

## کاربرد زیر مجموعه فازی فیثاغورسی در $Q$ -جبر و رادیکال پوچ

سیروس جهان‌پناه\* و روح‌الله دانش‌پایه

گروه علوم پایه، دانشگاه پیام‌نور، تهران، ایران

تاریخ دریافت: ۱۴۰۳/۱۲/۳۰

تاریخ پذیرش: ۱۴۰۴/۰۳/۰۶

نوع مقاله: علمی-پژوهشی

چکیده. در این مقاله، با در نظر گرفتن مفاهیم  $Q$ -جبر و زیرمجموعه فازی فیثاغورسی، مفاهیم  $Q$ -زیرجبر (پاد) فازی،  $Q$ -زیرجبر فازی فیثاغورسی و رادیکال پوچ  $Q$ -زیرجبر فازی فیثاغورسی را معرفی شده و تحت شرایطی ثابت شده که رادیکال پوچ  $Q$ -زیرجبرهای فازی فیثاغورسی یک  $Q$ -زیرجبر فازی فیثاغورسی است. در ادامه به کمک مفهوم مجموعه تراز به ارتباط دوطرفه  $Q$ -زیرجبرهای فازی فیثاغورسی و  $Q$ -جبرها پرداخته و نشان داده شده است که  $Q$ -زیرجبر فازی فیثاغورسی یک تعمیم از  $Q$ -زیرجبر فازی است. با معرفی ترکیب زیرجبرهای فازی فیثاغورسی، شرایط معادلی برای  $Q$ -زیرجبر فازی فیثاغورسی وابسته به عمل ترکیب ارائه شده است. در پایان به ارتباط تصویر همریخت رادیکال پوچ  $Q$ -زیرجبر فازی فیثاغورسی و رادیکال پوچ تصویر همریختی  $Q$ -زیرجبر فازی فیثاغورسی پرداخته شده است.

### ۱. سرآغاز

نظریه مجموعه‌های فازی به‌عنوان توسعه مجموعه‌های عادی برای تسلط بر چالش‌ها در مواجهه با عدم قطعیت توسط زاده در سال ۱۹۶۵ معرفی شد. محور اصلی استفاده از مجموعه‌های فازی،

2010 Mathematics Subject Classification. 03G25 ; 08A72

\* Corresponding author

E-mails: s.jahanpanah@pnu.ac.ir and Rdaneshpayeh@pnu.ac.ir.

عبارات و کلمات کلیدی.  $Q$ -زیرجبر (پاد) فازی،  $Q$ -زیرجبر فازی فیثاغورسی، رادیکال پوچ  $Q$ -زیرجبر فیثاغورسی.

© ۱۴۰۳ (انجمن سیستم‌های فازی)

ارائه درجه عضویت است و زاده<sup>۱</sup> مقادیر عضویت را به اشیاء مجموعه‌ها از بازه بسته [۰, ۱] اختصاص داد [۱۴]. این نظریه توسط محققان زیادی در تمام حوزه‌های علوم پایه، علوم مهندسی و سایر علوم توسعه پیدا کرد و دارای کاربردهای مهمی است. با توجه به این‌که هر مجموعه عادی بدون تحلیل عناصرش در منطق چند ارزشی کمک زیادی نمی‌کنند، لذا اختصاص درجه عضویت به هر عنصر از مجموعه‌ها می‌تواند کمک مهمی در شناخت آن مجموعه داشته باشد. این نظریه کاربردهای مهمی دارد که می‌توان به کاربردهای واقعی آن در مدل‌سازی مسائل واقعی به صورت الگوهای ریاضی به‌خصوص در تصمیم‌گیری، تجزیه و تحلیل هوشمند داده‌ها، پردازش اطلاعات، تشخیص الگو و بهینه‌سازی اشاره کرد.

برای افزایش قابلیت مجموعه‌های فازی برای گرفتن و توسعه مدل‌سازی مسائل واقعی دنیا و به‌خصوص در تصمیم‌گیری‌های چندمعیاره، محققان مجموعه‌های فازی مرتبه دوم غیراستانداردی را مانند مجموعه‌های فازی شهودی [۲] و مجموعه فازی فیثاغورسی [۱۳] به عنوان تعمیم مجموعه‌های فازی معرفی کردند. این مجموعه‌های فازی غیراستاندارد امکان درج عدم دقت و عدم قطعیت را در مشخصات درجه‌های عضویت فراهم می‌کند. در مجموعه‌های فازی شهودی با دو پارامتر نشان داده می‌شوند، درجات عضویت و عدم عضویت که این شرط را برآورده می‌کند که مجموع درجات عضویت و عدم عضویت هر عنصر در یک مجموعه ثابت از عناصر حداکثر ۱ باشد. اگرچه مجموعه‌های فازی شهودی و الحاقات مستقیم آن‌ها برای مقابله با مشکلات مختلف زندگی واقعی استفاده شده است، اما برآورد مقادیر واضح برای درجات عضویت و غیرعضویت اغلب دشوار است.

یاگر<sup>۲</sup>، کلاس جدیدی از مجموعه‌های فازی غیراستاندارد را به نام مجموعه‌های فازی فیثاغورسی و به‌عنوان تعمیمی از مجموعه‌های فازی شهودی متکی بر درجه عضویت فیثاغورس معرفی کرد که دارای دو تابع عضویت و عدم عضویت است و مبتنی بر مسائلی است که هم دارای جنبه منفی و هم جنبه مثبت هستند [۱۳]. یاگر مجموعه‌های فازی فیثاغورسی را برای مقابله با داده‌های مبهم با این شرط ارائه کرد که برای هر عنصر، مجموع مجزورات عضویت و مقادیر غیرعضویت نباید بیشتر از ۱ باشد. در خیلی از مباحث مهم و واقعی این نظریه در مقایسه با مدل‌های قبلی نشان می‌دهد که نشان دادن مشکل با داده‌های مبهم مؤثرتر است و باعث می‌شود در موقعیت‌هایی که اطلاعات نامشخص و نادقیق وجود دارد، مفیدتر باشد. برای شناخت بیشتر و اهمیت این مفاهیم و بخصوص کاربردهای واقعی آن به منابع [۱۵، ۵، ۱۰] مراجعه شود. جبرهای منطقی یکی از مهمترین ساختارهای جبری هستند که در علوم پایه به‌خصوص فیزیک و در علوم مهندسی

<sup>1</sup>Zadeh

<sup>2</sup>Yager

به‌خصوص مهندسی کامپیوتر دارای کاربردهای زیادی هستند. ایمائی<sup>۱</sup> و ایزاکی (ایساکا)<sup>۲</sup> دو دسته از جبرهای منطقی را تحت عنوان جبرهای  $BCK$  و جبرهای  $BCI$  معرفی کردند که کلاس جبرهای  $BCK$  زیرکلاس مناسب از کلاس جبرهای  $BCI$  است [۴، ۳]. بعد از آن، محققان زیادی بر اساس اصول منطق و الگوبرداری از این دو نوع جبر به معرفی جبرهای منطقی زیادی پرداختند. یکی از جبرهای منطقی مهم  $Q$ -جبر است که توسط نگرس<sup>۳</sup> [۹] به‌عنوان تعمیمی از جبرهای  $BCK$  و جبرهای  $BCI$  معرفی شد و قضایای و نتایج مهمی از این دو رده جبرهای منطقی تعمیم داد.  $Q$ -جبرها دارای اهمیت زیادی هستند و ارتباط خوبی با نظریه گروه‌ها و نظریه حلقه‌ها دارند به این ترتیب که تحت شرایطی می‌توانند به یکدیگر تبدیل شوند. با توجه به ارتباط نظریه مجموعه‌های فازی و جبرهای منطقی، پژوهش‌های مهمی در حوزه جبرهای منطقی با مجموعه‌های فازی انجام شده است. به‌خصوص تحقیقات مهمی در زمینه  $Q$ -زیرجبرهای فازی انجام شده است که می‌توان به منابع [۸، ۷] اشاره کرد. در این مقاله ما ابتدا  $Q$ -زیرجبرهای فازی فیثاغورسی را به‌عنوان تعمیمی از  $Q$ -زیرجبرهای فازی معرفی می‌کنیم و به خواص آن‌ها می‌پردازیم. انگیزه ما از معرفی  $Q$ -زیرجبرهای فازی فیثاغورسی این است که  $Q$ -زیرجبرها را به دو تابع عضویت مجهز کنیم و با توجه به اصول موضوعه روی  $Q$ -زیرجبرها،  $Q$ -زیرجبرهای فازی فیثاغورسی جدیدی بسازیم. با توجه به این‌که مباحث مجموعه‌های فازی شهودی تعمیمی از زیرمجموعه‌های فازی هستند و دارای کاربردهای مسائل خطی هستند، در این مقاله هدف دیگر ما بررسی مسائل غیرخطی مانند خم‌های درجه دو هست. لذا  $Q$ -زیرجبرهای فازی فیثاغورسی دارای خواص اصول موضوعه جبرهای منطقی و مسائل غیرخطی فازی هستند. در واقع  $Q$ -زیرجبرهای فازی را به  $Q$ -زیرجبرهای فازی فیثاغورسی تعمیم داده‌ایم و تعمیمی از  $Q$ -زیرجبرهای فازی شهودی به‌دست آورده‌ایم. با توجه به اهمیت مباحث هم‌ریختی‌ها در این مقاله، با معرفی رادیکال پوچ  $Q$ -زیرجبرهای فازی فیثاغورسی به تصویر رادیکال پوچ  $Q$ -زیرجبرهای فازی فیثاغورسی پرداخته‌ایم و تحت شرایطی نشان داده‌ایم که تصویر رادیکال پوچ  $Q$ -زیرجبرهای فازی فیثاغورسی و رادیکال پوچ تصویر  $Q$ -زیرجبرهای فازی فیثاغورسی با یکدیگر برابرند. با توجه به این‌که تابع مشخصه دارای اهمیت زیادی مسائل مرتبط با عضویت و یا عدم عضویت جزء در کل است، نشان داده‌ایم که تابع مشخصه یک  $Q$ -زیرجبر فازی فیثاغورسی است. از طرفی تابع مشخصه یک زیرمجموعه فازی است، لذا این انگیزه ایجاد می‌شود که آیا  $Q$ -زیرجبر فازی دلخواه می‌توانند یک  $Q$  زیرجبر فازی فیثاغورسی باشد؟ با تحقیق در این موضوع دیده می‌شود که اگر در زیر مجموعه فازی فیثاغورسی مؤلفه  $Q$ -زیرجبر فازی

