، \tilde{x} و \tilde{u} می باشند؛ در اینجا $\left(D_{a+}^{\beta} \tilde{x} \right) (t)$ بیان کننده مشتق ریمان لیوویل از مرتبه $\beta \in (0, 1)$ است. مساله (۱.۱) که در آن متغیر حالت و کنترل فازی می باشد و توسط دستگاه معادله دیفرانسیل از مرتبه کسری هدایت شده است را یک مساله کنترل بهینه کسری فازی می نامند [۱۴]. می دانیم که اگر بردار x یک عدد فازی باشد آنگاه به کمک α -برش می توان نمایش بازه ای برای هر یک از مولفه های آن به صورت

$$x_{\alpha}^k = \left[x_{-}^k, \bar{x}_{\alpha}^k \right], \quad k = 1, 2, \dots, N, \quad (2.1)$$

را برای هر $\alpha \in [0, 1]$ داشت. این طرز نمایش ما را به نمایش دیگری از این عدد که به صورت نمادین یک عدد مختلط است، راهنما می شود [۲۹، ۳۲، ۲۰، ۳۰]:

$$x_{\alpha}^k = x_{-}^k + i \bar{x}_{\alpha}^k, \quad k = 1, 2, \dots, N. \quad (3.1)$$

بنابراین اگر $\tilde{x} = (p, q, r)$ یک عدد فازی مثلثی باشد، می توان آن را به صورت زیر نوشت [۲۰]:

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= [q\alpha + p(1 - \alpha), q\alpha + r(1 - \alpha)] \\ &= (q\alpha + p(1 - \alpha)) + i(p(1 - \alpha), q\alpha + r(1 - \alpha)), \quad \alpha \in [0, 1]. \end{aligned} \quad (4.1)$$

۲. برش روی انتگرال و مشتق ریمان لیوویل فازی

فرض کنید که $C^F[a, b]$ نشان دهنده فضای همه توابع فازی مقدار روی بازه $[a, b]$ و $L^F[a, b]$ بیانگر فضای همه توابع فازی مقدار لبگ انتگرال پذیر روی بازه کراندار $R \subset [a, b]$ باشد.

قضیه ۱.۲. فرض کنید $f \in C^F[a, b] \cap L^F[a, b]$ یک تابع فازی مقدار باشد، آنگاه با استفاده از مفهوم α -برش، انتگرال ریمان لیوویل از تابع فازی مقدار f را می توان به صورت زیر نمایش

داد [۱۵، ۱۸]:

$$(1.2) \quad \left(I_{a+}^{\beta} f \right) (x; \alpha) = \left[\left(I_{a+}^{\beta} f \right) (x; \alpha), \left(I_{a+}^{\beta} \bar{f} \right) (x; \alpha) \right], \quad 0 \leq \alpha \leq 1, \quad 0 \leq \beta \leq 1.$$

□ اثبات. به مرجع [۱۵] رجوع شود.

یادآور می شویم همین روابط و فرمولها را می توان به طور مشابه برای $\left(I_{a-}^{\beta} f \right) (x; \alpha)$ نیز بیان کرد.

قضیه ۲.۲. فرض کنید $x_0 \in (a, b) \subseteq \mathbb{R}$ ، $f \in C^F[a, b] \cap L^F[a, b]$ آنگاه با استفاده از مفهوم α -برش، مشتق ریمان لیوویل از تابع فازی مقدار f را می توان به صورت زیر نمایش داد [۱۵، ۱۹]:

$$\left(D_{a+}^{\beta} f \right) (x; \alpha) = \left[\left(D_{a+}^{\beta} f \right) (x; \alpha), \left(D_{a+}^{\beta} \bar{f} \right) (x; \alpha) \right], \quad 0 \leq \alpha \leq 1;$$

به طور مشابه همین نتیجه را برای $\left(D_{b-}^{\beta} f \right) (x; a)$ نیز داریم.

□ اثبات. به مرجع [۱۵] رجوع شود.

مطابق (۲.۱)، α -برش برای تابع فازی مقدار $f \in C^F[a, b] \cap L^F[a, b]$ به صورت زیر نمایش داده می شود:

$$(2.2) \quad f(x; \alpha) = \left[\underline{f}(x; \alpha), \bar{f}(x; \alpha) \right], \quad 0 \leq \alpha \leq 1,$$

جایی که $\underline{f}(x; \alpha)$ و $\bar{f}(x; \alpha)$ به ترتیب کران پایین و کران بالا از α -برش تابع f می باشد.

۳. مساله کنترل بهینه کسری فازی

در آغاز بحث لازم است اصل کمینه پونتریاگین را که در [۱۰] بیان گردیده است، یادآور شویم. برای این منظور ابتدا مساله کنترل بهینه کسری زیر را در نظر می گیریم:

$$(1.3) \quad \begin{aligned} & \text{Min} : \int_a^b f_0(t, x(t), u(t)) dt \\ & \text{S. to} : \begin{cases} \left(D_{b-}^{\beta} x \right) (t) = f(t, x(t), u(t)); \\ x(a) = A, \end{cases} \end{aligned}$$

که در آن A یک عدد حقیقی است. شرط لازم برای آن که (x^*, u^*) یک جواب (۱.۳) باشد این است که یک تابع اسکالر مانند w چنان وجود داشته باشد به طوری که (x^*, u^*) در دستگاه کسری زیر صدق کند:

$$\begin{cases} (D_{b^-}^\beta x)(t) = \frac{\partial H}{\partial w}(x, u, w, t); \\ (D_{b^-}^\beta w)(t) = \frac{\partial H}{\partial x}(x, u, w, t); \\ \frac{\partial H}{\partial u}(x, u, w, t) = 0; \\ (x(a), w(b)) = (A, 0), \end{cases}$$

جایی که $H(x, u, w, t) = f_0(t, x, u) + w.f(x, u, t)$ (برای جزئیات بیشتر مراجعه کنید به [۱۰]).

