

نمودارهای کنترل کیفیت فازی \bar{X} و R

فاطمه قادری، عباس پرچمی*، حمیده ایرانمنش و وحید امیرزاده

گروه آمار، دانشکده ریاضی و کامپیوتر، دانشگاه شهید باهنر کرمان، کرمان، ایران

تاریخ دریافت: ۱۴۰۳/۱۱/۲۶ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۴/۰۳/۱۴

نوع مقاله: علمی-پژوهشی

چکیده. نمودارهای کنترل از ابزارهای کاربردی مهم برای کنترل فرایند آماری محسوب می‌شوند و نقش مهمی در ارتقاء و بهبود کیفیت فرایند دارند. اخیراً طراحی نمودارهای کنترل براساس کیفیت فازی مثلی انعطاف‌پذیر، به جای استفاده از کیفیت فاصله-مقدار پیشنهاد شده است. در این مقاله، جدیدترین رویکردهای پارامتری و ناپارامتری برای طراحی نمودارهای کنترل \bar{X} و R مبتنی بر کیفیت فازی مثلی مرور می‌شوند. تمامی رویکردهای طراحی نمودارهای کنترل \bar{X} و R مبتنی بر کیفیت فازی مثلی هستند و نیازی به مفروضات اولیه در خصوص توزیع مشخصه کیفیت ندارند و به عبارتی تصمیم‌گیری مبتنی بر تابع عضویت کیفیت فازی اتخاذ می‌شود که از انعطاف‌پذیری بیشتری نسبت به کیفیت معمولی/ غیرفازی برخوردار است. به منظور درک بهتر رویکردهای مطرح شده، یک مطالعه موردی مبتنی بر داده‌های واقعی از صنعت خودروسازی آورده شده است. همچنین عملکرد این رویکردها به کمک شبیه‌سازی با یکدیگر مقایسه می‌شوند.

۱. مقدمه

در آغاز معرفی روش‌های آماری جهت بهبود و کنترل کیفیت، بسیاری از متخصصان واحدهای صنعتی بر این باور بودند که برای شناسایی، طبقه‌بندی و رفع اشکالات و نوسانات موجود در فرایندهای تولید به روش‌های آماری نیازی نیست و این کار تنها با بهره‌گیری از روش‌های مهندسی و مدرن کردن دستگاه‌ها امکان‌پذیر است. اما به تدریج با تأثیر مثبت ابزارهای آماری در کاهش ضایعات و بهبود کیفیت، جایگاه این ابزارها در مراحل مختلف چرخه حیات محصول مشخص گردید [۴]. کنترل و بهبود کیفیت مجموعه‌ای از فعالیت‌ها را شامل می‌شوند که از طریق آن‌ها اطمینان حاصل می‌شود که محصولات و خدمات انتظارات مورد نیاز را برآورده و به طور مستمر آن‌ها را بهبود می‌بخشند. کنترل فرایند آماری به عنوان یک تکنیک شناخته شده بین‌المللی برای بهبود کیفیت و بهره‌وری محصولات به طور گسترده در صنایع مختلف به کار گرفته شده است [۱۱]. از دیدگاه آمار، کنترل فرایند آماری استفاده از ابزارهای آماری مناسب برای فرایندها به منظور بهبود مستمر کیفیت محصولات و خدمات و بهره‌وری در نیروی کار است [۱۳]. در کنترل فرایند آماری ممکن است با مفاهیم نادقیق و مبهم مواجه شویم. وضعیتی را در نظر بگیرید که در آن به جای بازه دقیق مشخصات فنی $[LSL, USL]$ ، یک مجموعه فازی تعریف شود. این مجموعه فازی «کیفیت فازی» نامیده می‌شود که در سال ۱۹۹۶ توسط یانگتینگ^۱ [۱۹] با جایگزینی تابع نشانگر $I_{[LSL, USL]}(x)$ با تابع عضویت مجموعه فازی \tilde{Q} برای نخستین بار معرفی شد. در چنین شرایط نادقیقی، محصولات براساس دیدگاه بولی به دو رده واجد شرایط و فاقد شرایط دسته‌بندی نمی‌شوند، بلکه تا درجه‌ای بسته به سطح کیفی آن‌ها واجد شرایط/باکیفیت هستند. به جای اصرار بر مقادیر دقیق (صفر یا یک) برای اندازه‌گیری کیفیت، کیفیت فازی می‌تواند طیف وسیعی از مقادیر ممکن را با درجات عضویت بین صفر و یک دربرگیرد و رویکرد انعطاف‌پذیرتری در مدل‌سازی و مصورسازی کیفیت ارائه دهد. مزایای کیفیت فازی توسط پرچمی و همکاران [۱۷] مورد بحث قرار گرفت. آزمون کارایی فرایندهای تولید براساس کیفیت فازی با استفاده از شاخص یانگتینگ در مرجع [۱۴] مطرح شد. ایرانمنش و همکاران [۱۰] آزمون کارایی براساس حدود مشخصه‌ی فازی را بررسی کردند. پرچمی و همکاران [۱۶] آزمون کارایی براساس شاخص یانگتینگ با استفاده از شبیه‌سازی مونت کارلو و کاربرد آن در صنعت تولید لوله را ارائه کردند. آزمون کارایی فرایند مبتنی بر کیفیت فازی دوزنقه‌ای و کاربرد آن در صنعت خودروسازی توسط ایرانمنش و همکاران [۱] پیشنهاد شد.

^۱Yongting

نمودارهای کنترل از ابزارهای اصلی کنترل فرایند آماری محسوب می‌شوند و نقش مهمی در بهبود کیفیت محصولات دارند. پرچی [۲] نمودارهای کنترل تعداد اقلام معیوب، نسبت اقلام معیوب و تعداد نقص‌ها در واحد بازرسی را مبتنی بر کیفیت فازی تعمیم داد. امیرزاده و همکاران [۶] نمودار p فازی را براساس میانگین درجه عدم انطباق و با فرض اینکه مشخصه کیفیت دارای توزیع نرمال است، پیشنهاد کردند. آنگاه با استفاده از منحنی‌های مشخصه عملکرد و میانگین طول دنباله^۱ (ARL)، نشان دادند که نمودار p فازی پیشنهادی کارآمدتر از نمودار p متداول است. همچنین یک نمودار کنترل چند جمله‌ای فازی برای متغیرهای زبانی در مرجع [۷] طراحی شد. پرچی و همکاران [۱۵] دو رویکرد ناپارامتری مختلف برای طراحی نمودارهای کنترل \bar{X} و R مبتنی بر درجات تعلق مشاهدات به کیفیت فازی مثلی معرفی کردند. از طرفی، قادری و همکاران [۹] دو رویکرد پارامتری برای طراحی این نمودارها مطرح کردند. در این مقاله، رویکردهای پیشنهادی توسط پرچی و همکاران [۱۵] و قادری و همکاران [۹] برای طراحی نمودارهای کنترل \bar{X} و R مبتنی بر کیفیت فازی مثلی تجمع، مرور و مقایسه می‌شوند. مزیت اصلی استفاده از این نمودارها در این مقاله، استواری آن‌ها نسبت به نوع توزیع مشاهدات مشخصه کیفیت است.

ادامه مقاله به شرح ذیل سازماندهی شده است. در بخش دوم، چهار رویکرد پارامتری و ناپارامتری مختلف برای طراحی نمودارهای کنترل میانگین و دامنه مبتنی بر کیفیت فازی مثلی مرور می‌شوند. در بخش سوم با ارائه یک مسئله کاربردی در صنعت خودروسازی، به تشریح این رویکردها پرداخته می‌شود. عملکرد رویکردهای مختلف طراحی نمودارهای کنترل \bar{X} و R مبتنی بر کیفیت فازی مثلی در بخش چهارم مقایسه می‌شوند. در بخش پنجم به بررسی نتایج این مقاله پرداخته می‌شود. همچنین پیشنهادهایی به منظور تحقیقات بیشتر در زمینه نمودارهای کنترل کیفیت فازی در بخش پنجم مطرح می‌گردد.

۲. نمودارهای کنترل \bar{X} و R مبتنی بر کیفیت فازی مثلی

در کیفیت معمولی/غیرفازی محصولات به دو رده باکیفیت و بی‌کیفیت تقسیم‌بندی می‌شوند. اما کیفیت فازی این امکان را فراهم می‌سازد که هر محصول با درجه‌ای بین صفر و یک متعلق به کالاهای باکیفیت باشد. این نگرش می‌تواند منجر به قضاوت موجه و عادلانه در خصوص کیفیت یک محصول شود. با طراحی نمودارهای کنترل مبتنی بر کیفیت فازی، تصمیم‌گیری مبتنی بر تابع عضویت کیفیت فازی مطرح می‌شود که از انعطاف‌پذیری بیشتری نسبت به کیفیت معمولی/غیرفازی برخوردار است.

¹ Average Run Length

در این بخش، پس از ارائه مفاهیم اولیه مورد نیاز، چهار رویکرد پارامتری و ناپارامتری مختلف برای طراحی نمودارهای کنترل میانگین و دامنه مبتنی بر کیفیت فازی مثلثی مرور می‌شود.

فرض کنید \tilde{Q} تابع عضویت کیفیت فازی و $\tilde{Q}(x)$ درجه انطباق با کیفیت استاندارد یا به طور خلاصه درجه کیفیت باشد که در آن x مقدار اندازه‌گیری شده مشخصه کیفیت محصول است. حدود مشخصه‌ی فنی بالا و پایین^۱ که به ترتیب با USL و LSL نشان داده می‌شوند، بیشینه و کمینه حدود قابل پذیرش فرایند را براساس نیازمندی‌ها و استانداردهای مشخصه کیفیت X مشخص می‌کنند. علاوه بر این، یک مقدار هدف^۲ بهینه T بین حدود مشخصه برای تعیین هدف مشخصه کیفیت در فرایند تولید در نظر گرفته می‌شود. حال می‌توان عدد فازی مثلثی \tilde{Q}_Δ را به عنوان کیفیت فازی مثلثی در نظر گرفت بطوریکه آن را به اختصار به صورت $Tr(LSL, T, USL)$ نمایش می‌دهیم و تابع عضویت آن عبارت است از [۹، ۱۵]:

$$(۱.۲) \quad \tilde{Q}_\Delta(x) = \begin{cases} \frac{x-LSL}{T-LSL} & \text{اگر } LSL \leq x < T \\ \frac{USL-x}{USL-T} & \text{اگر } T \leq x < USL \\ 0 & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

که در آن مقدار هدف T به عنوان هسته و بازه حدود مشخصه $[LSL, USL]$ به عنوان تکیه‌گاه کیفیت فازی مثلثی در نظر گرفته می‌شوند. پارامترهای کیفیت فازی مثلثی باید براساس نیازمندی‌های مشتری یا انتظارات در یک فرایند تولید تعریف شوند زیرا مقدار هدف و حدود مشخصه براساس انتظارات مشتری تعیین می‌شوند. البته لازم به ذکر است که تابع عضویت \tilde{Q}_Δ اساساً ذهنی است و رابطه (۱.۲) مبنی یک رابطه پیشنهادی بین کیفیت فازی مثلثی و حدود مشخصه است که می‌تواند توسط تحلیل‌گر برای مشخصه کیفیت فرایند مورد نظر ارائه شود [۵، ۱۵].