<sup>1</sup>Imai<sup>2</sup>Iséki<sup>3</sup>Neggres

باشد لازم است تا مؤلفه دوم (به عنوان عدم عضویت مکمل  $Q$ -زیر جبر فازی باشد تا به  $Q$  زیرجبر فازی فیثاغورسی برسیم. با تبدیل  $Q$ -زیرجبر فازی به  $Q$ -زیرجبر فازی فیثاغورسی، ایده و انگیزه معرفی  $Q$ -زیرجبرهای پاد فازی (به عنوان مؤلفه عدم عضویت) ایجاد می‌گردد و نشان می‌دهیم اگر زیرمجموعه فیثاغورسی فازی دارای دو مؤلفه،  $Q$ -زیرجبر فازی و  $Q$ -زیرجبر پاد فازی باشد آن‌گاه تشکیل  $Q$ -زیرجبر فیثاغورسی می‌دهد و در این تحقیق جهت تأیید بیشتر آن را  $Q$ -زیرجبر فازی فیثاغورسی دو طرفه می‌نامیم. هدف از معرفی  $Q$ -زیرجبرهای فازی فیثاغورسی دو طرفه این است که بتوانیم ترکیب دو  $Q$ -زیرجبر فازی فیثاغورسی را به  $Q$ -زیرجبر فازی فیثاغورسی تبدیل کنیم به نحوی که این ترکیب شامل یکی از این  $Q$ -زیرجبرهای فیثاغورسی باشد. در این تحقیق، با توجه به این‌که ترکیب  $Q$ -زیرجبرهای فیثاغورسی لزوماً نمی‌تواند  $Q$ -زیرجبر فازی فیثاغورسی باشد (مؤلفه‌های زیرمجموعه فازی فیثاغورسی غیرخطی هستند) لذا نشان داده‌ایم که ترکیب  $Q$ -زیرجبرهای فازی فیثاغورسی به صورت توان‌دار با شرط جابه‌جایی می‌تواند  $Q$ -زیرجبر فازی فیثاغورسی باشد. لذا معرفی  $Q$ -زیرجبرهای فیثاغورسی دو طرفه انگیزه دیگری است تا بتوانیم ترکیب  $Q$ -زیرجبرهای فازی فیثاغورسی بدون لحاظ توان  $Q$ -زیرجبر فازی فیثاغورسی بشود.  $Q$ -جبرهای شرکت‌پذیر نقش مهمی در ساختار و توسعه  $Q$ -زیرجبرهای فازی فیثاغورسی دارند، به طوری که اگر مجموعه زمینه ما  $Q$ -جبر شرکت‌پذیر نباشد لزوماً ترکیب  $Q$ -زیرجبرهای فازی فیثاغورسی نمی‌تواند  $Q$ -زیرجبر فازی فیثاغورسی باشد. در پایان با توجه به اهمیت هم‌ریختی‌ها که در واقع انتقال و یا نگاشت از  $Q$ -جبر به  $Q$ -جبر در هستند توانسته‌ایم به ارتباط رادیکال پوچ  $Q$ -جبرهای فازی فیثاغورسی پردازیم و شرایطی را برای توسعه  $Q$ -جبر فازی فیثاغورسی بین دو  $Q$ -جبر زمینه ایجاد کنیم.

## ۲. مفاهیم مقدماتی

در این بخش به معرفی برخی تعاریف و نتایج مورد نیاز در این مقاله می‌پردازیم. در تمام تعاریف و نتایج این مقاله  $X$ ، مجموعه دلخواه و ناتهی است.

**تعریف ۱.۰۲.** [۶] فرض کنید  $X$  مجموعه ناتهی، و  $\mu : X \rightarrow [0, 1]$  نگاشت باشد. آن‌گاه  $A = \{(x, \mu(x)) \mid x \in X\}$  را زیرمجموعه فازی از  $X$  می‌نامیم.

در این مقاله، برای هر  $n \in \mathbb{N}$  و نیز  $x \in X$ ، قرارداد می‌کنیم که  $(\mu(x))^n = \mu^n(x)$ .

**تعریف ۲.۰۲.** [۱۲] فرض کنید  $X$  مجموعه ناتهی باشد. آن‌گاه

$$P = (\mu_P, \nu_P) = \{(x, \mu_P(x), \nu_P(x)) \mid x \in X\}$$

را زیرمجموعه فازی فیثاغورسی می‌نامیم که در آن  $\mu_P, \nu_P : X \rightarrow [0, 1]$  را به ترتیب توابع عضویت و غیرعضویت می‌نامیم و برای هر  $x \in X$   $\mu_P(x) + \nu_P(x) \leq 1$  برقرار است.

**تعریف ۳.۲.** [۹]  $Q$ -جبر مجموعه ناتهی  $X$  همراه با عضو ثابت  $\circ$  و عمل دوتایی  $*$  روی  $X$  است که در شرایط زیر صدق کند:

$$(۱) \text{ برای هر } x \in X, x * x = \circ,$$

$$(۲) \text{ برای هر } x \in X, x * \circ = x,$$

$$(۳) \text{ برای هر } x, y, z \in X, (x * y) * z = (x * z) * y.$$

به علاوه، روی مجموعه  $X$  رابطه دوتایی  $\leq_X$  برای هر  $x, y \in X$  به صورت  $x \leq_X y$  اگر و فقط اگر  $x * y = \circ$   $\Leftrightarrow$  تعریف می‌شود. هر زیرمجموعه ناتهی  $Y \subseteq X$  را یک زیر جبر از  $X$  گوئیم اگر برای هر  $x, y \in X$  داشته باشیم  $x * y \in Y$  و با  $Y \leq_{suba} X$  نشان می‌دهیم.

**قضیه ۴.۲.** [۱] فرض کنید  $(X, *, \circ)$ ،  $Q$ -جبر باشد و  $x, y \in X$  دلخواه باشند.

$$(۱) \text{ اگر } x \leq_X \circ, \text{ آن گاه } X = \{\circ\}.$$

$$(۲) \text{ اگر } y \leq_X x, \text{ آن گاه } \circ = x * (x * (x * y)).$$

**تعریف ۵.۲.** [۱۱] فرض کنید  $(X, *, \circ)$ ،  $Q$ -جبر و  $x, y \in X$  باشد. آن گاه  $X$  در خاصیت جابجایی صدق می‌کند اگر برای هر  $x, y \in X$  رابطه  $x * y = y * x$  برقرار باشد و آن را  $CQ$ -جبر می‌نامیم و در خاصیت شرکت پذیری صدق می‌کند اگر برای هر  $x, y, z \in X$  رابطه  $x * (y * z) = (x * y) * z$  برقرار باشد و آن را  $AQ$ -جبر می‌نامیم.

### ۳. $Q$ -زیرجبرهای فازی فیثاغورسی

از آنجایی که زیر جبرها ابزارهای قدرتمندی برای تجزیه ساختارهای پیچیده، شناسایی خواص جبری (عناصر معکوس، شرکت پذیری، توزیع پذیری، ایدال بودن)، کشف ناوردهای جبری (رتبه، بعد، مولدها)، و بخصوص در مطالعه ما کاربرد در منطق کوانتوم و شبکه ای کامپیوتری کاربرد دارند، لذا با توجه به عدم قطعیت مسایل واقعی روز دنیا کاربردی بودن منطق بی نهایت ارزشی، در این بخش به معرفی  $Q$ -زیرجبرهای فازی فیثاغورسی می‌پردازیم و خواص آن‌ها را بررسی می‌کنیم.

**تعریف ۱.۳.** فرض کنید  $A = \{(x, \mu(x)) \mid x \in X\}$  زیرمجموعه‌ی فازی از  $X$  باشد. آن گاه  $A$  را  $Q$ -زیرجبر فازی  $X$  گوئیم، اگر برای هر  $x, y \in X$   $\mu(x * y) \geq \mu(x) \wedge \mu(y)$  و

Q- زیرجبر پاد فازی  $X$  گوئیم اگر،  $\mu(x * y) \leq \mu(x) \vee \mu(y)$ ، به علاوه،  $A$  را Q- زیرجبر فازی قوی می‌نامیم اگر برای هر  $x, y \in X$ ،  $\mu(x * y) = \mu(x) \wedge \mu(y)$  برقرار باشد.

در سراسر این مقاله، برای هر  $m, n \in \mathbb{N}$  و نیز برای هر مجموعه ناتهی و دلخواه  $X$ ، و هر  $x \in X$ ، قرارداد می‌کنیم که  $P^{(n,m)} = \{(x, \mu_P^n(x), \nu_P^m(x)) \mid x \in X\}$ . واضح است که  $P^{(1,1)} = P$  و برای هر  $n \geq m \geq 2$  و  $\mu^n \subseteq \mu^m$ ،  $n \geq m$  و  $m \leq m'$  و  $n \leq n'$  اگر  $P^{(m,n)}$  زیرمجموعه فازی فیثاغورسی باشد، آنگاه  $P^{(m',n')}$  زیرمجموعه فازی فیثاغورسی است.

تعریف ۲.۳. فرض کنید  $P$  زیرمجموعه فازی فیثاغورسی از  $X$  باشد. آنگاه  $P$  را Q- زیرجبر فازی فیثاغورسی از  $X$  می‌گوئیم اگر برای هر  $x, y \in X$ ، داشته باشیم

$$\mu_P^\vee(x * y) \geq \min\{\mu_P^\vee(x), \mu_P^\vee(y)\} \quad \text{و} \quad \nu_P^\vee(x * y) \leq \max\{\nu_P^\vee(x), \nu_P^\vee(y)\}$$

بدیهی است که اگر  $P$ ، Q- زیرجبر فازی فیثاغورسی باشد، آنگاه برای هر  $x \in X$ ،  $\mu_P(\circ) \geq x$  و  $\mu_P^\vee(\circ) \leq \nu_P^\vee(x) \leq \nu_P(x)$  و  $\mu_P^\vee(\circ) \geq \mu_P^\vee(x)$ .

مثال ۳.۳. فرض کنید  $(X, *, \circ)$  Q- جبر باشد و  $Y \leq_{suba} X$ . آنگاه به وضوح  $P = \{(x, \chi_Y(x), \chi_Y^c(x))\}$ ، Q- زیرجبر فازی فیثاغورسی از  $X$  است.

قضیه ۴.۳. فرض کنید  $A = \{(x, \mu(x)) \mid x \in X\}$ ، Q- زیرجبر فازی  $X$  باشد. آنگاه  $Rad(A) = \{(x, \sqrt{\mu(x)}, \sqrt{\mu^c(x)})\}$ ، Q- زیرجبر فازی فیثاغورسی از  $X$  است.