اکنون به مبحث اصلی می پردازیم و مساله کنترل بهینه کسری فازی زیر را در نظر می گیریم:

$$\begin{aligned} \text{Min} : & \int_a^b f_0(t, \tilde{x}(t), \tilde{u}(t)) dt \\ \text{S. to} : & \begin{cases} (D_{a^+}^\beta \tilde{x})(t) = f(t, \tilde{x}(t), \tilde{u}(t)); \\ \tilde{x}(a) = \tilde{x}_0 = (p, q, r), \end{cases} \end{aligned} \quad (2.3)$$

که در شرط اولیه، $\tilde{x}_0 = (p, q, r)$ یک عدد فازی مثلثی است و $0 < \beta \leq 1$. حال با استفاده از مطالب بخش قبل و روشهای ارایه شده در [۱۴، ۲۰]، می دانیم که مساله (۲.۳) را می توان به صورت زیر نیز نمایش داد:

$$\begin{aligned} \text{Min} : & \int_a^b [f_0(t, \underline{x}(t; \alpha), \underline{u}(t; \alpha)) + i f_0(t, \bar{x}(t; \alpha), \bar{u}(t; \alpha))] dt \\ \text{S. to} : & \begin{cases} (D_{a^+}^\beta \underline{x})(t; \alpha) + i (D_{a^+}^\beta \bar{x})(t; \alpha) = \\ f(t, \underline{x}(t; \alpha), \underline{u}(t; \alpha)) + i f(t, \bar{x}(t; \alpha), \bar{u}(t; \alpha)); \\ \underline{x}(a; \alpha) + i \bar{x}(a; \alpha) = (q\alpha + p(1 - \alpha)) + i (q\alpha + r(1 - \alpha)). \end{cases} \end{aligned} \quad (3.3)$$

با توجه به اصل تساوی در مبحث اعداد مختلط، این مساله را می توان به صورت دو مساله زیر نوشت:

$$\text{Min} : \int_a^b f_0(t, \underline{x}(t; \alpha), \underline{u}(t; \alpha)) dt$$

$$(۴.۳) \quad S. to : \begin{cases} \left(D_{a+}^{\beta} \underline{x} \right) (t; \alpha) = f \left(t, \underline{x}(t; \alpha), \underline{u}(t; \alpha) \right); \\ \underline{x}(a; \alpha) = (q\alpha + p(1 - \alpha)); \end{cases}$$

و

$$Min : \int_a^b f_o(t, \bar{x}(t; \alpha), \bar{u}(t; \alpha)) dt$$

$$(۵.۳) \quad S. to : \begin{cases} \left(D_{a+}^{\beta} \bar{x} \right) (t; \alpha) = f(t, \bar{x}(t; \alpha), \bar{u}(t; \alpha)); \\ \bar{x}(a; \alpha) = (q\alpha + r(1 - \alpha)). \end{cases}$$

توجه داریم که از حل این دو مساله، زوج مرتبهای $(\underline{x}^*(t; \alpha), \underline{u}^*(t; \alpha))$ و $(\bar{x}^*(t; \alpha), \bar{u}^*(t; \alpha))$ به عنوان جوابهای بهینه مسایل (۴.۳) و (۵.۳) بر حسب α معین به دست می آیند. آنگاه، جواب بهینه مساله (۲.۳) به صورت α -برشهای زیر معین می گردند:

$$\tilde{x}^*(t, \alpha) = \left[\underline{x}^*(t; \alpha), \bar{x}^*(t; \alpha) \right], \quad \tilde{u}^*(t, \alpha) = \left[\underline{u}^*(t; \alpha), \bar{u}^*(t; \alpha) \right].$$

جهت تعیین جوابهای (۴.۳) و (۵.۳)، قضایای زیر مفید هستند که در اینجا یادآوری می گردند.

قضیه ۱.۳. مساله زیر را در نظر بگیرید [۱۵]:

$$(۶.۳) \quad \begin{cases} \left(D_{a+}^{\beta} y \right) (x) = f(x, y(x)), \quad 0 < \beta \leq 1 \\ \left(I_{a+}^{1-\beta} y \right) (a) = b \quad b \in R, \end{cases}$$

که در آن $f(x, y(x))$ یک تابع پیوسته حقیقی مقدار در دامنه $G \subset R \times R$ می باشد و $\sup_{(x,y) \in G} |f(x, y)| \leq \infty$ و در شرط لیب شیتز نیز صدق می کند، آنگاه جواب این دستگاه کسری به صورت زیر می باشد [۱۵]:

$$(۷.۳) \quad y(x) = \frac{b(x-a)^{(\beta-1)}}{\Gamma(\beta)} + \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_a^x \frac{f(t, y(t)) dt}{(x-t)^{(1-\beta)}, \quad x > a, \quad 0 < \beta < 1;$$

(مساله از نوع (۷.۳) را یک مساله از نوع کوشی می نامند، برای اطلاع بیشتر به [۱۵] مراجعه

شود).

