

## برخی خواص حاصل ضرب کرونگر $\mathcal{L}$ -گرافها و اتوماتاهای $\mathcal{L}$ -گرافی

الهام رئیسی سریژن\*

گروه آموزشی ریاضی، دانشکده علوم و فناوری‌های نوین، دانشگاه تحصیلات تکمیلی صنعتی و فناوری پیشرفته، کرمان، ایران

تاریخ پذیرش: ۱۴۰۴/۰۵/۱۷

تاریخ دریافت: ۱۴۰۴/۰۳/۰۲

نوع مقاله: علمی-پژوهشی

چکیده. در ابتدای این مقاله، مفاهیم جدیدی در مورد  $\mathcal{L}$ -گرافها نظیر همریختی، همریختی قوی، شبه همریختی، و شبه همریختی قوی معرفی می‌گردد. سپس، با ارائه چند قضیه رابطه‌ی این نوع گرافها و حاصل ضرب کرونگر آنها را مشخص نموده و برای درک بهتر، مثال‌هایی ارائه خواهد شد. علاوه بر این، الگویی از حاصل ضرب کرونگر  $\mathcal{L}$ -گرافها در ارزیابی میزان عوارض جانبی داروها مطرح می‌شود. در ادامه، با در نظر گرفتن مفهوم اتوماتای  $\mathcal{L}$ -گرافی مفاهیم همریختی و همریختی قوی برای این نوع اتوماتاها معرفی می‌گردد. سرانجام ارتباطاتی فی مابین همریختی  $\mathcal{L}$ -گرافها و همریختی اتوماتاهای  $\mathcal{L}$ -گرافی برقرار نموده و رفتار حاصل ضرب دو اتوماتای  $\mathcal{L}$ -گرافی و ارتباط آن با رفتار مؤلفه‌های تشکیل دهنده‌شان بررسی می‌شود.

## ۱. سرآغاز

لئونارد اویلر<sup>۱</sup> برای حل مسأله‌ی مشهور پل‌های کونیسبرگ<sup>۲</sup> در سال ۱۷۳۶ نظریه‌ی گراف را نخستین بار ارائه داد [۴، ۵]. در طول قرون گذشته، این نظریه به‌طور گسترده‌ای در حوزه‌های مختلفی همچون تحقیق در عملیات، شیمی، علوم کامپیوتر و علوم اجتماعی به کار گرفته شده است.

ایده‌ی نظریه مجموعه‌های فازی نخستین بار توسط زاده<sup>۳</sup> معرفی شد که هدف اصلی او از معرفی این نظریه مدل‌سازی عدم قطعیت و ابهام در دنیای واقعی و رفع نیاز به انعطاف‌پذیری بیشتر در سیستم‌های تصمیم‌گیری بود [۲۲]. از آن زمان تاکنون، پژوهش‌های فراوانی برای توسعه و گسترش این نظریه در مباحث مختلف علمی همچنین برای کاربردهای گوناگون آن انجام گرفته است. کافمن<sup>۴</sup> با تکیه بر این ایده، مفهوم گراف فازی را مطرح نمود [۶] و این مفهوم توسط پژوهشگران متعددی توسعه داده شد [۷، ۱۶].

همچنین مفهوم اتوماتای فازی برای نخستین بار توسط وی<sup>۵</sup> و سانتوس<sup>۶</sup> ارائه شد [۲۱]، [۱۷]. این اتوماتاها به‌عنوان ابزارهایی قدرتمند در تحلیل مسائلی با عدم قطعیت، کاربردی وسیع در علوم کامپیوتر دارند. برای نمونه، در حوزه‌ی شناسایی الگوها، اتوماتاهای فازی موجب افزایش دقت و بهره‌وری سیستم‌های تشخیص الگو می‌گردند [۱، ۲، ۱۵، ۱۸].

مشبکه باقی‌مانده توسط وارد<sup>۷</sup> و دیلوورث<sup>۸</sup> در سال ۱۹۳۹ معرفی شد [۲۰]. این مفهوم توجه بسیاری از محققان را به خود جلب کرد و در بسیاری از شاخه‌های مختلف علوم از آن بهره گرفته شد. بسیاری از نویسندگان، مانند سیریک<sup>۹</sup> و همکارش [۳]، کیو<sup>۱۰</sup> [۸، ۹]، تیواری<sup>۱۱</sup> و همکارش [۱۹] بر روی نظریه اتوماتا بر اساس مشبکه باقی‌مانده کار کردند.