اثبات. فرض کنید  $x \in X$ . آنگاه

$$(\sqrt{\mu(x)})^\vee + (\sqrt{\mu^c(x)})^\vee = \mu(x) + 1 - \mu(x) = 1$$

و لذا  $Rad(A) = \{(x, \sqrt{\mu(x)}, \sqrt{\mu^c(x)})\}$  زیرمجموعه فازی فیثاغورسی از  $X$  است. از آنجایی که  $A$ ، Q- زیرجبر فازی از  $X$  است،

$$\begin{aligned} \sqrt{\mu(x * y)}^\vee &= \mu(x * y) \geq \mu(x) \wedge \mu(y) = \sqrt{\mu(x)}^\vee \wedge \sqrt{\mu(y)}^\vee, \\ (\sqrt{\mu^c(x * y)})^\vee &= 1 - \mu(x * y) \leq 1 - (\mu(x) \wedge \mu(y)) \\ &\leq (1 - \mu(x)) \vee (1 - \mu(y)) \\ &= \mu^c(x) \vee \mu^c(y) = \sqrt{\mu^c(x)}^\vee \vee \sqrt{\mu^c(y)}^\vee. \end{aligned}$$

بنابراین  $Rad(A) = \{(x, \sqrt{\mu(x)}, \sqrt{\mu^c(x)})\}$ ،  $Q$ -زیرجبر فازی فیثاغورسی از  $X$  است.  $\square$

**تعریف ۵.۳.** فرض کنید  $P = \{(x, \mu_P(x), \nu_P(x)) \mid x \in X\}$  زیرمجموعه فازی فیثاغورسی از  $X$  باشد و  $\alpha, \beta \in [0, 1]$ . آن‌گاه مجموعه تراز  $P$  را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$P^{(\alpha, \beta)} = \{x \in X \mid \mu_P^{\checkmark}(x) \geq \alpha, \nu_P^{\checkmark}(x) \leq \beta\}.$$

**قضیه ۶.۳.** فرض کنید  $P = \{(x, \mu_P(x), \nu_P(x)) \mid x \in X\}$  زیرمجموعه فازی فیثاغورسی از  $X$  و  $\alpha, \beta \in [0, 1]$  باشند. آن‌گاه  $P^{(\alpha, \beta)}$ ،  $Q$ -زیرجبر از  $X$  است اگر و تنها اگر  $P$ ،  $Q$ -زیرجبر فازی فیثاغورسی از  $X$  باشد.

**اثبات.** فرض کنید  $x, y \in P^{(\alpha, \beta)}$ . آن‌گاه  $\mu_P^{\checkmark}(x) \geq \alpha$  و  $\nu_P^{\checkmark}(y) \leq \beta$  که روابط

$$\mu_P^{\checkmark}(x * y) \geq \mu_P^{\checkmark}(x) \wedge \mu_P^{\checkmark}(y) \geq \alpha \wedge \alpha = \alpha,$$

$$\nu_P^{\checkmark}(x * y) \leq \nu_P^{\checkmark}(x) \vee \nu_P^{\checkmark}(y) \leq \beta \vee \beta = \beta$$

را نتیجه می‌دهند، لذا  $x * y \in P^{(\alpha, \beta)}$ .

برعکس، فرض کنید  $\mu_P^{\checkmark}(x) \wedge \mu_P^{\checkmark}(y) = \alpha$  و  $\nu_P^{\checkmark}(x) \vee \nu_P^{\checkmark}(y) = \beta$ . آن‌گاه  $x, y \in P^{(\alpha, \beta)}$  و چون  $P^{(\alpha, \beta)}$ ،  $Q$ -زیرجبر از  $X$  است، نتیجه می‌گیریم که  $x * y \in P^{(\alpha, \beta)}$ . بنابراین

$$\mu_P^{\checkmark}(x * y) \geq \alpha = \mu_P^{\checkmark}(x) \wedge \mu_P^{\checkmark}(y),$$

$$\nu_P^{\checkmark}(x * y) \leq \beta = \nu_P^{\checkmark}(x) \vee \nu_P^{\checkmark}(y).$$

در نتیجه  $P$ ،  $Q$ -زیرجبر فازی فیثاغورسی از  $X$  است.  $\square$

برای هر  $n \in \mathbb{N}$  و  $x \in X$  که  $(X, *, \circ)$ ،  $Q$ -جبر است، روابط  $x^{\checkmark} = x * x$  و  $x^{\checkmark} = x^{\checkmark} * x$  برای هر  $n \geq 3$  و  $x^n = x^{n-1} * x$  را تعریف می‌کنیم. در مثال زیر سه  $Q$ -جبر متمایز را معرفی می‌کنیم به نحوی که مفهوم توان را در هر سه  $Q$ -جبر مقایسه کنیم و از این مثال در مفاهیم بعدی استفاده می‌کنیم.

**مثال ۷.۳.**  $Q$ -جبرهای  $X$ ،  $Y$  و  $Z$  را طبق جدول ۷.۳، ۷.۳ و ۷.۳ در نظر بگیرید.

(۱) در  $Q$ -جبر  $(X, *, \circ)$ ، برای هر  $n \in \mathbb{N}$  روابط  $d^{\checkmark n} = d$  و  $d^{\checkmark n} = \circ$  برقرار

است.

*   ◦   a   b   c   d	*   ◦   a   b   c	*   ◦   a   b
◦   ◦   ◦   ◦   ◦   d	◦   ◦   ◦   ◦   ◦	◦   ◦   b   a
a   a   ◦   ◦   a   d	a   a   ◦   ◦   ◦	a   a   ◦   b
b   b   b   ◦   ◦   d	b   b   ◦   ◦   ◦	b   b   a   ◦
c   c   ◦   c   ◦   d	c   c   c   c   ◦	(Z, *, ◦)
d   d   d   d   d   ◦	(Y, *, ◦)	(X, *, ◦)

(۲) در Q-جبر (Y, \*, ◦)، برای هر  $n \in \mathbb{N}$  و  $2 \leq n$  رابطه  $a^n = \circ$  برقرار است.

(۳) در Q-جبر (Z, \*, ◦)، برای هر  $n \in \mathbb{N}$  رابطه

$$a^n = \begin{cases} b & n \equiv 0 \pmod{3} \\ a & n \equiv 1 \pmod{3} \\ \circ & n \equiv 2 \pmod{3} \end{cases}$$

برقرار است.

لم ۸.۳. فرض کنید  $P = \{(x, \mu_P(x), \nu_P(x)) \mid x \in X\}$  Q-زیرمجموعه فازی فیثاغورسی از X و  $n \geq 2$  باشد. آنگاه برای هر  $x \in X$  روابط  $\mu^2(x^n) \geq \mu^2(x)$  و  $\nu^2(x^n) \leq \nu^2(x)$  برقرار است.

اثبات. چون  $P, Q$ -زیرجبر فازی فیثاغورسی از X است، لذا

$$\mu^2(x^2) \geq \mu^2(x) \wedge \mu^2(x) = \mu^2(x).$$

حال، بنا بر استقراء اگر فرض کنیم  $\mu^2(x^{n-1}) \geq \mu^2(x)$ ، بنابراین  
 برای  $\mu^2(x^n) = \mu^2(x^{n-1} * x) \geq \mu^2(x^{n-1}) \wedge \mu^2(x) = \mu^2(x)$  به صورت مشابه، برای هر  $n \geq 2$ ،  $\nu^2(x^n) \leq \nu^2(x)$  برقرار است. □

مثال ۹.۳. Q-جبر (Y, \*, ◦)، در جدول ۷.۳ را در نظر بگیرید. به سادگی می توان دید که  $a * c \neq c * a$  لذا  $CQ, X$  جبر نیست و  $b * (b * b) = b \neq \circ = (b * b) * b$  نتیجه می دهد که  $AQ, X$  جبر نیست.

لم ۱۰.۳. فرض کنید (X, \*, ◦)، Q-جبر و  $n, m \in \mathbb{N}$  باشند. آنگاه

(۱)  $(X, *, \circ)$ ،  $AQ$ -جبر است اگر و تنها اگر  $CQ$ -جبر باشد.

(۲) اگر  $X$ ،  $AQ$ -جبر باشد، آنگاه برای هر  $x, y \in X$  رابطه  $(x * y)^n = x^n * y^n$  برقرار است.

(۳) اگر  $X$ ،  $AQ$ -جبر باشد، آنگاه برای هر  $x \in X$ ،  
 $(x^n)^m = x^{nm}$ .

اثبات. (۱) فرض کنید  $x, y, z \in X$  باشد. چون  $X$ ،  $CQ$ -جبر است، لذا

$$(x * y) * z = (x * z) * y = (z * x) * y = (z * y) * x = x * (y * z)$$

و بنابراین  $X$ ،  $AQ$ -جبر است.

برعکس، فرض کنید  $X$ ،  $AQ$ -جبر باشد. آنگاه برای هر  $x \in X$  رابطه

$$\circ * x = (x * x) * x = x * (x * x) = x * \circ = x$$

برقرار است. بنابراین برای هر  $x, y \in X$ ،

$$\begin{aligned} x * y &= \circ * (x * y) = (y * y) * (x * y) = ((y * y) * x) * y \\ &= ((y * x) * y) * y = (y * x) * (y * y) = (y * x) * \circ = y * x \end{aligned}$$

و بنابراین  $X$ ،  $CQ$ -جبر است.

