سیستم های فازی و کاربردها
سال هشتم، شماره اول (بهار و تابستان ۱۴۰۴)
صص. ۱۲۱ تا ۱۴۳

شاپای چاپی: ۲۷۱۷-۴۴۰۹
شاپای الکترونیکی: ۲۷۱۷-۳۹۸۴
DOI:10.22034/jfsa.2025.499981.1256

تعمیم ایده‌آل فازی روی BI-جبرها

رضا طیبی خرمی

گروه ریاضی، واحد اهواز، دانشگاه آزاد اسلامی، اهواز، ایران

تاریخ دریافت: ۱۴۰۳/۱۰/۲۷ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۴/۰۴/۲۸

نوع مقاله: علمی-پژوهشی

چکیده. BI-جبرها در سال ۲۰۱۷ توسط برومندسعید، کیم و رضایی معرفی شدند. این کلاس از جبرهای منطقی مورد توجه بسیاری از محققان قرار گرفت. هدف اصلی این مقاله ارائه مفاهیم T-ایده‌آل فازی، L-ایده‌آل و TL-ایده‌آل در BI-جبرها است. در ادامه بسته بودن این ایدآل‌ها تحت اعمال اجتماع، اشتراک و حاصل‌ضرب را مطالعه کرده و برقراری قضیه نمایش برای این ایده‌آل‌ها را بررسی می‌کنیم.

۱. سرآغاز

در سال ۱۹۶۷ جبر استلزام توسط ابوت [1] در [۱] معرفی شد. چن [2] و اولیور [3] در [۵] ثابت کردند که در یک جبر استلزام $(X;*)$، به‌ازای‌هر $p, q \in X$، $p * p = q * q$ برقرار است. ایمای

2010 *Mathematics Subject Classification.* 03B47, 03G25, 06D99
E-mail: r.t.khorami@iau.ac.ir.
عبارات و کلمات کلیدی. : BI-جبر، ایده‌آل فازی، T-ایده‌آل فازی، L-ایده‌آل، TL-ایده‌آل .

[1] Abbott
[2] Chen
[3] Oliveira

[1] و ایزاکی [2] در [۸] دو دسته از جبرهای انتزاعی به نام BCK-جبرها و BCI-جبرها را معرفی کردند. نیجرز [3] و کیم [4] در [۱۲] ایده B-جبرها، که تعمیمی از BCK-جبرها است و همچنین مفهوم d-جبرها که تعمیم مفید دیگری از BCK-جبرها است را معرفی و روابط مختلف بین d-جبرها و BCK-جبرها را بررسی کردند. جون [5] و همکاران در [۹] بر روی BH-جبرها که یك تعمیم دیگری از BCK-جبر، BCI-جبر و B-جبر است، تحقیق کردند.
برزوئی [6] و همکاران در [۵] مفهوم BCK-جبرها استلزامی را معرفی نمودند و دریافتند که جبرهای استلزامی با دوگان BCK-جبرهای استلزامی معادل هستند.

برومندسعید،[7] کیم [8] و رضایی [9] [۲] در سال ۲۰۱۷ جبر جدیدی به نام BI-جبر را تعریف کرده و ویژگی‌های اساسی آن‌ها را بررسی کردند. این جبر تعمیمی از هر دو مفهوم جبر استلزامی و BCK-جبر استلزامی است. BI-جبرها از برخی جبرهای معروف، مانند BCK-جبرها و شبکه‌های بولی ضعیف‌تر هستند. درواقع، این جبرها BI-جبر هستند، اما عکس آن صادق نیست.
زاده [10] در [۱۵] مفهوم زیرمجموعه فازی μ از مجموعه X را به عنوان تابعی از X به $[0, 1]$ معرفی کرد که ابزار کلیدی در ریاضیات فازی است و می‌تواند در تحلیل داده‌ها و تصمیم‌گیری‌ها بسیار مفید باشد. روزنفلد [11] در [۱۳] این مفهوم را برای نظریه گروه‌ها و گروهواره‌ها به‌کار برد. مجموعه‌های فازی به ما کمک می‌کنند تا در شرایط عدم قطعیت، تجزیه و تحلیل بهتری از ویژگی‌ها و رفتارهای سیستم‌ها داشته باشیم. لیو [12] در [۱۱] مفهوم ایده آل‌های فازی یک حلقه را معرفی و مطالعه کرد. نظریه ایده‌آل در مطالعه ساختارهای جبری فازی بسیار مفید است و به درک بهتر این ساختارها کمک می‌کند. ساختارهای جبری فازی به‌عنوان ابزارهایی قوی در تحلیل و مدل‌سازی رفتار سیستم‌های پیچیده در علوم ریاضی، کامپیوتر و مهندسی کاربرد دارند.
T-نرم‌ها نخستین بار در چارچوب فضاهای متریک احتمالاتی در کار منگر [13] ظاهر شدند. T-نرم‌ها ابزاری غیرقابل جایگزین برای تفسیر پیوستگی در منطق‌های فازی و به‌تبع‌آن، برای اشتراک

[1] Imai
[2] Is'eki
[3] Neggers
[4] Kim
[5] Jun
[6] Borzooei
[7] Borumand Saeid
[8] Kim
[9] Rezaei
[10] Zadeh
[11] Rosenfeld
[12] Liu
[13] Menger

مجموعه‌های فازی هستند. با این حال، این T-نرم‌ها به خودی خود اشیاء ریاضی جالبی هستند. برای جزئیات بیشتر به کتاب نرم‌های مثلثی [۱۰] مراجعه شود.
در سال ۱۹۹۰، گوگن [۱] مفهوم مجموعه‌های فازی کلاسیک را به L-زیرمجموعه‌ها تعمیم داد [۶]. این L-زیرمجموعه‌ها دارای مقادیر عضویت از یک مشبکه کراندار هستند و به‌طور خاص در شرایطی که نیاز به استفاده از ابزارهای ریاضی پیچیده‌تر و تجزیه و تحلیل عمیق‌تری وجود دارد، قابل استفاده‌اند. L-زیرمجموعه‌ها در منطق فازی، یادگیری ماشین و سیستم‌های تصمیم‌گیری مدرن به‌ویژه در کاربردهایی که نیاز به پردازش اطلاعات نادقیق یا فازی دارند، کاربرد زیادی پیدا کرده‌اند.

در این مقاله، قصد داریم جهت تعمیق مطالعات روی ساختار BI-جبرها مفاهیم T-ایده‌آل فازی، L-ایده‌آل و TL-ایده‌آل را به این جبرها تعمیم داده و برخی از ویژگی‌های آن‌ها را بررسی کنیم. به‌علاوه ارتباط بین آن‌ها نیز مطالعه خواهد شد.

۲. پیش نیازها

در این بخش، تعدادی از تعاریف و قضایایی که در این مقاله استفاده شده است را گردآوری کرده‌ایم.

تعریف ۱.۲. [۲] فرض کنید $(X;*,0)$ یک جبر از نوع $(2,0)$ باشد که در شرایط زیر صدق کند:

$(BI1)$ برای هر $p \in X$، $p*p=0$،

$(BI2)$ برای هر $p,q \in X$، $p*(q*p)=p$.

دراین‌صورت $(X;*,0)$ را یک BI-جبر می‌نامیم.