در سال ۲۰۲۳، زاهدی<sup>۱۲</sup> و همکارانش مفهوم جدیدی به نام  $L$ -گراف را معرفی کردند که در آن، درجات عضویت رأس‌ها و یال‌ها از یک مشبکه باقی‌مانده گرفته می‌شود [۱۰]. آنان

<sup>1</sup>Leonhard Euler

<sup>2</sup>Konigsberg bridge

<sup>3</sup>Zadeh

<sup>4</sup>Kaufman

<sup>5</sup>Wee

<sup>6</sup>Santos

<sup>7</sup>Ward

<sup>8</sup>Dilworth

<sup>9</sup>Ciric

<sup>10</sup>Qiu

<sup>11</sup>Tiwari

<sup>12</sup>Zahedi

ضمن ارائه‌ی تعاریف و قضایای متعدد در  $\mathcal{L}$ -هاگراف، کاربردهای متنوعی از آنها را نیز بیان نمودند [۲۳، ۱۰]. همچنین چند نوع حاصل ضرب از جمله بیشین، کرونگر، و ترکیب شده را برای  $\mathcal{L}$ -گراف‌ها معرفی کرده و کارایی آنها را بررسی نموده‌اند [۱۱، ۱۲، ۲۴، ۱۳].

در ادامه، اتوماتاهایی مبتنی بر  $\mathcal{L}$ -گراف‌ها معرفی شده‌اند که برای تحلیل مسائل پزشکی مانند ویروس کرونا و بررسی شباهت‌های دارویی از این مدل‌سازی استفاده شد [۱۰، ۲۳، ۱۴].

در این مقاله ابتدا مفاهیم همریختی (با آستانه  $c$ ) و همریختی قوی (با آستانه  $c$ ) را بر روی  $\mathcal{L}$ -گراف‌ها تعریف می‌کنیم. سپس مثالی ارائه می‌دهیم که در آن دو  $\mathcal{L}$ -گراف  $\mathcal{G}$  و  $\mathcal{H}$  همریخت هستند، اما همریختی قوی بین آنها برقرار نیست. در ادامه، اثبات می‌کنیم که اگر  $\mathcal{L}$ -گراف  $\mathcal{G}$  با  $\mathcal{G}'$  و  $\mathcal{L}$ -گراف  $\mathcal{H}$  با  $\mathcal{H}'$  همریخت (همریخت قوی) باشند، آنگاه  $\mathcal{L}$ -گراف  $\mathcal{G} \otimes \mathcal{H}$  نیز با  $\mathcal{G}' \otimes \mathcal{H}'$  همریخت (همریخت قوی) خواهد شد، به شرطی که شبکه باقی‌مانده یک زنجیر باشد. با ارائه یک مثال، نشان می‌دهیم که شرط زنجیر بودن شبکه، یک شرط لازم است. همچنین ثابت می‌کنیم که حاصل ضرب کرونگر  $\mathcal{G} \otimes \mathcal{H}$  با هر یک از  $\mathcal{G}$  و  $\mathcal{H}$  همریخت است. در گام بعدی، با معرفی مفهوم زیر  $\mathcal{L}$ -گراف، تعاریف شبه همریختی و شبه همریختی قوی را برای  $\mathcal{L}$ -گراف‌ها ارائه داده و این مفاهیم را با مثال‌هایی گویا تشریح می‌کنیم. سپس یک نتیجه برای شبه همریختی (قوی) بدست می‌آوریم. در قالب یک قضیه، شرایطی را بیان می‌کنیم که تحت آن  $\mathcal{G}$  با  $\mathcal{G}'$  و  $\mathcal{G} \otimes \mathcal{G}'$  شبه همریخت می‌شود و با یک مثال، ضرورت این شرایط را نشان می‌دهیم. در پایان، یک الگوی عملی از این مفاهیم در حوزه‌های پزشکی و دارویی پیشنهاد می‌شود. در بخش پایانی، به ارتباط بین همریختی  $\mathcal{L}$ -گراف‌ها و اتوماتاهای  $\mathcal{L}$ -گرافی می‌پردازیم. قضیه‌ای را بیان می‌کنیم که رابطه بین تابع پاسخ حاصل ضرب کرونگر دو اتوماتای  $\mathcal{L}$ -گرافی و تابع انتقال را تعیین می‌کند و آن را با مثالی توضیح می‌دهیم. همچنین، قضایایی در رابطه با ارتباط رفتار حاصل ضرب دو اتوماتای  $\mathcal{L}$ -گرافی و رفتار تک تک اجزای آنها را بیان می‌کنیم.

## ۲. تعاریف اولیه

در این بخش، مفاهیم مقدماتی مربوط به گراف‌ها، شبکه‌ها و اتوماتاها معرفی می‌گردد [۲۵، ۲۶].