(۲) فرض کنید  $x, y \in X$  باشند. چون  $X$ ،  $AQ$ -جبر است،

لذا

$$\begin{aligned} (x * y)^{\vee} &= (x * y) * (x * y) = (x * (x * y)) * y \\ &= ((x * x) * y) * y = (x^{\vee} * y) * y = x^{\vee} * (y * y) = x^{\vee} * y^{\vee}. \end{aligned}$$

اکنون، بنابر استقرا فرض کنید  $x^{n-1} * y^{n-1} = (x * y)^{n-1}$ . بنابراین

$$\begin{aligned} (x * y)^n &= (x * y)^{n-1} * (x * y) \\ &= (x^{n-1} * y^{n-1}) * (x * y) = ((x^{n-1} * y^{n-1}) * y) * x \\ &= (x^{n-1} * (y^{n-1} * y)) * x = (x^{n-1} * y^n) * x \\ &= (x^{n-1} * x) * y^n = x^n * y^n. \end{aligned}$$

(۳) فرض کنید  $x \in X$  باشد. به وضوح  $x^n = x^{n-1} = (x^n)^1$ . اکنون بنا بر استقرا روی  $m$  و برای  $m = k \geq 2$  فرض کنید  $x^{nk} = (x^n)^k$ . آنگاه بنا بر شرکت پذیری و فرض استقرا،

$$(x^n)^{k+1} = (x^n)^k * (x^n) = x^{nk} * x^n = x^{nk+n} = x^{n(k+1)}$$

□

**تعریف ۱۱.۳.** فرض کنید  $P = \{(x, \mu_P(x), \nu_P(x)) \mid x \in X\}$  زیرمجموعه فازی فیثاغورسی از  $X$  باشد. آنگاه  $\sqrt{P} = (\mu_{\sqrt{P}}, \nu_{\sqrt{P}})$  را به عنوان رادیکال پوچ فازی فیثاغورسی از  $P$  و به صورت  $\mu_{\sqrt{P}}(x) = \bigwedge_{n \geq 1} \mu_P(x^n)$  و  $\nu_{\sqrt{P}}(x) = \bigvee_{n \geq 1} \nu_P(x^n)$  تعریف می‌کنیم.

**مثال ۱۲.۳.**  $Q$ -جبر  $(Z, *)$ ، از مثال ۷.۳ و جدول ۷.۳ را در نظر بگیرید. آنگاه زیرمجموعه فازی فیثاغورسی  $P = (\mu_P, \nu_P)$  از جدول‌های ۱۲.۳ و ۱۲.۳،  $Q$ -زیرجبر فازی فیثاغورسی از  $X$  است.

	o	a	b
$\nu_P$	o۲	o۳	o۶

زیرمجموعه فازی  $\nu_P$

	o	a	b
$\mu_P$	o۸	o۳	o۴

زیرمجموعه فازی  $\mu_P$

اکنون با استفاده از تعریف،

$$\mu_{\sqrt{P}}(o) = \bigwedge_{n \geq 1} \mu_P(o^n) = \mu_P(o) = o۸,$$

$$\mu_{\sqrt{P}}(a) = \bigwedge_{n \geq 1} \mu_P(a^n) = \mu_P(o) \wedge \mu_P(a) \wedge \mu_P(b) = o۳,$$

$$\mu_{\sqrt{P}}(b) = \bigwedge_{n \geq 1} \mu_P(b^n) = \mu_P(o) \wedge \mu_P(a) \wedge \mu_P(b) = o۳,$$

$$\nu_{\sqrt{P}}(o) = \bigvee_{n \geq 1} \nu_P(o^n) = \nu_P(o) = o۲,$$

$$\nu_{\sqrt{P}}(a) = \bigvee_{n \geq 1} \nu_P(a^n) = \nu_P(o) \vee \nu_P(a) \vee \nu_P(b) = o۳,$$

$$\nu_{\sqrt{P}}(b) = \bigvee_{n \geq 1} \nu_P(b^n) = \nu_P(o) \vee \nu_P(a) \vee \nu_P(b) = o۳.$$

بنابراین،  $\sqrt{P} = \{(o, o۸, o۲), (a, o۳, o۳), (b, o۳, o۳)\}$

قضیه ۱۳.۳. فرض کنید  $(X, *, \circ)$ ،  $CQ$ -جبر و  $P = (\mu_P, \nu_P)$ ،  $Q$ -زیرجبر فازی فیثاغورسی از  $X$  باشد. آنگاه  $\sqrt{P}$ ،  $Q$ -زیرجبر فازی فیثاغورسی از  $X$  است.

اثبات. چون  $P = \{(x, \mu_P(x), \nu_P(x)) \mid x \in X\}$  زیرمجموعه فازی فیثاغورسی از  $X$  است، برای هر  $x \in X$ ،  $\circ \leq \mu_P(x^n) + \nu_P(x^n) \leq 1$ ، پس

$$\mu_{\sqrt{P}}(x) + \nu_{\sqrt{P}}(x) = \bigwedge_{n \geq 1} \mu_P(x^n) + \bigvee_{n \geq 1} \nu_P(x^n) \leq 1$$

و لذا  $\sqrt{P}$  زیرمجموعه ی فازی فیثاغورسی از  $X$  است. اکنون برای هر  $x, y \in X$ ،

$$\begin{aligned} \mu_{\sqrt{P}}(x * y) &= \bigwedge_{n \geq 1} \mu_P((x * y)^n) = \bigwedge_{n \geq 1} \mu_P(x^n * y^n) \\ &\geq \bigwedge_{n \geq 1} (\mu_P(x^n) \wedge \mu_P(y^n)) \geq \bigwedge_{n \geq 1} \mu_P(x^n) \wedge \bigwedge_{n \geq 1} \mu_P(y^n) \\ &= \mu_{\sqrt{P}}(x) \wedge \mu_{\sqrt{P}}(y). \end{aligned}$$

همچنین،

$$\begin{aligned} \nu_{\sqrt{P}}(x * y) &= \bigvee_{n \geq 1} \nu_P((x * y)^n) = \bigvee_{n \geq 1} \nu_P(x^n * y^n) \\ &\leq \bigvee_{n \geq 1} (\nu_P(x^n) \vee \nu_P(y^n)) \leq \bigvee_{n \geq 1} \nu_P(x^n) \vee \bigvee_{n \geq 1} \nu_P(y^n) \\ &= \nu_{\sqrt{P}}(x) \vee \nu_{\sqrt{P}}(y). \end{aligned}$$

بنابراین  $\sqrt{P}$ ،  $Q$ -زیرجبر فازی فیثاغورسی است. □

فرض کنید  $P = (\mu_P, \nu_P)$  و  $R = (\mu_R, \nu_R)$  زیرمجموعه‌های فازی فیثاغورسی از  $X$  باشند. یادآوری می‌کنیم که  $P \subseteq R$  اگر و تنها اگر برای هر  $x \in X$ ،  $\mu_P(x) \leq \mu_R(x)$  و  $\nu_P(x) \geq \nu_R(x)$  واضح است که برای هر  $n \leq n'$ ،  $P^{(n',n)} \subseteq P^{(n,n')}$  و برای هر  $m \leq m'$  رابطه  $P^{(m',n)} \subseteq P^{(m,n')}$  برقرار است.

قضیه ۱۴.۳. فرض کنید  $(X, *, \circ)$ ،  $Q$ -جبر و  $P = (\mu_P, \nu_P)$ ،  $R = (\mu_R, \nu_R)$  دو  $Q$ -زیرجبرهای فازی فیثاغورسی از  $X$  باشند. آنگاه

$$\sqrt{P} \subseteq P \quad (1)$$

$$P \subseteq R \text{ اگر آنگاه } \sqrt{P} \subseteq \sqrt{R} \quad (2)$$

(۳) اگر  $(X, *, \circ)$ ،  $CQ$ -جبر باشد، آن‌گاه  $\sqrt{\sqrt{P}} = \sqrt{P}$

(۴) اگر  $(X, *, \circ)$ ،  $CQ$ -جبر باشد، آن‌گاه  $(\sqrt{P})^{(۲,۲)} = P^{(۲,۲)}$  است.

اثبات. (۱) فرض کنید  $x \in X$  باشد. آن‌گاه

$$\mu_{\sqrt{P}}(x) = \bigwedge_{n \geq 1} \mu_P(x^n) = \mu_P(x) \wedge \left( \bigwedge_{n \geq 2} \mu_P(x^n) \right) \leq \mu_P(x)$$

و بنابراین  $\mu_{\sqrt{P}} \subseteq \mu_P$  به علاوه،

$$\nu_{\sqrt{P}}(x) = \bigvee_{n \geq 1} \nu_P(x^n) = \nu_P(x) \vee \left( \bigvee_{n \geq 2} \nu_P(x^n) \right) \geq \nu_P(x)$$

و بنابراین  $\nu_P \subseteq \nu_{\sqrt{P}}$  و در نتیجه  $\sqrt{P} \subseteq P$ .

(۲) فرض کنید  $x \in X$  باشد. آن‌گاه  $\mu_P(x) \leq \mu_R(x)$  و  $\nu_P(x) \geq \nu_R(x)$  و بنابراین

$$\mu_{\sqrt{P}}(x) = \bigwedge_{n \geq 1} \mu_P(x^n) \leq \bigwedge_{n \geq 1} \mu_R(x^n) = \mu_{\sqrt{R}}(x)$$

و  $\nu_{\sqrt{P}}(x) = \bigvee_{n \geq 1} \nu_P(x^n) \geq \bigvee_{n \geq 1} \nu_R(x^n) = \nu_{\sqrt{R}}(x)$  و لذا  $\sqrt{P} \subseteq \sqrt{R}$

(۳) فرض کنید  $x \in X$  باشد. آن‌گاه بنابر لم ۱۰.۳،

$$\begin{aligned} \mu_{\sqrt{\sqrt{P}}}(x) &= \bigwedge_{n \geq 1} \mu_{\sqrt{P}}(x^n) = \bigwedge_{n \geq 1} \bigwedge_{m \geq 1} \mu_P((x^n)^m) \\ &= \bigwedge_{n \geq 1} \bigwedge_{m \geq 1} \mu_P(x^{mn}) = \bigwedge_{k \geq 1} \mu_P(x^k) \\ &= \mu_{\sqrt{P}}(x). \end{aligned}$$

به صورت مشابه،  $\nu_{\sqrt{\sqrt{P}}}(x) = \nu_{\sqrt{P}}(x)$  و بنابراین  $\sqrt{\sqrt{P}} = \sqrt{P}$ .

(۴) فرض کنید  $x \in X$  باشد. آن‌گاه

$$(\mu_{\sqrt{P}}^{\vee})(x) = \bigwedge_{n \geq 1} \mu_P^{\vee}(x^n) = \mu_P^{\vee}(x) \wedge \mu_P^{\vee}(\circ) = \mu_P^{\vee}(x),$$

$$(\nu_{\sqrt{P}}^{\vee})(x) = \bigvee_{n \geq 1} \nu_P^{\vee}(x^n) = \nu_P^{\vee}(x) \vee \nu_P^{\vee}(\circ) = \nu_P^{\vee}(x).$$

بنابراین  $\sqrt{P}^{(۲,۲)} = \{(x, \mu_P^{\vee}(x), \nu_P^{\vee}(x)) \mid x \in X\}$

□

تعریف ۱۵.۳. فرض کنید  $P = (\mu_P, \nu_P)$  و  $R = (\mu_R, \nu_R)$  دو زیرمجموعه فازی فیثاغورسی از  $X$  باشند. آنگاه عمل ترکیب

$$P \circ R = \{(x, (\mu_{P \circ R})(x), (\nu_{P \circ R})(x)) \mid x \in X\}$$

را به صورت

$$(\mu_{P \circ R})(x) = \bigvee_{a*b=x} (\mu_P(a) \wedge \mu_R(b)), \quad (\nu_{P \circ R})(x) = \bigwedge_{a*b=x} (\nu_P(a) \vee \nu_R(b))$$

تعریف می‌کنیم.