همچنین جواب معادله دیفرانسیل خطی زیر که از نوع کوشی است:

$$(۸.۳) \quad \begin{cases} \left(D_{a+}^{\beta} y \right) (x) - \lambda y(x) = f(x), \\ y(a) = b. \end{cases}$$

به صورت زیر می باشد:

$$y(x) = bx^{\beta-1} E_{\beta,\beta}(\lambda(x-a)^\beta) + \int_a^x (x-t)^{\beta-1} E_{\beta,\beta}(\lambda(x-t)^\beta) f(t) dt, \quad (9.3)$$

جایی که $E_{\beta,\beta}$ تابع میتاگ لفلر دو پارامتری می باشد که به صورت زیر تعریف می شود:

$$E_{\alpha,\beta}(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \quad z \in \mathbb{C}; \quad \text{Re}(\alpha) > 0. \quad (10.3)$$

□

اثبات. به [۱۵] رجوع گردد.

۴. درجه اطمینان مساله کنترل بهینه کسری فازی

درجه اطمینان در مسائل کنترل بهینه کسری فازی، به طور کلی به میزان قطعیت یا باورپذیری نتایج و تصمیمات کنترلی اشاره دارد. این مفهوم، به ویژه در سیستم‌های فازی که با عدم قطعیت و ابهام سروکار دارند، اهمیت ویژه‌ای پیدا می‌کند. درجه اطمینان نشان می‌دهد که ما تا چه حد می‌توانیم به عملکرد بهینه سیستم کنترل، با توجه به عدم قطعیت‌های موجود، اعتماد کنیم. به عبارت دیگر، درجه اطمینان به شخص تصمیم‌گیرنده کمک می‌کند تا عملکرد سیستم کنترل را بهتر درک کند و تصمیمات بهتری در مورد طراحی و پیاده‌سازی آن بگیرد. بنابراین آنچه گفته شد، مساله (۳.۳) از مساله کنترل بهینه کسری فازی (۲.۳) با مرتبه β که $(0 < \beta \leq 1)$ به دست آمده است؛ مساله (۳.۳) را α -کنترل پذیر می‌نامیم هرگاه یک تابع کنترل u_α^* وجود داشته باشد که جواب مساله (۳.۳) بوده و سیستم مساله (۳.۳) را از نقطه اولیه به نقطه انتها با درجه اطمینان $(0 \leq \alpha \leq 1)$ هدایت کند. برای بیان بهتر مفهوم درجه اطمینان در اینجا، تابع عضویت $\mu(x_\alpha^*) = \alpha$ برای هر x_α^* که یک جواب مساله (۴.۳) بر حسب u_α^* می‌باشد را تعریف می‌کنیم. بنابراین داریم $x_\alpha^* \in [x_{\alpha^-}^*, \bar{x}_{\alpha^*}]$ که $x_{\alpha^-}^*$ و \bar{x}_{α^*} به ترتیب کران پایین و بالای x_α^* با درجه اطمینان $(0 \leq \alpha \leq 1)$ می‌باشند. وقتی که مقدار α به یک نزدیک می‌شود آنگاه کران بالا \bar{x}_{α^*} و کران پایین $x_{\alpha^-}^*$ به یکدیگر نزدیک می‌شوند و بنابراین، مسیر بهینه x_α^* به مسیر بهینه دقیق نزدیک و نزدیکتر می‌شود. وقتی که شخص تصمیم‌گیرنده بخواهد که مسیر بهینه مساله (۲.۳) را با درجه اطمینان α بیابد، این روش یک بازه بسته برای مسیر بهینه بر حسب α نتیجه می‌دهد.

۵. مساله کنترل بهینه کسری فازی درجه دوم

مساله کنترل بهینه کسری فازی درجه دوم زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \text{Min} : & \int_0^1 \left(\frac{\tilde{u}(t)^2}{\gamma} + q(1-t)^p \tilde{x}(t) \right) dt \\ \text{S. to} : & \begin{cases} \left(D_{(0+)}^\beta \tilde{x} \right) (t) = \lambda \tilde{x}(t) + \mu \tilde{u}(t); \\ \tilde{x}(0) = (a, b, c) , \end{cases} \end{aligned} \quad (1.5)$$

که $\tilde{x}(t)$ متغیر حالت فازی، $\tilde{u}(t)$ متغیر کنترل فازی، $0 < \beta \leq 1$ ، $t \in [0, 1]$ ، $p, q, \lambda, \mu \in \mathbb{R}^+$ هستند. با توجه به مفهوم α -برش، ابتدا مساله (۱.۵) را به مساله زیر تبدیل می کنیم:

$$\begin{aligned} \text{Min} : & \int_0^1 \left(\frac{1}{\gamma} (\underline{u}(t; \alpha))^2 + i \bar{u}(t; \alpha)^2 + q(1-t)^p (\underline{x}(t; \alpha) + i \bar{x}(t; \alpha)) \right) dt \\ \text{S. to} : & \begin{cases} \left(D_{(0+)}^\beta \underline{x} \right) (t; \alpha) + i \left(D_{(0+)}^\beta \bar{x} \right) (t; \alpha) = \lambda (\underline{x}(t; \alpha) + i \bar{x}(t; \alpha)) + \\ \mu (\underline{u}(t; \alpha) + i \bar{u}(t; \alpha)) \\ (\underline{x}(0; \alpha) + i \bar{x}(0; \alpha)) = (\alpha + a(b - \alpha)) + i (\alpha + c(b - \alpha)) , \end{cases} \end{aligned} \quad (2.5)$$