**تعریف ۱.۲ [۲۶]** اگر  $A := (a_{ij})$  یک ماتریس  $m \times n$  و  $B := (b_{kl})$  یک ماتریس  $p \times q$  باشد، آنگاه حاصل ضرب کرونگر  $A \otimes B$  به عنوان یک ماتریس بلوکی  $(mp) \times (nq)$  به شکل

زیر تعریف می‌شود:

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \cdots & a_{2n}B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \cdots & a_{mn}B \end{bmatrix}$$

که در آن هر بلوک  $a_{ij}B$  یک ماتریس  $p \times q$  است.

**تعریف ۲.۲.** [۲۵] به جبر  $(L, \wedge, \vee, \otimes, \rightarrow, \circ, 1)$  از نوع  $(2, 2, 2, 2, \circ, \circ)$  یک مشبکه باقی‌مانده گفته می‌شود هرگاه:

**(الف):**  $\mathcal{L} = (L, \wedge, \vee, \circ, 1)$  یک مشبکه کراندار است.

**(ب):**  $\mathcal{L} = (L, \otimes, 1)$  یک تکواره جابجایی است (یعنی  $\otimes$  خاصیت جابجایی و شرکت پذیری دارد و برای هر  $a \in L$  شرط  $a \otimes 1 = a$  نیز برقرار می‌باشد).

**(ج):**  $a \otimes b \leq c$  اگر و تنها اگر  $a \leq b \rightarrow c$  (شرط الحاقی).

**گزاره ۳.۲.** [۲۵] اگر  $\mathcal{L} = (L, \wedge, \vee, \otimes, \rightarrow, \circ, 1)$  یک مشبکه باقی‌مانده باشد، آنگاه ویژگی‌های زیر به ازای هر  $a, b, c, d \in L$  برقرار هستند:

$$(R_1): 1 * a = a \text{ برای هر } * \in \{\wedge, \otimes, \rightarrow\}$$

$$(R_2): \text{اگر } a \leq b \text{ آنگاه } a * c \leq b * c \text{ برای هر } * \in \{\wedge, \vee, \otimes\}$$

$$(R_3): a \otimes 0 = 0, a \otimes 1 = a \text{ و } 1' = 0$$

$$(R_4): a \rightarrow a = 1, a \rightarrow 1 = 1 \text{ و } 1 \rightarrow a = 1$$

$$(R_5): a \otimes (b \vee c) = (a \otimes b) \vee (a \otimes c)$$

$$(R_6): a \otimes (b \wedge c) \leq (a \otimes b) \wedge (a \otimes c)$$

$$(R_7): a \otimes b \leq a \wedge b \leq a, b \text{ و } b \leq (a \rightarrow b)$$

**تعریف ۴.۲.** [۲۵] اگر  $A_{m \times n} := (a_{ij})$  و  $B_{l \times k} := (b_{ij})$  دو ماتریس با درایه‌هایی از مشبکه باقی‌مانده  $\mathcal{L} = (L, \wedge, \vee, \otimes, \rightarrow, \circ, 1)$  باشند، آنگاه عملگر  $\odot$  روی آنها به صورت

ماتریس زیر تعریف می‌شود:

$$A \odot B = \begin{bmatrix} a_{11} \otimes B & a_{12} \otimes B & \dots & a_{1n} \otimes B \\ a_{21} \otimes B & a_{22} \otimes B & \dots & a_{2n} \otimes B \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} \otimes B & a_{m2} \otimes B & \dots & a_{mn} \otimes B \end{bmatrix}$$

به طوری که:

$$a_{ij} \otimes B = \begin{bmatrix} a_{ij} \otimes b_{11} & a_{ij} \otimes b_{12} & \dots & a_{ij} \otimes b_{1k} \\ a_{ij} \otimes b_{21} & a_{ij} \otimes b_{22} & \dots & a_{ij} \otimes b_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{ij} \otimes b_{l1} & a_{ij} \otimes b_{l2} & \dots & a_{ij} \otimes b_{lk} \end{bmatrix}; \quad 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n.$$

**تعریف ۵.۲ [۲۶]** دو گراف ساده  $\mathcal{G}^* = (V, E)$  و  $\mathcal{H}^* = (V', E')$  را یکریخت گوئیم، هرگاه تابع دوسویی  $f: V \rightarrow V'$  وجود داشته باشد به طوری که:

$$uv \in E \iff f(u)f(v) \in E'.$$

به چنین تابعی، یکریختی گفته می‌شود.