فرض کنید $(X;*,0)$ یک BI-جبر باشد. دراین‌صورت رابطه $\leq$ را روی X طوری تعریف می‌کنیم که برای هر $p,q \in X$ ، $p \leq q$، اگر و فقط اگر $p*q=0$.
فرض کنید S یک زیرمجموعه غیرتهی از X باشد که تحت عمل $*$ بسته باشد. دراین‌صورت S را یک زیرجبر X می‌نامیم.

تعریف ۲.۲. [۲] فرض کنید $(X;*,0)$ یک BI-جبر باشد. در این‌صورت زیرمجموعه ناتهی I از X را یک ایده‌آل می‌نامیم، هرگاه $0 \in I$ باشد و برای هر $q \in I$ که $p*q \in I$ بتوان نتیجه

[1] Goguen

گرفت که $p \in I$ است.
ایده‌آل I را سره می‌نامیم، هرگاه $I \neq X$. علاوه‌براین $\{0\}$ و X نیز ایده‌آل‌های $(X; *, 0)$ هستند که به آن‌ها ایده‌آل‌های بدیهی گویند.

گزاره ۳.۲. [۲] هر BI-جبر $(X; *, 0)$ در شرایط زیر صدق می‌کند:

(۱) $0 * p = 0$ برای هر $p \in X$،

(۲) $p * 0 = p$ برای هر $p \in X$،

(۳) $(p * q) * q = p * q$ برای هر $p, q \in X$،

(۴) اگر $p * q = r$، آن‌گاه $r * q = r$ و $q * r = q$، برای هر $p, q, r \in X$.

تعریف ۴.۲. [۱۴] فرض کنید L یک مشبکه کراندار باشد، یک نگاشت μ از X به L را یک L-زیرمجموعه می‌نامیم. مجموعه همه L-زیرمجموعه‌ها از X به L را L-مجموعه توانی از X می‌نامیم و با L^X نشان می‌دهیم.

فرض کنید $\mu, \nu \in L^X$ و $a \in L$ باشد. مجموعه

$$\{x \in X : \mu(x) \geq a\}$$

را a-برش از μ می‌نامیم و با μ_a نشان می‌دهیم.
μ را مشمول در ν نامیده و می‌نویسیم $\mu \leq \nu$ اگر برای هر $x \in X$، $\mu(x) \leq \nu(x)$ باشد. اگر $\mu \leq \nu$ و $\nu \leq \mu$ باشد، آن‌گاه μ را مساوی ν می‌نامیم و می‌نویسیم $\mu = \nu$.

تعریف ۵.۲. [۷] تابع $T : [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$ را یک T-نرم گوئیم اگر به‌ازای‌هر $x, y, z \in [0,1]$ در شرایط زیر صدق کند:

$(T1)$ $T(x, 1) = x$، (خاصیت مرزی)

$(T2)$ $T(x, y) = T(y, x)$، (خاصیت جابجایی)

$(T3)$ $T(x, y) \leq T(x, z)$ اگر $y \leq z$، (خاصیت هم‌نوایی)

$(T4)$ $T(x, T(y, z)) = T(T(x, y), z)$ (خاصیت شرکت‌پذیری).

هر T-نرم در شرایط زیر صدق می‌کند [۷]:

۱) اگر $x \leq z$ و $y \leq t$، آن‌گاه $T(x, y) \leq T(z, t)$،

۲) $T(T(x, y), T(z, t)) = T(T(x, z), T(y, t))$.

T-نرم‌ها زیادی توسط محققان برای کاربردهای متفاوت معرفی شده است. T-نرم‌هایی که بیشترین کاربرد را دارند عبارت‌اند از، برای‌هر $x, y \in [0, 1]$:

۱) $T_M(x, y) = min(x, y)$، (T-نرم مینیمم)

۲) $T_L(x, y) = max(0, x + y - 1)$، ($T$-نرم لوکاسیوویچ)

۳) $T_P(x, y) = xy$ (T-نرم حاصل‌ضرب).

می‌توان نشان داد که T-نرم مینیمم از همه T-نرم‌ها بزرگ‌تر است، به‌این‌معنی که برای‌هر T-نرم و هر $x, y \in [0, 1]$، $T(x, y) \leq T_M(x, y)$.

فرض کنید $\mu, \nu \in L^X$ و T و S دو نرم باشند، آن‌گاه $\mu \cap_T \nu, \mu \cup_S \nu \in L^X$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$(\mu \cap_T \nu)(x) = T(\mu(x), \nu(x))$$

و

$$(\mu \cup_S \nu)(x) = S(\mu(x), \nu(x)).$$

در ادامه این مقاله، فرض می‌کنیم T یک نرم روی BI-جبر X باشد.

۳. T-ایده‌آل فازی در BI-جبرها

در این بخش مفهوم T-ایده‌آل فازی در BI-جبرها را معرفی کرده و تعدادی از مهم‌ترین ویژگی‌های آن را بررسی می کنیم.

تعریف ۱.۳. فرض کنید X یک BI-جبر باشد و μ یک مجموعه فازی روی X باشد. μ را یک T-ایده‌آل فازی روی BI-جبر X می‌نامیم، اگر به‌ازای‌هر $x, y \in X$،

۱) $\mu(0) \geq \mu(x)$،

۲) $\mu(x) \geq T(\mu(y), \mu(x * y))$.

مجموعه همه T-ایده‌آل‌های فازی روی BI-جبر X را با $FTI(X)$ نشان می‌دهیم.
یک T_M-ایده‌آل فازی یک ایده‌آل فازی نامیده می شود.

مثال ۲.۳. (۱) فرض کنید $X = \{0, p, q, r\}$ یک BI-جبر با جدول زیر باشد:

$*$	$\circ$	p	q	r
$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$
p	p	$\circ$	p	q
q	q	q	$\circ$	q
r	r	q	r	$\circ$

جدول ۱

مجموعه فازی μ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\mu(\circ) = ۰/۹,\ \mu(p) = ۰/۳,\ \mu(q) = ۰/۷,\ \mu(r) = ۰/۷,$$

آن‌گاه μ یک T_P-ایده‌آل فازی روی X است اما یک T_M-ایده‌آل فازی روی X نیست. زیرا

$$۰/۳ = \mu(p) \ngeq \mu(r) \wedge \mu(p * r) = ۰/۵.$$

(۲) فرض کنید $X = \{\circ, p, q, r, s\}$ یک BI-جبر با جدول زیر باشد:

$*$	$\circ$	p	q	r	s
$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$
p	p	$\circ$	p	p	p
q	q	q	$\circ$	p	q
r	r	r	s	$\circ$	q
s	s	s	s	p	$\circ$

جدول ۲

مجموعه فازی μ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\mu(\circ) = ۱,\ \mu(p) = ۰/۱,\ \mu(q) = ۰/۴,\ \mu(r) = ۰/۷,\ \mu(s) = ۰/۵,$$

آن‌گاه μ یک T_P-ایده‌آل فازی و همچنین T_M-ایده‌آل فازی از X است.

مثال ۳.۳. مجموعه $X = [۰,\infty)$ به همراه عمل دوتایی زیر

$$p * q = \begin{cases} p & \text{اگر } p \neq q، \\ ۰ & \text{اگر } p = q، \end{cases} \qquad (۳ \cdot ۱)$$

یک BI-جبر است. $\mu : X \to [۰,۱]$ را به‌صورت

$$\mu(x) = \begin{cases} ۱ & \text{اگر } x = ۰، \\ x & \text{اگر } x \in (۰,۱]، \\ \frac{۱}{x} & \text{اگر } x \in (۱,\infty)، \end{cases} \qquad (۳ \cdot ۲)$$

تعریف می‌کنیم. μ یک T_M-ایده‌آل فازی از X است.