فرض کنید f تابع چگالی احتمال مشخصه کیفیت پیوسته یک بعدی X باشد که نامعلوم است و m نمونه تصادفی (هر کدام شامل n مشاهده) از مشخصه کیفیت X در دسترس است. به عبارت دیگر فرض کنید $\mathbf{x}_j = (x_{1j}, x_{2j}, \dots, x_{nj})$ نمونه j ام به ازای $j = 1, \dots, m$ باشد. در نتیجه، $\tilde{\mathbf{Q}}_j = (\tilde{Q}_\Delta(x_{1j}), \tilde{Q}_\Delta(x_{2j}), \dots, \tilde{Q}_\Delta(x_{nj}))$ زامین نمونه از درجه کیفیت است که $\tilde{Q}_\Delta(x_{ij}) \in [0, 1]$ به ازای $i = 1, \dots, n$ و $j = 1, \dots, m$. در این صورت آماره‌های

$$(۲.۲) \quad \bar{Q}_j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \tilde{Q}_\Delta(x_{ij}), \quad j = 1, \dots, m$$

¹Upper and Lower Specification Limits

²Target Value

و

$$(۳.۲) \quad R_j = \max_{i=1, \dots, n} \tilde{Q}_{\Delta}(x_{ij}) - \min_{i=1, \dots, n} \tilde{Q}_{\Delta}(x_{ij}), \quad j = 1, \dots, m$$

به ترتیب میانگین و دامنه نمونه Z_j هستند [۹، ۱۵]. هدف اصلی این بخش، مرور رویکردهای پارامتری و ناپارامتری طراحی نمودارهای کنترل \bar{X} و R برای درجه کیفیت x_{ij} ها (یعنی $\tilde{Q}_{\Delta}(x_{ij})$ ها) است. توجه داشته باشید که توزیع $\tilde{Q}_{\Delta}(x_{ij})$ ها نامعلوم است چون به تابع عضویت کیفیت فازی و همچنین توزیع x_{ij} ها بستگی دارد [۱۵].

۱.۰۲. رویکردهای ناپارامتری. در این بخش، در ابتدا دو رویکرد ناپارامتری برای طراحی نمودارهای کنترل میانگین و دامنه مبتنی بر کیفیت فازی مثلثی مرور می‌شود. در رویکرد اول، حدود کنترل مستقیماً از چندک‌های خود داده‌ها به دست می‌آید. اما در رویکرد دوم، تابع چگالی آماره مورد نظر براساس روش کرنل برآورد و سپس حدود کنترل براساس چندک‌های تابع چگالی برآورد شده محاسبه می‌گردد. علاقمندان می‌توانند برای مطالعه جزئیات بیشتر درباره‌ی این رویکردها به [۵، ۱۵] رجوع نمایند.

۱.۰۲. رویکرد داده-محور با استفاده از چندک‌های داده‌های کیفیت. حد کنترل پایین^۱، خط مرکزی^۲ و حد کنترل بالای^۳ نمودار داده-محور \bar{X} مبتنی بر درجات تعلق مشاهدات به کیفیت فازی مثلثی \tilde{Q}_{Δ} به ترتیب برابرند با:

$$(۴.۲) \quad \begin{cases} LCL_{\bar{X}}^Q = \text{Quantile}_{p/2} \{ \bar{Q}_1, \dots, \bar{Q}_m \} \\ CL_{\bar{X}}^Q = \text{Quantile}_{1/2} \{ \bar{Q}_1, \dots, \bar{Q}_m \} \\ UCL_{\bar{X}}^Q = \text{Quantile}_{1-p/2} \{ \bar{Q}_1, \dots, \bar{Q}_m \} \end{cases}$$

که در آن $\text{Quantile}_p \{x_1, \dots, x_m\} = x_{(k)} + \{(m+1)p - k\} (x_{(k+1)} - x_{(k)})$ چندک مرتبه p ام از مجموعه داده x_1, \dots, x_m به ازای $0 < p < 1$ و $k = [(m+1)p]$ جزء صحیح $(m+1)p$ ام است. همچنین چندک p ام در حالت‌های خاص $k \geq n$ و $k = 0$ به ترتیب به صورت $Q_p = x_{(1)}$ و $Q_p = x_{(n)}$ تعریف می‌شود. توجه داشته باشید که معمولاً در آن Z متغیر تصادفی نرمال استاندارد است. چون $p = 0.0027$ در نظر گرفته می‌شود [۱۱] چون $0.9973 = 1 - p = P(-3 \leq Z \leq 3)$ که

¹Lower Control Limit

²Center Line

³Upper Control Limit

حدود کنترل و خط مرکزی نمودار داده-محور R مبتنی بر درجات تعلق مشاهدات به کیفیت فازی مثلثی \tilde{Q}_Δ برابرند با:

$$(5.2) \quad \begin{cases} LCL_R^Q = \text{Quantile}_{p/2} \{R_1, \dots, R_m\} \\ CL_R^Q = \text{Quantile}_{1/2} \{R_1, \dots, R_m\} = \text{Median} \{R_1, \dots, R_m\} \\ UCL_R^Q = \text{Quantile}_{1-p/2} \{R_1, \dots, R_m\} \end{cases}$$

۲.۱.۲. رویکرد چگالی-محور با برآورد چگالی کرنل. برآورد چگالی به روش کرنل^۱ (KDE) که به عنوان پنجره پارزن^۲ نیز شناخته می‌شود، یک روش ناپارامتری کاربردی مفید برای برآورد تابع چگالی احتمال یک متغیر تصادفی پیوسته است.

تعریف ۱.۲. فرض کنید x_1, \dots, x_n یک نمونه تصادفی مشاهده شده از متغیر تصادفی یک متغیره X با تابع چگالی احتمال نامعلوم باشد. برآورد چگالی کرنل براساس مشاهدات x_1, \dots, x_n به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$(6.2) \quad \hat{f}[x_1, \dots, x_n](x) = \frac{1}{nh} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{x-x_i}{h}\right)$$

که در آن $h > 0$ پارامتر هموارساز و K تابع کرنل است [۸].

در این رویکرد، ابتدا تابع چگالی

$$(7.2) \quad \bar{Q} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \tilde{Q}_\Delta(X_i)$$

مبتنی بر مقادیر $\bar{Q}_1, \dots, \bar{Q}_m$ به روش کرنل برآورد می‌شود. سپس حدود کنترل و خط مرکزی نمودار چگالی-محور \bar{X} از حل معادلات زیر به دست می‌آیند:

$$(8.2) \quad \begin{cases} \int_0^{LCL_{\bar{X}}^{KDE}} \hat{f}[\bar{Q}_1, \dots, \bar{Q}_m](x) dx = \frac{p}{4} \\ \int_0^{CL_{\bar{X}}^{KDE}} \hat{f}[\bar{Q}_1, \dots, \bar{Q}_m](x) dx = \frac{1}{4} \\ \int_0^{UCL_{\bar{X}}^{KDE}} \hat{f}[\bar{Q}_1, \dots, \bar{Q}_m](x) dx = 1 - \frac{p}{4} \end{cases}$$

به منظور محاسبه حدود کنترل نمودار R ، ابتدا تابع چگالی

$$(9.2) \quad R = \max_{i=1, \dots, n} \tilde{Q}_\Delta(X_i) - \min_{i=1, \dots, n} \tilde{Q}_\Delta(X_i)$$

¹Kernel Density Estimation

²Parzen's Window

مبتنی بر مقادیر R_1, \dots, R_m به روش کرنل برآورد می‌شود و پس از آن حدود کنترل و خط مرکزی نمودار چگالی-محور R از حل معادلات زیر تعیین می‌شوند:

$$(۱۰.۲) \quad \begin{cases} \int_0^{LCL_R^{KDE}} \hat{f}[R_1, \dots, R_m](x) dx = \frac{p}{4} \\ \int_0^{CL_R^{KDE}} \hat{f}[R_1, \dots, R_m](x) dx = \frac{1}{4} \\ \int_0^{UCL_R^{KDE}} \hat{f}[R_1, \dots, R_m](x) dx = 1 - \frac{p}{4} \end{cases}$$

ملاحظه ۲.۲. در این مقاله از بسته *kdensity* در نرم‌افزار R برای محاسبه پارامتر هموارساز استفاده می‌شود. این بسته می‌تواند براساس برخی اطلاعاتی که در مورد چگالی احتمال داده‌ها در دسترس است، چگالی احتمال را برآورد کند [۱۲]. همچنین توجه داشته باشید بدون از دست رفتن کلیت مسئله، در این مقاله از کرنل مثلثی $K(x) = \max\{1 - |x|, 0\}$ به منظور محاسبه حدود کنترل استفاده شده است.

۲.۲. رویکردهای پارامتری. درجات تعلق مشاهدات به کیفیت فازی مثلثی، یعنی $\bar{Q}_\Delta(x_{ij})$ ها، همواره بین صفر و یک هستند و لذا با یک توزیع بتا می‌توانند برازش داده شوند. بنابراین، فرض کنید \bar{Q}_j ها از توزیع بتا با پارامترهای نامعلوم $a^{\bar{Q}}$ و $b^{\bar{Q}}$ و R_j ها نیز از توزیع بتا با پارامترهای نامعلوم a^R و b^R پیروی می‌کنند. در این بخش، دو رویکرد پارامتری مختلف برای طراحی نمودارهای کنترل \bar{X} و R به اختصار مطرح می‌شود و علاقمندان برای توضیحات بیشتر به [۵، ۹] رجوع کنند.