حال با توجه به روش بیان شده، مساله (۲.۵) به دو مساله زیر تبدیل می شود:

$$\begin{aligned} \text{Min} : & \int_0^1 \left(\frac{1}{\gamma} (\underline{u}(t; \alpha))^2 + q(1-t)^p \underline{x}(t; \alpha) \right) dt \\ \text{S. to} : & \begin{cases} \left(D_{(0+)}^\beta \underline{x} \right) (t; \alpha) = \lambda \underline{x}(t; \alpha) + \mu \underline{u}(t; \alpha) \\ \underline{x}(0; \alpha) = \alpha + a(b - \alpha) ; \end{cases} \end{aligned} \quad (3.5)$$

همچنین:

$$\begin{aligned} \text{Min} : & \int_0^1 \left(\frac{1}{\gamma} \bar{u}(t; \alpha)^2 + q(1-t)^p \bar{x}(t; \alpha) \right) dt \\ \text{S. to} : & \begin{cases} \left(D_{(0+)}^\beta \bar{x} \right) (t; \alpha) = \lambda \bar{x}(t; \alpha) + \mu \bar{u}(t; \alpha) \\ \bar{x}(0; \alpha) = \alpha + c(b - \alpha) . \end{cases} \end{aligned} \quad (4.5)$$

اکنون، مساله (۳.۵) را با استفاده از اصل کمینه پونتریاگین کسری حل می کنیم؛ ابتدا تابع همیلتونی را محاسبه می کنیم:

$$\left(\underline{x}(t; \alpha), \underline{u}(t; \alpha), w, t \right) = \left(\frac{1}{q} \underline{u}(t; \alpha)^2 + q(1-t)^p \underline{x}(t; \alpha) \right) + w \cdot (\lambda \underline{x}(t; \alpha) + \mu \underline{u}(t; \alpha))$$

حال شرایط لازم برای بهینگی مطابق اصل کمینه پونتریاگین کسری چنین است:

$$(۵.۵) \quad D_{\circ+}^{\beta} \underline{x}(t; \alpha) = \frac{\partial H}{\partial w} \left(\underline{x}(t; \alpha), \underline{u}(t; \alpha), w, t \right) = \lambda \underline{x}(t; \alpha) + \mu \underline{u}(t; \alpha);$$

$$(۶.۵) \quad D_{\circ+}^{\beta} w = \frac{\partial H}{\partial \underline{x}(t; \alpha)} \left(\underline{x}(t; \alpha), \underline{u}(t; \alpha), w, t \right) = q(1-t)^p + \lambda w;$$

$$(۷.۵) \quad \frac{\partial H}{\partial u} (x, u, w, t) = \underline{u}(t; \alpha) + \mu w = 0;$$

$$(۸.۵) \quad \left(\underline{x}(0; \alpha), w(1) \right) = (\alpha + a(b - \alpha), 0).$$

از (۶.۵) و (۷.۵) داریم:

$$(۹.۵) \quad \begin{cases} D_{\circ+}^{\beta} w = q(1-t)^p + \lambda w; \\ w(1) = 0, \end{cases}$$

که در آن $t \in [0, 1]$ است.

همچنین معادله (۹.۵) معادل با دستگاه کوشی زیر است:

$$(۱۰.۵) \quad \begin{cases} D_{\backslash-}^{\beta} w' = qt^p + \lambda w'; \\ w'(0) = 0, \end{cases}$$

جایی که $w'(t) = w(1-t)$ می باشد. بنا به [۱۵] جواب مساله کوشی کسری (۱۰.۵) به صورت زیر می باشد:

$$(۱۱.۵) \quad w' = \int_0^t (t-y)^{\beta-1} E_{\beta, \beta} \left(\lambda(t-y)^{\beta} \right) qy^p dy, \forall t \in [0, 1],$$

که در آن $E_{\beta,\beta}$ همان تابع میتاگ لفلر تعریف شده بوسیله رابطه (۱۰.۳) است. حال با استفاده از تغییر متغیر، رابطه (۱۱.۵) را می توان به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\begin{aligned} w' &= q \int_0^t (t-y)^p y^{\beta-1} E_{\beta,\beta}(\lambda(y)^\beta) dy \\ (12.5) \quad &= q\Gamma(p+1) I_{1-}^{p+1} (y^{\beta-1} E_{\beta,\beta}(\lambda(y)^\beta)) (t) \\ &= q\Gamma(p+1) t^{\beta+p} E_{\beta,\beta+p+1}(\lambda(y)^\beta), \end{aligned}$$

بنابراین داریم:

$$(13.5) \quad w(t) = w'(1-t) = q\Gamma(p+1)(1-t)^{\beta+p} E_{\beta,\beta+p+1}(\lambda(1-t)^\beta),$$

اکنون از رابطه (۷.۵) و (۱۳.۵) داریم:

$$(14.5) \quad \underline{u}^*(t; \alpha) = q\Gamma(p+1)(1-t)^{\beta+p} E_{\beta,\beta+p+1}(\lambda(1-t)^\beta)$$

و همچنین:

$$\begin{cases} D_{0+}^\beta \underline{x}(t; \alpha) = \lambda \underline{x}(t; \alpha) + \mu [q\Gamma(p+1)(1-t)^{\beta+p} E_{\beta,\beta+p+1}(\lambda(1-t)^\beta)]; \\ \underline{x}(0; \alpha) = \alpha. \end{cases} \quad (15.5)$$