### تعریف ۶.۲ [۲۶]

**(الف):** فرض کنید  $\mathcal{G}^*$  گراف ساده‌ای باشد که رأس‌های آن در ابتدا با رنگ سیاه یا سفید، رنگ شده‌اند. همچنین،  $u$  یک رأس به رنگ مشکی از گراف  $\mathcal{G}^*$  است به طوری که دقیقاً یک رأس مانند رأس  $v$  در همسایگی خود به رنگ سفید داشته باشد. آنگاه رأس  $v$  به رنگ مشکی تغییر خواهد کرد و به آن قاعده تغییر رنگ می‌گویند. در این حالت گفته می‌شود که رأس  $u$ ، رأس  $v$  را تحمیل می‌کند و آن را با  $v \rightarrow u$  نمایش می‌دهند. به یال  $uv$  نیز یال تحمیلی گفته می‌شود.

**(ب):** اگر این فرآیند تا زمانی که هیچ تغییری ممکن نباشد ادامه یابد، گراف حاصل را گراف رنگ‌آمیزی شده می‌نامیم.

**(ج):**  $\mathcal{Z}$  را مجموعه صفر تحمیلی گراف  $\mathcal{G}^*$  می‌گوئیم، هرگاه  $\mathcal{Z}$  زیرمجموعه‌ای از مجموعه رأس‌های گراف  $\mathcal{G}^*$  است به قسمی که اگر رنگ رأس‌های  $\mathcal{Z}$  را مشکی کنیم و رنگ رأس‌های باقیمانده سفید باشند، آنگاه در گراف رنگ‌آمیزی شده  $\mathcal{G}^*$  امکان تغییر رنگ وجود نداشته باشد.

د: کوچکترین چنین مجموعه‌ای را با  $\mathcal{Z}(\mathcal{G}^*)$  نمایش می‌دهیم و فرآیند تغییر کامل رنگ همه رأس‌های سفید به سیاه را فرآیند صفر تحمیلی می‌نامیم.

تعریف ۷.۲. [۲۵] اگر  $\mathcal{G}^* = (V, E)$  یک گراف ساده باشد و  $\mathcal{L} = (L, \wedge, \vee, \otimes, \rightarrow)$  یک مشبکه باقی‌مانده، آنگاه گراف  $\mathcal{G}_{\mathcal{L}} = (\alpha, \beta)$  را یک  $\mathcal{L}$ -گراف روی  $\mathcal{G}^*$  می‌نامیم هرگاه:

- $\alpha : V \rightarrow L$  که تابع درجه‌ی عضویت رأس‌ها نامیده می‌شود،
- $\beta : E \rightarrow L$  که تابع درجه‌ی عضویت یال‌ها نامیده شده و شرط زیر برای هر یال  $uv \in E$  برقرار باشد:

$$\beta(uv) \leq \alpha(u) \otimes \alpha(v).$$

به  $\mathcal{L}$ -گراف  $\mathcal{G}_{\mathcal{L}}$ ،  $\mathcal{L}$ -گراف قوی گوئیم هرگاه برای هر یال  $uv \in E$  رابطه زیر برقرار باشد:

$$\beta(uv) = \alpha(u) \otimes \alpha(v).$$

همچنین، اگر  $\mathcal{G}^*$  یک گراف مسیری (دوری، کامل، دوبخشی و دوبخشی کامل) باشد، آنگاه  $\mathcal{G}_{\mathcal{L}}$  را  $\mathcal{L}$ -گراف مسیری (دوری، کامل، دوبخشی و دوبخشی کامل) روی  $\mathcal{G}^*$  می‌نامیم.

تعریف ۸.۲. [۲۵] فرض کنید  $\mathcal{G}_{\mathcal{L}} = (\alpha, \beta)$  روی  $\mathcal{G}^*$  یک  $\mathcal{L}$ -گراف باشد. آنگاه:

الف: اگر  $\mathcal{G}^*$  یک گراف  $k$ -منظم باشد، آنگاه به  $\mathcal{L}$ -گراف  $\mathcal{G}_{\mathcal{L}}$ ،  $\mathcal{L}$ -گراف  $k$ -منظم می‌گوئیم.

ب: هرگاه مقدار  $\alpha$  برای همه رأس‌های یک  $\mathcal{L}$ -گراف  $k$ -منظم  $\mathcal{G}_{\mathcal{L}}$ ، مساوی باشند، آنگاه  $\mathcal{G}_{\mathcal{L}}$  را  $\mathcal{L}$ -گراف  $\alpha$ -منظم می‌نامیم.

ج: اگر در یک  $\mathcal{L}$ -گراف  $k$ -منظم  $\mathcal{G}_{\mathcal{L}}$  مقدار  $\beta$  یال‌ها یکسان باشند، آنگاه به  $\mathcal{G}_{\mathcal{L}}$  یک  $\mathcal{L}$ -گراف  $\beta$ -منظم گفته می‌شود.