قضیه ۴.۳. فرض کنید μ و ν دو T-ایده‌آل فازی از X باشند، دراین‌صورت $\mu \cap \nu$ نیز یک T-ایده‌آل فازی از X است.

اثبات. برای هر $x \in X$،

$$\begin{aligned} (\mu \cap \nu)(۰) &= T(\mu(۰), \nu(۰)) \\ &\geq T(\mu(x), \nu(x)) \\ &= (\mu \cap \nu)(x). \end{aligned}$$

به‌علاوه برای هر $x, y \in X$،

$$\begin{aligned} (\mu \cap \nu)(x) &= T(\mu(x), \nu(x)) \\ &\geq T(T(\mu(y), \mu(x*y)), T((\nu(y), \nu(x*y))) \\ &\geq T(T((\mu(y), \nu(y)), T((\mu(x*y), \nu(x*y))) \\ &= T((\mu \cap \nu)(y), (\mu \cap \nu)(x*y)). \end{aligned}$$

□

نتیجه ۵.۳. فرض کنید $\{\mu_i : i \in \Lambda\}$ یک خانواده از T-ایده‌آل‌های فازی روی X باشد، دراین‌صورت $\bigcap_{i \in \Lambda} \mu_i$ نیز یک T-ایده‌آل فازی از X است.

مثال زیر نشان می‌دهد که در حالت کلی اجتماع دو T-ایده‌آل فازی یک T-ایده‌آل فازی نیست.

مثال ۶.۳. فرض کنید X، BI-جبر ذکر شده در مثال (۱)۳٫۲ باشد. مجموعه‌های فازی μ و ν را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\mu(0) = 0/9,\ \mu(p) = 0/3,\ \mu(q) = 0/5,\ \mu(r) = 0/7,$$

و

$$\nu(0) = 0/8,\ \nu(p) = 0/1,\ \nu(q) = 0/4,\ \nu(r) = 0/6,$$

آن‌گاه μ و ν دو T_P-ایده‌آل فازی از X هستند. اجتماع این دو T_P-ایده‌آل فازی تحت S-نرم لوکاسیوویچ ($S(a,b) = min(1, a+b)$) به صورت زیر به دست می‌آید:

$$(\mu\cup\nu)(0) = S(\mu(0),\nu(0)) = S(0/9, 0/8) = 1 := \gamma(0),$$

$$(\mu\cup\nu)(p) = S(\mu(p),\nu(p)) = S(0/3, 0/1) = 0/4 := \gamma(p),$$

$$(\mu\cup\nu)(q) = S(\mu(q),\nu(q)) = S(0/5, 0/4) = 0/9 := \gamma(q),$$

$$(\mu\cup\nu)(r) = S(\mu(r),\nu(r)) = S(0/7, 0/6) = 1 := \gamma(r),$$

که یک T_P-ایده‌آل فازی از X نیست، زیرا

$$\begin{aligned} 0/4 = \gamma(p) &\ngeq T_P(\gamma(p*r),\gamma(r)) \\ &= T_P(\gamma(q),\gamma(r)) = T_P(0/9, 1) \\ &= (0/9)(1) = 0/9. \end{aligned}$$

قضیه ۷.۳. اگر به‌ازای‌هر $t\in[0,1]$، μ_t تهی یا یک ایده‌آل از X باشد، آن‌گاه مجموعه فازی μ یک T-ایده‌آل فازی روی X است.

اثبات. فرض کنید به‌ازای‌هر $t\in[0,1]$، μ_t تهی یا یک ایده‌آل از X باشد. ازاین‌رو به‌ازای‌هر $t\in[0,1]$ که $\mu_t\neq\emptyset$ است، داریم $0\in\mu_t$. بنابراین به‌ازای‌هر $t\in[0,1]$، $\mu(0)\geq t$.
درنتیجه به‌ازای‌هر $x\in X$، داریم $\mu(0)\geq\mu(x)$.
اکنون فرض کنید $T(\mu(y),\mu(x*y)) = t$. پس $\mu(y)\geq t$ و $\mu(x*y)\geq t$. بنابراین $y, x*y\in\mu_t$. با توجه به ایده‌آل بودن μ_t، خواهیم داشت $x\in\mu_t$ و این یعنی $\mu(x)\geq t$. □

عکس قضیه ۳٫۷، زمانی که T نرم مینیمم باشد، برقرار است.

قضیه ۸.۳. اگر مجموعه فازی μ یک T_M–ایده‌آل فازی روی X باشد، آن‌گاه به‌ازای‌هر $t \in [0, 1]$، μ_t تهی یا یک ایده‌آل از X است.

اثبات. فرض کنید μ یک T_M–ایده‌آل فازی روی X باشد و برای $t \in [0, 1]$،

$$\emptyset \neq \mu_t = \{x \in X : \mu(x) \geq t\}.$$

چون به‌ازای‌هر $x \in X$، داریم $\mu(0) \geq \mu(x)$، پس $\mu(0) \geq t$، یعنی $0 \in \mu_t$. اکنون فرض کنید $y, x * y \in \mu_t$ باشند، پس $\mu(y) \geq t$ و $\mu(x * y) \geq t$ است. ازاین‌که $\mu(x) \geq T_M(\mu(y), \mu(x * y)) \geq t$ است، نتیجه می‌گیریم $x \in \mu_t$. □

مثال زیر نشان می‌دهد که در حالت کلی عکس قضیه ۳٫۷ درست نیست.

مثال ۹.۳. فرض کنید X، μ و T همانند مثال (۱)۳٫۲ باشند. μ یک T_P–ایده‌آل از X است. μ_t را به صورت زیر به دست می‌آوریم:

$$\mu_t = \begin{cases} X & \text{اگر } 0 \leq t \leq 0/3، \\ \{0, q, r\} & \text{اگر } 0/3 < t \leq 0/7، \\ \{0\} & \text{اگر } 0/7 < t \leq 0/9، \\ \emptyset & \text{اگر } 0/9 < t \leq 1، \end{cases} \tag{۳.۳}$$

برای $0/3 < t \leq 0/7$، $\mu_t = \{0, q, r\}$ یک ایده‌آل از X نیست. زیرا $r \in \mu_t$ و $p * r \in \mu_t$ اما $p \notin \mu_t$.

قضیه ۱۰.۳. فرض کنید μ و ν دو T–ایده‌آل فازی از X باشند، دراین‌صورت $\mu.\nu$ نیز یک T–ایده‌آل فازی از X است که $(\mu.\nu)(x) = T(\mu(x), \nu(x))$.

اثبات.

$$\begin{aligned} (\mu.\nu)(0) &= T(\mu(0), \nu(0)) \\ &\geq T(\mu(x), \nu(x)) \\ &= (\mu.\nu)(x). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\mu.\nu)(x) &= T(\mu(x),\nu(x))\\ &\geq T(T(\mu(y),\mu(x*y)),T(\nu(y),\nu(x*y)))\\ &= T(T(\mu(y),\nu(y)),T(\mu(x*y),\nu(x*y)))\\ &= T((\mu.\nu)(y)),(\mu.\nu)(x*y)).\end{aligned}$$

□

قضیه ۱۱.۳. فرض کنید T_1 و T_2 دو T-نرم باشند به‌طوری‌که $T_1 \leq T_2$ باشد. اگر μ یک T_2-ایده‌آل فازی از X باشد، آن‌گاه یک T_1-ایده‌آل فازی از X نیز می‌شود.