قضیه ۱۶.۳. فرض کنید  $P = \{(x, \mu_P(x), \nu_P(x)) \mid x \in X\}$  زیرمجموعه فازی فیثاغورسی از  $X$  باشد. آنگاه شرایط زیر معادل هستند:

$$(1) \quad P, Q \text{-زیرجبر فازی فیثاغورسی از } X \text{ است.}$$

$$(2) \quad (P \circ P)^{(\tau, \tau)} \subseteq P^{(\tau, \tau)}.$$

اثبات. فرض کنید  $x, y \in X$  باشد. آنگاه  $c, d, c', d' \in X$  وجود دارند به طوری که

$$\begin{aligned} \mu_{P \circ P}^{\tau}(x) + \nu_{P \circ P}^{\tau}(x) &= \left( \bigvee_{a*b=x} (\mu_P(a) \wedge \mu_P(b)) \right)^{\tau} + \left( \bigwedge_{a*b=x} (\nu_P(a) \vee \nu_P(b)) \right)^{\tau} \\ &= \left( \bigvee_{a*b=x} (\mu_P^{\tau}(a) \wedge \mu_P^{\tau}(b)) \right) + \left( \bigwedge_{a*b=x} (\nu_P^{\tau}(a) \vee \nu_P^{\tau}(b)) \right) \\ &= (\mu_P^{\tau}(c) \wedge \mu_P^{\tau}(d)) + (\nu_P^{\tau}(c') \vee \nu_P^{\tau}(d')) \leq 1. \end{aligned}$$

در نتیجه  $P \circ P$  زیرمجموعه ی فازی فیثاغورسی از  $X$  است و بنابراین  $(P \circ P)^{(\tau, \tau)}$  زیرمجموعه ی فازی فیثاغورسی از  $X$  است. چون  $P, Q$ -زیرجبر فازی فیثاغورسی از  $X$  است، آنگاه

$$\begin{aligned} \mu_{P \circ P}^{\tau}(x) &= \left( \bigvee_{a*b=x} (\mu_P(a) \wedge \mu_P(b)) \right)^{\tau} = \bigvee_{a*b=x} (\mu_P^{\tau}(a) \wedge \mu_P^{\tau}(b)) \\ &\leq \bigvee_{a*b=x} \mu_P^{\tau}(a * b) = \mu_P^{\tau}(x), \\ \nu_{P \circ P}^{\tau}(x) &= \left( \bigwedge_{a*b=x} (\nu_P(a) \vee \nu_P(b)) \right)^{\tau} = \bigwedge_{a*b=x} (\nu_P^{\tau}(a) \vee \nu_P^{\tau}(b)) \\ &\geq \bigwedge_{a*b=x} \nu_P^{\tau}(a * b) = \nu_P^{\tau}(x). \end{aligned}$$

$$\text{بنابراین } (P \circ P)^{(2,2)} \subseteq P^{(2,2)}$$

برعکس، فرض کنید  $(P \circ P)^{(2,2)} \subseteq P^{(2,2)}$  باشد. بنابراین برای  $x = a$  و  $y = b$  روابط زیر را داریم:

$$\begin{aligned} \mu_{P \circ P}^{\checkmark}(x * y) &= \left( \bigvee_{a*b=x*y} (\mu_P(a) \wedge \mu_P(b)) \right)^{\checkmark} = \bigvee_{a*b=x*y} (\mu_P^{\checkmark}(a) \wedge \mu_P^{\checkmark}(b)) \\ &\geq \mu_P^{\checkmark}(x) \wedge \mu_P^{\checkmark}(y) \geq \mu_{P \circ P}^{\checkmark}(x) \wedge \mu_{P \circ P}^{\checkmark}(y), \\ \nu_{P \circ P}^{\checkmark}(x * y) &= \left( \bigwedge_{a*b=x*y} (\nu_P(a) \vee \nu_P(b)) \right)^{\checkmark} = \bigwedge_{a*b=x*y} (\nu_P^{\checkmark}(a) \vee \nu_P^{\checkmark}(b)) \\ &\leq \nu_P^{\checkmark}(x) \vee \nu_P^{\checkmark}(y) \leq \nu_{P \circ P}^{\checkmark}(x) \vee \nu_{P \circ P}^{\checkmark}(y). \end{aligned}$$

□ در نتیجه  $(P \circ P)^{(2,2)}$ ، Q-زیرجبر فازی فیثاغورسی از  $X$  است.

**قضیه ۱۷.۳.** فرض کنید  $P = (\mu_P, \nu_P)$  و  $R = (\mu_R, \nu_R)$  دو Q-زیرجبرهای فازی فیثاغورسی از  $X$  باشند. اگر  $CQ$ -جبر باشد، آنگاه شرایط زیر معادلند:

$$(1) \quad (P \circ R)^{(2,2)}, Q\text{-زیرجبر فازی فیثاغورسی از } X \text{ است.}$$

$$(2) \quad (P \circ R)^{(2,2)} = (R \circ P)^{(2,2)}$$

**اثبات.** فرض کنید  $x, y \in X$  و  $(P \circ R)^{(2,2)} = (R \circ P)^{(2,2)}$  باشند. آنگاه

$$\begin{aligned} (\mu_P^{\checkmark} \circ \mu_R^{\checkmark}) \circ (\mu_P^{\checkmark} \circ \mu_R^{\checkmark}) &= \mu_P^{\checkmark} \circ (\mu_R^{\checkmark} \circ \mu_P^{\checkmark}) \circ \mu_R^{\checkmark} \\ &= \mu_P^{\checkmark} \circ (\mu_P^{\checkmark} \circ \mu_R^{\checkmark}) \circ \mu_R^{\checkmark} \\ &= (\mu_P^{\checkmark} \circ \mu_P^{\checkmark}) \circ (\mu_R^{\checkmark} \circ \mu_R^{\checkmark}) \subseteq \mu_P^{\checkmark} \circ \mu_R^{\checkmark} \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned} (\nu_P^{\checkmark} \circ \nu_R^{\checkmark}) \circ (\nu_P^{\checkmark} \circ \nu_R^{\checkmark}) &= \nu_P^{\checkmark} \circ (\nu_R^{\checkmark} \circ \nu_P^{\checkmark}) \circ \nu_R^{\checkmark} \\ &= \nu_P^{\checkmark} \circ (\nu_P^{\checkmark} \circ \nu_R^{\checkmark}) \circ \nu_R^{\checkmark} \\ &= (\nu_P^{\checkmark} \circ \nu_P^{\checkmark}) \circ (\nu_R^{\checkmark} \circ \nu_R^{\checkmark}) \supseteq \nu_P^{\checkmark} \circ \nu_R^{\checkmark}. \end{aligned}$$

بنابراین  $(P \circ R)^{(2,2)}$ ، **قضیه ۱۶.۳**، و بنابر قضیه **۱۶.۳**،  $((P \circ R) \circ (P \circ R))^{(2,2)} \subseteq (P \circ R)^{(2,2)}$

Q-زیرجبر فازی فیثاغورسی از  $X$  است.

برعکس، فرض کنید  $(P \circ R)^{(\nu, \nu)}$ ،  $Q$ -زیرجبر فازی فیثاغورسی از  $X$  باشد. آنگاه بنابر خاصیت شرکت‌پذیری داریم

$$\begin{aligned} (\mu_{P \circ R}^{\nu})(x) &= \bigvee_{a * b = x} \mu_P^{\nu}(a) \wedge \mu_R^{\nu}(b) \\ &= \bigvee_{b * a = x} \mu_P^{\nu}(b) \wedge \mu_R^{\nu}(a) = (\mu_{R \circ P}^{\nu})(x). \end{aligned}$$

به صورت مشابه،  $(\nu_{P \circ R}^{\nu})(x) = (\nu_{R \circ P}^{\nu})(x)$ . در نتیجه،

$$(P \circ R)^{(\nu, \nu)} = (R \circ P)^{(\nu, \nu)}.$$

□

**قضیه ۱۸.۳.** فرض کنید  $P = (\mu_P, \nu_P)$  و  $R = (\mu_R, \nu_R)$  دو  $Q$ -زیرجبرهای فازی فیثاغورسی از  $X$  باشند. اگر  $P \subseteq R$  و  $\nu_P(\circ) = \nu_P^{\nu}(\circ)$ ، آنگاه  $P \circ R \subseteq P^{(\nu, \nu)}$ .

**اثبات.** فرض کنید  $x, y \in X$  باشند. چون  $x * \circ = x$

$$\begin{aligned} (\mu_{P \circ R})(x) &= \bigvee_{a * b = x} (\mu_P(a) \wedge \mu_R(b)) \\ &\geq \mu_P(x) \wedge \mu_R(\circ) \geq \mu_P^{\nu}(x) \wedge \mu_R^{\nu}(x) = \mu_P^{\nu}(x), \\ (\nu_{P \circ R})(x) &= \bigwedge_{a * b = x} (\nu_P(a) \vee \nu_R(b)) \leq \nu_P(x) \vee \nu_R(\circ) \\ &\leq \nu_P(x) \vee \nu_P(\circ) = \nu_P(x) \vee \nu_P^{\nu}(\circ) \leq \nu_P(x) \vee \nu_P^{\nu}(x) = \nu_P(x). \end{aligned}$$

□ لذا نتیجه می‌گیریم که  $\mu_P^{\nu} \subseteq \mu_{P \circ R}$  و  $\nu_{P \circ R} \subseteq \nu_P$  و بنابراین  $P \circ R \subseteq P^{(\nu, \nu)}$ .

فرض کنید  $P = \{(x, \mu_P(x), \nu_P(x)) \mid x \in X\}$ ،  $Q$ -زیرجبر فازی فیثاغورسی از  $X$  باشد. می‌گوییم  $P$ ،  $Q$ -زیرجبر فازی فیثاغورسی دوطرفه است اگر  $\mu_P$  و  $\nu_P$  به ترتیب  $Q$ -زیرجبر فازی و  $Q$ -جبر پاد فازی باشند.

