سیستم های فازی و کاربردها
سال هشتم، شماره اول (بهار و تابستان ۱۴۰۴)
صص. ۲۰۷ تا ۲۱۸

شاپای چاپی: ۲۷۱۷-۴۴۰۹
شاپای الکترونیکی: ۲۷۱۷-۳۹۸۴
DOI:10.22034/jfsa.2025.525659.1275

بن‌مایه‌های تجدیدنظرطلبی در منطق و منطق فازی

مرتضی منیری

گروه ریاضی، دانشکدهٔ علوم ریاضی، دانشگاه شهید بهشتی، تهران، ایران

تاریخ دریافت: ۱۴۰۴/۰۳/۰۲ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۴/۰۴/۲۴

نوع مقاله: علمی-پژوهشی

چکیده. به نظر می‌رسد این پرسش که آیا می‌توان در در منطق کلاسیک تجدیدنظر کرد، پاسخ آسانی دارد: بله، می‌توان! مگر کتاب‌های منطق پر از دستگاه‌های مختلف برای منطق‌های غیرکلاسیک نیستند؟ هر چند که منطق شهودگرایی، منطق‌های چند ارزشی و فازی و دیگر منطق‌های غیرکلاسیک معمولاً در کتاب‌های منطق فلسفی یا محاسباتی آورده می‌شوند، به هر حال آنها هم برچسب منطق خورده‌اند و چه کسی بهتر از خود منطق‌دانان می‌تواند در مورد منطق نظر دهد؟ البته برخی از منطق‌دانان و فیلسوفان، منطق‌های غیرکلاسیک را غیرضروری می‌دانند. در این میان موضع کواین که ظاهراً تجدیدنظر در منطق را می‌پذیرد، و کریپکی که امکان تجدیدنظر را رد می‌کند، قابل‌ذکرند. در این مقاله به این موضوعات می‌پردازیم و سعی می‌کنیم آشتی‌ای بین دو دیدگاه یاد شده برقرار سازیم. به‌علاوه، به منطق فازی و فلسفهٔ آن به‌عنوان یکی از منطق‌های غیرکلاسیک کلیدی و مهم خواهیم پرداخت.

2010 *Mathematics Subject Classification.* 03B52 ; 03E72

E-mail: ezmoniri@gmail.com.

عبارات و کلمات کلیدی. منطق‌های غیرکلاسیک، منطق فازی، تجدیدنظر در منطق، آنالیز نااستاندارد، پارادوکس خرمن
.

© ۱۴۰۴ (انجمن سیستم‌های فازی)

۱. مقدمه

در مقاله‌ای که اخیراً منتشر شده، کریپکی به این پرسش می‌پردازد که، آیا قواعد منطق آموختنی یا برگزیدنی هستند ([۱۰])؟ برای این منظور او برخی از قواعد پایه‌ای استدلال منطقی چون قاعدهٔ وضع مقدم (MP) و قاعدهٔ مصداق کلی (UI) را بررسی می‌کند. قاعدهٔ مصداق کلی بیان می‌کند که «از هر حکم کلی همه مصادیقش نتیجه می‌شوند». کریپکی معتقد است که این قاعده نیازی به آموختن ندارد، بلکه پیش‌نیاز هر آموزشی است. با یک آزمایش ذهنی می‌توان نظر کریپکی را متوجه شد.

به فرزند خردسالتان می‌گویید که هر کلاغی سیاه است. او کبوتر سفیدی می‌بیند و می‌گوید که یک کلاغ است. می‌گویید مگر نگفتم که هر کلاغی سیاه است، از یک حکم عمومی همهٔ مواردش نتیجه می‌شود. آیا او متوجه و متنبه می‌شود؟! خیر، زیرا اگر او برای استدلال اولیه نیاز به"فرض" قاعدهٔ UI برای نتیجه‌گیری دارد و نمی‌تواند استدلال فوق را انجام دهد، از قاعده UI به صورت «هر حکم کلی هر مصداقش را نتیجه می‌دهد» هم نمی‌تواند استفاده کند. به عبارت دیگر، استفاده از UI خود نیاز به UI دارد! به شکل دقیق‌تر:

۱) از «هر کلاغی سیاه است» نتیجه می‌شود که «این کلاغ سیاه است»

۱,۱) «هر کلاغی سیاه است» حکمی کلی است. پس بنا بر UI، هر مصداقش درست است.

۱,۲) پس از «هر کلاغی سیاه است» و قاعدهٔ مصداق کلی نتیجه می‌شود که «این کلاغ سیاه است».