اثبات. فرض کنید μ یک T_2-ایده‌آل فازی از X باشد. بنابراین داریم

$$\mu(x) \geq T_2(\mu(y),\mu(x*y)) \geq T_1(\mu(y),\mu(x*y)).$$

پس μ یک T_1-ایده‌آل فازی از X است. □

مثال (۱)۳٫۲ نشان می‌دهد که در حالت کلی عکس قضیه بالا درست نیست.

لم ۱۲.۳. فرض کنید $\{I_\alpha\}_{\alpha\in[0,1]}$ کلاسی از زیرمجموعه‌های X باشد، به‌طوری‌که به‌ازای‌هر $A \subseteq [0,1]$،

$$I_{(\bigvee_{\alpha\in A}\alpha)} = \bigcap_{\alpha\in A} I_\alpha. \qquad (1)$$

از تساوی (۱) می‌توان نتیجه گرفت که اگر $b,c \in [0,1]$ و $b \leq c$، آن‌گاه

$$I_c \subseteq I_b. \qquad (2)$$

قضیه ۱۳.۳. (قضیه نمایش) فرض کنید $\{I_\alpha\}_{\alpha\in[0,1]}$ کلاسی از ایده‌آل‌های X باشد. شرط لازم و کافی برای وجود T-ایده‌آل فازی μ از X به‌طوری‌که به‌ازای‌هر $\alpha \in [0,1]$، $\mu_\alpha = I_\alpha$، این است که به‌ازای‌هر $A \subseteq [0,1]$،

$$I_{(\bigvee_{\alpha\in A}\alpha)} = \bigcap_{\alpha\in A} I_\alpha. \qquad (*)$$

اثبات. فرض کنید T–ایده‌آل فازی μ از X وجود دارد به‌طوری‌که به‌ازای‌هر $\alpha \in [\circ, ۱]$، $\mu_\alpha = I_\alpha$. نشان می‌دهیم که $(*)$ برقرار است. فرض کنید $A \subseteq [\circ, ۱]$ و $x \in I_\beta$ که $\beta = \bigvee_{\alpha \in A} \alpha$. پس $x \in \mu_\beta$. از این رو به‌ازای‌هر $\alpha \in A$، $\mu(x) \geq \alpha$. بنابراین به‌ازای‌هر $\alpha \in A$، $x \in \mu_\alpha = I_\alpha$. پس $x \in \bigcap_{\alpha \in A} I_\alpha$ و این یعنی $I_{(\bigvee_{\alpha \in A} \alpha)} \subseteq \bigcap_{\alpha \in A} I_\alpha$. عکس رابطه فوق به‌صورت مشابه اثبات می‌شود، بدین ترتیب خواهیم داشت:

$$I_{(\bigvee_{\alpha \in A} \alpha)} = \bigcap_{\alpha \in A} I_\alpha.$$

برعکس، فرض کنید $(*)$ برقرار باشد. مجموعه فازی $\mu : X \to [\circ, ۱]$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم $\mu(x) = \bigvee_{x \in I_\alpha} \alpha$، نشان می‌دهیم μ یک T–ایده‌آل فازی است. به‌ازای‌هر ایده‌آل ناتهی I از X، داریم $\circ \in I$ و به‌ازای‌هر $x \in X$،

$$\{\alpha \in [\circ, ۱] : x \in I_\alpha\} \subseteq \{\alpha \in [\circ, ۱] : \circ \in I_\alpha\}.$$

می‌توان نتیجه گرفت که

$$\mu(x) = \bigvee_{x \in I_\alpha} \alpha \leq \bigvee_{\circ \in I_\alpha} \alpha = \mu(\circ).$$

اکنون فرض کنید $x, y \in X$ و

$$T\{\mu(y), \mu(x * y)\} = T\{\bigvee_{y \in I_\alpha} \alpha, \bigvee_{x * y \in I_\alpha} \alpha\} = t.$$

بنابراین $\bigvee_{y \in I_\alpha} \alpha \geq t$ و $\bigvee_{x * y \in I_\alpha} \alpha \geq t$. حال فرض کنید $A = \{\alpha \in [\circ, ۱] : x \in I_\alpha\}$. پس $x \in \bigcap_{\alpha \in A} I_\alpha = I_{\bigvee_{\alpha \in A} \alpha} \subseteq I_t$. لذا

$$\mu(x) = \bigvee_{x \in I_\alpha} \alpha \geq t = T\{\mu(y), \mu(x * y)\}.$$

حال نشان می‌دهیم به‌ازای‌هر $\alpha \in [\circ, ۱]$، $\mu_\alpha = I_\alpha$. ازاین‌رو $b \in [\circ, ۱]$ را درنظر بگیرید. فرض کنید $x \in \mu_b$. باتوجه‌به تعریف‌های μ_b و $\mu(x)$، داریم

$$b \leq \bigvee_{x \in I_\alpha} \alpha. \tag{۳}$$

با استفاده از (۲) و (۳) خواهیم داشت

$$I_{\bigvee_{x \in I_\alpha} \alpha} \subseteq I_b. \tag{۴}$$

به‌علاوه از (۱) و (۴) می‌توان گزاره زیر را به‌دست آورد

$$\bigcap_{x\in I_\alpha} I_\alpha \subseteq I_b. \qquad (۵)$$

روشن است که $x \in \bigcap_{x\in I_\alpha} I_\alpha$. پس (۵) نتیجه می‌دهد $x \in I_b$. ازاین‌رو به‌ازای‌هر $b \in [0,1]$،

$$\mu_b \subseteq I_b. \qquad (۶)$$

حال فرض کنید $x \in I_b$، با استفاده از (۳) و تعریف $\mu(x)$، نتیجه می‌گیریم که $b \le \mu(x)$. یعنی $x \in \mu_b$. پس به‌ازای‌هر $b \in [0,1]$، $I_b \subseteq \mu_b$. بنابراین به‌ازای‌هر $\alpha \in [0,1]$، $\mu_\alpha = I_\alpha$. □

۴. L-ایده‌آل در BI-جبرها

در این بخش مفهوم L-ایده‌آل فازی در BI-جبرها را معرفی کرده و بسته بودن این ایدآل‌ها تحت اعمال اجتماع، اشتراک و حاصل‌ضرب را مطالعه کرده و برقراری قضیه نمایش برای این ایده‌آل‌ها را بررسی می‌کنیم.

تعریف ۱.۴. فرض کنید X یک BI-جبر باشد و μ یک L-مجموعه روی X باشد. μ را یک L-ایده‌آل روی BI-جبر X می‌نامیم، اگر به‌ازای‌هر $x, y \in X$،
۱) $\mu(0) \ge \mu(x)$،
۲) $\mu(x) \ge min\{\mu(y), \mu(x*y)\}$.

مجموعه همه L-ایده‌آل‌های روی BI-جبر X را با $LI(X)$ نشان می‌دهیم.

مثال ۲.۴.