**مثال ۱۹.۳.** فرض کنید  $A$ ،  $Q$ -زیرجبر فازی از  $X$  باشد. آنگاه بنابر قضیه ۴.۳،  $\{Rad(A) = \{(x, \sqrt{\mu(x)}, \sqrt{\mu^c(x)})\}$ ،  $Q$ -زیرجبر فازی فیثاغورسی دوطرفه از  $X$  است.

**نتیجه ۲۰.۳.** فرض کنید  $P = (\mu_P, \nu_P)$  و  $R = (\mu_R, \nu_R)$  دو  $Q$ -زیرجبرهای فازی فیثاغورسی از  $X$  باشند.

$$(1) \text{ اگر } \nu_P(o) = \nu_P^*(o), \text{ آن‌گاه } P \circ P \subseteq P^{(2,1)}$$

(۲) اگر  $P, Q$ -زیرجبر فازی فیثاغورسی دوطرفه از  $X$  باشد، آن‌گاه  $P \subseteq P \circ P$

(۳) اگر  $P \subseteq R$  و هر دو  $Q$ -زیرجبر فازی دوطرفه از  $X$  باشند، آن‌گاه  $P \subseteq P \circ R$

نتیجه ۲۱.۳. فرض کنید  $A, Q$ -زیرجبر فازی از  $X$  باشد. آن‌گاه

$$Rad(A) \circ Rad(A) \supseteq Rad(A).$$

فرض کنید  $P = (\mu_P, \nu_P)$  و  $R = (\mu_R, \nu_R)$  زیرمجموعه فازی فیثاغورسی از  $X$  باشند. یادآوری می‌کنیم که

$$P \cap R = \{(x, (\mu_P \cap \mu_R)(x), (\nu_P \cup \nu_R)(x) \mid x \in X\},$$

$$P \cup R = \{(x, (\mu_P \cup \mu_R)(x), (\nu_P \cap \nu_R)(x) \mid x \in X\},$$

$$(\mu_P \cap \mu_R)(x) = \mu_P(x) \wedge \mu_R(x), (\nu_P \cup \nu_R)(x) = \nu_P(x) \vee \nu_R(x).$$

بنابراین قضایای زیر را داریم.

قضیه ۲۲.۳. فرض کنید که  $P = (\mu_P, \nu_P)$  و  $R = (\mu_R, \nu_R)$  دو  $Q$ -زیرجبر فازی فیثاغورسی از  $X$  باشند. آن‌گاه

$$(1) P \cap R, Q\text{-زیرجبر فازی فیثاغورسی از } X \text{ است.}$$

$$(2) P \cup R, Q\text{-زیرجبر فازی فیثاغورسی از } X \text{ است.}$$

$$(3) \sqrt{P \cap R} = \sqrt{P} \cap \sqrt{R}$$

$$(4) \text{ اگر } P \subseteq R, \text{ آن‌گاه } \sqrt{P^{(2,2)}} \subseteq \sqrt{(P \circ R)^{(2,2)}}$$

اثبات. (۱)، (۲) ساده هستند.

(۳) فرض کنید  $x, y \in X$  باشند. بنابر قضیه ۱۴.۳،  $\sqrt{P \cap R} \subseteq \sqrt{P} \cap \sqrt{R}$ . آن‌گاه

$$(\mu_{\sqrt{P} \cap \mu_{\sqrt{R}}})(x) = \mu_{\sqrt{P}}(x) \wedge \mu_{\sqrt{R}}(x) = \bigwedge_{n \geq 1} \mu_P(x^n) \wedge \bigwedge_{n \geq 1} \mu_R(x^n)$$

$$= \bigwedge_{n \geq 1} (\mu_R(x^n) \wedge \mu_P(x^n)) = \bigwedge_{n \geq 1} (\mu_R \cap \mu_P)(x^n)$$

$$= \bigwedge_{n \geq 1} \mu_{(P \cap R)}(x^n) = (\mu_{\sqrt{R \cap P}})(x)$$

$$\text{و به‌طور مشابه، } (\nu_{\sqrt{P} \cup \nu_{\sqrt{R}}})(x) = (\nu_{\sqrt{R \cup P}})(x)$$

(۴) فرض کنید  $x \in X$  باشد. آنگاه

$$\begin{aligned}\mu_{\sqrt{P \circ R}}^{\checkmark}(x) &= \bigwedge_{n \geq 1} \mu_{P \circ R}^{\checkmark}(x^n) = \bigwedge_{n \geq 1} \bigvee_{a * b = x^n} (\mu_R^{\checkmark}(a) \wedge \mu_P^{\checkmark}(b)) \\ &\geq \bigwedge_{n \geq 1} (\mu_R^{\checkmark}(x^n) \wedge \mu_P^{\checkmark}(o)) \geq \bigwedge_{n \geq 1} (\mu_R^{\checkmark}(x^n) \wedge \mu_P^{\checkmark}(x^n)) \\ &= \left( \bigwedge_{n \geq 1} (\mu_R^{\checkmark}(x^n)) \right) \wedge \left( \bigwedge_{n \geq 1} \mu_P^{\checkmark}(x^n) \right) \\ &= \mu_{\sqrt{P}}^{\checkmark}(x) \wedge \mu_{\sqrt{R}}^{\checkmark}(x) = (\mu_{\sqrt{P}}^{\checkmark} \cap \mu_{\sqrt{R}}^{\checkmark})(x).\end{aligned}$$

بنابراین  $\mu_{\sqrt{P \circ R}}^{\checkmark} \subseteq \mu_{\sqrt{P}}^{\checkmark} \cap \mu_{\sqrt{R}}^{\checkmark}$ . از طرفی دیگر،

$$\begin{aligned}\nu_{\sqrt{P \circ R}}^{\checkmark}(x) &= \bigvee_{n \geq 1} \nu_{P \circ R}^{\checkmark}(x^n) = \bigvee_{n \geq 1} \bigwedge_{a * b = x^n} (\nu_R^{\checkmark}(a) \vee \nu_P^{\checkmark}(b)) \\ &\leq \bigvee_{n \geq 1} (\nu_R^{\checkmark}(x^n) \vee \nu_P^{\checkmark}(o)) \leq \bigvee_{n \geq 1} (\nu_R^{\checkmark}(x^n) \vee \nu_P^{\checkmark}(x^n)) \\ &= \left( \bigvee_{n \geq 1} (\nu_R^{\checkmark}(x^n)) \right) \vee \left( \bigvee_{n \geq 1} \nu_P^{\checkmark}(x^n) \right) \\ &= \nu_{\sqrt{P}}^{\checkmark}(x) \vee \nu_{\sqrt{R}}^{\checkmark}(x) = (\nu_{\sqrt{P}}^{\checkmark} \cup \nu_{\sqrt{R}}^{\checkmark})(x).\end{aligned}$$

بنابراین  $\nu_{\sqrt{P \circ R}}^{\checkmark} \subseteq (\nu_{\sqrt{P}}^{\checkmark} \cup \nu_{\sqrt{R}}^{\checkmark})$ . چون  $P \subseteq R$ ، لذا  $\nu_R \subseteq \nu_P$  و  $\mu_P \subseteq \mu_R$ ،

$$\mu_{\sqrt{P}}^{\checkmark} \cap \mu_{\sqrt{R}}^{\checkmark} = \mu_{\sqrt{P}}^{\checkmark}, \quad \nu_{\sqrt{P}}^{\checkmark} \cup \nu_{\sqrt{R}}^{\checkmark} = \nu_{\sqrt{P}}^{\checkmark}.$$

□

در نتیجه  $\sqrt{P^{(2,2)}} \subseteq \sqrt{(P \circ R)^{(2,2)}}$

قضیه ۲۳.۳. فرض کنید  $Q, P = \{(x, \mu_P(x), \nu_P(x)) \mid x \in X\}$  - زیر جبر فازی فیثاغورسی از  $X$  باشد. آنگاه  $\sqrt{P^{(2,2)}} = \sqrt{(P \circ P)^{(2,2)}}$ .

اثبات. فرض کنید  $x \in X$  باشد. آنگاه

$$\begin{aligned}\mu_{P \circ P}^{\checkmark}(x) &= \bigvee_{a * b = x} (\mu_P^{\checkmark}(a) \wedge \mu_P^{\checkmark}(b)) \leq \mu_P^{\checkmark}(a * b) = \mu_P^{\checkmark}(x), \\ \nu_{P \circ P}^{\checkmark}(x) &= \bigwedge_{a * b = x} (\nu_P^{\checkmark}(a) \vee \nu_P^{\checkmark}(b)) \geq \nu_P^{\checkmark}(a * b) = \nu_P^{\checkmark}(x).\end{aligned}$$

بنابراین  $\nu_P \subseteq \nu_{P \circ P}$  و  $\mu_{P \circ P} \subseteq \mu_P$  در نتیجه  $P^{(2,2)} \subseteq P^{(2,2)}$ . لذا بنابر قضیه ۲۲.۳،  $\sqrt{P^{(2,2)}} = \sqrt{(P \circ P)^{(2,2)}}$  و به رابطه  $\sqrt{P^{(2,2)}} \subseteq \sqrt{(P \circ P)^{(2,2)}}$  می‌رسیم.

□

#### ۴. توسیع Q-زیرجبرهای فازی فیثاغورسی به کمک همریختی

در این بخش با توجه به مفهوم همریختی بین دو Q-جبر دلخواه به معرفی تصویر Q-زیرجبر فازی فیثاغورسی می‌پردازیم. با توجه به مفاهیم تصویر Q-زیرجبر فازی فیثاغورسی و تصویر وارون Q-زیرجبر فازی فیثاغورسی به رابطه تصویر وارون رادیکال پوچ Q-زیرجبر فازی فیثاغورسی و رادیکال پوچ تصویر وارون Q-زیرجبر فازی فیثاغورسی می‌پردازیم. در پایان نشان می‌دهیم که رادیکال پوچ تصویر Q-زیرجبر فازی فیثاغورسی با تصویر رادیکال پوچ Q-جبر فازی فیثاغورسی سان است.