۱.۲.۲. روش گشتاوری در برآورد حدود کنترل. ابتدا قصد داریم تا با در نظر گرفتن برآوردگرهای گشتاوری^۱ (*MMEs*) پارامترها در توزیع‌های \bar{Q} و R ، حدود کنترل میانگین و دامنه برای نمودار درجه‌ی تعلق مشاهدات به کیفیت فازی مثلثی را معرفی کنیم. حد کنترل پایین، خط مرکزی و حد کنترل بالای نمودار \bar{X} مبتنی بر درجات تعلق مشاهدات به کیفیت فازی مثلثی \bar{Q}_Δ به ترتیب برابرند با:

$$(۱۱.۲) \quad \begin{cases} LCL_{\bar{X}}^{MME} = F_{p/4}^{-1}(\hat{a}_{MM}^{\bar{Q}}, \hat{b}_{MM}^{\bar{Q}}) \\ CL_{\bar{X}}^{MME} = F_{1/4}^{-1}(\hat{a}_{MM}^{\bar{Q}}, \hat{b}_{MM}^{\bar{Q}}) \\ UCL_{\bar{X}}^{MME} = F_{1-p/4}^{-1}(\hat{a}_{MM}^{\bar{Q}}, \hat{b}_{MM}^{\bar{Q}}) \end{cases}$$

که در آن $F_p^{-1}(a, b)$ ، p امین چندک از توزیع بتا با پارامترهای a و b است. بعلاوه، $\hat{a}_{MM}^{\bar{Q}}$ و $\hat{b}_{MM}^{\bar{Q}}$ به ترتیب برآوردگرهای گشتاوری برای پارامترهای $a^{\bar{Q}}$ و $b^{\bar{Q}}$ هستند.

^۱Method of Moments Estimators

بطور مشابه، حدود کنترل و خط مرکزی نمودار R مبتنی بر درجات تعلق مشاهدات به کیفیت فازی مثلثی \bar{Q}_Δ برابرند با:

$$(12.2) \quad \begin{cases} LCL_R^{MME} = F_{p/\gamma}^{-1}(\hat{a}_{MM}^R, \hat{b}_{MM}^R) \\ CL_R^{MME} = F_{\sqrt{p/\gamma}}^{-1}(\hat{a}_{MM}^R, \hat{b}_{MM}^R) \\ UCL_R^{MME} = F_{1-p/\gamma}^{-1}(\hat{a}_{MM}^R, \hat{b}_{MM}^R) \end{cases}$$

که در آن \hat{a}_{MM}^R و \hat{b}_{MM}^R به ترتیب برآوردگرهای گشتاوری برای پارامترهای a^R و b^R هستند.

نکته ۳.۲. در انتهای این زیربخش یادآور می‌شویم که تحت فرض توزیع بتا برای نمونه تصادفی X_1, \dots, X_n ، برآورد گشتاوری پارامترهای مجهول این توزیع به ترتیب برابرند با $\hat{a}_{MM}^x = \bar{X} \left(\frac{\bar{X}(1-\bar{X})}{S^2} - 1 \right)$ و $\hat{b}_{MM}^x = (1 - \bar{X}) \left(\frac{\bar{X}(1-\bar{X})}{S^2} - 1 \right)$ برای توضیحات بیشتر به [۹، ۵] رجوع کنید.

۲۰۲۰۲. روش بیشینه درستنمایی در برآورد حدود کنترل. در این رویکرد، پارامترهای توزیع‌های \bar{Q} و R براساس روش بیشینه درستنمایی برآورد می‌شوند. حد کنترل پایین، خط مرکزی و حد کنترل بالای نمودار \bar{X} مبتنی بر درجات تعلق مشاهدات به کیفیت فازی مثلثی \bar{Q}_Δ به ترتیب برابر

$$(13.2) \quad \begin{cases} LCL_{\bar{X}}^{MLE} = F_{p/\gamma}^{-1}(\hat{a}_{ML}^{\bar{Q}}, \hat{b}_{ML}^{\bar{Q}}) \\ CL_{\bar{X}}^{MLE} = F_{\sqrt{p/\gamma}}^{-1}(\hat{a}_{ML}^{\bar{Q}}, \hat{b}_{ML}^{\bar{Q}}) \\ UCL_{\bar{X}}^{MLE} = F_{1-p/\gamma}^{-1}(\hat{a}_{ML}^{\bar{Q}}, \hat{b}_{ML}^{\bar{Q}}) \end{cases}$$

هستند که در آن $\hat{a}_{ML}^{\bar{Q}}$ و $\hat{b}_{ML}^{\bar{Q}}$ به ترتیب برآوردگرهای بیشینه درستنمایی^۱ (MLEs) برای پارامترهای $a^{\bar{Q}}$ و $b^{\bar{Q}}$ هستند.

حدود کنترل و خط مرکزی نمودار R مبتنی بر درجات تعلق مشاهدات به کیفیت فازی مثلثی \bar{Q}_Δ برابرند با:

$$(14.2) \quad \begin{cases} LCL_R^{MLE} = F_{p/\gamma}^{-1}(\hat{a}_{ML}^R, \hat{b}_{ML}^R) \\ CL_R^{MLE} = F_{\sqrt{p/\gamma}}^{-1}(\hat{a}_{ML}^R, \hat{b}_{ML}^R) \\ UCL_R^{MLE} = F_{1-p/\gamma}^{-1}(\hat{a}_{ML}^R, \hat{b}_{ML}^R) \end{cases}$$

که در آن \hat{a}_{ML}^R و \hat{b}_{ML}^R به ترتیب برآوردگرهای بیشینه درستنمایی برای پارامترهای a^R و b^R هستند.

¹Maximum Likelihood Estimators

نکته ۴.۲. در انتهای این زیربخش لازم یادآور شویم که برآوردهای بیشینه درستنمایی برای پارامترهای مجهول توزیع بتا مبتنی بر مشاهدات $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ به ترتیب از حل معادلات زیر حاصل می‌شوند:

$$(۱۵.۲) \quad \frac{\partial}{\partial a} l(a, b; \mathbf{x}) = \frac{n \frac{\partial \Gamma(a+b)}{\partial a}}{\Gamma(a+b)} - \frac{n \frac{\partial \Gamma(a)}{\partial a}}{\Gamma(a)} + \sum_{i=1}^n \ln(x_i) = 0,$$

$$(۱۶.۲) \quad \frac{\partial}{\partial b} l(a, b; \mathbf{x}) = \frac{n \frac{\partial \Gamma(a+b)}{\partial b}}{\Gamma(a+b)} - \frac{n \frac{\partial \Gamma(b)}{\partial b}}{\Gamma(b)} + \sum_{i=1}^n \ln(1 - x_i) = 0.$$

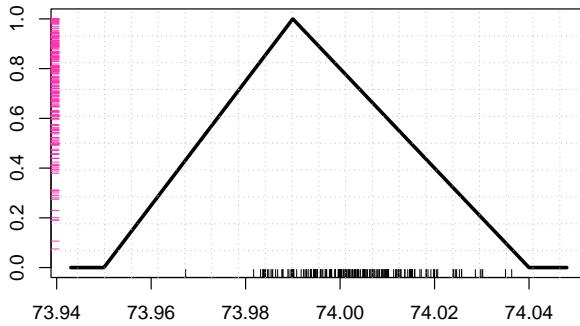
در معادلات فوق با بکارگیری روش‌های ریاضی، پیدا کردن یک فرم بسته برای برآورد پارامترها امکان‌پذیر نیست. لذا، برآوردهای بیشینه درستنمایی برای پارامترهای a و b (یعنی به ترتیب \widehat{a}_{ML}^x و \widehat{b}_{ML}^x) از حل معادلات (۱۵.۲) و (۱۶.۲) با استفاده از روش‌های عددی به دست می‌آیند. برای مطالعه جزئیات بیشتر به [۹، ۵] مراجعه نمایید.

در بخش بعد با ارائه یک مسئله کاربردی از صنعت، رویکردهای مختلف مطرح شده را برای طراحی نمودارهای کنترل میانگین و دامنه مبتنی بر کیفیت فازی مثلی مورد بحث قرار می‌دهیم.

۳. مطالعه موردی در صنعت خودروسازی

رینگ‌های پیستون موتور خودرو در یک فرایند آهنگری تولید می‌شوند. ۴۰ نمونه (هر کدام به اندازه پنج) از طول قطر داخلی رینگ‌های پیستون بر حسب میلی‌متر جمع‌آوری شده است [۱۱]. به منظور کنترل قطر داخلی رینگ‌های تولید شده، قصد داریم از نمودارهای کنترل \bar{X} و R مبتنی بر کیفیت فازی مثلی استفاده کنیم. گفتنی است که محاسبات عددی و رسم نمودارها در این مطالعه موردی با نرم‌افزار R انجام شده است و همچنین داده‌های قطر داخلی رینگ پیستون موتور خودرو در بسته qcc از نرم‌افزار R قابل دسترسی است [۱۸]. با در نظر گرفتن حدود مشخصه فنی $[۷۳۹۵, ۷۴۰۴]$ و مقدار هدف $T = ۷۳۹۹$ برای مشخصه کیفیت X در فرایند تولید، کیفیت فازی مثلی را مبتنی بر رابطه (۱.۲) به صورت $\tilde{Q}_\Delta = Tr(۷۳۹۵, ۷۳۹۹, ۷۴۰۴)$ با تابع عضویت زیر تعریف می‌کنیم (شکل ۱ را ملاحظه نمایید):

$$\tilde{Q}_\Delta(x) = \begin{cases} \frac{x-۷۳۹۵}{۰/۰۴} & \text{اگر } ۷۳۹۵ \leq x < ۷۳۹۹ \\ \frac{۷۴۰۴-x}{۰/۰۵} & \text{اگر } ۷۳۹۹ \leq x < ۷۴۰۴ \\ ۰ & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$



شکل ۱: تابع عضویت کیفیت فازی مثلثی \bar{Q}_Δ در مطالعه موردی

اندازه‌های قطر داخلی رینگ پیستون موتور خودرو و درجات کیفیت مربوط به آن‌ها در جدول ۱ ارائه شده‌اند. همچنین میانگین و دامنه‌ی درجات کیفیت برای هر نمونه در دو ستون آخر این جدول محاسبه شده‌اند. برای مثال، اولین نمونه از داده‌های قطر داخلی رینگ پیستون برابر با $(74.08, 73.992, 74.019, 74.002, 74.030)$ است. در نتیجه، اولین نمونه از درجات کیفیت داده‌های قطر داخلی رینگ پیستون براساس کیفیت فازی مثلثی معرفی شده \bar{Q}_Δ به صورت $(0.200, 0.760, 0.420, 0.960, 0.640)$ به دست می‌آید. از این رو میانگین و دامنه برای درجه کیفیت اولین نمونه به ترتیب به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$\bar{Q}_1 = \frac{0.640 + 0.960 + 0.420 + 0.760 + 0.200}{5} = 0.596$$