اگر کسی نتواند نتیجه‌گیری (۱) را انجام دهد، چگونه می‌تواند (۱,۱) و (۱,۲) را انجام دهد؟

البته شاید آن‌طور که کریپکی می‌گوید هم نباشد و مثلاً بتوان به کمک یک مربی، چنین قواعدی را به کسی که به هیچ روی با آنها آشنایی ندارد، آموخت ([۵]). در هر حال، در مورد اینکه همهٔ ما شهودی از قواعد بنیادی منطق داریم، شکی نیست. بر پایهٔ چنین تفکراتی، کریپکی امکان تجدیدنظر در قواعد پایه‌ای منطق را نفی می‌کند. از طرف دیگر، او به‌طور خاص منطق کوانتومی را به‌عنوان جایگزینی برای منطق کلاسیک در بررسی پدیده‌های بسیار ریز، رد می‌کند ([۲]). دلیل او برای این رد کردن آن است که مدل بنیادی منطق کوانتومی از دل فضاهای هیلبرت برمی‌آید و این مفهوم ریاضی در دل ریاضیات مبتنی بر منطق کلاسیک قرار دارد. در [۸]، در رد این نظر چنین استدلال شده است که یا می‌توان معادلات کوانتومی را صرفاً ریاضیات در نظر گرفت و آنها را از کاربردها جدا کرد، که در این حالت کوانتومی بودن منطق حاکم بر آنها مشکلی ایجاد نمی‌کند، یا کاربردهای آنها را از طریق مطرح کردن احتمال در نظر گرفت، که در این کاربردها منطق کلاسیک حاکم خواهد بود و تعارضی وجود ندارد.

در این مقاله ضمن بررسی نظریات کواین و کریپکی در زمینهٔ امکان تجدیدنظر در منطق به مورد خاص منطق فازی خواهیم پرداخت و از نظر بنیادی امکان چنین منطق معارضی با منطق کلاسیک را بررسی خواهیم کرد.

۲. کریپکی، کواین و تجدیدنظر در منطق

کریپکی دیدگاه کواین در مورد منطق را ناهماهنگ می‌داند. کواین از یک طرف معتقد است که منطق به‌عنوان پاره‌ای از منظومهٔ به‌هم‌پیوستهٔ دانش، تحت تأثیر نتایج تجربی تجدیدنظرپذیر است (البته، برخلاف نظر کارنپ و پوزیتیویست‌ها، این کار را کاملاً اختیاری و قراردادی نمی‌داند و بسته به نیازهای علمی می‌داند):

> بازنگری حتی در قانون طرد شق ثالث به‌عنوان راهکاری برای ساده‌سازی مکانیک کوانتومی پیشنهاد شده است؛ و از نظر اصولی، چه تفاوتی میان این تغییر و تغییراتی وجود دارد که به واسطه‌ی آن کپلر جایگزین بطلمیوس شد، یا اینشتین نیوتن را کنار زد، یا داروین ارسطو را پشت سر گذاشت؟ ([۱۶])

از طرف دیگر، کواین استدلال می‌کند که بدون استفاده از قاعدهٔ مصداق کلی نمی‌توان زبانی ساخت زیرا ساخت زبان متکی بر ارائهٔ قواعد به صورت طرح‌واره است و بنابراین استفاده از قاعدهٔ مصداق کلی در به کار بردن آنها ضروری است. به عبارت دیگر، حداقل این قاعده را تجدیدنظرناپذیر می‌داند. او می‌گوید:

> مشکل، دور باطل آشنا از لوییس کارول است که قبلاً در جای دیگری آن را تشریح کرده‌ام. به‌طور خلاصه، نکته این است که حقایق منطقی، به دلیل بی‌نهایت بودنشان، باید به‌واسطه‌ی قراردادهای کلی ارائه شوند نه به‌صورت منفرد؛ و در اینجا منطق از ابتدا در فرامطالعه مورد نیاز است تا بتوان قراردادهای کلی را بر موارد فردی اعمال کرد. ([۱۷])

در اینجا کواین بیان می‌کند که مجموعهٔ حقایق منطقی، نامتناهی است و امکان ارائهٔ تک‌به‌تک آنها وجود ندارد. برای مثال، قاعدهٔ MP شامل بی‌شمار نمونه است. به همین علت، این قاعده به این شکل بیان می‌شود که «به‌ازای هر دو گزارهٔ p و q، از $p \to q$ و p، گزارهٔ q نتیجه می‌شود». به این شکل MP حکمی کلی است که برای به کار بردن آن به قاعدهٔ UI نیاز است.

به عبارت دقیق‌تر، در طراحی هر دستگاه منطقی، استفاده از قواعد مصادیق کلی و وضع‌مقدم اجتناب‌ناپذیر است، زیرا بیان قواعد استنتاجی اولاً به‌صورت احکام کلی است و استفاده از آن نیاز

به UI دارد و ثانیاً به‌شکل «اگر فلان و فلان، آن‌گاه فلان» است که کاربرد آن نیاز به MP دارد. اینکه منطق هم در پرتو نتایج تجربی تجدیدنظرپذیر است از محکمات عقاید کواین است، طبیعی‌گرایی و کل‌گرایی کواین، نتیجه‌ای به جز این ندارد. در این مورد، جان برجس می‌گوید:

> اگر کواین در نوشته‌های بعدی خود به ندرت بر استدلال خاص ''حقیقت از طریق قرارداد'' تأکید می‌کند، او به‌طور جدی بر نتیجه‌گیری آن تأکید دارد و به‌طور مکرر انکار این ایده را تکرار می‌کند که برخی حقایق صرفاً به دلیل قرارداد صحیح هستند، یا به بیان دیگر، تحلیلی‌اند. همچنین، او به‌طور خاص این ادعا را برجسته می‌کند که منطق و ریاضیات از مصونیت در برابر بازنگری یا تغییر، که به‌طور سنتی به حقایق تحلیلی و پیشینی نسبت داده می‌شود، برخوردار نیستند. ([۴])

چگونه می‌توان این دو نظر کواین را با هم جمع کرد؟ شاید برخی نوشته‌های دیگر کواین این مشکل را حل کنند. در کتاب فلسفهٔ منطق خود، کواین تغییر منطق را به تغییر زبان مرتبط می‌کند. برای مثال، از دید او، دعوای بین منطق‌دان کلاسیک و شهودگرا بر سر رابط منطقی «یا»، بیهوده است، زیرا این دو از دو «یا»ی مختلف صحبت می‌کنند، دو معنای متفاوت از لفظی واحد. او در این باره می‌گوید:

> اینجاست، به‌وضوح، دشواریِ منطق‌دان منحرف: هنگامی که سعی می‌کند این آموزه را رد کند، در واقع تنها موضوع بحث را تغییر می‌دهد. ([۱۵]، ص. ۸۱)

اما این موضع مورد انتقاد قرار گرفته است. مدی یکی از منتقدان است ([۱۳]). او این وضعیت را با جایگزینی نظریات علمی مقایسه می‌کند. تصور دانشمندان از اتم، با تغییر نظریات فیزیکی تغییر کرده است، آیا باید گفت که دو نظریهٔ مختلف در مورد دو شیء مختلف بحث کرده‌اند یا آنها را توضیحاتی متفاوت از شیئی واحد دانست؟ مدی گزینهٔ دوم را می‌پذیرد، وگرنه مفهوم پیشرفت علمی چه می‌شود؟ حتی خود کواین به نظر می‌رسد که این را می‌پذیرد:

> شهودگرا نباید به‌عنوان کسی دیده شود که با ما در مورد قوانین حقیقی عملیات منطقی معین، یعنی نفی و «یا»، مخالفت می‌کند. بلکه باید او را فردی دانست که نفی و «یا»ی ما را به‌عنوان ایده‌هایی غیرعلمی رد می‌کند و در مقابل، ایده‌هایی دیگر، تا حدی مشابه، اما متعلق به خودش، مطرح می‌کند. منطق شهودگرا فاقد آشنایی، راحتی، سادگی و زیبایی منطق ما است. مانند منطق

> بیرخوف و فون نویمان، منطق شهودگرا حتی فاقد شفافیتی است که در یک منطق تابع-ارزشی چند مقداری وجود دارد. ([۱۵])

از طرف دیگر، استدلال شده است که اگر «یا» در دو منطق شهودگرایانه و کلاسیک دو رابط متفاوتند، باید بتوان زبانی ساخت که هر دو را در خود جای دهد. اما چنین چیزی ممکن نیست، زیرا اگر چنین کنیم و تنها بر اصول و قواعد مشترک دو منطق تکیه کنیم، هر دو رابط در قانون حذف دو نقیض صدق می‌کنند و به نوعی با هم معادلند ([۱۲]).

به نظر می‌رسد که سخن کواین در مورد «تغییر منطق = تغییر معنی» حداقل در مورد منطق شهودگرایی درست نباشد. این منطق ماحصل جدال ریاضی‌دانان بزرگی چون هیلبرت و براوئر بر سر حقایق ریاضی بوده و نمی‌توان سطح آن را تا حد سوءتفاهم بر سر انتخاب کلمات پایین آورد. هر دوی ریاضی‌دان کلاسیک و شهودگرا بر سر ریاضیات و گزاره‌های ریاضی بحث می‌کنند. اما شاید در مورد منطق فازی چنین چیزی را بشود گفت. اگر منطق فازی را با مفاهیم مبهم مرتبط بدانیم و منطق کلاسیک را در مورد مفاهیم قطعی ریاضی بدانیم، آن وقت می‌شود گفت که «یا» در این دو منطق به دو معنی متفاوت به کار رفته است. البته این توضیح زمانی قانع کننده است که منطق کلاسیک را جهان‌شمول ندانیم، و مثلاً تنها به ریاضیات و علوم دقیقه مرتبط بدانیم. هر چند ظاهرا خود فرگه نیز چنین می‌اندیشیده و دستگاه منطق کلاسیک خود را تنها در مورد ریاضیات می‌دانسته، اما همهٔ منطق دانان و فیلسوفان، چنین نظری ندارند.