فرض کنید  $(X, *, \circ)$  و  $(X', *', \circ')$  دو Q-جبر باشند و  $f: X \rightarrow X'$  نگاشت باشد. اگر برای هر  $x, y \in X$ ،  $f(x * y) = f(x) *' f(y)$ ، آنگاه  $f$  را همریختی می‌نامیم. اگر نگاشت  $f$  یک به یک (پوشا) باشد، آن را تکریختی (بروریختی) می‌نامیم. یادآوری می‌کنیم که اگر  $A = \{(x, \mu(x)) \mid x \in X\}$  و  $B = \{(x, \nu(x)) \mid x \in X'\}$  دو زیرمجموعه فازی به ترتیب از  $X$  و  $Y$  باشند، آنگاه

$$(\mu_f)(y) = f(\mu)(y) = \begin{cases} \bigvee_{y=f(x)} \mu(x) & f^{-1}(y) \neq \emptyset \\ \circ & f^{-1}(y) = \emptyset \end{cases}$$

و  $(\nu_{f^{-1}})(x) = f^{-1}(\nu)(x) = \nu(f(x))$

قضیه ۱۰۴. فرض کنید  $R = (\mu_R, \nu_R)$ ، Q-زیرجبر فازی فیثاغورسی  $X'$  باشد. اگر  $f: X \rightarrow X'$  همریختی باشد، آنگاه

$$(1) \quad f^{-1}(R), Q\text{-زیرجبر فازی فیثاغورسی از } X \text{ است.}$$

$$(2) \quad \sqrt{f^{-1}(R)} = f^{-1}(\sqrt{R})$$

$$(3) \quad \sqrt{f^{-1}(R)} \subseteq f^{-1}(R)$$

اثبات. (۱) فرض کنید  $x \in X$  باشد. آنگاه

$$(f^{-1}(\mu_R(x)))^2 + (f^{-1}(\nu_R(x)))^2 = \mu_R^2(f(x)) + \nu_R^2(f(x)) \leq 1$$

و بنابراین  $f^{-1}(R) = \{(x, f^{-1}(\mu_R), f^{-1}(\nu_R)) \mid x \in X\}$  زیرمجموعه فازی  
 فیثاغورسی از  $X$  است. همچنین

$$\begin{aligned}(\mu_{f^{-1}(R)}(x * y))^{\forall} &= \mu_R^{\forall}(f(x * y)) = \mu_R^{\forall}(f(x) *' f(y)) \\ &\geq \mu_R^{\forall}(f(x)) \wedge \mu_R^{\forall}(f(y)) \\ &= (f^{-1}(\mu_R)(x))^{\forall} \wedge (f^{-1}(\mu_R)(y))^{\forall}, \\ (\nu_{f^{-1}(R)}(x * y))^{\forall} &= \nu_R^{\forall}(f(x * y)) = \nu_R^{\forall}(f(x) *' f(y)) \\ &\leq \nu_R^{\forall}(f(x)) \vee \nu_R^{\forall}(f(y)) \\ &= (f^{-1}(\nu_R)(x))^{\forall} \vee (f^{-1}(\nu_R)(y))^{\forall}.\end{aligned}$$

بنابراین  $f^{-1}(R)$ ،  $Q$ -زیرجبر فازی فیثاغورسی از  $X$  است.

(۲) فرض کنید  $x \in X$  باشد. آنگاه

$$\begin{aligned}(\mu_{\sqrt{f^{-1}(R)}})(x) &= \bigwedge_{n \geq 1} (\mu_{f^{-1}(R)})(x^n) = \bigwedge_{n \geq 1} \mu_R(f(x^n)) = \bigwedge_{n \geq 1} \mu_R(f(x)^n) \\ &= \mu_{\sqrt{R}}(f(x)) = \mu_{f^{-1}(\sqrt{R})}(x), \\ (\nu_{\sqrt{f^{-1}(R)}})(x) &= \bigvee_{n \geq 1} (\nu_{f^{-1}(R)})(x^n) = \bigvee_{n \geq 1} \nu_R(f(x^n)) = \bigvee_{n \geq 1} \nu_R(f(x)^n) \\ &= \nu_{\sqrt{R}}(f(x)) = \nu_{f^{-1}(\sqrt{R})}(x).\end{aligned}$$

بنابراین  $\sqrt{f^{-1}(R)} = f^{-1}(\sqrt{R})$ .

(۳) بنا بر قضیه ۱۴.۳، داریم  $f^{-1}(\sqrt{R}) \subseteq f^{-1}(R)$  و بنا بر بند (۲) به رابطه  $\sqrt{f^{-1}(R)} \subseteq f^{-1}(R)$  می‌رسیم.

□

مثال ۲۰۴.  $Q$ -جبر  $(X, *)$  از مثال ۷.۳ و جدول ۷.۳ را در نظر بگیرید. آنگاه زیرمجموعه فازی  
 فیثاغورسی  $P = (\mu_P, \nu_P)$ ، از جدول‌های ۲.۴ و ۲.۴،  $Q$ -زیرجبر فازی فیثاغورسی از  $X$   
 است.

	o	a	b	c	d
$\nu_P$	o/1	o/2	o/3	o/4	o/5

زیرمجموعه فازی  $\nu_P$

	o	a	b	c	d
$\mu_P$	o/6	o/4	o/3	o/2	o/5

زیرمجموعه فازی  $\mu_P$

اکنون با استفاده از محاسبات مثال ۷.۳، طبق جداول ۴.۴ و ۴.۴،  $\sqrt{P} = P$  به دست می آید. از طرفی تابع  $f : X \rightarrow Y$  با ضابطه  $f = \{(o, o), (a, c), (b, a), (c, b), (d, d)\}$  یک

	o	a	b	c	d
$\nu_{\sqrt{P}}$	o/۱	o/۲	o/۳	o/۴	o/۵

$\nu_{\sqrt{P}}$  زیرمجموعه فازی

	o	a	b	c	d
$\mu_{\sqrt{P}}$	o/۶	o/۴	o/۳	o/۲	o/۵

$\mu_{\sqrt{P}}$  زیرمجموعه فازی

همریختی است. اکنون با توجه به همریختی داریم:

$$\begin{aligned} f^{-1}(\sqrt{P}) &= \\ &= \{(o, o/۶, o/۱), (a, o/۲, o/۴), (b, o/۴, o/۲), (c, o/۳, o/۳), (d, o/۵, o/۵)\} \\ &= \sqrt{f^{-1}(P)}. \end{aligned}$$

**قضیه ۳.۴.** فرض کنید  $P = (\mu_P, \nu_P)$  -Q زیرجبر فازی فیثاغورسی از  $X$  باشد. اگر  $f : X \rightarrow X'$  برو ریختی باشد، آنگاه

$$(1) \quad f(P), -Q \text{ زیرجبر فازی فیثاغورسی از } X' \text{ است.}$$

$$(2) \quad \sqrt{f(\sqrt{P})} \subseteq \sqrt{f(P)}$$

$$(3) \quad \sqrt{f(P)} = f(\sqrt{P})$$

**اثبات.** (۱) فرض کنید  $x', y' \in X'$  باشند. آنگاه  $c, d \in X$  وجود دارند به طوری که

$$\begin{aligned} f^{\vee}(\mu_P)(y) + f^{\vee}(\nu_P)(y) &= \bigvee_{y=f(x)} \mu_P^{\vee}(x) + \bigvee_{y=f(x)} \nu_P^{\vee}(x) \\ &= \mu_P^{\vee}(c) + \mu_P^{\vee}(d) \leq 1 \end{aligned}$$

و بنابراین  $f(P)$ ،  $Q$ -زیرجبر فازی فیثاغورسی از  $X'$  است. چون  $f$  پوشا است لذا  $x, y \in X$  وجود دارند به طوری که  $x' = f(x)$  و  $y' = f(y)$  و بنابراین

$$\begin{aligned} ((\mu_f^\vee)_P)(x' *' y') &= f^\vee(\mu_P)(x' *' y') = \bigvee_{x' *' y' = f(a)} \mu_R^\vee(a) \\ &\geq \bigvee_{f(x*y) = f(a)} \mu_R^\vee(x * y) \\ &\geq \bigvee_{f(x*y) = f(a)} (\mu_R^\vee(x) \wedge \mu_R^\vee(y)) \\ &= (\bigvee_{f(x) = x'} \mu_R^\vee(x)) \wedge (\bigvee_{f(y) = y'} \mu_R^\vee(y)) \\ &= f^\vee(\mu_P)(x') \wedge f^\vee(\mu_P)(y'), \end{aligned}$$

چون  $f$  تابع به است، لذا

$$\begin{aligned} ((\nu_f^\vee)_P)(x' *' y') &= f^\vee(\nu_P)(x' *' y') = \bigvee_{x' *' y' = f(a)} \nu_R^\vee(a) \\ &= \bigvee_{f(x*y) = f(a)} \nu_R^\vee(x * y) \\ &\leq \bigvee_{f(x*y) = f(a)} (\nu_R^\vee(x) \wedge \nu_R^\vee(y)) \\ &= (\bigvee_{f(x) = x'} \nu_R^\vee(x)) \wedge (\bigvee_{f(y) = y'} \nu_R^\vee(y)) \\ &= f^\vee(\nu_P)(x') \wedge f^\vee(\nu_P)(y'). \end{aligned}$$

بنابراین  $f(P)$ ،  $Q$ -زیرجبر فازی فیثاغورسی از  $X'$  است.