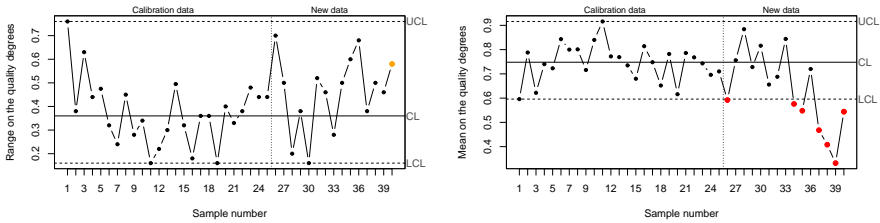
و

$$\begin{aligned} R_1 &= \max\{0.640, 0.960, 0.420, 0.760, 0.200\} \\ &\quad - \min\{0.640, 0.960, 0.420, 0.760, 0.200\} \\ &= 0.760. \end{aligned}$$

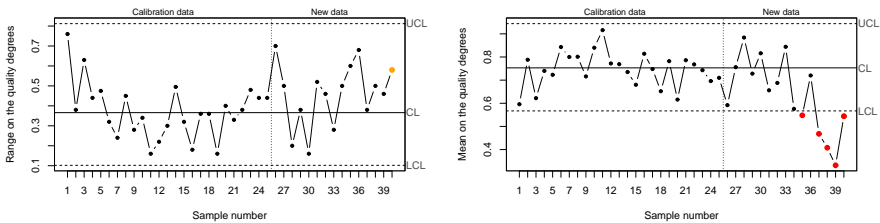
آزمون کلموگروف اسمیرنوف^۱ (K-S) با p -مقدارهای 0.98 و 0.973 برازش توزیع بتا را به میانگین درجات کیفیت براساس روش‌های گشتاوری و بیشینه درستنمایی تأیید می‌کند. بطور مشابه، این آزمون با p -مقدارهای 0.875 و 0.887 برازش توزیع بتا را به دامنه‌ی درجات کیفیت

^۱Kolmogorov-Smirnov

تأیید می‌کند. با استفاده از روش‌های گشتاوری و بیشینه درستی، چهار توزیع بتای مختلف به \bar{Q}_z ها و R_z ها برازش داده شده و نتایج برآورد پارامترها در جدول ۲ فهرست شده است. حدود کنترل و خط مرکزی نمودارهای \bar{X} و R مبتنی بر کیفیت فازی مثلثی براساس رویکردهای پارامتری و ناپارامتری بخش ۲ در جدول ۳ محاسبه شده‌اند. همچنین این نمودارها در شکل‌های ۲-۵ به کمک بسته نرم‌افزاری qcc در R رسم شده‌اند.



شکل ۲: نمودارهای کنترل داده-محور \bar{X} و R (مرحله I و مرحله II) در مطالعه موردی



شکل ۳: نمودارهای کنترل چگالی-محور \bar{X} و R (مرحله I و مرحله II) در مطالعه موردی

جدول ۱: ۴۰ نمونه از اندازه‌های قطر داخلی رینگ پیستون موتور خودرو با درجات کیفیت آن‌ها در مطالعه موردی (۲۵ نمونه برای مرحله I و ۱۵ نمونه برای مرحله II)