اکنون با استفاده از رابطه (۸.۳)، می توان کران پایین مسیر بهینه را مطابق زیر به دست آورد [۱۴]:

$$\begin{aligned} \underline{x}^*(t; \alpha) &= \int_0^t (t-y)^{\beta-1} E_{\beta,\beta}(\lambda(t-y)^\beta) (\mu q\Gamma(p+1)(1-y)^{\beta+p} \\ &E_{\beta,\beta+p+1}(\lambda(1-y)^\beta)) dy + \alpha t^{\beta-1} E_{\beta,\beta}(\lambda t^\beta), \end{aligned} \quad (16.5)$$

بدین ترتیب زوج مرتب بهینه $(\underline{x}^*(t; \alpha), \underline{u}^*(t; \alpha))$ که جواب مساله (۳.۵) می باشد به دست می آید. با استفاده از همین روش و نوشتن تابع همیلتونی و همچنین به کارگیری اصل کمینه پونتریاگین کسری برای مساله (۴.۵)، زوج مرتب بهینه $(\bar{x}^*(t; \alpha), \bar{u}^*(t; \alpha))$ به صورت زیر محاسبه می گردد:

$$(17.5) \quad \bar{u}^*(t; \alpha) = q\Gamma(p+1)(1-t)^{\beta+p} E_{\beta,\beta+p+1}(\lambda(1-t)^\beta),$$

و همچنین

$$\begin{aligned} \bar{x}^*(t; \alpha) &= (\alpha + \Upsilon(1-\alpha)) t^{\beta+p} E_{\beta,\beta}(\lambda t^\beta) + \int_0^t (t-y)^{\beta-1} E_{\beta,\beta}(\lambda(t-y)^\beta) \\ &[\mu q\Gamma(p+1)(1-y)^{\beta+p} E_{\beta,\beta+p+1}(\lambda(1-y)^\beta)] dy. \end{aligned} \quad (18.5)$$

با در نظر گرفتن (۱۴.۵) و (۱۷.۵) مشاهده می شود که $\bar{u}^*(t; \alpha) = \underline{u}^*(t; \alpha)$ ؛ این واقعیت را می توان در قالب ویژگی زیر بیان کرد:

با توجه به شرایط مساله (۱۰.۵)، تابع کنترل بهینه مساله به صورت زیر است:

$$u^*(t; \alpha) = \bar{u}^*(t; \alpha) = \underline{u}^*(t; \alpha) = q\Gamma(p+1)(1-t)^{\beta+p} E_{\beta, \beta+p+1} \left(\lambda(1-t)^\beta \right), \quad (19.5)$$

که مستقل از α و وابسته به مرتبه مشتق کسری $0 < \beta \leq 1$ می باشد.

۶. شبیه سازی عددی

مثال ۱۰.۶. جهت دریافت چگونگی تعیین جواب تحلیلی در مساله (۱۰.۵) قرار می دهیم $\lambda = \mu = 1$ و $p = q = 1$ مساله کنترل بهینه کسری فازی زیر را در نظر می گیریم:

$$\begin{aligned} \text{Min} : & \int_0^1 \left(\frac{\bar{u}(t)^2}{2} + (1-t)\bar{x}(t) \right) dt \\ \text{S. to} : & \begin{cases} \left(D_{0+}^\beta \bar{x} \right) (t) = \bar{x}(t) + \bar{u}(t); \\ \bar{x}(0) = (0, 1, 2), \end{cases} \end{aligned} \quad (10.6)$$

که $0 < \beta \leq 1$ و $t \in [0, 1]$. اکنون اگر در این مساله قرار دهیم $\alpha = \beta = 1$ ، مساله (۱۰.۶) تبدیل به یک مساله کنترل بهینه با نقطه انتهایی آزاد به صورت زیر می شود که با استفاده از اصل کمینه پونتریاگین قابل حل است:

$$\begin{aligned} \text{Min} : & \int_0^1 \left(\frac{u(t)^2}{2} + (1-t)x(t) \right) dt \\ \text{S. to} : & \begin{cases} \dot{x}(t) = x(t) + u(t); \\ x(0) = 1. \end{cases} \end{aligned} \quad (20.6)$$

تابع همیلتونی این مساله به صورت زیر است:

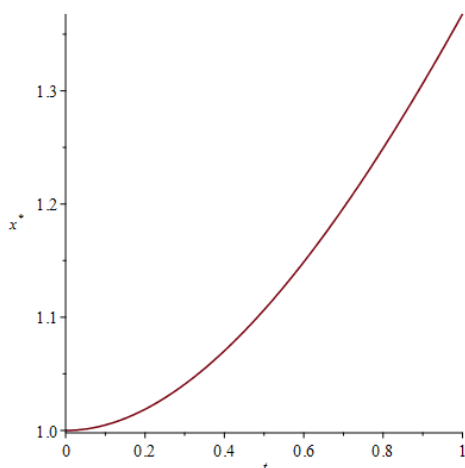
$$H = - \left(\frac{u(t)^2}{2} + (1-t)x(t) \right) + w(x(t) + u(t)); \quad (30.6)$$

بنابراین شرط لازم بهینگی چنین هستند:

$$\dot{w} = - \frac{\partial H}{\partial x} = -t - w; \quad (40.6)$$

$$(۵.۶) \quad \frac{\partial H}{\partial u} = -u + w = 0.$$

از رابطه (۴.۶) به دست می آید $w = 1 - t + ce^{-t}$ ؛ از آنجاکه $w(1) = 0$ ، لذا نتیجه می شود $c = 0$. حال با توجه به (۵.۶) تابع کنترل بهینه به صورت تحلیلی $u^*(t) = -t + 1$ حاصل می شود؛ با توجه به رابطه (۲.۶) تابع مسیر بهینه نیز به صورت $x^*(t) = t + e^{-t}$ بدست می آید. نمودار آن ها در شکل های ۱ و ۵ نشان داده شده است.