(۱) فرض کنید X، BI-جبر ذکر شده در مثال (۱)۳٫۲ باشد. L-مجموعه $\mu : X \to L$ را به‌صورت

$$\mu(0) = t_1,\ \mu(p) = \mu(q) = t_2,\ \mu(r) = t_3$$

که $t_1, t_2, t_3 \in L$ و $(t_2 < t_3 < t_1)$. تعریف می‌کنیم. μ یک L-ایده‌آل از X است. اما اگر μ را به‌صورت

$$\mu(0) = t_1,\ \mu(p) = t_2,\ \mu(q) = t_3,\ \mu(r) = t_4$$

که $t_1, t_2, t_3, t_4 \in L$ و $(t_2 < t_3 < t_4 < t_1)$ درنظر بگیریم، μ یک L-ایده‌آل از X نمی‌شود، زیرا

$$\mu(p) \ngeq min\{\mu(r), \mu(p * r)\}.$$

(۲) فرض کنید X، BI-جبر ذکر شده در مثال (۲)۳٫۲ باشد. L-مجموعه $\mu : X \to L$ را به‌صورت

$$\mu(0) = t_1,\ \mu(p) = t_2,\ \mu(q) = t_3,\ \mu(r) = t_4,\ \mu(s) = t_5$$

که $t_1, t_2, t_3, t_4, t_5 \in L$ و $(t_2 < t_3 < t_5 < t_4 < t_1)$ تعریف می‌کنیم. μ یک L-ایده‌آل از X است. اما اگر μ را به‌صورت

$$\mu(0) = t_1,\ \mu(p) = t_2,\ \mu(q) = t_3,\ \mu(r) = t_4,\ \mu(s) = t_5$$

که $t_1, t_2, t_3, t_4, t_5 \in L$ و $(t_5 < t_4 < t_3 < t_2 < t_1)$ درنظر بگیریم، μ یک L-ایده‌آل از X نمی شود، زیرا

$$\mu(s) \ngeq min\{\mu(r), \mu(s * r)\}.$$

مثال ۳.۴. مجموعه $X = [0, \infty)$ به همراه عمل دوتایی

$$p * q = \begin{cases} p & \text{اگر } p \neq q، \\ 0 & \text{اگر } p = q، \end{cases} \tag{۴.۱}$$

یک BI-جبر است. $\mu : X \to L$ را به‌صورت

$$\mu(x) = \begin{cases} 1 & \text{اگر } x = 0، \\ x & \text{اگر } x \in (0, 1]، \\ \frac{1}{x} & \text{اگر } x \in (1, \infty)، \end{cases} \tag{۴.۲}$$

تعریف می‌کنیم. μ یک L-ایده‌آل از X است.

قضیه ۴.۴. اگر μ و ν دو L-ایده‌آل از X باشند، آن‌گاه $\mu \cap \nu$ نیز یک L-ایده‌آل از X است.

اثبات. برای هر $x \in X$،

$$\begin{aligned}(\mu \cap \nu)(\circ) &= min(\mu(\circ), \nu(\circ)) \\ &\geq min(\mu(x), \nu(x)) \\ &= (\mu \cap \nu)(x).\end{aligned}$$

به‌علاوه برای هر $x, y \in X$،

$$\begin{aligned}(\mu \cap \nu)(x) &= min(\mu(x), \nu(x)) \\ &\geq min(min(\mu(y), \mu(x*y)), min((\nu(y), \nu(x*y))) \\ &= min(min((\mu(y), \nu(y)), min((\mu(x*y), \nu(x*y))) \\ &= min((\mu \cap \nu)(y), (\mu \cap \nu)(x*y)).\end{aligned}$$

□

نتیجه ۵.۴. فرض کنید $\{\mu_i : i \in \Lambda\}$ یک خانواده از L-ایده‌آل‌های روی X باشد، دراین‌صورت $\bigcap_{i \in \Lambda} \mu_i$ نیز یک L-ایده‌آل از X است.

قضیه ۶.۴. L-مجموعه μ یک L-ایده‌آل روی X است اگروتنهااگر به‌ازای‌هر $t \in [\circ, ۱]$، μ_t تهی یا یک ایده‌آل فازی از X باشد.

اثبات. فرض کنید μ یک L-ایده‌آل روی X باشد و برای $t \in [\circ, ۱]$،

$$\emptyset \neq \mu_t = \{x \in X : \mu(x) \geq t\}.$$

چون به‌ازای‌هر $x \in X$، داریم $\mu(\circ) \geq \mu(x)$ است، پس $\mu(\circ) \geq t$، یعنی $\circ \in \mu_t$. اکنون فرض کنید $y, x*y \in \mu_t$ باشند، پس $\mu(y) \geq t$ و $\mu(x*y) \geq t$ است. از این‌که $\mu(x) \geq min\{\mu(y), \mu(x*y)\} \geq t$ است، نتیجه می‌گیریم $x \in \mu_t$.
برعکس، فرض کنید به‌ازای‌هر $t \in [\circ, ۱]$، μ_t تهی یا یک ایده‌آل فازی از X باشد. ازاین‌رو به‌ازای‌هر $t \in [\circ, ۱]$ که $\mu_t \neq \emptyset$ است، داریم $\circ \in \mu_t$. بنابراین به‌ازای‌هر $t \in [\circ, ۱]$، $\mu(\circ) \geq t$. درنتیجه به‌ازای‌هر $x \in X$، داریم $\mu(\circ) \geq \mu(x)$.
اکنون فرض کنید $min\{\mu(y), \mu(x*y)\} = t$. پس $\mu(y) \geq t$ و $\mu(x*y) \geq t$. بنابراین $y, x*y \in \mu_t$. با توجه به ایده‌آل بودن μ_t، خواهیم داشت $x \in \mu_t$ و این یعنی $\mu(x) \geq t$. □

قضیه ۷.۴. اگر μ و ν دو L-ایده‌آل از X باشند، آن‌گاه $\mu.\nu$ نیز یک L-ایده‌آل از X است که $(\mu.\nu)(x) = min(\mu(x), \nu(x))$.

اثبات.

$$\begin{aligned}(\mu.\nu)(\circ) &= min(\mu(\circ), \nu(\circ)) \\ &\geq min(\mu(x), \nu(x)) \\ &= (\mu.\nu)(x).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\mu.\nu)(x) &= min(\mu(x), \nu(x)) \\ &\geq min(min(\mu(y), \mu(x*y)), min(\nu(y), \nu(x*y))) \\ &= min(min(\mu(y), \nu(y)), min(\mu(x*y), \nu(x*y))) \\ &= min((\mu.\nu)(y)), (\mu.\nu)(x*y)).\end{aligned}$$

□

لم ۸.۴. فرض کنید $\{I_\alpha\}_{\alpha\in[\circ,1]}$ کلاسی از زیرمجموعه‌های X باشد، به‌طوری‌که به‌ازای‌هر $A \subseteq [\circ, 1]$،

$$I_{(\bigvee_{\alpha\in A}\alpha)} = \bigcap_{\alpha\in A} I_\alpha. \qquad (1)$$

از تساوی (۱) می‌توان نتیجه گرفت که اگر $b, c \in [\circ, 1]$ و $b \leq c$، آن‌گاه

$$I_c \subseteq I_b. \qquad (2)$$

قضیه ۹.۴. (قضیه نمایش) فرض کنید $\{I_\alpha\}_{\alpha\in L}$ کلاسی از ایده‌آل‌های X باشد. شرط لازم‌وکافی برای وجود L-ایده‌آل μ از X به‌طوری‌که به‌ازای‌هر $\alpha \in L$، $\mu_\alpha = I_\alpha$، این است که به‌ازای‌هر $A \subseteq L$،

$$I_{(\bigvee_{\alpha\in A}\alpha)} = \bigcap_{\alpha\in A} I_\alpha. \qquad (*)$$