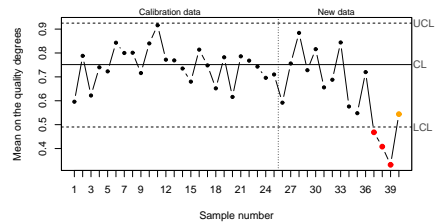
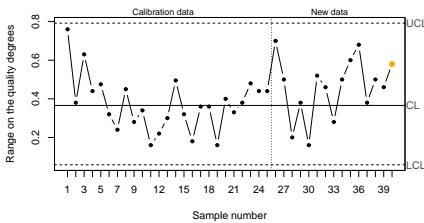
R_j	\bar{Q}_j	$\bar{Q}_\Delta(x_{ij})$						x_{ij}				j
۰٫۷۶۰	۰٫۵۹۶	۰٫۶۴۰	۰٫۹۶۰	۰٫۴۲۰	۰٫۷۶۰	۰٫۲۰۰	۷۴٫۰۰۸	۷۳٫۹۹۲	۷۴٫۰۱۹	۷۴٫۰۰۲	۷۴٫۰۳۰	۱
۰٫۳۸۰	۰٫۷۸۸	۰٫۷۲۰	۰٫۵۸۰	۰٫۷۸۰	۰٫۹۶۰	۰٫۹۰۰	۷۴٫۰۰۴	۷۴٫۰۱۱	۷۴٫۰۰۱	۷۳٫۹۹۲	۷۳٫۹۹۵	۲
۰٫۶۳۰	۰٫۶۲۲	۰٫۷۶۰	۰٫۷۰۰	۰٫۳۸۰	۰٫۳۲۰	۰٫۹۵۰	۷۴٫۰۰۲	۷۴٫۰۰۵	۷۴٫۰۲۱	۷۴٫۰۲۴	۷۳٫۹۸۸	۳
۰٫۴۴۰	۰٫۷۴۰	۰٫۶۲۰	۰٫۵۰۰	۰٫۹۴۰	۰٫۸۸۰	۰٫۷۶۰	۷۴٫۰۰۹	۷۴٫۰۱۵	۷۳٫۹۹۳	۷۳٫۹۹۶	۷۴٫۰۰۲	۴
۰٫۴۷۵	۰٫۷۲۳	۰٫۵۲۰	۰٫۹۷۵	۰٫۵۰۰	۰٫۶۶۰	۰٫۹۶۰	۷۴٫۰۱۴	۷۳٫۹۸۹	۷۴٫۰۱۵	۷۴٫۰۰۷	۷۳٫۹۹۲	۵
۰٫۳۲۰	۰٫۸۴۳	۰٫۹۴۰	۰٫۸۷۵	۰٫۸۶۰	۰٫۹۲۰	۰٫۶۲۰	۷۳٫۹۹۳	۷۳٫۹۸۵	۷۳٫۹۹۷	۷۳٫۹۹۴	۷۴٫۰۰۹	۶
۰٫۲۴۰	۰٫۸۰۰	۰٫۷۰۰	۰٫۸۰۰	۰٫۹۲۰	۰٫۶۸۰	۰٫۹۰۰	۷۴٫۰۰۵	۷۴٫۰۰۰	۷۳٫۹۹۴	۷۴٫۰۰۶	۷۳٫۹۹۵	۷
۰٫۴۵۰	۰٫۸۰۱	۰٫۹۵۰	۰٫۵۰۰	۰٫۹۴۰	۰٫۷۴۰	۰٫۸۷۵	۷۳٫۹۸۸	۷۴٫۰۱۵	۷۳٫۹۹۳	۷۴٫۰۰۳	۷۳٫۹۸۵	۸
۰٫۲۸۰	۰٫۷۱۶	۰٫۷۲۰	۰٫۷۰۰	۰٫۶۲۰	۰٫۹۰۰	۰٫۶۴۰	۷۴٫۰۰۴	۷۴٫۰۰۵	۷۴٫۰۰۹	۷۳٫۹۹۵	۷۴٫۰۰۸	۹
۰٫۳۴۰	۰٫۸۴۰	۰٫۹۰۰	۰٫۶۶۰	۱٫۰۰۰	۰٫۸۰۰	۰٫۸۴۰	۷۳٫۹۹۵	۷۴٫۰۰۷	۷۳٫۹۹۰	۷۴٫۰۰۰	۷۳٫۹۹۸	۱۰
۰٫۱۶۰	۰٫۹۱۶	۱٫۰۰۰	۰٫۹۰۰	۰٫۹۲۰	۰٫۸۴۰	۰٫۹۲۰	۷۳٫۹۹۰	۷۳٫۹۹۵	۷۳٫۹۹۴	۷۳٫۹۹۸	۷۳٫۹۹۴	۱۱
۰٫۲۲۰	۰٫۷۷۲	۰٫۸۸۰	۰٫۸۰۰	۰٫۶۶۰	۰٫۸۰۰	۰٫۷۲۰	۷۳٫۹۹۶	۷۴٫۰۰۰	۷۴٫۰۰۷	۷۴٫۰۰۰	۷۴٫۰۰۴	۱۲
۰٫۳۰۰	۰٫۷۶۹	۰٫۵۶۰	۰٫۸۶۰	۰٫۸۴۰	۰٫۷۶۰	۰٫۸۲۵	۷۴٫۰۱۲	۷۳٫۹۹۷	۷۳٫۹۹۸	۷۴٫۰۰۲	۷۳٫۹۸۳	۱۳
۰٫۴۹۵	۰٫۷۳۵	۰٫۸۵۰	۰٫۸۰۰	۰٫۹۲۰	۰٫۴۲۵	۰٫۶۸۰	۷۳٫۹۸۴	۷۴٫۰۰۰	۷۳٫۹۹۴	۷۳٫۹۶۷	۷۴٫۰۰۶	۱۴
۰٫۳۲۰	۰٫۶۸۰	۰٫۶۶۰	۰٫۸۲۰	۰٫۸۴۰	۰٫۵۲۰	۰٫۵۶۰	۷۴٫۰۰۷	۷۳٫۹۹۹	۷۳٫۹۹۸	۷۴٫۰۱۴	۷۴٫۰۱۲	۱۵
۰٫۱۸۰	۰٫۸۱۴	۰٫۸۸۰	۰٫۸۴۰	۰٫۷۰۰	۰٫۸۵۰	۰٫۸۰۰	۷۳٫۹۹۶	۷۳٫۹۹۸	۷۴٫۰۰۵	۷۳٫۹۸۴	۷۴٫۰۰۰	۱۶
۰٫۲۶۰	۰٫۷۴۸	۰٫۶۶۰	۰٫۷۰۰	۰٫۹۰۰	۰٫۵۶۰	۰٫۹۲۰	۷۴٫۰۰۷	۷۴٫۰۰۵	۷۳٫۹۸۶	۷۴٫۰۱۲	۷۳٫۹۹۴	۱۷
۰٫۲۶۰	۰٫۶۵۲	۰٫۸۰۰	۰٫۷۴۰	۰٫۴۴۰	۰٫۶۰۰	۰٫۶۸۰	۷۴٫۰۰۰	۷۴٫۰۰۳	۷۴٫۰۱۸	۷۴٫۰۱۰	۷۴٫۰۰۶	۱۸
۰٫۱۶۰	۰٫۷۸۲	۰٫۸۶۰	۰٫۷۰۰	۰٫۷۴۰	۰٫۷۶۰	۰٫۸۵۰	۷۳٫۹۹۷	۷۴٫۰۰۵	۷۴٫۰۰۳	۷۴٫۰۰۲	۷۳٫۹۸۴	۱۹
۰٫۴۰۰	۰٫۶۱۶	۰٫۷۴۰	۰٫۴۰۰	۰٫۵۴۰	۰٫۶۰۰	۰٫۸۰۰	۷۴٫۰۰۳	۷۴٫۰۲۰	۷۴٫۰۱۳	۷۴٫۰۱۰	۷۴٫۰۰۰	۲۰
۰٫۳۳۰	۰٫۷۸۶	۰٫۸۸۰	۰٫۷۰۰	۰٫۶۲۰	۰٫۷۸۰	۰٫۹۵۰	۷۳٫۹۹۶	۷۴٫۰۰۵	۷۴٫۰۰۹	۷۴٫۰۰۱	۷۳٫۹۸۸	۲۱
۰٫۳۸۰	۰٫۷۶۸	۰٫۶۲۰	۰٫۶۸۰	۱٫۰۰۰	۰٫۸۲۰	۰٫۷۲۰	۷۴٫۰۰۹	۷۴٫۰۰۶	۷۳٫۹۹۰	۷۳٫۹۹۹	۷۴٫۰۰۴	۲۲
۰٫۴۸۰	۰٫۷۴۳	۰٫۵۲۰	۰٫۶۲۰	۱٫۰۰۰	۰٫۹۷۵	۰٫۶۰۰	۷۴٫۰۱۴	۷۴٫۰۰۹	۷۳٫۹۹۰	۷۳٫۹۸۹	۷۴٫۰۱۰	۲۳
۰٫۴۴۰	۰٫۶۹۶	۰٫۶۰۰	۰٫۸۰۰	۰٫۹۴۰	۰٫۶۴۰	۰٫۵۰۰	۷۴٫۰۱۰	۷۴٫۰۰۰	۷۳٫۹۹۳	۷۴٫۰۰۸	۷۴٫۰۱۵	۲۴
۰٫۴۴۰	۰٫۷۱۰	۰٫۵۴۰	۰٫۷۶۰	۰٫۹۰۰	۰٫۸۵۰	۰٫۸۰۰	۷۴٫۰۱۳	۷۴٫۰۱۷	۷۳٫۹۹۵	۷۳٫۹۸۴	۷۳٫۹۸۲	۲۵
۰٫۷۰۰	۰٫۵۹۲	۰٫۸۰۰	۰٫۹۰۰	۰٫۲۰۰	۰٫۵۰۰	۰٫۵۶۰	۷۴٫۰۰۰	۷۳٫۹۸۶	۷۴٫۰۳۰	۷۴٫۰۱۵	۷۴٫۰۱۲	۲۶
۰٫۵۰۰	۰٫۷۵۶	۰٫۷۸۰	۰٫۵۰۰	۱٫۰۰۰	۰٫۶۰۰	۰٫۹۰۰	۷۴٫۰۰۱	۷۴٫۰۱۵	۷۳٫۹۹۰	۷۴٫۰۱۰	۷۳٫۹۹۵	۲۷
۰٫۲۰۰	۰٫۸۸۴	۱٫۰۰۰	۰٫۸۰۰	۰٫۸۷۵	۰٫۸۲۰	۰٫۹۲۵	۷۳٫۹۹۰	۷۴٫۰۰۰	۷۳٫۹۸۵	۷۳٫۹۹۹	۷۳٫۹۸۷	۲۸
۰٫۳۸۰	۰٫۷۲۸	۰٫۶۸۰	۰٫۹۸۰	۰٫۷۴۰	۰٫۶۰۰	۰٫۶۴۰	۷۴٫۰۰۶	۷۳٫۹۹۱	۷۴٫۰۰۳	۷۴٫۰۱۰	۷۴٫۰۰۸	۲۹
۰٫۱۶۰	۰٫۸۱۶	۰٫۸۶۰	۰٫۹۰۰	۰٫۷۸۰	۰٫۸۰۰	۰٫۷۴۰	۷۳٫۹۹۷	۷۳٫۹۸۶	۷۴٫۰۰۱	۷۴٫۰۰۰	۷۴٫۰۰۳	۳۰
۰٫۵۲۰	۰٫۶۵۶	۰٫۷۲۰	۰٫۴۰۰	۰٫۵۰۰	۰٫۷۴۰	۰٫۹۲۰	۷۴٫۰۰۴	۷۴٫۰۲۰	۷۴٫۰۱۵	۷۴٫۰۰۳	۷۳٫۹۹۴	۳۱
۰٫۴۶۰	۰٫۶۸۸	۰٫۷۰۰	۰٫۹۰۰	۰٫۴۴۰	۰٫۷۶۰	۰٫۶۴۰	۷۴٫۰۰۵	۷۳٫۹۹۵	۷۴٫۰۱۸	۷۴٫۰۰۲	۷۴٫۰۰۸	۳۲
۰٫۲۸۰	۰٫۸۴۴	۰٫۸۴۰	۰٫۸۸۰	۱٫۰۰۰	۰٫۷۲۰	۰٫۷۸۰	۷۳٫۹۹۸	۷۳٫۹۹۶	۷۳٫۹۹۰	۷۴٫۰۰۴	۷۴٫۰۰۱	۳۳
۰٫۵۰۰	۰٫۵۷۶	۰٫۸۰۰	۰٫۳۰۰	۰٫۴۸۰	۰٫۸۰۰	۰٫۵۰۰	۷۴٫۰۰۰	۷۴٫۰۲۵	۷۴٫۰۱۶	۷۴٫۰۰۰	۷۴٫۰۱۵	۳۴
۰٫۶۰۰	۰٫۵۴۸	۰٫۵۶۰	۰٫۴۸۰	۰٫۸۰۰	۰٫۷۰۰	۰٫۲۰۰	۷۴٫۰۱۲	۷۴٫۰۱۶	۷۴٫۰۰۰	۷۴٫۰۰۵	۷۴٫۰۳۰	۳۵
۰٫۶۸۰	۰٫۷۲۰	۰٫۳۲۰	۰٫۶۶۰	۰٫۹۰۰	۱٫۰۰۰	۰٫۷۸۰	۷۴٫۰۲۴	۷۴٫۰۱۰	۷۳٫۹۹۵	۷۳٫۹۹۰	۷۴٫۰۰۱	۳۶
۰٫۳۸۰	۰٫۴۶۸	۰٫۴۲۰	۰٫۷۰۰	۰٫۳۲۰	۰٫۴۰۰	۰٫۵۰۰	۷۴٫۰۱۹	۷۴٫۰۰۵	۷۴٫۰۲۴	۷۴٫۰۲۰	۷۴٫۰۱۵	۳۷
۰٫۵۰۰	۰٫۴۰۸	۰٫۲۸۰	۰٫۵۰۰	۰٫۵۶۰	۰٫۶۰۰	۰٫۱۰۰	۷۴٫۰۲۶	۷۴٫۰۱۵	۷۴٫۰۱۲	۷۴٫۰۱۰	۷۴٫۰۳۵	۳۸
۰٫۴۶۰	۰٫۳۳۲	۰٫۲۸۰	۰٫۳۰۰	۰٫۰۸۰	۰٫۵۴۰	۰٫۴۶۰	۷۴٫۰۲۶	۷۴٫۰۲۵	۷۴٫۰۳۶	۷۴٫۰۱۳	۷۴٫۰۱۷	۳۹
۰٫۵۸۰	۰٫۵۴۴	۰٫۴۰۰	۰٫۸۰۰	۰٫۲۲۰	۰٫۷۰۰	۰٫۶۰۰	۷۴٫۰۲۰	۷۴٫۰۰۰	۷۴٫۰۲۹	۷۴٫۰۰۵	۷۴٫۰۱۰	۴۰

جدول ۲: برآوردگرهای گشتاوری و بیشینه درستی برای دو پارامتر توزیع بتا در مطالعه موردی

نوع نمودار کنترل	نوع برآوردگر	پارامتر اول	پارامتر دوم
\bar{X}	MME	۲۳,۹۲۳	۸,۱۳۹
R		۴,۱۴۲	۶,۹۴۴
\bar{X}	MLE	۲۳,۶۷۰	۸,۰۳۷
R		۴,۴۰۶	۷,۳۲۲

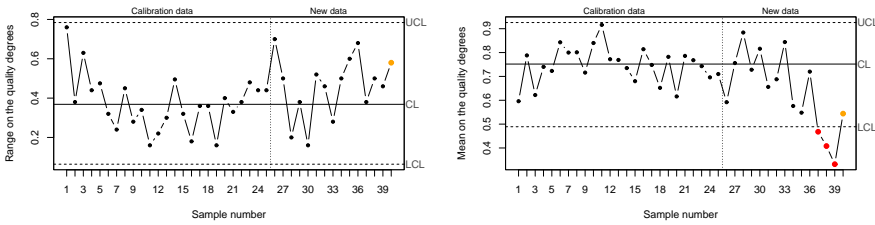
جدول ۳: حدود کنترل و خط مرکزی نمودارهای \bar{X} و R براساس رویکردهای پارامتری و ناپارامتری بخش ۲ در مطالعه موردی

UCL	CL	LCL	نوع رویکرد و نمودار
۰,۹۱۶	۰,۷۴۸	۰,۵۹۶	نمودار کنترل داده-محور \bar{X}
۰,۷۶۰	۰,۳۶۰	۰,۱۶۰	نمودار کنترل داده-محور R
۰,۹۴۴	۰,۷۵۳	۰,۵۶۷	نمودار کنترل چگالی-محور \bar{X}
۰,۸۱۲	۰,۳۶۶	۰,۱۰۲	نمودار کنترل چگالی-محور R
۰,۹۲۵	۰,۷۵۱	۰,۴۹۰	نمودار کنترل مبتنی بر روش گشتاوری \bar{X}
۰,۷۹۲	۰,۳۶۶	۰,۰۵۸	نمودار کنترل مبتنی بر روش گشتاوری R
۰,۹۲۶	۰,۷۵۲	۰,۴۸۹	نمودار کنترل مبتنی بر روش بیشینه درستی \bar{X}
۰,۷۸۴	۰,۳۹۸	۰,۰۶۴	نمودار کنترل مبتنی بر روش بیشینه درستی R