تیموتی ویلیامسون ([۲۴]) استدلال کرده که اگر بپذیریم که منطق حاکم بر ریاضیات منطق کلاسیک است، آنگاه با توجه به کاربردهای غیر قابل صرف نظر کردن ریاضیات در حوزه های مختلف، می‌باید در آن حوزه‌ها نیز به منطق کلاسیک معتقد باشیم. البته این نظر هم با انتقادهایی مواجه شده است ([۸]). در این میان، برخی موضعی عمل‌گرایانه اتخاذ کرده‌اند ([۲۰]). شورتز انتخاب یک منطق را به این مرتبط می‌داند که کدامیک از این منطق‌ها توانایی بازنمایی منطق‌های دیگر را دارند. انتخاب او منطق کلاسیک است. او نشان می‌دهد که منطق‌های شهودگرایانه، چندارزشی و ... بطور حافظ معنایی در منطق کلاسیک تعبیر می‌شوند.

۳. تجدیدنظر در منطق یا فرامنطق؟

قواعد پایه‌ای منطق را می‌توان با مفاهیم بنیادی حساب چون عدد مقایسه کرد. از دیدگاه فرگه در مورد عدد می‌توان درسهایی در مورد منطق گرفت. فرگه دیدگاهی افلاطونی در مورد عدد طبیعی داشته است. با توجه به مفهوم شهودی عدد که همه تا حدودی با آن آشنا هستند، فرگه تلاش کرد تا عدد را تعریف کند ([۳]). تعریف فرگه از عدد به کمک مفاهیم منطقی مشهور است و در اینجا

نمی‌خواهیم به آن بپردازیم. در هر حال، او معتقد است که تعریفش ممکن است جامع و مانع نباشد. اما این مهم نیست، مادام که تعریف او از عدد همهٔ خواص نظر ما از عدد را داشته باشد. در این صورت می‌توان مفهوم جدیدی که تعریف شده را بجای عدد در نظر گرفت. آیا در مورد قاعده‌ای مانند مصداق کلی، چنین چیزی می‌توان گفت؟ آیا امکان تثبیت معنای دقیق این قاعده وجود دارد؟

آنچه که کواین در مورد قاعدهٔ مصداق کلی می‌گوید به نظر می‌رسد که به جایگاه آن در فرامنطق مربوط می‌می‌شود. منظور از فرامنطق یک دستگاه منطقی، زبان و منطقی است که در مطالعهٔ آن دستگاه از آن استفاده می‌شود. او استفاده از این قاعده را در ساخت هر دستگاه منطقی، یعنی در فرامنطق آن، صرف‌نظرناپذیر می‌داند. اما آیا تصور ما از این قاعده یکسان است؟ برای تثبیت مفهوم این قاعده، می‌بایست آن را در یک دستگاه منطقی یکپارچه در نظر گرفت و ارزیابی کرد. این قاعده به تنهایی و در خلأ عمل نمی‌کند. طبیعی‌ترین انتخاب در این مورد، منطق مرتبهٔ دوم است. اما خود منطق مرتبهٔ دوم به شکل مناسب (بازگشتی) اصل‌پذیر نیست ([۱۸]). البته، قاعدهٔ مصداق کلی به عنوان یک قاعدهٔ صوری قطعا در این زمینه معتبر است، به شرط آنکه تعبیر مناسبی از آن شود. این تعبیر، در دو مدل استاندارد و هنکین متفاوت است. در اولی، سورهای مرتبه دوم به تمام زیرمجموعه‌های دامنه اشاره می‌کنند، و در دومی به دسته‌ای از زیرمجموعه‌ها که از قبل برگزیده شده‌اند. تیموتی ویلیامسون استدلال کرده است که نمی‌توان فرامنطق را به عنوان یک جایگاه ثابت و غیرقابل مناقشه در نظر گرفت ([۲۳]). برای مثال، منطق‌دانی که از منطق فازی استفاده می‌کند، می‌بایست در فرامنطق نیز دست از منطق کلاسیک بکشد، اما مشکل اینجا است که هیچ دستگاه منطقی مناسبی در فرازبان برای منطق فازی پیشنهاد نشده است.

در هر حال، همه این احساس را داریم که قاعدهٔ مصداق کلی باید معتبر باشد. به همین دلیل، اگر جایی با مثال نقضی ظاهری برای قاعده‌ای کلی مواجه شویم، سعی می‌کنیم که قاعده را حفظ کنیم و تغییر را در جایی کمتر زیربنایی انجام دهیم. به همین دلیل تمایل داریم که مثالهای نقض احکام کلی را بگونه‌ای تفسیر کنیم که قاعدهٔ مصداق کلی نقض نشود. در نهایت به نظر می‌رسد که دلیل اصلی آنکه قواعد پایه‌ای منطق چون مصداق کلی را تجدیدنظر ناپذیر می‌دانیم، چیزی جز این نیست که این کار تغییرات محدودتری را لازم می‌کند.

در مجموع، چیزی که در مورد ناهماهنگی ظاهری موجود در نظریات کواین می‌توان گفت، چنین است:

۱) اینکه منطق هم در پرتو نتایج تجربی تجدیدنظرپذیر است از محکمات عقاید کواین است، طبیعی‌گرایی و کل‌گرایی نتیجه‌ای به جز این ندارد.