اثبات. فرض کنید L-ایده‌آل μ از X وجود دارد به‌طوری‌که به‌ازای‌هر $\alpha \in L$، $\mu_\alpha = I_\alpha$. نشان می‌دهیم که $(*)$ برقرار است. فرض کنید $A \subseteq L$ و $x \in I_\beta$ که $\beta = \bigvee_{\alpha\in A}\alpha$. پس

$x \in \mu_\beta$. ازاین‌رو به‌ازای‌هر $\alpha \in A$، $\mu(x) \geq \alpha$. بنابراین به‌ازای‌هر $\alpha \in A$، $x \in \mu_\alpha = I_\alpha$. پس $x \in \bigcap_{\alpha\in A} I_\alpha$ و این یعنی $\bigcap_{\alpha\in A} I_\alpha \subseteq I_{(\bigvee_{\alpha\in A}\alpha)}$. عکس رابطه فوق به صورت مشابه اثبات می‌شود، بدین ترتیب خواهیم داشت:

$$I_{(\bigvee_{\alpha\in A}\alpha)} = \bigcap_{\alpha\in A} I_\alpha.$$

برعکس، فرض کنید $(*)$ برقرار باشد. L-مجموعه $\mu : X \to L$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم $\mu(x) = \bigvee_{x\in I_\alpha} \alpha$، نشان می‌دهیم μ یک L-ایده‌آل است. به‌ازای‌هر ایده‌آل ناتهی I از X، داریم $\circ \in I$ و به‌ازای‌هر $x \in X$،

$$\{\alpha \in L : x \in I_\alpha\} \subseteq \{\alpha \in L : \circ \in I_\alpha\}.$$

می‌توان نتیجه گرفت که

$$\mu(x) = \bigvee_{x\in I_\alpha} \alpha \leq \bigvee_{\circ\in I_\alpha} \alpha = \mu(\circ).$$

اکنون فرض کنید $x, y \in X$ و

$$min\{\mu(y), \mu(x*y)\} = min\{\bigvee_{y\in I_\alpha} \alpha, \bigvee_{x*y\in I_\alpha} \alpha\} = t.$$

بنابراین $\bigvee_{y\in I_\alpha} \alpha \geq t$ و $\bigvee_{x*y\in I_\alpha} \alpha \geq t$. حال فرض کنید $A = \{\alpha \in L : x \in I_\alpha\}$. پس $I_t \subseteq I_{\bigvee_{\alpha\in A}\alpha} = \bigcap_{\alpha\in A} I_\alpha \ni x$. لذا

$$\mu(x) = \bigvee_{x\in I_\alpha} \alpha \geq t = min\{\mu(y), \mu(x*y)\}.$$

حال نشان می‌دهیم به‌ازای‌هر $\alpha \in L$، $\mu_\alpha = I_\alpha$. ازاین‌رو $b \in L$ را درنظر گرفته و فرض کنید $x \in \mu_b$. باتوجه‌به تعریف‌های μ_b و $\mu(x)$، خواهیم داشت

$$b \leq \bigvee_{x\in I_\alpha} \alpha. \qquad (۳)$$

با استفاده از (۲) و (۳) داریم

$$I_{\bigvee_{x\in I_\alpha}\alpha} \subseteq I_b. \qquad (۴)$$

به‌علاوه از (۱) و (۴) می‌توان گزاره زیر را به دست آورد

$$\bigcap_{x\in I_\alpha} I_\alpha \subseteq I_b. \qquad (۵)$$

دراین‌صورت $x \in \bigcap_{x\in I_\alpha} I_\alpha$. پس (۵) نتیجه می‌دهد $x \in I_b$. ازاین‌رو به‌ازای‌هر $b \in [0,1]$،

$$\mu_b \subseteq I_b. \tag{۶}$$

حال فرض کنید $x \in I_b$، با استفاده از (۳) و تعریف $\mu(x)$، نتیجه می‌گیریم که $b \leq \mu(x)$. یعنی $x \in \mu_b$. پس به‌ازای‌هر $b \in L$، $I_b \subseteq \mu_b$. بنابراین به‌ازای‌هر $\alpha \in L$، $\mu_\alpha = I_\alpha$. □

۵. TL-ایده‌آل در BI-جبرها

در این بخش مفهوم TL-ایده‌آل فازی در BI-جبرها را معرفی کرده و تعدادی از مهم‌ترین ویژگی‌های آن‌ها مانند قضیه نمایش را مطالعه می‌کنیم.

تعریف ۱.۵. فرض کنید X یک BI-جبر باشد و μ یک L-مجموعه روی X باشد. μ را یک TL-ایده‌آل روی X می‌نامیم، اگر به‌ازای‌هر $x, y \in X$،

۱) $\mu(0) \geq \mu(x)$،

۲) $\mu(x) \geq T(\mu(y), \mu(x * y))$.

مجموعه همه TL-ایده‌آل‌های روی BI-جبر X را با $TLI(X)$ نشان می‌دهیم.

اگر در یک TL-ایده‌آل روی یک BI-جبر، T-نرم مینیمم را انتخاب کنیم، TL-ایده‌آل به L-ایده‌آل تبدیل می شود.

مثال ۲.۵.

(۱) فرض کنید X، BI-جبر ذکر شده در مثال (۱)۳٫۲ باشد. L-مجموعه μ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\mu(0) = t_1,\ \mu(p) = t_2,\ \mu(q) = t_3,\ \mu(r) = t_4$$

که $t_1, t_2, t_3, t_4 \in L$ و $(t_2 < t_3 < t_4 < t_1)$، آن‌گاه μ یک T_PL-ایده‌آل از X است اما یک T_ML-ایده‌آل از X نیست.

(۲) فرض کنید X، BI-جبر ذکر شده در مثال (۲)۳٫۲ باشد. L-مجموعه μ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\mu(0) = t_1,\ \mu(p) = t_2,\ \mu(q) = t_3,\ \mu(r) = t_4,\ \mu(s) = t_5$$

که $L \ni t_۱, t_۲, t_۳, t_۴, t_۵$ و $(t_۱ > t_۴ > t_۵ > t_۳ > t_۲)$، آن‌گاه μ یک $T_P L$-ایده‌آل همچنین $T_M L$-ایده‌آل از X است.

مثال ۳.۵. مجموعه $X = [\circ, \infty)$ به همراه عمل دوتایی زیر

$$p * q = \begin{cases} p & \text{اگر } p \neq q، \\ \circ & \text{اگر } p = q، \end{cases} \qquad (۱.۵)$$

یک BI-جبر است. $\mu : X \to L$ را به‌صورت

$$\mu(x) = \begin{cases} ۱ & \text{اگر } x = \circ، \\ x & \text{اگر } x \in (\circ, ۱]، \\ \frac{۱}{x} & \text{اگر } x \in (۱, \infty)، \end{cases} \qquad (۲.۵)$$

تعریف می‌کنیم. μ یک TL-ایده‌آل از X است.

قضیه ۴.۵. فرض کنید μ و ν دو TL-ایده‌آل از X باشند، دراین‌صورت $\mu \cap \nu$ نیز یک TL-ایده‌آل از X است.