شکل ۱: مسیر بهینه $x^*(t)$

اکنون مساله کنترل بهینه کسری فازی (۱.۶) را در حالت کلی در نظر بگیرید. با توجه به روابط (۱۴.۵) و (۱۶.۵) داریم:

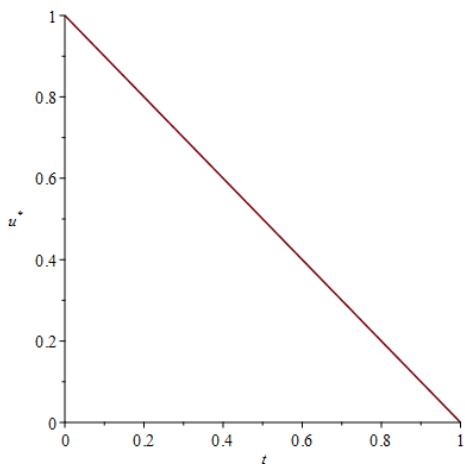
$$(۶.۶) \quad \underline{u}^*(t; \alpha) = \Gamma(\nu)(1-t)^{\beta+\nu} E_{\beta, \beta+\nu} \left((1-t)^\beta \right),$$

$$\underline{x}^*(t; \alpha) = \int_0^t (t-y)^{\beta-\nu} E_{\beta, \beta} (t^\beta) \left[\Gamma(\nu)(1-y)^{\beta+\nu} E_{\beta, \beta+\nu} \left((1-y)^\beta \right) \right] dy + \alpha t^{\beta-\nu} E_{\beta, \beta} (t^\beta),$$

$$(۷.۶)$$

به طور مشابه با به کارگیری روابط (۱۷.۵) و (۱۸.۵)، داریم:

$$(۸.۶) \quad \bar{u}^*(t; \alpha) = \Gamma(\nu)(1-t)^{\beta+\nu} E_{\beta, \beta+\nu} \left((1-t)^\beta \right),$$



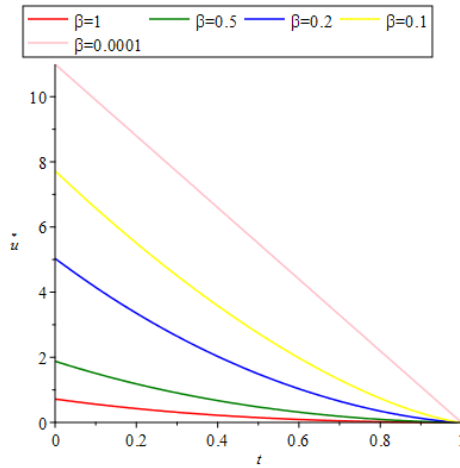
شکل ۲: کنترل بهینه $u^*(t)$

$$\bar{x}^*(t; \alpha) = (\alpha + 2(1 - \alpha))t^{\beta-1} E_{\beta, \beta}(t^\beta) + \int_0^t (t - y)^{\beta-1} E_{\beta, \beta}((t - y)^\beta) [\Gamma(2)(1 - y)^{\beta+1} E_{\beta, \beta+2}((1 - y)^\beta)] dy. \tag{9.6}$$

یادآور می شویم که در محاسبه روابط (۶.۶) - (۹.۶) از یازده جمله اول تابع میتاگ لفلر به عنوان تقریب استفاده شده است.

با توجه به رابطه (۶.۶)، پس از انجام محاسبات، توابع کنترل بهینه برای مقادیر مختلف β در شکل ۳ رسم شده است؛ با کمی دقت مشاهده می شود که در شکل ۳ و در نزدیکی $t = 0$ وقتی که مقدار β به صفر نزدیک می شود مقدار u^* افزایش پیدا می کند. همچنین با توجه به رابطه (۷.۶)، نمودار \bar{x}^* برای $\beta = 1$ به ازای مقادیر مختلف α در شکل ۴ نمایش داده شده است. لازم به ذکر است که منحنی قرمز رنگ در شکل ۴، نشان دهنده مسیر کنترل بهینه برای حالتی است که $\beta = 1$ و $\alpha = 1$ می باشد و با منحنی شکل ۱، که برای حالت دقیق مساله با استفاده از اصل کمینه پونتریاگین (معمولی) بدست آمده است، کاملاً مطابقت دارد.

بر اساس رابطه (۹.۶)، منحنی کران بالای مسیر بهینه \bar{x}^* برای $\beta = 1$ به ازای مقادیر مختلف α در شکل ۵ ترسیم شده است.