۲) تجدیدنظر در برخی از اصول و قواعد منطق توسط برخی از دانشمندان مطرح شده است. برای مثال براوئر مدافع شهودگرایی در ریاضیات است. پیشنهاد منطق کوانتومی توسط فون‌نویمان و بیرخوف ارائه شده است ([۲]). البته هیچ‌یک از این پیشنهادات تاکنون همه‌گیر نشده‌اند. به هر حال، علم‌گرایی چون کواین نمی‌تواند با نظریات دانشمندان مخالفت کند.

۳) این پیشنهادات، صرف نظر از دیدگاه‌های اولیه پیشگامان، در ادامه تنها موجب ارایه دستگاه‌های صوری‌ای شده‌اند که در بستر ریاضیات کلاسیک استوارند.

۴) در مجموع، دونظر به‌ظاهر متفاوت کواین را می‌توان اینگونه تفسیر کرد که او وقتی از امکان تجدیدنظر در منطق صحبت می‌کند، به نظر خود دانشمندان و دستگاه‌های ریاضی ساخته‌شده از آنها نظر دارد؛ و زمانی که از تجدیدنظرناپذیر بودن برخی اصول و قواعد منطقی (ونه لزوما همه آنها) سخن می‌گوید هدفش این است که قراردادگرایی صرف را رد کند. این اجزای منطقی تجدیدنظرناپذیر ماحصل رشد و تکامل انسان در طول تاریخ بوده‌اند. اینها برگزیدنی و ماحصل انتخاب دفعتی ما انسانها نیستند. آنها جزیی از ساختار وجودی ما شده‌اند، همچون ساختار بینایی و شنوایی.

۴. منطق فازی و پارادوکس خرمن

در این فصل به منطق فازی به‌عنوان یکی از منطق‌های مشهور غیرکلاسیک می‌پردازیم. مراجع ([۱]، [۷]، [۲۱]) در مورد این منطق‌ها از دید ریاضی جذاب هستند. مراجع ([۱۹]، [۲۲]) از دید مفهومی و فلسفی مفیدند.

برخی از افراد با تعریف «قدبلند» مطابقت دارند، در حالی که برخی دیگر چنین نیستند. با این حال، موارد مرزی وجود دارد. آیا این موارد به دلیل محدودیت‌های شناختی ما هستند، یا اینکه بازتابی از یک ابهام ذاتی در جهان‌اند؟ به عبارت دیگر، دشواری در شناسایی افراد قدبلند یک مسئله شناختی است، یا اینکه مجموعهٔ افراد قدبلند به عنوان یک مجموعه به مفهوم کلاسیک در واقعیت وجود ندارد؟ این‌ها پرسش‌های فلسفی دشواری هستند که در این مقاله به آن‌ها نمی‌پردازیم. در هر حال، به نظر می‌رسد که اگر این مسئله را به محدودیت‌های شناختی نسبت دهیم، منطق فازی غیرضروری می‌شود، زیرا حتی با محمولات کلاسیک نیز می‌توان عدم شناسایی را تجربه کرد. با این حال، حتی در این صورت نیز می‌توان دستگاه‌های مختلف منطق فازی را به عنوان ابزارهای ریاضی مفید در نظر گرفت. البته، برخی طرفدار همزیستی هر دو رویکرد به منطق فازی هستند ([۱۱]).

در منطق فازی، در حالی که قاعدهٔ UI همچنان قابل اعمال است، درجهٔ درستی نتیجه، بستگی به درجهٔ درستی گزاره‌ی کلی مفروض دارد. برای مثال، اگر یک گزاره‌ی کلی تنها تا حدی درست باشد (مثلاً ''همه‌ی Xها Y هستند'' درجهٔ درستی ۰٫۸ داشته باشد)، آنگاه (''این X خاص، Y است'')

همان درجه‌ی درستی را به ارث می‌برد. در هر حال شاید بتوان گفت که این قاعده تنها در مواردی اعمال می‌شود که مقدمهٔ قاعده ارزش ۱ داشته باشد. اما برای برخی از محمولات فازی، مانند "x بسیار ثروتمند است"، به نظر می‌رسد هیچ نمونه‌ای به درجهٔ درستی ۱ نرسد. بنابراین، حداقل برای برخی محمولات فازی، قاعده‌ی UI کاربردی ندارد، زیرا مقدم این قاعده هیچ‌گاه ارزش ۱ نخواهد داشت. ثروت هیچ حدومرزی ندارد.

در ادامه، پارادوکسی مشهور به نام پاردوکس خرمن را معرفی می‌کنیم و به تحلیل آن در منطق فازی می‌پردازیم. تعریف محمول «قدبلند» را به این شیوه در نظر بگیرید که به ازای x درست است اگر و تنها اگر داشتن قدی به طول x سانتی‌متر، فرد را قدبلند کند. پارادوکس معروف خرمن مربوط به استنتاجی مانند این است: می‌دانیم که «هر فردی که قد ۲۰۰ سانتی‌متر دارد، قدبلند است» و «اگر هر فردی با قد ۲۰۰ سانتی‌متر قدبلند باشد، آنگاه هر فردی با قد ۱۹۹ سانتی‌متر نیز قدبلند است»، و همین‌طور ادامه دهید؛ و در نهایت به این نتیجه می‌رسیم که همه افراد با قد یک متر قدبلند هستند. مقدمات به نظر درست می‌رسند، اما نتیجه نادرست است. بنابراین، با یک پارادوکس روبه‌رو شده‌ایم.