اثبات. برای هر $x \in X$،

$$\begin{aligned} (\mu \cap \nu)(\circ) &= T(\mu(\circ), \nu(\circ)) \\ &\geq T(\mu(x), \nu(x)) \\ &= (\mu \cap \nu)(x). \end{aligned}$$

به‌علاوه برای هر $x, y \in X$،

$$\begin{aligned} (\mu \cap \nu)(x) &= T(\mu(x), \nu(x)) \\ &\geq T(T(\mu(y), \mu(x * y)), T((\nu(y), \nu(x * y))) \\ &\geq T(T((\mu(y), \nu(y)), T((\mu(x * y), \nu(x * y))) \\ &= T((\mu \cap \nu)(y), (\mu \cap \nu)(x * y)). \end{aligned}$$

□

نتیجه ۵.۵. فرض کنید $\{\mu_i : i \in \Lambda\}$ یک خانواده از TL-ایده‌آل‌های روی X باشد، دراین‌صورت $\bigcap_{i\in\Lambda} \mu_i$ نیز یک TL-ایده‌آل از X است.

قضیه ۶.۵. اگر به‌ازای‌هر $t \in [0,1]$، μ_t تهی یا یک ایده‌آل از X باشد، آن‌گاه مجموعه فازی μ یک TL-ایده‌آل فازی روی X است.

اثبات. فرض کنید به‌ازای‌هر $t \in [0,1]$، μ_t تهی یا یک ایده‌آل از X باشد. ازاین‌رو به‌ازای‌هر $t \in [0,1]$ که $\mu_t \neq \emptyset$ است، داریم $0 \in \mu_t$. بنابراین به‌ازای‌هر $t \in [0,1]$، $\mu(0) \geq t$. درنتیجه به‌ازای‌هر $x \in X$، داریم $\mu(0) \geq \mu(x)$.
اکنون فرض کنید $T(\mu(y), \mu(x*y)) = t$. پس $\mu(y) \geq t$ و $\mu(x*y) \geq t$. بنابراین $y, x*y \in \mu_t$. با توجه به ایده‌آل بودن μ_t، خواهیم داشت $x \in \mu_t$ و این یعنی $\mu(x) \geq t$. □

عکس قضیه ۵٫۶، زمانی که T نرم مینیمم باشد، برقرار است.

قضیه ۷.۵. اگر مجموعه فازی μ یک TL_M-ایده‌آل فازی روی X باشد، آن‌گاه به‌ازای‌هر $t \in [0,1]$، μ_t تهی یا یک ایده‌آل از X است.

اثبات. فرض کنید μ یک TL_M-ایده‌آل فازی روی X باشد و برای $t \in [0,1]$،

$$\emptyset \neq \mu_t = \{x \in X : \mu(x) \geq t\}.$$

چون به‌ازای‌هر $x \in X$، داریم $\mu(0) \geq \mu(x)$، پس $\mu(0) \geq t$، یعنی $0 \in \mu_t$. اکنون فرض کنید $y, x*y \in \mu_t$ باشند، پس $\mu(y) \geq t$ و $\mu(x*y) \geq t$ است. ازاین‌که $\mu(x) \geq TL_M(\mu(y), \mu(x*y)) \geq t$ است، نتیجه می‌گیریم $x \in \mu_t$. □

مثال زیر نشان می‌دهد که در حالت کلی عکس قضیه ۵٫۶ درست نیست.

مثال ۸.۵. فرض کنید X، μ و T همانند مثال (۱)۳٫۲ باشند. μ یک TL_P-ایده‌آل از X است. μ_t را به صورت زیر به دست می‌آوریم:

$$\mu_t = \begin{cases} X & \text{اگر } 0 \leq t \leq 0/3، \\ \{0, q, r\} & \text{اگر } 0/3 < t \leq 0/7، \\ \{0\} & \text{اگر } 0/7 < t \leq 0/9، \\ \emptyset & \text{اگر } 0/9 < t \leq 1، \end{cases} \qquad (۳.۳)$$

برای $0/3 < t \leq 0/7$، $\mu_t = \{0, q, r\}$ یک ایده‌آل از X نیست. زیرا $r \in \mu_t$ و $p * r \in \mu_t$ اما $p \notin \mu_t$.

قضیه ۹.۵. فرض کنید μ و ν دو TL-ایده‌آل از X باشند، دراین‌صورت $\mu \times \nu$ نیز یک TL-ایده‌آل از X است که $(\mu.\nu)(x) = T(\mu(x), \nu(x))$.

اثبات.

$$\begin{aligned}(\mu.\nu)(0) &= T(\mu(0), \nu(0)) \\ &\geq T(\mu(x), \nu(x)) \\ &= (\mu.\nu)(x).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\mu.\nu)(x) &= T(\mu(x), \nu(x)) \\ &\geq T(T(\mu(y), \mu(x * y)), T(\nu(y), \nu(x * y))) \\ &= T(T(\mu(y), \nu(y)), T(\mu(x * y), \nu(x * y))) \\ &= T((\mu.\nu)(y)), (\mu.\nu)(x * y)).\end{aligned}$$

□

قضیه ۱۰.۵. فرض کنید T_1 و T_2 دو T-نرم باشند به‌طوری‌که $T_2 \leq T_1$ باشد. اگر μ یک T_2L-ایده‌آل از X باشد، آن‌گاه یک T_1L-ایده‌آل از X نیز است.

اثبات. فرض کنید μ یک T_2L-ایده‌آل از X باشد. بنابراین داریم

$$\mu(x) \geq T_2(\mu(y), \mu(x * y)) \geq T_1(\mu(y), \mu(x * y)).$$

پس μ یک T_1L-ایده‌آل از X است. □

مثال (۱)۵/۲ نشان می‌دهد که در حالت کلی، عکس قضیه بالا درست نیست.

لم ۱۱.۵. فرض کنید $\{I_\alpha\}_{\alpha \in [0,1]}$ کلاسی از زیرمجموعه‌های X باشد، به‌طوری‌که به‌ازای‌هر $A \subseteq [0, 1]$،

$$I_{(\bigvee_{\alpha \in A} \alpha)} = \bigcap_{\alpha \in A} I_\alpha. \tag{۱}$$

از تساوی (۱) می‌توان نتیجه گرفت که اگر $b, c \in [\circ, 1]$ و $b \leq c$، آن‌گاه

$$I_c \subseteq I_b. \qquad (۲)$$

قضیه ۱۲.۵. (قضیه نمایش) فرض کنید $\{I_\alpha\}_{\alpha \in L}$ کلاسی از ایده‌آل‌های X باشد. شرط لازم‌وکافی برای وجود TL-ایده‌آل μ از X به‌طوری‌که به‌ازای‌هر $\alpha \in L$، $\mu_\alpha = I_\alpha$، این است که به‌ازای‌هر $A \subseteq L$،

$$I_{(\bigvee_{\alpha \in A} \alpha)} = \bigcap_{\alpha \in A} I_\alpha \qquad (*)$$