شکل ۴: نمودارهای کنترل مبتنی بر روش گشتاوری \bar{X} و R (مرحله I و مرحله II) در مطالعه

موردی



شکل ۵: نمودارهای کنترل مبتنی بر روش بیشینه درست‌نمایی \bar{X} و R (مرحله I و مرحله II) در مطالعه موردی

۲۵ نمونه اولیه که برای برآورد حدود کنترل در مرحله I مورد استفاده قرار گرفتند تحت کنترل بودند. اگر برخی از این نقاط از کنترل خارج می‌شد، آن‌ها را حذف می‌کردیم و سپس نمودار کنترل را براساس نقاط باقی‌مانده رسم می‌کردیم. همچنین اگر تمام نقاط این نمودار جدید تحت کنترل بودند، یک بار دیگر برای برآورد حدود کنترل از آن‌ها استفاده می‌شد. در غیر اینصورت نقاط خارج از کنترل دوباره حذف می‌شوند و این روند تا زمانی که مانند مطالعه موردی ما تمام نقاط درون حدود کنترل قرار گیرند، تکرار می‌شود. اکنون مرحله II با ۱۵ نمونه اضافی (هر کدام به اندازه پنج) شروع می‌شود. اگر هر نمونه جدید خارج از حدود کنترل قرار گیرد، خارج از کنترل در نظر گرفته می‌شود [۶، ۱۱]. حتی اگر تمام نقاط درون حدود کنترل رسم شوند ولی رفتار سیستماتیک/غیرتصادفی داشته باشند، این نشانه خارج از کنترل بودن فرایند است. نقاط قرمز و زرد در نمودارهای کنترل \bar{X} و R در شکل‌های ۲-۵ به ترتیب نقاط خارج از کنترل و حالت سیستماتیک/غیرتصادفی را نشان می‌دهند. هنگامی که چنین الگوهایی در نمودارهای کنترل ظاهر می‌شود، معمولاً نشان دهنده یک دلیل خاص است و لذا در چنین مواردی اقدامات اصلاحی برای تعیین و حذف منبع انحرافات و تغییرات قابل تخصیص مورد نیاز است. با شناسایی و حذف این منبع، می‌توان عملکرد فرایند را در این مطالعه موردی بهبود بخشید.

از مقایسه شکل‌های ۲-۵ می‌توان گفت که در نمودار کنترل داده-محور \bar{X} نمونه‌های بیشتری در مقایسه با سایر نمودارها به عنوان نمونه‌های خارج از کنترل تعیین شده است که خود مبین حساسیت بیشتر این نمودار است. بعلاوه در این مطالعه موردی، همه‌ی انواع نمودارهای کنترل R حساسیت یکسانی در شناسایی نقاط خارج از کنترل از خود نشان داده‌اند.

۴. مقایسه نمودارهای کنترل به کمک شبیه‌سازی

در این بخش قصد داریم انواع رویکردهای طراحی نمودارهای کنترل \bar{X} و R مبتنی بر کیفیت فازی مثالی را با استفاده از داده‌های قطر داخلی رینگ پیستون موتور خودرو مقایسه کنیم. با در نظر گرفتن اندازه‌های قطر داخلی رینگ پیستون موتور خودرو (جدول ۱)، میانگین و انحراف استاندارد فرایند به ترتیب با $\bar{x} = \bar{\mu} = ۷۴$ و $\hat{\sigma} = \frac{\bar{s}}{c_4} = ۰/۰۰۹۶$ برآورد می‌شوند.

ابتدا حدود کنترل توسط ۲۵ نمونه اولیه از جدول ۱ با استفاده از هر چهار رویکرد بخش ۲ و بر اساس کیفیت فازی مثالی معرفی شده $\bar{Q}_\Delta = Tr(۷۳/۹۵, ۷۳/۹۹, ۷۴/۰۴)$ محاسبه می‌شوند که نتایج قبلاً در جدول ۳ ارائه شده است.

می‌دانیم که احتمال وجود یک نقطه بین حدود کنترل برای یک فرایند تحت کنترل برابر $1-p$ است. $۰/۹۹۷۳$ است. قصد داریم این احتمال را برای انواع نمودارهای مبتنی بر کیفیت فازی مثالی به روش مونت کارلو برای فرایند تحت کنترل شبیه‌سازی کنیم. بدین منظور، $m = ۱۰^۶$ نمونه (هر کدام به اندازه پنج) به طور مستقل از توزیع نرمال با میانگین $\hat{\mu}$ و انحراف استاندارد $\hat{\sigma}$ شبیه‌سازی شده است. آنگاه احتمالات زیر در حالتی که فرایند تحت کنترل است در جدول ۴ برآورد/شبیه‌سازی شده است:

- احتمال اینکه یک نقطه تصادفی زیر LCL برآورد شده قرار گیرد.
- احتمال قرار گرفتن یک نقطه بین حدود کنترل برآورد شده و
- احتمال اینکه یک نقطه تصادفی بالاتر از UCL برآورد شده قرار گیرد.

توجه داشته باشید که نماد \bullet در جدول ۴ نمایانگر نقطه/آماره تصادفی است که در نمودار کنترل بطور تصادفی رسم می‌شود. برای مثال، احتمال قرار گرفتن نقطه تصادفی \bar{Q} بین حدود کنترل نمودار داده-محور \bar{X} در جدول ۴ با فرمول

$$\hat{P} \left(LCL_{\bar{X}}^Q < \bar{Q} < UCL_{\bar{X}}^Q \right) = \frac{1}{10^6} \sum_{j=1}^{10^6} I \left(LCL_{\bar{X}}^Q < \bar{Q}_j < UCL_{\bar{X}}^Q \right)$$

شبیه‌سازی شده است که در آن حدود کنترل $LCL_{\bar{X}}^Q$ و $UCL_{\bar{X}}^Q$ در جدول ۳ محاسبه و $\bar{Q}_1, \dots, \bar{Q}_{10^6}$ به طور مستقل شبیه‌سازی شده‌اند.

با توجه به احتمالات شبیه‌سازی شده در آخرین ستون از جدول ۴، \hat{p} شبیه‌سازی شده برای نمودار مبتنی بر روش بیشینه درست‌نمایی \bar{X} نسبت به سایر انواع نمودار \bar{X} به $p = ۰/۰۰۲۷$ نزدیک‌تر است. این نشان دهنده‌ی عملکرد بهتر نمودار کنترل مبتنی بر روش بیشینه درست‌نمایی \bar{X}

جدول ۴: نتایج شبیه‌سازی نمودارهای کنترل \bar{X} و R مبتنی بر کیفیت فازی مثلی در مطالعه موردی

\hat{p}	$\hat{P}(UCL \leq \bullet)$	$\hat{P}(LCL < \bullet < UCL)$	$\hat{P}(\bullet \leq LCL)$	نوع رویکرد و نمودار
۰٫۰۱۸۰۰۷	۰٫۰۰۶۹۷۹	۰٫۹۸۱۹۹۳	۰٫۰۱۱۰۲۸	نمودار کنترل داده-محور \bar{X}
۰٫۰۵۳۹۵۱	۰٫۰۰۳۲۲	۰٫۹۴۶۰۴۹	۰٫۰۵۰۷۳۱	نمودار کنترل داده-محور R
۰٫۰۰۴۹۷۹	۰٫۰۰۰۸۹۵	۰٫۹۹۵۰۲۱	۰٫۰۰۴۰۸۴	نمودار کنترل چگالی-محور \bar{X}
۰٫۰۱۱۱۷۸	۰٫۰۰۱۲۴۹	۰٫۹۸۸۸۲۲	۰٫۰۰۹۹۲۹	نمودار کنترل چگالی-محور R
۰٫۰۰۴۰۴۹	۰٫۰۰۳۸۹۸	۰٫۹۹۵۹۵۱	۰٫۰۰۰۱۵۱	نمودار کنترل مبتنی بر روش گشتاوری \bar{X}
۰٫۰۰۲۹۵۶	۰٫۰۰۱۷۹۴	۰٫۹۹۷۰۴۴	۰٫۰۰۱۱۶۲	نمودار کنترل مبتنی بر روش گشتاوری R
۰٫۰۰۳۷۷۵	۰٫۰۰۳۶۲۹	۰٫۹۹۶۲۲۵	۰٫۰۰۰۱۴۶	نمودار کنترل مبتنی بر روش بیشینه درستیابی \bar{X}
۰٫۰۰۳۷۸۷	۰٫۰۰۲۰۹	۰٫۹۹۶۲۱۳	۰٫۰۰۱۶۹۷	نمودار کنترل مبتنی بر روش بیشینه درستیابی R

در مقایسه با سایر روش‌ها است. از طرفی، \hat{p} شبیه‌سازی شده برای نمودار مبتنی بر روش گشتاوری R به $p = ۰٫۰۲۷$ نزدیک‌تر از سایر نمودارها است و بنابراین در این شبیه‌سازی نمودار مبتنی بر روش گشتاوری R عملکرد بهتری در حالت تحت کنترل بودن فرایند از خود نشان می‌دهد.

در برقراری سیستم‌های کنترل کیفیت، توجه به کارایی و حساسیت سیستم‌ها جهت شناسایی تغییرات در فرایند بسیار حائز اهمیت است. یکی از معیارهای متداول برای ارزیابی کارایی سیستم‌های کنترل، میانگین طول دنباله (ARL) نام دارد [۳]. میانگین طول دنباله عبارت است از متوسط تعداد نقاطی که باید روی نمودار کنترل رسم شوند تا یک نقطه خارج از کنترل مشاهده گردد و به صورت $ARL = \frac{1}{Pr(\text{یک نقطه خارج از حدود کنترل رسم شود})}$ تعریف می‌شود. اگر فرایند خارج از کنترل باشد آنگاه مقدار ARL کمتر مطلوب‌تر است زیرا نشان دهنده‌ی تشخیص سریع‌تر مشکلات فرایند است [۱۱].