(۲) فرض کنید  $y \in X'$  باشد. چون  $f$  تابع پوشا است بنابراین  $f^{-1}(y) \neq \emptyset$ . لذا

$$\begin{aligned}\mu_{f(\sqrt{P})}(y) &= \bigwedge_{n \geq 1} \mu_{f(P)}(y^n) = \bigwedge_{n \geq 1} \bigvee_{f(x)=y^n} \mu_P(x) \\ &\leq \bigvee_{f(x)=y} \mu_P(x) = \mu_{f(P)}(y), \\ \nu_{f(\sqrt{P})}(y) &= \bigvee_{n \geq 1} \nu_{f(P)}(y^n) = \bigvee_{n \geq 1} \bigvee_{f(x)=y^n} \nu_P(x) \\ &\geq \bigvee_{f(x)=y} \nu_P(x) = \nu_{f(P)}(y).\end{aligned}$$

بنابراین  $f(\sqrt{P}) \subseteq f(P)$  و لذا  $\nu_{f(P)}(y) \subseteq \nu_{f(\sqrt{P})}$  و  $\mu_{f(P)} \supseteq \mu_{f(\sqrt{P})}$ .  
(۳) فرض کنید  $y \in X'$  باشد. چون  $f$  تابع پوشا است پس  $f^{-1}(y) \neq \emptyset$  و بنابراین برای هر  $\epsilon > 0$ ,

$$\begin{aligned}\nu_{\sqrt{f(P)}}(y) - \epsilon &\leq (\nu_{f(P)})(y^m) = (\nu_{f(P)})(f(x^m)) = (\nu_{f^{-1}(f(P))})(x^m) \\ &= \nu_P(x^m) \leq (\nu_{\sqrt{P}})(x) \leq \bigvee_{f(z)=x} \nu_{f(\sqrt{P})}(z) \\ &= \nu_{f(\sqrt{P})}(y),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mu_{\sqrt{f(P)}}(y) + \epsilon &\geq (\mu_{f(P)})(y^m) = (\mu_{f(P)})(f(x^m)) = (\mu_{f^{-1}(f(P))})(x^m) \\ &= \mu_P(x^m) \geq (\mu_{\sqrt{P}})(x) \geq \bigwedge_{f(z)=x} \mu_{f(\sqrt{P})}(z) \\ &= \mu_{f(\sqrt{P})}(y)\end{aligned}$$

پس  $(\sqrt{f(P)}) \supseteq f(\sqrt{P})$  و لذا  $\nu_{\sqrt{f(P)}} \subseteq \nu_{f(\sqrt{P})}$ ,  $\mu_{\sqrt{f(P)}} \supseteq \mu_{f(\sqrt{P})}$ .  
از طرفی دیگر،  $f$  پوشا است و بنابر تعریف سوپریم،  $x \in X$  وجود دارد به طوری که

$$\begin{aligned}\nu_{f(\sqrt{P})}(y) - \epsilon &\leq \nu_{\sqrt{P}}(x) = \bigvee_{n \geq 1} \nu_P(x^n), \\ \mu_{f(\sqrt{P})}(y) + \epsilon &\geq \mu_{\sqrt{P}}(x) = \bigwedge_{n \geq 1} \nu_P(x^n)\end{aligned}$$

به علاوه،

$$\mu_{f(\sqrt{P})}(y) = \bigvee_{f(x)=y} \mu_{\sqrt{P}}(x) = \bigvee_{f(x)=y} \bigwedge_{n \geq 1} \mu_P(x^n) = \bigwedge_{n \geq 1} \bigvee_{f(x)=y} \mu_P(x^n),$$

$$\nu_{f(\sqrt{P})}(y) = \bigvee_{f(x)=y} \nu_{\sqrt{P}}(x) = \bigvee_{f(x)=y} \bigvee_{n \geq 1} \nu_P(x^n) = \bigvee_{n \geq 1} \bigvee_{f(x)=y} \nu_P(x^n),$$

بنابراین  $m \in \mathbb{N}$  وجود دارد به طوری که

$$\begin{aligned} (\nu_{f(\sqrt{P})})(y) - \epsilon &\leq \bigvee_{f(z)=y^m} \nu_P(z) = (\mu_{f(P)})(y^m) \\ &\leq \bigvee_{n \geq 1} (\nu_{f(P)})(y^n) = (\nu_{\sqrt{f(P)}})(y), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\mu_{f(\sqrt{P})})(y) + \epsilon &\geq \bigwedge_{f(w)=y^m} \mu_P(w) = (\mu_{f(P)})(y^m) \\ &\geq \bigwedge_{n \geq 1} (\mu_{f(P)})(y^n) = (\mu_{\sqrt{f(P)}})(y). \end{aligned}$$

بنابراین  $\nu_{f(\sqrt{P})} \subseteq \nu_{\sqrt{f(P)}}$  و  $\mu_{f(\sqrt{P})} \supseteq \mu_{\sqrt{f(P)}}$  را بدست می آوریم.

در نتیجه  $f(\sqrt{P}) \supseteq \sqrt{f(P)}$  و بنابراین  $f(\sqrt{P}) = \sqrt{f(P)}$ .

□

مثال ۴.۴.  $Q$ -جبر  $(Y, *)$  از مثال ۷.۳ و جدول ۷.۳ را در نظر بگیرید. آن گاه زیرمجموعه فازی فیثاغورسی  $P = (\mu_P, \nu_P)$ ، از جدول های ۴.۴ و ۴.۴،  $Q$ -زیرجبر فازی فیثاغورسی از  $X$  است.

	o	a	b	c
$\nu_P$	o/1	o/1	o/6	o/3

زیرمجموعه فازی  $\nu_P$

	o	a	b	c
$\mu_P$	o/1	o/3	o/2	o/4

زیرمجموعه فازی  $\mu_P$

اکنون با استفاده از محاسبات مثال ۷.۳، طبق جداول ۴.۴ و ۴.۴،  $\sqrt{P} = (\mu_{\sqrt{P}}, \nu_{\sqrt{P}})$  به دست می آید. از طرفی تابع  $f: X \rightarrow Y$  با ضابطه  $f = \{(o, o), (a, b), (b, a), (c, c)\}$

	o	a	b	c
$\nu_{\sqrt{P}}$	o/1	o/1	o/6	o/3

زیرمجموعه فازی  $\nu_{\sqrt{P}}$

	o	a	b	c
$\mu_{\sqrt{P}}$	o/1	o/3	o/2	o/4

زیرمجموعه فازی  $\mu_{\sqrt{P}}$

یک همریختی است. اکنون با توجه به همریختی داریم:

$$f(\sqrt{P}) = \sqrt{f(P)} = \{(\circ, \circ, \circ, \circ), (a, \circ, \circ, \circ), (b, \circ, \circ, \circ), (c, \circ, \circ, \circ)\}$$

## ۵. نتیجه‌گیری

موضوع مدل‌سازی مسائل واقعی در دنیای حقیقی براساس قواعد ریاضی، یکی از مهمترین کاربردهای ریاضی است که هر روزه در سطح دنیا در حال توسعه است. با توجه به این‌که اکثر مسائل دنیا نادقیق هستند، نظریه زیرمجموعه‌های فازی در این مدل‌سازی اهمیت زیادی دارند. یکی از ایده‌های اصلی مدل‌سازی، ترکیب مباحث و موضوعات مرتبط ریاضی است. با توجه به این‌که جبرهای منطقی مجموعه، مجهز به عمل‌های دوتایی با اصول موضوعه هستند، می‌توانند به هر مجموعه‌ای از عناصر قاعده و قانون خاص و کاربردی بدهند. در این مقاله ما سعی می‌کنیم با توجه به ترکیب جبرهای منطقی و زیرمجموعه‌های فازی، قاعده خاصی از مدل‌سازی ریاضی را طراحی کنیم. در این تحقیق، توانسته‌ایم تعمیم از زیرمجموعه‌های فازی را تحت عنوان زیرمجموعه‌های فازی فیثاغورسی با مجموعه زمینه جبرهای منطقی معرفی و تشریح کنیم. کاربرد و اهمیت زیرمجموعه‌های فازی فیثاغورسی در مدل‌سازی مباحثی با زمینه‌های مرتبه دوم است. در این مقاله با معرفی  $Q$ -زیرجبرهای فازی فیثاغورسی، به توسعه  $Q$ -زیرجبرها پردازیم و برای اخذ نتایج بیشتر در مورد تمام عملیات جبری اجتماع، اشتراک، ترکیب و به‌خصوص رادیکال پوچ  $Q$ -جبرهای فازی فیثاغورسی تحقیق نموده‌ایم. با توجه به اهمیت مفهوم  $Q$ -زیرجبرهای فازی فیثاغورسی نتایج آن در این مقاله، تصمیم داریم تا در کارهای آینده به طرح و حل و فصل مسائل واقعی بر اساس مدل‌سازی روی  $Q$ -زیرجبرهای فازی فیثاغورسی پردازیم. به‌علاوه این موضوع را روی سایر جبرهای منطقی مانند  $EQ$ -جبرها و کاربردهای آن پردازیم.

## مراجع

- [1] H. K. Abdullah, H. K. Jawad, New Types of Ideals in Q-algebra, J. K. U, 16 (3) (2018) 9–21.
- [2] K. T. Atanassov, Intuitionistic fuzzy sets. Fuzzy Sets Syst, 20 (1986) 87–96.
- [3] K. Iséki, On  $BCI$ -algebras, Math. Sem. Notes Kobe Univ. 8 (1980), no. 1, 125–130. MR 81k:06018a. Zbl 0434.03049.
- [4] K. Iséki and S. Tanaka, An introduction to the theory of  $BCK$ -algebras, Math. Japon. 23 (1978), no. 1, 1–26. MR 80a:03081. Zbl 385.03051.
- [5] M. Kavitha, & R. I. Hepzibah, New operations on Pythagorean Neutrosophic Fuzzy Sets, TWMS Journal of Applied and Engineering Mathematics, 15(3) (2025) 560-576.

- [6] J. N. Mordeson, D. S. Malik, *Fuzzy Commutative Algebra*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 1998.
- [7] S. M. Mostafa , M. A. A. Naby, O. R. Elgendy, *Fuzzy  $Q$ -ideals in  $Q$ -algebras*, *World Applied Programming* 2 (2) (2012) 69–80.
- [8] S. M. Mostafa, M. A. A. Elnaby and O. R. Elgendy, *Interval-Valued Fuzzy  $Q$ -Ideals in  $Q$ -Algebras*, *International Journal of Algebra*, 5 (27) (2011) 1337–134.
- [9] J. Negrees, S. S. Ahn, and H. S. Kim, *ON  $Q$ -Algebras*, *IJMMS*, 27 (12) (2001) 749–757.
- [10] M.Rahima, F. Amina, K. Shahb, T. Abdeljawadb, S. Ahmadc, *Some distance measures for pythagorean cubic fuzzy sets: Application selection in optimal treatment for depression and anxiety*, *MethodsX*, 12 (2024) 102678.
- [11] A. B. Saeid, R. Daneshpayeh, S. Jahanpanah, *On L-sub  $Q$ -algebras*. *Soft Computing*, 28 (2024) 12477-12490.
- [12] R. R. Yager, *Pythagorean fuzzy subsets*, In: 2013 Joint IFSA World Congress and NAFIPS Annual Meeting (IFSA/NAFIPS), 2013, 36286152.
- [13] R. R. Yager, *Pythagorean membership grades in multi-criteria decision making*. Technical Report MII-3301. New Rochelle, NY: Machine Intelligence Institute, Iona College; 2013.
- [14] L. A. Zadeh, *Fuzzy sets*, *Information Control*, 8 (3) (1965) 338–353.
- [15] D. Wang, S. Letchmunan, J. Liao, H. Qiu, Z. Liu, *Construction of New Similarity Measures for Complex Pythagorean Fuzzy Sets and Their Applications in Decision-Making Problems*, *Journal of Intelligent Decision Making and Information Science* Volume 2, (2025) 156-176.