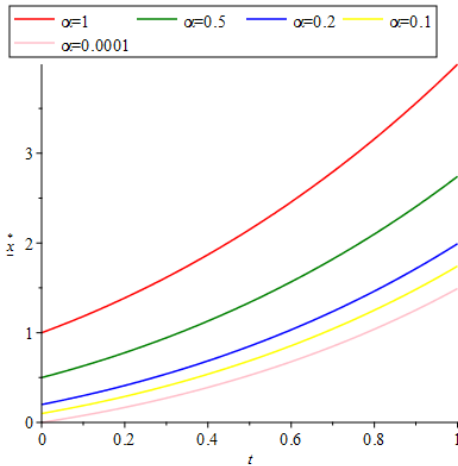


شکل ۳: تابع کنترل بهینه u^* به ازای مقادیر مختلف β

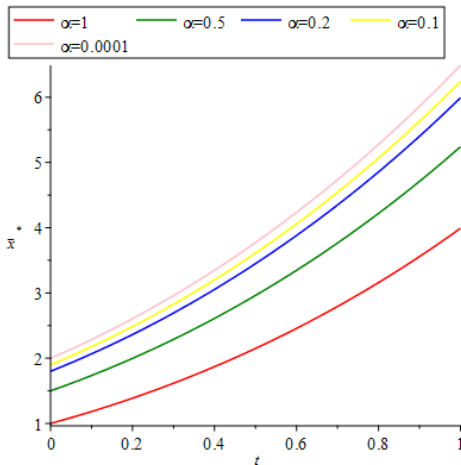
برای نشان دادن دقت روش ارائه شده در این مقاله کافی است که به منحنی های قرمز رنگ در شکل های ۴ و ۵ توجه کنید. این منحنی ها به ترتیب نشان دهنده کران پایین و کران بالای مسیر بهینه با استفاده از روش محاسباتی ارائه شده در این فصل برای حالت $\alpha = \beta = 1$ می باشند و کاملاً با نمودار ۱ که برای مسیر بهینه با استفاده از روش پونتریاگین برای حالت دقیق مساله ترسیم شده است، مطابقت دارد.

به منظور بررسی نقش α به عنوان درجه اطمینان یک مساله کنترل بهینه کسری فازی، فرض کنید که در مساله کنترل بهینه کسری فازی (۱۰۶)، فرد تصمیم گیرنده مقادیر $\alpha = 0/5$ و $\beta = 0/5$ را تعیین کرده باشد. با حل این مساله به ازای مقادیر داده شده و به کارگیری خاصیت ۱-۶ و رابطه های (۷۰۶) و (۹۰۶)، کنترل بهینه و مسیر بهینه به دست آمده به ترتیب در شکل های ۶ و ۷ نمایش داده شده است؛

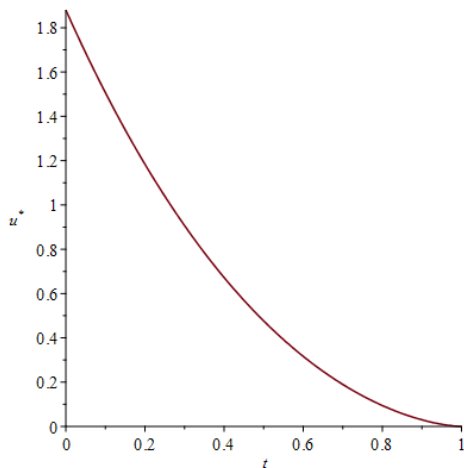
در واقع شکل ۷ به ما می گوید که مسیر بهینه مساله (۱۰۶) برای حالت $\beta = 0/5$ با درجه اطمینان $\alpha = 0/5$ به این صورت می باشد.



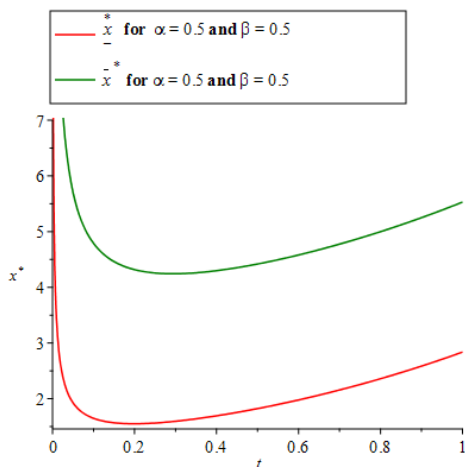
شکل ۴: کران پایین مسیر بهینه برای $\beta = 1$ به ازای مقادیر مختلف α



شکل ۵: کران بالای مسیر بهینه \bar{x}^* برای $\beta = 1$ به ازای مقادیر مختلف α



شکل ۶: کنترل بهینه u^* به ازای $\beta = 0.5$



شکل ۷: مسیر بهینه x^* به ازای $\alpha = 0.5$ و $\beta = 0.5$

۷. نتیجه گیری

بر پایه مطالب این مقاله یک روش تعیین جواب تحلیلی برای رده هایی از مسایل کنترل بهینه کسری فازی ساخته شده است. بر اساس این روش می توان جواب بهینه مساله کنترل بهینه درجه دوم کسری فازی هدایت شده با معادلات دیفرانسیل خطی از مرتبه کسری که در آن متغیر های مسیر و کنترل از نوع فازی هستند را محاسبه کرد. شخص تصمیم گیرنده می تواند با اختیار کردن مقدار اطمینان α ، مسیر بهینه و کنترل بهینه مساله مذکور را به صورت یک بازه محاسبه کند. این در حالی است که هرچه مقدار α به یک نزدیکتر باشد، کران بالا و پایین بازه های به دست آمده برای مسیر بهینه و کنترل بهینه، به مسیر و کنترل بهینه برای حالت دقیق (غیر فازی) مساله نزدیک و نزدیکتر می شوند.