برخی ممکن است به منطق کلاسیک پایبند باشند و ادعا کنند که مرز دقیقی وجود دارد که با از دست دادن یک سانتی‌متر، پس از آن فرد دیگر قدبلند محسوب نمی‌شود، هرچند ممکن است ما از آن آگاه نباشیم. این موضوع به محدودیت‌های شناختی مرتبط است. رویکرد دیگری برای حل این مسئله، معرفی یک درجهٔ صدق سوم برای موارد مرزی است. روش‌های مختلفی برای این کار وجود دارد. به عنوان مثال، در منطق سه‌ارزشی کلینی، اعتبار یک استنتاج با حفظ مقدار T تعریف می‌شود، یعنی یک استنتاج معتبر است هرگاه اگر مقدمات آن ارزش T داشتند، نتیجهٔ آن نیز ارزش T داشته باشد. بنابراین، از آنجا که همهٔ مقدمات پارادوکس دارای مقدار T نیستند، استدلال لزوماً معتبر نیست. برای مشاهده این مسئله، توجه کنید که باید مرحله‌ای وجود داشته باشد که یک گزاره درست منجر به یک گزاره نامشخص شود (در منطق کلینی قوی، $T \to N = N$، که در آن N به معنی «هیچ‌کدام» است.) بنابراین، پارادوکس به این روش حل می‌شود.

با این حال، در این روش همچنان تمایز آشکاری بین سه مقدار وجود دارد، و می‌توان پارادوکس را به این صورت بازسازی کرد: همان‌طور که نمی‌توانیم نقطه دقیق تغییر وضعیت گزارهٔ «مرتضی قدبلند است» از درست به نادرست را مشخص کنیم، نمی‌توانیم دقیقاً دو نقطه‌ای را که یکی برای انتقال از T به N و دیگری برای انتقال از N به F است، تعیین کنیم. اگر دو مقدار کافی نباشد، سه مقدار نیز کافی نیست.

می‌توانیم به سمت منطق بی‌نهایت‌ارزشی یا منطق فازی حرکت کنیم. فرض کنید که از منطق لوکاشِویچ استفاده می‌کنیم. در این حالت، همهٔ مقدمات استدلال فقط تقریباً درست هستند و نه کاملاً درست، بنابراین خود استنتاج معتبر است. حتی اگر اعتبار را بر اساس حفظ کمترین درجه صدق مقدمات تعریف کنیم، درجه صدق نتیجه ممکن است کمتر از درجه صدق همه مقدمات باشد. به عنوان مثال، استنتاج از A و $A \to B$ به B را در نظر بگیرید، زمانی که A درجه‌ای معادل ۰٫۸ و B درجه‌ای معادل ۰٫۶ دارد. در این حالت، $A \to B$ دارای درجه ۰٫۸ خواهد بود، بنابراین از دو مقدمه با درجه ۰٫۸ به نتیجه‌ای با درجهٔ ۰٫۶ خواهیم رسید. بنابراین، استدلال همچنان نامعتبر است و پارادوکس حل می‌شود.

با این حال، هنوز هم مشکلی وجود دارد که فرآیند کاهش درجات صدق مقدمات، گسسته است. یعنی باید در هر مرحله کاهش مشخصی در مقدار صورت بگیرد، که با شهود ما همخوانی ندارد. از سوی دیگر، به نظر می‌رسد مهمترین انتقاد، مربوط به ماهیت مصنوعی نسبت دادن مقادیر صدق به گزاره‌ها باشد. در فصل بعد راه‌حلی بدیعی برای این مشکل پیشنهاد می‌کنیم. این راه‌حل مبتنی بر استفاده از آنالیز نااستاندارد در تحلیل پارادوکس خرمن است، شبیه آنچه در مورد پارادوکس زنون پیشنهاد شده است.

۵. گذر به نامتناهی و منطق فازی نااستاندارد

اگرچه بحث در مورد گذار از قدبلند به کوتاه‌قد، یا از ثروتمند به فقیر، یا ریزش مو با توجه به متناهی بودن مراحل، کاملاً گسسته است، اما تعداد زیاد موارد به ما اجازه می‌دهد که این مراحل را پیوسته در نظر بگیریم. برای مواردی که تعداد نمونه‌ها کم است، هیچ پارادوکسی وجود ندارد و درجات درستی را می‌توان با شفافیت اختصاص داد. این ترفند در ریاضیات و فیزیک آشنا است. مساحت زیر یک منحنی چیزی جز حد مجموع مستطیل‌های پوشانندهٔ آن نیست و جریان برق چیزی جز حرکت گسستهٔ الکترون‌ها نیست.