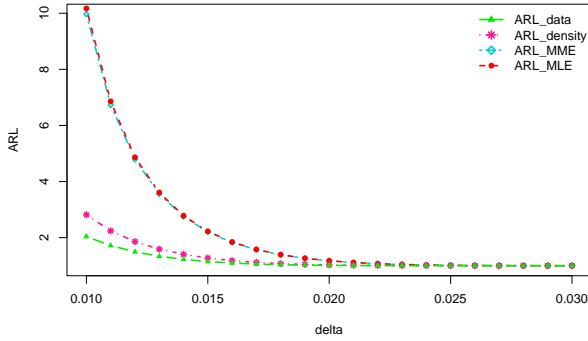
در ادامه، حساسیت رویکردهای مختلف طراحی نمودارهای کنترل \bar{X} و R مبتنی بر کیفیت فازی مثلی نسبت به تغییر در میانگین و تغییر در انحراف استاندارد فرایند مقایسه می‌شود.

فرض کنید که میانگین فرایند از مقدار تحت کنترل $\mu_0 = ۷۴$ به مقدار خارج از کنترل $\mu_1 = \mu_0 + \delta$ تغییر کند که در آن $\delta > ۰$ مقدار تغییر در میانگین فرایند است. در این حالت $m = ۱۰^۶$ نمونه (هر کدام به اندازه پنج) از یک توزیع نرمال با میانگین μ_1 و انحراف استاندارد σ زمانی که فرایند خارج از کنترل است، شبیه‌سازی شده است. آنگاه مقادیر میانگین طول دنباله به ازای چندین مقدار δ در جدول ۵ محاسبه شده‌اند. همچنین منحنی‌های میانگین طول دنباله برای هر چهار نوع نمودار کنترل \bar{X} و R در شکل ۶ نشان داده شده‌اند.

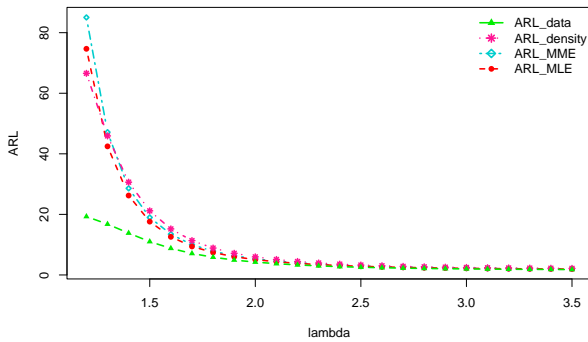
از جدول ۵ ملاحظه می‌شود که مقادیر میانگین طول دنباله برای نمودار کنترل داده-محور \bar{X} کمتر از مقادیر میانگین طول دنباله برای انواع دیگر نمودار \bar{X} هستند و این بدان معناست که نمودار داده-محور \bar{X} زودتر از سایر انواع نمودار \bar{X} تغییر در میانگین فرایند را تشخیص می‌دهد. به عنوان مثال، با توجه به سطر اول جدول ۵، زمانی که میانگین فرایند از مقدار تحت کنترل $\mu_0 = 74$ به مقدار خارج از کنترل $\mu_1 = \mu_0 + 0.10 = 74.10$ تغییر می‌کند، نمودار کنترل داده-محور \bar{X} به طور متوسط بعد از تقریباً ۲ نقطه به وجود این تغییر در میانگین فرایند پی می‌برد. اما نمودارهای کنترل چگالی-محور، مبتنی بر روش گشتاوری و مبتنی بر روش بیشینه درست‌نمایی \bar{X} به منظور پی بردن به این تغییر به طور متوسط به ترتیب نیاز به اخذ تقریباً ۳، ۱۰ و ۱۰ نقطه دارند. این نشان دهنده عملکرد بهتر نمودار کنترل داده-محور \bar{X} نسبت به سایر انواع این نمودار است.

جدول ۵: شبیه‌سازی میانگین طول دنباله برای نمودار کنترل \bar{X} مبتنی بر چهار رویکرد مختلف

$ARL_{\bar{X}_{MLE}}$	$ARL_{\bar{X}_{MME}}$	$ARL_{\bar{X}_{density}}$	$ARL_{\bar{X}_{data}}$	δ
۱۰/۱۷۰۳۵۳	۹۹۶۳۹۳۱	۲۸۱۳۸۸۹	۲۰۳۹۶۱۸	۱۰/۱۰
۶۸۵۶۹۲۳	۶۷۳۰۸۳۴	۲۲۴۳۵۶۶	۱۷۱۷۴۶۱	۱۱/۱۰
۴۸۶۵۹۲۰	۴۷۸۹۴۷۸	۱۸۵۹۳۹۶	۱۴۹۴۳۳۷	۱۲/۱۰
۳۶۰۸۵۹۷	۳۵۵۷۹۸۴	۱۵۹۰۱۷۷	۱۳۳۵۰۷۶	۱۳/۱۰
۲۷۸۲۸۸۰	۲۷۴۸۵۶۷	۱۴۰۵۷۷۲	۱۲۲۵۸۱۰	۱۴/۱۰
۲۲۲۵۰۱۶	۲۲۰۲۰۵۱	۱۲۷۳۰۷۴	۱۱۴۷۲۴۸	۱۵/۱۰
۱۸۴۵۵۵۳	۱۸۲۹۳۸۸	۱۱۸۱۳۷۵	۱۰۹۴۴۳۷	۱۶/۱۰
۱۵۸۱۰۵۵	۱۵۷۰۱۶۴	۱۱۱۶۹۳۰	۱۰۵۸۲۶۶	۱۷/۱۰
۱۳۹۵۳۶۴	۱۳۸۷۷۰۵	۱۰۷۳۳۵۸	۱۰۳۴۹۲۳	۱۸/۱۰
۱۲۶۵۵۱۷	۱۲۶۰۳۳۵	۱۰۴۴۸۴۶	۱۰۲۰۲۵۷	۱۹/۱۰
۱۱۷۶۶۰۵	۱۱۷۲۷۸۳	۱۰۲۶۱۸۵	۱۰۱۱۰۰۲	۲۰/۱۰
۱۱۱۳۸۷۵	۱۱۱۱۳۵۷	۱۰۱۴۷۷۹	۱۰۰۵۸۲۰	۲۱/۱۰
۱۰۷۱۳۹۲	۱۰۶۹۶۳۲	۱۰۰۷۹۰۰	۱۰۰۲۹۴۹	۲۲/۱۰
۱۰۴۳۲۱۳	۱۰۴۲۰۹۰	۱۰۰۴۱۸۶	۱۰۰۰۱۴۸۱	۲۳/۱۰
۱۰۲۵۲۵۹	۱۰۲۴۴۸۵	۱۰۰۱۹۵۷	۱۰۰۰۰۶۰۳	۲۴/۱۰
۱۰۱۴۱۹۳	۱۰۱۳۷۷۹	۱۰۰۰۹۳۱	۱۰۰۰۰۲۷۷	۲۵/۱۰
۱۰۰۷۵۴۸	۱۰۰۷۳۱۷	۱۰۰۰۰۴۲۲	۱۰۰۰۰۱۲۷	۲۶/۱۰
۱۰۰۳۸۲۴	۱۰۰۰۶۸۷	۱۰۰۰۰۱۴۹	۱۰۰۰۰۰۴۱	۲۷/۱۰
۱۰۰۰۱۹۰۱	۱۰۰۰۱۸۳۸	۱۰۰۰۰۰۷۲	۱۰۰۰۰۰۱۶	۲۸/۱۰
۱۰۰۰۰۸۵۸	۱۰۰۰۰۸۳۰	۱۰۰۰۰۰۲۹	۱۰۰۰۰۰۰۵	۲۹/۱۰
۱۰۰۰۰۳۷۹	۱۰۰۰۰۳۶۳	۱۰۰۰۰۰۰۸	۱۰۰۰۰۰۰۳	۳۰/۱۰



شکل ۶: منحنی‌های میانگین طول دنباله برای نمودار کنترل \bar{X} مبتنی بر چهار رویکرد مختلف



شکل ۷: منحنی‌های میانگین طول دنباله برای نمودار کنترل R مبتنی بر چهار رویکرد مختلف

از طرفی فرض کنید که انحراف استاندارد فرایند از مقدار تحت کنترل $\sigma_0 = 0.096$ به مقدار خارج از کنترل $\sigma_1 = \lambda \sigma_0$ تغییر کند که در آن $\lambda > 1$ مقدار تغییر در انحراف استاندارد فرایند است. در چنین حالتی $m = 10^6$ نمونه (هرکدام به اندازه پنج) از توزیع نرمال با میانگین $\hat{\mu}$ و انحراف استاندارد $\hat{\sigma}_1$ از فرایند خارج از کنترل شبیه‌سازی شده است. مقادیر میانگین طول دنباله برای چهار نوع نمودار کنترل R به ازای چندین مقدار λ در جدول ۶ شبیه‌سازی شده‌اند. بعلاوه، منحنی‌های میانگین طول دنباله برای این نمودارها در شکل ۷ ترسیم شده است.