د:  $\mathcal{L}$ -گراف  $\mathcal{G}_{\mathcal{L}}$  را یک  $\mathcal{L}$ -گراف کاملاً منظم گوئیم اگر و تنها اگر  $\mathcal{G}_{\mathcal{L}}$  یک  $\mathcal{L}$ -گراف  $\alpha$ -منظم و  $\beta$ -منظم باشد.

ه:  $\mathcal{G}_{\mathcal{L}}$  یک  $\mathcal{L}$ -گراف کاملاً قوی است اگر و تنها اگر یک  $\mathcal{L}$ -گراف قوی و کاملاً منظم باشد.

**تعریف ۹.۰۲.** [۲۵] فرض کنید  $\mathcal{G}_L = (\alpha, \beta)$  روی  $\mathcal{G}^* = (V, E)$  یک  $L$ -گراف باشد. آنگاه ماتریس مجاورت  $\mathcal{G}_L$  برابر با ماتریس مجاورت گراف  $\mathcal{G}^*$  است و ماتریس درجه عضویت رأس‌های آن یک ماتریس  $n \times 1$  می‌باشد به طوری که:

$$\alpha_{\mathcal{G}_L} := (\alpha(u_i)); u_i \in V, 1 \leq i \leq n.$$

همچنین، ماتریس درجه عضویت یال‌های  $L$ -گراف  $\mathcal{G}_L$  یک ماتریس  $n \times n$  می‌باشد به طوری که:

$$\beta_{\mathcal{G}_L} := (a_i a_j) = \begin{cases} \beta(u_i v_j) & \text{اگر } u_i v_j \in E \text{ آنگاه} \\ 0 \in L & \text{اگر } u_i v_j \notin E \text{ آنگاه} \end{cases}.$$

**تعریف ۱۰.۰۲.** [۲۵] فرض کنید  $\mathcal{G}_L$  و  $\mathcal{H}_L$  دو  $L$ -گراف باشند. در این صورت، حاصل ضرب کرونگر آنها به صورت  $\mathcal{K}_L = \mathcal{G}_L \otimes \mathcal{H}_L = (\alpha, \beta)$  روی  $\mathcal{K}^* = (V, E)$  تعریف می‌شود به طوری که:

$$A_{\mathcal{K}_L} = A_{\mathcal{G}_L} \otimes A_{\mathcal{H}_L}, \alpha_{\mathcal{K}_L} = \alpha_{\mathcal{G}_L} \odot \alpha_{\mathcal{H}_L} \text{ و } \beta_{\mathcal{K}_L} = \beta_{\mathcal{G}_L} \odot \beta_{\mathcal{H}_L}.$$

**تعریف ۱۱.۰۲.** [۲۵] فرض کنید که  $\mathcal{Z}(\mathcal{G}_L)$  یک مجموعه‌ی صفر تحمیلی برای  $L$ -گراف  $\mathcal{G}_L = (\alpha, \beta)$  روی  $\mathcal{G}^* = (V, E)$  باشد. آنگاه اتوماتای  $L$ -گرافی  $\tilde{\mathcal{A}}_L(\mathcal{Z}(\mathcal{G}_L)) = (Q, X, \mu_L, \sigma_L, F)$  به صورت زیر تعریف می‌شود:

**الف):**  $Q = V$  مجموعه ناتهی و متناهی از حالات می‌باشد.

**ب):**  $X = \{f, n\}$  مجموعه‌ی الفبا است.

**ج):**  $L: V \times X \times V \rightarrow L$ ، تابع انتقال می‌باشد به طوری که:

$$\mu_L(q_i, u, q_j) = \begin{cases} \beta(q_i q_j) & \text{اگر } u = f \text{ آنگاه} \\ 1 & \text{اگر } u = n \text{ آنگاه} \end{cases}$$

**د):**  $L: V \rightarrow L$  تابع توزیع اولیه نام دارد به طوری که:

$$\sigma_L(q_i) = \begin{cases} 1 & \text{اگر } q_i \in \mathcal{Z}(\mathcal{G}_L) \text{ آنگاه} \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

**ه):**  $F$  مجموعه حالات نهایی است به قسمی که  $q \in F$  اگر و تنها اگر رأس  $q$  در  $\mathcal{G}^*$  هیچ رأسی را تحمیل نکند.