با گذر به بینهایت پیوسته، پارادوکس خرمن را می‌توان با پارادوکس زنون مقایسه کرد. در پارادوکس زنون مسئله این است که تعداد زیادی وظایف کوچک وجود دارند که به وضوح عملی هستند، اما انجام همه آن‌ها تبدیل به یک «فراوظیفه» می‌شود که به نظر غیرممکن می‌آید (برای بحث درباره فرا وظیفه و امکان‌پذیری یا امکان‌ناپذیری آن‌ها، به [۶] مراجعه کنید). در پارادوکس خرمن، تفاوت‌های کوچک باعث می‌شوند که ارزش منطقی گزاره‌ها در نهایت تغییر قابل توجهی پیدا کند، یعنی از ۱ به ۰ یا به عکس تغییر کنند. این تغییرات را می‌توان به اندازهٔ بی‌نهایت کوچک در نظر گرفت که آن‌ها را نامحسوس می‌کند و بنابراین مشکل تغییرات نامرئی حل می‌شود. در واقع، با

جمع جبری تغییرات بی‌نهایت کوچک‌ها روبه‌رو هستیم، که در مجموع دیگر بی‌نهایت کوچک نیست، بلکه برابر با ۱ است. درست مانند انتگرال از ۰ تا ۱ برای dx که مقدارش ۱ است!

در ([۹])، نویسنده از آنالیز نااستاندارد برای بررسی پارادوکس زنون استفاده کرده است. البته منطق مورد استفادهٔ او، منطق کلاسیک است. در اینجا ما از آنالیز نااستاندارد و منطق فازی استفاده می‌کنیم. برای این منظور، مجموعهٔ درجات درستی به‌جای $[0, 1]$، بازهٔ واحد غیراستاندارد در نظر گرفته می‌شود. این بازه حاوی عناصر بی‌نهایت کوچک نیز خواهد بود، یعنی عناصری که از هر عدد مثبتی کوچک‌تر هستند اما صفر نیستند. در این بازه، تغییرات درجات صدق می‌توانند بی‌نهایت کوچک باشند. در پارادوکس خرمن، یک عنصر بی‌نهایت کوچک، مفهوم غیرصوری «ناچیز» را مدلسازی می‌کند. می‌توان استدلال کرد که کمیتهای بی‌نهایت کوچک ناملموس هستند، و از این ایده می‌توان برای توجیه آنکه تغییرات درجات صدق گزاره‌ها بصورت ناملموس تغییر می‌کند، بهره برد. بصورت بنیادی‌تر، می‌توان نظریهٔ مجموعه‌های درونی را به عنوان مدلی برای آنالیز نااستاندارد در نظر گرفت ([۱۴]). این نظریه توسیعی از نظریهٔ مجموعه‌های تسرملو–فرانکل است. در نظریهٔ مجموعه‌های درونی، هر مجموعه نامتناهی دارای یک عنصر نااستاندارد است. این‌ها عناصر ایده‌آلی هستند که قبلاً هم وجود داشته‌اند اما تنها در پرتو زبان این نظریهٔ جدید، رؤیت‌پذیر شده‌اند و می‌توان به آن‌ها اشاره کرد.

توجه کنید که برای استفاده از آنالیز نااستاندارد در تحلیل پارادوکس خرمن، نامتناهی گرفتن مراحل الزامی است. همان‌طور که گفته شد، توجیه این فرض آن است که تعداد مراحل بسیار زیاد است به‌طوری که تشخیص آنها برای انسان ناممکن است.

۶. نتیجه‌گیری

در این مقاله به مبانی تجدیدنظرطلبی در منطق پرداختیم. با بررسی برخی از نظرات مهم‌ترین فیلسوفان در حوزهٔ فلسفهٔ منطق، دیدیم که ریشهٔ این تجدیدنظرها در نیازهای علمی در حوزه‌های مختلف است. به عبارت دیگر، هرچند برخی قواعد پایه‌ای منطق چون قاعدهٔ مصداق کلی و وضع مقدم، غیر قابل تجدیدنظرند، اما برخی از اصول و قواعد دیگر را با توجه به نیازهای علمی می‌توان اصلاح کرد. مثلاً اصل توزیع‌پذیری $\wedge$ نسبت به $\vee$ در منطق کوانتومی کنار گذاشته می‌شود. در ادامه به مورد مهم منطق فازی پرداختیم. این منطق ماحصل نیاز علمی به بررسی محمول‌های نادقیق و فازی است. می‌توان از منطق فازی در تحلیل پارادوکس خرمن استفاده کرد. دیدیم که با گذر از متناهی به نامتناهی، می‌توان از آنالیز نااستاندارد و بی‌نهایت کوچک‌ها در توجیه پارادوکس خرمن استفاده کرد. وقتی نمونه‌ها بسیار زیادند، می‌توان مجموعهٔ آنها را نامتناهی فرض کرد و به همین

دلیل، مقدمات پارادوکس خرمن نیز نامتناهی خواهد بود. با نامتناهی بودن مجموعهٔ کاهش‌ها در درجات صدق، این مجموعه می‌بایست حاوی مقادیر بی‌نهایت کوچک باشد. مقادیر بی‌نهایت کوچک نامحسوس و ناملموس هستند. بدین‌ترتیب پارادوکس خرمن پاسخی مناسب می‌یابد.