مراجع

- [1] Abbasbandy, S., Nieto J. J., Alavi M., (2005) Tuning of reachable set in one dimensional fuzzy differential inclusions, *Chaos, Solitons & Fractals*, 26, 1337–1341.
- [2] Abbasbandy, S. (2004) Numerical methods for fuzzy differential inclusions, *Computing Mathematics Application*, 48, 1633–1641.
- [3] Abbod, M. F., Von Keyserlingk, D. G., Linkens, D. A., Mahfouf, M. (2001) Survey of utilisation of fuzzy technology in medicine and healthcare, *Fuzzy Sets Syst*, 120, 331-349.
- [4] Agrawal, O. P. (2004) A general formulation and solutions scheme for fractional optimal control problem, *Nonlinear Dynamics*, 38, 323-337.
- [5] Agrawal, O. P. (2007) A formulation and numerical scheme for fractional optimal control problems, *Journal of Vibration and Control*, 13, 1269-1281.
- [6] Agarwal, R. P., O'Regan, D., Lakshmikantham, V. (2005) Viability theory and fuzzy differential equations, *Fuzzy Sets and Systems*, 151, 563-580.
- [7] Agarwal, R. P., O'Regan, D., Lakshmikantham, V. (2005) Maximal solutions and existence theory for fuzzy differential and integral equations, *J. Appl. Anal*, 11, 171-186.
- [8] Agarwal, R. P., O'Regan, D., Lakshmikantham, V. (2003) A stacking theorem approach for fuzzy differential equations, *Nonlinear Anal*, 55, 299-312.
- [9] Bede, B., Gal, S. G. (2010) Solutions of fuzzy differential equations based on generalized differentiability, *Commun. Math. Anal*, 9, 22-41.
- [10] Bourdin, L. (2012) A class of fractional optimal control problems and fractional Pontryagin's systems. Existence of a fractional Noether's theorem, arXiv preprint arXiv:1203.1422.

- [11] Diamond, P., Kloeden, P. E. (1994) "Metric space of Fuzzy sets Theory And Applications", World scientific publishing.
- [12] Filev, D., Angelove, P., (1992) Fuzzy optimal control, *Fuzzy Sets and Systems*, 47, 151-156.
- [13] Gal, S. G. (2000) Approximation Theory in Fuzzy Setting, In Anastassiou, G.A. (ed.) *Handbook of Analytic-Computational Methods in Applied Mathematics*, ch. 13, pp. 617–666. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton .
- [14] Karimyar, J. M., Fakharzadeh, J. A. (2018) Fractional Fuzzy Optimal Control Problem Governed by Fuzzy System, *International Journal of Pharmaceutical Research and Allied sciences*, 151-158.
- [15] Kilbas, A., Srivastava, H., Trujillo, J. (2006) *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*.
- [16] Kloeden, P. (1991) Remarks on peano-like theorems for fuzzy differential equations, *Fuzzy Sets and Systems*, 44, 161-164.
- [17] Lotfi A., Dehghan M. and Yousefi S. A. (2011) A numerical technique for solving the fractional optimal control problems, *Computers and Mathematics with Applications*, 62, 1055-1067.
- [18] Mostafa, A. M., Osman, M. (2021) A Numerical Technique for Solving Fuzzy Fractional Optimal Control Problems, *Journal of Computational Analysis and Applications*, 29, 413-430.
- [19] Mortezaee, M. (2022) An application of a fuzzy system for solving time delay fractional optimal control problems with Atangana–Baleanu derivative, *Optimal Control Applications and Methods*, 5, 1753-1777.
- [20] Najariyan, M., Farahi, M. H. (2013) Optimal control of fuzzy controlled system with fuzzy initial conditions, *Iranian Journal of Fuzzy Systems*, 10, 21-35.
- [21] Najariyan, M., Farahi, M. H., Alavian, M. (2011) Optimal control of HIV infection by using fuzzy dynamical systems, *The Journal of Mathematics and Computer Science*, 2, 639-649.
- [22] Naschie, M. S. (2004) The concepts of E-infinite: an elementary introduction to the Cantorianfractal theory of quantum physics, *Chaos, Solitons & Fractals*, 22, 495-511.
- [23] Naschie, M. S. (2004) A review of E-infinite theory and the mass spectrum of high energy particle physics, *Chaos, Solitons and Fractals*, 19, 209-236.
- [24] Naschie, M. S. (2005) On a fuzzy Kahler manifold which is consistent with slit experiment, *International Journal of Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 6, 95-98.
- [25] Naschie, M. S. (2005) From experimental quantum optics to quantum gravity via a fuzzy Kahler manifold, *Chaos, Solitons and Fractals*, 25, 969-977.
- [26] Nguyen, H. T. (1978) A note on the extension principle for fuzzy sets, *J. Math. Anal. Appl.*, 64, 369-380.

- [27] Nieto, J., Khastan, A., Ivaz, K. (2009) Numerical solution of fuzzy differential equations under generalized differentiability, *Nonlinear Anal. Hybrid Syst*, 3, 700-707.
- [28] Park, J. H., Park, J. S., Kwun, Y. C. (2006) Controllability for the semi linear fuzzy integro-differential equations with nonlocal conditions, *Lecture Notes in Artificial Intelligence, LNAI 4223*, 221-230.
- [29] Pearson, D. W. (1997) A property of linear fuzzy differential equations, *Appl. Math. Letter*, 10, 99-103.
- [30] Seikkala, S. (1987) On the fuzzy initial value problem, *Fuzzy Sets Syst*, 24, 319-330.
- [31] Seikkala, S., Vorobiev, D. (2002) Towards the theory of fuzzy differential equations, *Fuzzy Sets and Systems*, 125, 231-237.
- [32] Xu, J., Liao, Z., Nieto, J. (2010) A class of differential dynamical systems with fuzzy matrices, *J. Math. Anal. Appl.*, 368, 54-68.
- [33] Zhao, Y., Zhu, Y. (2010) Fuzzy optimal control of linear quadratic models, *Computers and Mathematics with Applications*, 60, 67-73.
- [34] Zimmermann, H. J. (1987) fuzzy programming and linear programming with several objective function, *Fuzzy set and System*, 1, 45-55.