همچنین، مجموعه جدیدی به صورت زیر تعریف می‌نمائیم:

$$\mathcal{Z}(\tilde{\mathcal{A}}_{\mathcal{L}}(\mathcal{Z}(\mathcal{G}_{\mathcal{L}}))) = \{q_i \in Q \mid \sigma_{\mathcal{L}}(q_i) = 1\} = \{q_i \in Q \mid q_i \in \mathcal{Z}(\mathcal{G}_{\mathcal{L}})\}.$$

حال با این فرض‌ها می‌توانیم مجموعه  $X$  را به تکواریه آزاد  $X^*$  که ۱ عضو همانی آن است، توسعه دهیم. آنگاه تابع  $\mu$  را می‌توان به  $[0, 1]$  به  $\mu_{\mathcal{L}}^* : Q \times X^* \times Q \rightarrow [0, 1]$  توسعه داد به طوری که برای هر  $u \in X^*$  و  $a \in X, q, q' \in Q$ ، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mu_{\mathcal{L}}^*(q, 1, q') = \begin{cases} 1 \in L & \text{اگر } q = q' \text{ آنگاه} \\ 0 \in L & \text{اگر } q \neq q' \text{ آنگاه} \end{cases}$$

و

$$\mu_{\mathcal{L}}^*(q, au, q') = \bigvee_{q'' \in Q} (\mu_{\mathcal{L}}(q, a, q'') \otimes \mu_{\mathcal{L}}^*(q'', u, q')).$$

تابع پاسخ اتوماتای  $\mathcal{L}$ -گرافی  $\tilde{\mathcal{A}}_{\mathcal{L}}(\mathcal{Z}(\mathcal{G}_{\mathcal{L}}))$  را به صورت زیر تعریف می‌نمائیم:

$$r_{\mu_{\mathcal{L}}}(\tilde{\mathcal{A}}_{\mathcal{L}}(\mathcal{Z}(\mathcal{G}_{\mathcal{L}})), u, q) = \bigvee_{q' \in Q} (\sigma_{\mathcal{L}}(q') \otimes \mu_{\mathcal{L}}^*(q', u, q)); \quad \forall u \in X^*, \forall q \in Q.$$

همچنین،  $k$ -رفتار آن با آستانه  $c$  به صورت:

$$B_k(\tilde{\mathcal{A}}_{\mathcal{L}}(\mathcal{Z}(\mathcal{G}_{\mathcal{L}})), c) = \{u \in X^* \mid \bigvee_{q \in F} r_{\mu_{\mathcal{L}}}(\tilde{\mathcal{A}}_{\mathcal{L}}(\mathcal{Z}(\mathcal{G}_{\mathcal{L}})), u, q) > c, |u| \leq k\}$$

تعریف می‌شود.

**تعریف ۱۲.۲.** [۲۵] فرض کنید  $(Q_1, X, \mu_1, \sigma_1, F_1)$  و  $\tilde{\mathcal{A}}_{\mathcal{L}}(\mathcal{Z}(\mathcal{G}_{\mathcal{L}}))$

$(Q_2, X, \mu_2, \sigma_2, F_2)$  و  $\tilde{\mathcal{A}}_{\mathcal{L}}(\mathcal{Z}(\mathcal{H}_{\mathcal{L}})) = (Q_2, X, \mu_2, \sigma_2, F_2)$  دو اتوماتای  $\mathcal{L}$ -گرافی به ترتیب مرتبط به

$\mathcal{Z}(\tilde{\mathcal{A}}_{\mathcal{L}}(\mathcal{Z}(\mathcal{G}_{\mathcal{L}})))$  و  $\mathcal{Z}(\tilde{\mathcal{A}}_{\mathcal{L}}(\mathcal{Z}(\mathcal{H}_{\mathcal{L}})))$  می‌باشند. آنگاه

$\tilde{\mathcal{A}}_{\mathcal{L}} = \tilde{\mathcal{A}}_{\mathcal{L}}(\mathcal{Z}(\mathcal{G}_{\mathcal{L}})) * \tilde{\mathcal{A}}_{\mathcal{L}}(\mathcal{Z}(\mathcal{H}_{\mathcal{L}})) = (Q, X, \mu, \sigma, F)$  حاصل ضرب کرونگر این دو

نوع اتوماتاها نسبت به  $\mathcal{Z}(\tilde{\mathcal{A}}_{\mathcal{L}})$  است که دارای سه حالت زیر می‌باشد:

**الف):**  $Q = Q_1 \times Q_2$ ، مجموعه متناهی از حالات می‌باشد.

حالت اول:

اگر  $|Q_1| \times |\mathcal{Z}(\tilde{\mathcal{A}}_{\mathcal{L}}(\mathcal{Z}(\mathcal{H}_{\mathcal{L}})))| < |\mathcal{Z}(\tilde{\mathcal{A}}_{\mathcal{L}}(\mathcal{Z}(\mathcal{G}_{\mathcal{L}})))| \times |Q_2|$ ، آنگاه:

ب):  $\mu_{\mathcal{L}} : Q \times X \times Q \rightarrow L$  تابع انتقال است و اگر یک انتقال با حرف  $u'$  از  $q'_i$  به  $q'_l$  یا از  $q'_l$  به  $q'_i$  وجود داشته باشد و  $\mu_{\mathcal{L}}(q_t, u, q_k) \geq 0$  نیز موجود باشد، آنگاه یک انتقال با برچسب  $u$  از حالت  $(q_t, q'_i)$  به حالت  $(q_k, q'_l)$  موجود بوده به طوری که:

$$\mu_{\mathcal{L}}((q_t, q'_i), u, (q_k, q'_l)) =$$

$$\begin{cases} \mu_{\mathcal{L}}(q_t, f, q_k) \otimes \mu_{\mathcal{L}}(q'_i, u', q'_l) & \text{اگر } u = f \text{ و } \mu_{\mathcal{L}}(q'_i, u', q'_l) \text{ موجود باشد، آنگاه} \\ \mu_{\mathcal{L}}(q_t, f, q_k) \otimes \mu_{\mathcal{L}}(q'_l, u', q'_i) & \text{اگر } u = f \text{ و } \mu_{\mathcal{L}}(q'_l, u', q'_i) \text{ موجود باشد، آنگاه} \\ 1 & \text{اگر } u = n \text{، آنگاه} \end{cases}$$

لازم به ذکر است که براساس تعریف اتوماتای  $\mathcal{L}$ -گرافی برای  $\mu_{\mathcal{L}}(q'_i, u', q'_l)$  هیچگاه دو مقدار پیدا نمی‌گردد.

ج):  $F$  مجموعه حالات نهایی می‌باشد به طوری که  $F = F_1 \times Q_2$

$$\mathcal{Z}(\tilde{\mathcal{A}}_{\mathcal{L}}) = \mathcal{Z}(\tilde{\mathcal{A}}_{\mathcal{L}}(\mathcal{Z}(\mathcal{G}_{\mathcal{L}}))) \times Q_2 \quad \text{د):}$$

ه):

$$\sigma_{\mathcal{L}} : Q \rightarrow L; \sigma_{\mathcal{L}}((q_i, q'_j)) = \begin{cases} 1 & \text{اگر } (q_i, q'_j) \in \mathcal{Z}(\tilde{\mathcal{A}}_{\mathcal{L}}) \text{، آنگاه} \\ 0 & \text{درغیراین صورت} \end{cases}$$

حالت دوم:

$$\text{اگر } |Q_2| \times |\mathcal{Z}(\mathcal{A}_{\mathcal{L}}(\mathcal{Z}(\mathcal{G}_{\mathcal{L}})))| < |Q_1| \times |\mathcal{Z}(\mathcal{A}_{\mathcal{L}}(\mathcal{Z}(\mathcal{H}_{\mathcal{L}})))| \text{، آنگاه:}$$

ب):  $\mu_{\mathcal{L}} : Q \times X \times Q \rightarrow L$  تابع انتقال می‌باشد به طوری که اگر یک انتقال با حرف  $u'$  از  $q_t$  به  $q_k$  یا از  $q_k$  به  $q_t$  وجود داشته باشد و  $\mu_{\mathcal{L}}(q'_i, u, q'_l) \geq 0$  نیز موجود باشد، آنگاه یک انتقال با برچسب  $u$  از حالت  $(q_t, q'_i)$  به  $(q_k, q'_l)$  وجود دارد به طوری که:

$$\mu_{\mathcal{L}}((q_t, q'_i), u, (q_k, q'_l)) =$$

$$\begin{cases} \mu_{\mathcal{L}}(q_t, u', q_k) \otimes \mu_{\mathcal{L}}(q'_i, f, q'_l) & \text{اگر } u = f \text{ و } \mu_{\mathcal{L}}(q_t, u', q_k) \text{ موجود باشد، آنگاه} \\ \mu_{\mathcal{L}}(q_k, u', q_t) \otimes \mu_{\mathcal{L}}(q'_i, f, q'_l) & \text{اگر } u = f \text{ و } \mu_{\mathcal{L}}(q_k, u', q_t) \text{ موجود باشد، آنگاه} \\ 1 & \text{اگر } u = n \text{، آنگاه} \end{cases}$$

لازم به ذکر است که براساس تعریف اتوماتای  $\mathcal{L}$ -گرافی برای  $\mu_{1\mathcal{L}}(qt, u', qk)$  هیچگاه دو مقدار پیدا نمی‌گردد.