۷. تشکر و قدردانی

این اثر تحت حمایت مادی بنیاد علم ایران(INSF) برگرفته شده از طرح شمارهٔ «۴۰۳۹۰۶۹» انجام شده است[1].

بخش‌هایی از این مقاله در دوازدهمین همایش سالیانهٔ انجمن منطق ایران در اصفهان ارائه شده است. از دست‌اندرکاران همایش و همچنین حضاری که با پرسش‌های خود باعث بهتر شدن این مقاله شدند، بسیار سپاسگزارم. همچنین از دو داور محترم مقاله بابت پیشنهادهای مفیدشان که منجر به اصلاح مقاله شد، تشکر می‌کنم.

مراجع

[1] Bergmann, M. (2008). *An Introduction to Many-Valued and Fuzzy Logic: Semantics, Algebras, and Derivation Systems*, Cambridge University Press.

[2] Birkhoff, G. & von Neumann, J. (1936). ”The Logic of Quantum Mechanics,” *Annals of Mathematics*, **37** (4), pp. 823-843.

[3] Boddy, R. (2021). ”Frege on the Fruitfulness of Definitions,” *Journal for the History of Analytical Philosophy*, **9** (11), pp. 100-114.

[4] Burgess, J. (2013). ”Quine’s Philosophy of Logic and Mathematics,” in: G. Harman & E. Lepore (eds.), *A Companion to W. V. O. Quine, Wiley*, pp. 281-295.

[5] Devitt, M. & Roberts, J. R. (2023). ”Changing Our Logic: A Quinean Perspective,” *Mind*, **133** (529), pp. 61-85.

[6] Earman, J. & Norton, J. (1996). ”Infinite Pains: The Trouble with Supertasks,” in: A. Morton & S. Stitch (Eds.), *Benacerraf and His Critics*, Oxford: Blackwell, pp. 231-261.

[7] Hájek, P. (1998). *Metamathematics of Fuzzy Logic*, Kluwer Academic Publishers.

[8] Horvat, S. & Toader, I. D. (2025). ”An Alleged Tension Between non-Classical Logics and Applied Classical Mathematics,” *The Philosophical Quarterly*, **75** (2), pp. 579–597.

[9] Itzhaki, Y. (2021). ”Qualitative versus Quantitative Representation: A Non-Standard Analysis of the Sorites Paradox,” *Linguistics and Philosophy*, **44** (5), pp. 1013-1044.

[1]This work is based upon research funded by Iran National Science Foundation (INSF) under project No.4039069

[10] Kripke, S. A. (2023). ”The Question of Logic,” *Mind*, **133** (529), pp. 1-36.

[11] MacFarlane, J. (2010). ”Fuzzy Epistemicism,” in: Dietz, R. & Moruzzi, S., *Cuts and clouds: vagueness, its nature, and its logic*, New York: Oxford University Press.

[12] Macfarlane, J. (2021). *Philosophical Logic*, Routledge.

[13] Maddy, P. (2012). ”The Philosophy of Logic,” *The Bulletin of Symbolic Logic*, **18** (4), pp. 481-504.

[14] Nelson, E. (1977). ”Internal Set Theory: A New Approach to Nonstandard Analysis,” *Bulletin of the American Mathematical Society*, **83** (6).

[15] Quine, W. V. O. (1986). *Philosophy of Logic: Second Edition*, Harvard University Press.

[16] Quine, W. V. O. (1951). ”Two Dogmas of Empiricism,” *Philosophical Review*, **60** (1), pp. 20-43.

[17] Quine, W. V. O. (1954). ”Carnap and Logical Truth,” *Synthese*, **12**.

[18] Shapiro, S. (1991). *Foundations without Foundationalism: A Case for Second-Order Logic*, Oxford University Press.

[19] Shramko, Y., & Wansing, H. (2025). ”Truth Values,” in: E. N. Zalta & U. Nodelman (eds.), *The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Spring Edition)*.

[20] Schurz, G. (2022). ”Meaning-Preserving Translations of Non-classical Logics into Classical Logic: Between Pluralism and Monism,” *Journal of Philosophical Logic*, **51**, pp. 27–55.

[21] Urquhart, A. (1986). ”Many-Valued Logic,” in: D. Gabbay & F. Guenther (eds.), *Handbook of Philosophical Logic (Vol. III)*, D. Reidel Publishing Co., pp. 71–116

[22] Williamson, T. (1994). *Vagueness*, Routledge.

[23] Williamson, T. (2013). ”Logic, Metalogic and Neutrality,” *Erkenntnis*, **79** (2), pp. 211-231.

[24] Williamson, T. (2018). ”Alternative Logics and Applied Mathematics,” *Philosophical Issues*, **28** (1), pp. 399-424.