جدول ۶: شبیه‌سازی میانگین طول دنباله برای نمودار کنترل R مبتنی بر چهار رویکرد مختلف

ARL_{RMLE}	ARL_{RMME}	$ARL_{Rdensity}$	ARL_{Rdata}	λ
۷۴۶۷۷۰۲۲	۸۵۰۳۴۰۱۴	۶۶۵۷۳۴۶۴	۱۹۰۲۸۵۲۸۷	۱٫۲
۴۲۰۴۶۱۰۴۲	۴۷۱۳۸۶۸۲	۴۵۹۱۳۶۸۲	۱۶۰۷۷۰۶۴۵	۱٫۳
۲۶۰۲۲۴۶۹۳	۲۸۵۹۴۳۰۴	۳۰۶۳۴۴۳۹	۱۳۰۸۱۵۷۸۰	۱٫۴
۱۷۶۰۹۹۷۴	۱۸۹۸۲۵۶۶	۲۱۰۱۷۴۳۲۸	۱۱۰۰۰۴۷۳۲	۱٫۵
۱۲۰۵۸۴۴۷۳	۱۳۴۵۸۴۰۷	۱۵۲۰۵۴۲۵	۸۰۷۸۵۷۲۵	۱٫۶
۹۰۴۱۰۷۹۰	۱۰۰۰۳۴۰۱	۱۱۳۴۷۱۳۱	۷۰۸۵۹۱۷	۱٫۷
۷۴۱۹۱۱۳	۷۸۴۳۶۹۱	۸۸۸۰۹۱۶	۵۸۶۰۰۵۰	۱٫۸
۶۰۲۳۵۵۲	۶۳۴۱۹۵۸	۷۱۵۰۵۷۰	۴۹۲۱۴۰۵	۱٫۹
۵۰۶۴۹۳۲	۵۳۰۹۲۳۶	۵۹۶۹۴۳۶	۴۲۴۰۱۸۱	۲
۴۳۶۰۲۲۴	۴۵۶۴۶۸۸	۵۱۰۷۹۰۴	۳۷۲۰۱۱۴	۲٫۱
۳۸۲۲۵۷۲	۳۹۹۰۶۴۶	۴۴۴۳۰۸۲	۳۳۰۸۲۷۹	۲٫۲
۳۴۱۶۹۵۸	۳۵۵۹۸۲۱	۳۹۴۸۵۷۴	۲۹۹۴۸۱۹	۲٫۳
۳۱۰۵۴۰۷	۳۲۲۸۰۵۶	۳۵۶۹۵۸۰	۲۷۴۳۴۹۹	۲٫۴
۲۸۵۸۴۱۷	۲۹۶۸۰۸۱	۳۲۷۰۰۶۸	۲۵۴۴۲۳۸	۲٫۵
۲۶۶۵۰۶۱	۲۷۶۲۰۷۲	۳۰۳۸۸۵۸	۲۳۸۵۷۰۱	۲٫۶
۲۵۰۱۴۶۳	۲۵۸۹۷۶۸	۲۸۳۹۲۸۸	۲۲۵۴۱۲۱	۲٫۷
۲۳۷۸۸۰۶	۲۴۶۱۴۶۰	۲۶۹۳۶۹۰	۲۱۵۰۵۴۷	۲٫۸
۲۲۷۶۸۱۵	۲۳۵۳۸۳۸	۲۵۷۱۶۰۰	۲۰۶۴۴۶۹	۲٫۹
۲۱۹۰۰۹۶	۲۲۶۲۷۳۰	۲۴۶۸۵۵۱	۱۹۹۳۷۷۵	۳
۲۱۱۹۱۹۲	۲۱۸۷۲۰۳	۲۳۸۴۰۹۱	۱۹۳۳۶۵۳	۳٫۱
۲۰۶۳۸۷۳	۲۱۲۸۹۴۶	۲۳۱۵۹۲۵	۱۸۸۴۹۶۴	۳٫۲
۲۰۱۶۵۸۴	۲۰۷۹۵۶۴	۲۲۵۹۹۳۳	۱۸۴۵۷۶۱	۳٫۳
۱۹۸۱۴۴۶	۲۰۲۲۷۶۳	۲۲۱۷۴۵۷	۱۸۱۴۴۸۴	۳٫۴
۱۹۴۲۴۵۷	۲۰۰۲۵۸۷	۲۱۶۹۸۴۷	۱۷۸۲۴۶۸	۳٫۵

همان‌گونه که در جدول ۶ ملاحظه می‌کنید، وقتی که انحراف استاندارد فرایند تغییر می‌کند، مقادیر میانگین طول دنباله برای نمودار کنترل داده-محور R کمتر از مقادیر میانگین طول دنباله برای انواع دیگر نمودار R هستند. یعنی، عملکرد بهتر نمودار کنترل داده-محور R در مقایسه با سایر نمودارها. به عنوان مثال، مطابق سطر اول جدول ۶، زمانی که انحراف استاندارد فرایند از مقدار تحت کنترل $\sigma = ۰/۰۰۹۶$ به مقدار خارج از کنترل $\hat{\sigma} = ۱/۲\hat{\sigma}$ تغییر می‌کند، نمودار کنترل داده-محور R به تقریباً ۱۹ نقطه برای تشخیص تغییر انحراف استاندارد فرایند به طور متوسط نیاز دارد. در حالی که نمودارهای کنترل چگالی-محور، مبتنی بر روش گشتاوری و مبتنی بر روش بیشینه درست‌نمایی R به طور متوسط به ترتیب بعد از تقریباً ۶۷، ۸۵ و ۷۵ نقطه این تغییر در انحراف استاندارد فرایند را کشف می‌کنند.

ملاحظه ۱۰۴. از مقایسه عملکرد رویکردهای پارامتری و ناپارامتری بخش ۲ و مبتنی بر مطالعات شبیه‌سازی نتیجه می‌شود که برای فرایندهای تحت کنترل، نمودارهای مبتنی بر روش بیشینه درستی \bar{X} و مبتنی بر روش گشتاوری R عملکرد بهتری دارند. اما برای فرایندهایی که خارج از کنترل قرار دارند، نمودارهای داده-محور \bar{X} و R عملکرد بهتری از خود نشان می‌دهند.

۵. نتیجه‌گیری و کارهای آینده

نمودارهای کنترل \bar{X} و R به طور گسترده برای نظارت همزمان میانگین و تغییرپذیری فرایند استفاده می‌شوند. در این مقاله، چهار رویکرد پارامتری و ناپارامتری مختلف و جدید برای طراحی توأم این دو نمودار مبتنی بر کیفیت فازی مثلی مرور شد. سپس یک مسئله معروف کاربردی در صنعت خودروسازی ارائه و عملکرد فرایند با استفاده از این نمودارها ارزیابی شد. ایده و هدف اصلی این مقاله، مقایسه عملکرد رویکردهای مختلف طراحی نمودارهای کنترل \bar{X} و R مبتنی بر کیفیت فازی مثلی است. در تمامی این رویکردها، نیازی به برقراری هیچ فرضی برای توزیع مشخصه کیفیت نیست و همچنین قضاوت منصفانه‌تری در مورد تحت کنترل بودن فرایند تولیدی ارائه می‌گردد. در مقاله حاضر، انواع رویکردهای طراحی نمودارهای کنترل میانگین و دامنه مبتنی بر کیفیت فازی مثلی مورد بحث قرار گرفت. طراحی انواع دیگر نمودارهای کنترل مبتنی بر کیفیت فازی مثلی یا دوزنقه‌ای از موضوعات بالقوه برای تحقیقات آینده به شمار می‌آید. علاوه بر این، در حالی که کیفیت محصولات به دو یا چند مشخصه بستگی دارد، رویکردهای مرور شده در این مقاله قابل تعمیم هستند.

تشکر و قدردانی

از داوران محترم که با نظرات ارزشمند خود باعث بهبود مقاله شدند، کمال تشکر و قدردانی را داریم.

مراجع

- [۱] ایرانمنش، ح. پرچی، ع. جباری نوقایی، م. (۱۴۰۰) کاربرد کیفیت فازی دوزنقه‌ای در صنعت خودروسازی. سیستم‌های فازی و کاربردها، دوره ۴، شماره ۲، صص. ۲۱ تا ۴۲.
- [۲] پرچی، ع. (۱۳۹۷) نمودارهای کنترل شوهارت براساس کیفیت فازی، سیستم‌های فازی و کاربردها، صص. ۵۵ تا ۷۲.
- [۳] پرچی، ع. ماشین‌چی، م. (۱۳۹۱) کنترل کیفیت آماری. انتشارات دانشگاه شهید باهنر کرمان.
- [۴] جهان، ع. عبدالشاه، م. (۱۳۸۴) نگرشی بر مراحل اجرائی کنترل کیفیت آماری. ششمین کنفرانس بین‌المللی مدیران کیفیت، مجموعه همایش‌های بین‌المللی اجلاس، تهران.

- [۵] قادری، ف. (۱۴۰۳) نمودارهای کنترل \bar{X} و R مبتنی بر کیفیت فازی. پایان‌نامه کارشناسی ارشد آمار ریاضی، دانشکده ریاضی و کامپیوتر، دانشگاه شهید باهنر کرمان.
- [6] Amirzadeh, V., Mashinchi, M., & Parchami, A. (2009). Construction of p-charts using degree of nonconformity. *Information Sciences*, 179(1-2), 150-160.
- [7] Amirzadeh, V., Mashinchi, M., & Yaghoobi, M. A. (2008). Construction of control charts using fuzzy multinomial quality, *Journal of Mathematics and Statistics*, 4(1), 26-31.
- [8] Chen, Y. C. (2017). A tutorial on kernel density estimation and recent advances, *Biostatistics Epidemiology*, 1, 161-187.
- [9] Ghaderi, F., Parchami, A., Amirzadeh, V., & Iranmanesh, H. (2025). Construction of $\bar{X} - R$ control charts using beta distribution for triangular fuzzy quality. *Iranian Journal of Fuzzy Systems*, 22(1), 49-69.
- [10] Iranmanesh, H., Parchami, A., & Sadeghpour Gildeh, B. (2022). Statistical testing quality and its Monte Carlo simulation based on fuzzy specification limits. *Iranian Journal of Fuzzy Systems*, 19(3), 1-17.
- [11] Montgomery, D. C. (2020). *Introduction to Statistical Quality Control*. John Wiley & Sons.
- [12] Moss, J., & Tveten, M. (2019). kdensity: An R package for kernel density estimation with parametric starts and asymmetric kernels. *Journal of Open Source Software*, 4(42), 1566.
- [13] Oakland, J., & Oakland, J. S. (2007). *Statistical Process Control*. Routledge.
- [14] Parchami, A., Iranmanesh, H., & Sadeghpour Gildeh, B. (2022). Monte Carlo statistical test for fuzzy quality. *Iranian Journal of Fuzzy Systems*, 19(1), 115-124.
- [15] Parchami, A., Amirzadeh, V., Iranmanesh, H., & Ghaderi, F. (2024). Percentile-based \bar{X} and R control charts for triangular fuzzy quality. *Iranian Journal of Fuzzy Systems*, 21(3), 91-101.
- [16] Parchami, A., Iranmanesh, H., & Sadeghpour Gildeh, B. (2021). Simulation testing of fuzzy quality with a case study in pipe manufacturing industries. *International Conference on Intelligent and Fuzzy Systems*, Istanbul, Turkey, 630-635.
- [17] Parchami, A., Sadeghpour, B., & Mashinchi, M. (2016). Why fuzzy quality?. *International Journal for Quality Research*, 10(3), 457-470.
- [18] Scrucca, L. (2004). qcc: an R package for quality control charting and statistical process control. *R News*, 4(1), 11-17.
- [19] Yongting, C. (1996). Fuzzy quality and analysis on fuzzy probability. *Fuzzy Sets and Systems*, 83, 283-290.