اثبات. فرض کنید TL-ایده‌آل μ از X وجود دارد به‌طوری‌که به‌ازای‌هر $\alpha \in L$، $\mu_\alpha = I_\alpha$. نشان می‌دهیم که $(*)$ برقرار است. فرض کنید $A \subseteq L$ و $x \in I_\beta$ که $\beta = \bigvee_{\alpha \in A} \alpha$. پس $x \in \mu_\beta$. از این رو به‌ازای‌هر $\alpha \in A$، $\mu(x) \geq \alpha$. بنابراین به‌ازای‌هر $\alpha \in A$، $x \in \mu_\alpha = I_\alpha$. پس $x \in \bigcap_{\alpha \in A} I_\alpha$ و این یعنی $I_{(\bigvee_{\alpha \in A} \alpha)} \subseteq \bigcap_{\alpha \in A} I_\alpha$. عکس رابطه فوق به صورت مشابه اثبات می‌شود، بدین ترتیب خواهیم داشت:

$$I_{(\bigvee_{\alpha \in A} \alpha)} = \bigcap_{\alpha \in A} I_\alpha.$$

برعکس، فرض کنید $(*)$ برقرار باشد. L-مجموعه $\mu : X \to L$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم $\mu(x) = \bigvee_{x \in I_\alpha} \alpha$، نشان می‌دهیم μ یک TL-ایده‌آل است. به‌ازای‌هر ایده‌آل ناتهی I از X، داریم $\circ \in I$ و به‌ازای‌هر $x \in X$،

$$\{\alpha \in L : x \in I_\alpha\} \subseteq \{\alpha \in L : \circ \in I_\alpha\}.$$

می‌توان نتیجه گرفت که

$$\mu(x) = \bigvee_{x \in I_\alpha} \alpha \leq \bigvee_{\circ \in I_\alpha} \alpha = \mu(\circ).$$

اکنون فرض کنید $x, y \in X$ و

$$T\{\mu(y), \mu(x * y)\} = T\{\bigvee_{y \in I_\alpha} \alpha, \bigvee_{x * y \in I_\alpha} \alpha\} = t.$$

بنابراین $\bigvee_{y \in I_\alpha} \alpha \geq t$ و $\bigvee_{x * y \in I_\alpha} \alpha \geq t$. حال فرض کنید $A = \{\alpha \in L : x \in I_\alpha\}$. پس $I_t \subseteq I_{\bigvee_{\alpha \in A} \alpha} = \bigcap_{\alpha \in A} I_\alpha \ni x$. لذا

$$\mu(x) = \bigvee_{x \in I_\alpha} \alpha \geq t = T\{\mu(y), \mu(x * y)\}.$$

حال نشان می‌دهیم به‌ازای‌هر $\alpha \in L$، $\mu_\alpha = I_\alpha$. ازاین‌رو $b \in L$ را درنظر گرفته و فرض کنید $x \in \mu_b$ باشد. باتوجه‌به تعریف‌های μ_b و $\mu(x)$، داریم

$$b \leq \bigvee_{x \in I_\alpha} \alpha. \tag{۳}$$

با استفاده از (۲) و (۳) خواهیم داشت

$$I_{\bigvee_{x \in I_\alpha \alpha}} \subseteq I_b. \tag{۴}$$

به‌علاوه از (۱) و (۴) می‌توان گزاره زیر را به دست آورد

$$\bigcap_{x \in I_\alpha} I_\alpha \subseteq I_b. \tag{۵}$$

دراین‌صورت $x \in \bigcap_{x \in I_\alpha} I_\alpha$. پس (۵) نتیجه می‌دهد $x \in I_b$. ازاین‌رو به‌ازای‌هر $b \in [۰, ۱]$،

$$\mu_b \subseteq I_b. \tag{۶}$$

حال فرض کنید $x \in I_b$، با استفاده از (۳) و تعریف $\mu(x)$، نتیجه می‌گیریم که $b \leq \mu(x)$. یعنی $x \in \mu_b$. پس به‌ازای‌هر $b \in L$، $I_b \subseteq \mu_b$. بنابراین به‌ازای‌هر $\alpha \in L$، $\mu_\alpha = I_\alpha$. □

نتیجه‌گیری و تحقیقات آینده

برومند سعید و همکاران در سال ۲۰۱۷ جبر جدیدی به نام BI-جبر را معرفی کردند. BI-جبر تعمیمی از دوگان جبر استلزامی و BCK-جبر استلزامی است.
در این مقاله، مفاهیم T-ایده‌آل فازی و L-ایده‌آل، TL-ایده‌آل در BI-جبرها را معرفی کرده و برخی از ویژگی‌های اساسی آن‌ها و همچنین برقراری قضیه اساسی نمایش را برای آن‌ها بررسی کردیم.
تعدادی از موضوعات جالبی را که در پژوهش‌های بعدی می‌توان انجام داد به شرح ذیل است:

(۱) بررسی بیشتر ویژگی T-ایده‌آل فازی، L-ایده‌آل و TL-ایده‌آل در BI-جبرها،
(۲) بررسی وجود جبر خارج قسمتی BI-جبرها تحت T-ایده‌آل فازی، L-ایده‌آل و TL-ایده‌آل،
(۳) بررسی رابطه بین T-ایده‌آل فازی، L-ایده‌آل و TL-ایده‌آل در BI-جبرها.

تشکروقدردانی

دراینجا از تمامی داوران محترمی که در راستای بهبود این مقاله ما را یاری نموده‌اند، صمیمانه سپاسگزاری و قدردانی می‌نماییم.

مراجع

[1] J. C. Abbott (1967) Semi-Boolean algebras, Mate. Vestnik, 4, 177-198.

[2] A. Borumand Saeid, H. S. Kim and A. Rezaei (2017) On BI-algebras, An. St. Univ. Ovidius Constanta, 25, 177-194.

[3] R. A. Borzooei, S. Khosravi Shoar (2006) Implication algebras are equivalent to the dual implicative BCK-Algebras, Sci. Math. Jap., 371-373.

[4] R. A. Borzooei, O. Zahiri (2012) Prime Ideals in BCI and BCK-Algebras, Ann. Uni. Cra., Math. Comp. Sci. Ser., 39(2), 266-276.

[5] W. Y. Chen and J. S. Oliveira (1995) Implication algebras and the metropolis rota axioms for cubic lattices, J. Algebra, 171, 383-396.

[6] J. A. Goguen (1967) L-fuzzy sets, J. Math. Anal. Appl., 18, 145-174.

[7] P. H´ajek (1998) Metamathematics of fuzzy logic, Klower Academic Publishers, Dordrecht.

[8] Y. Imai and K. Is´eki (1966) On axioms systems of propositional calculi XIV, Proc. Jap. Aca., Series A, 42, 19-22.

[9] Y. B. Jun, E. H. Roh and H. S. Kim (1998) On BH-algebras, Sci. Math. 1, 347-354.

[10] E.P. Klement, R. Mesiar, and E. Pap (2000) Triangular Norms, Kluwer Aca. Publ., Dordrecht.

[11] W. J. Liu (1982) Fuzzy invariant subgroups and fuzzy ideals, Fuzzy sets and Sys., 8, 133-139.

[12] J. Neggers and H. S. Kim (2002) On B-algebras, Mate. Vesnik, 54, 21-29.

[13] A. Rosenfeld (1971) Fuzzy groups, J. Math. Anal. Appl., 35, 512-517.

[14] R. Tayebi Khoramia and A. Borumand Saeid (2012) New representation for filters of BL-algebras, J. Intel. Fuzzy Sys., 23, 225-235.

[15] L. A. Zadeh (1965) Fuzzy sets, Inform. and Control, 8, 338-353.