ج:  $F$  مجموعه حالات نهایی می‌باشد به طوری که  $F = Q_1 \times F_2$ ،

$$د: \mathcal{Z}(\tilde{\mathcal{A}}_{\mathcal{L}}) = Q_1 \times \mathcal{Z}(\tilde{\mathcal{A}}_{\mathcal{L}}(\mathcal{Z}(\mathcal{H}_{\mathcal{L}})))$$

ه:

$$\sigma_{\mathcal{L}} : Q \rightarrow L; \sigma_{\mathcal{L}}((q_i, q'_j)) = \begin{cases} 1 & \text{اگر } (q_i, q'_j) \in \mathcal{Z}(\tilde{\mathcal{A}}_{\mathcal{L}}) \text{، آنگاه} \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

حالت سوم:

اگر  $|Q_2| \times |\mathcal{Z}(\tilde{\mathcal{A}}_{\mathcal{L}}(\mathcal{Z}(\mathcal{G}_{\mathcal{L}})))| = |Q_1| \times |\mathcal{Z}(\tilde{\mathcal{A}}_{\mathcal{L}}(\mathcal{Z}(\mathcal{H}_{\mathcal{L}})))|$ ، آنگاه دو انتخاب داریم

۱: اگر  $Q_2 \times \mathcal{Z}(\tilde{\mathcal{A}}_{\mathcal{L}}(\mathcal{Z}(\mathcal{G}_{\mathcal{L}}))) = \mathcal{Z}(\tilde{\mathcal{A}}_{\mathcal{L}})$  در نظر گرفته شود، آنگاه حاصل ضرب

کرونگر مانند حالت اول به دست می‌آید.

۲: اگر  $\mathcal{Z}(\tilde{\mathcal{A}}_{\mathcal{L}}) = Q_2 \times \mathcal{Z}(\tilde{\mathcal{A}}_{\mathcal{L}}(\mathcal{Z}(\mathcal{H}_{\mathcal{L}})))$  در نظر گرفته شود، آنگاه حاصل ضرب

کرونگر مانند حالت دوم به دست می‌آید.

### ۳. برخی خواص حاصل ضرب کرونگر دو $\mathcal{L}$ -گراف

در این بخش ابتدا مفهوم همریختی (با آستانه  $c$ ) و همریختی قوی (با آستانه  $c$ ) روی  $\mathcal{L}$ -گرافها را بیان می‌کنیم. آنگاه مثالی را ارائه می‌دهیم که  $\mathcal{L}$ -گراف  $\mathcal{G}_{\mathcal{L}}$  با  $\mathcal{L}$ -گراف  $\mathcal{H}_{\mathcal{L}}$  همریخت است ولی همریخت قوی نمی‌باشد. سپس با فرض اینکه مشبکه باقی‌مانده یک زنجیر است، ثابت می‌کنیم که اگر  $\mathcal{L}$ -گراف  $\mathcal{G}_{\mathcal{L}}$  با  $\mathcal{L}$ -گراف  $\mathcal{G}'_{\mathcal{L}}$  و  $\mathcal{L}$ -گراف  $\mathcal{H}_{\mathcal{L}}$  با  $\mathcal{L}$ -گراف  $\mathcal{H}'_{\mathcal{L}}$  همریخت (قوی) باشند، آنگاه  $\mathcal{L}$ -گراف  $\mathcal{G}_{\mathcal{L}} \otimes \mathcal{H}_{\mathcal{L}}$  با  $\mathcal{L}$ -گراف  $\mathcal{G}'_{\mathcal{L}} \otimes \mathcal{H}'_{\mathcal{L}}$  همریخت (قوی) می‌شود علاوه بر آن با یک مثال نشان می‌دهیم که شرط زنجیر بودن مشبکه یک شرط لازم می‌باشد. همچنین نشان می‌دهیم که حاصل ضرب کرونگر  $\mathcal{G}_{\mathcal{L}} \otimes \mathcal{H}_{\mathcal{L}}$  با  $\mathcal{G}_{\mathcal{L}}$  و  $\mathcal{H}_{\mathcal{L}}$  همریخت است.

تعریف ۱.۳. فرض کنید  $\mathcal{G}_{1\mathcal{L}} = (\alpha_1, \beta_1)$  و  $\mathcal{G}_{2\mathcal{L}} = (\alpha_2, \beta_2)$  دو  $\mathcal{L}$ -گراف به ترتیب روی  $\mathcal{G}_1^* = (V_1, E_1)$  و  $\mathcal{G}_2^* = (V_2, E_2)$  باشند.

$i$ : برای  $c \in L \setminus \{1\}$  می‌گوییم  $\mathcal{G}_{1\mathcal{L}}$  با آستانه‌ی  $c$  با  $\mathcal{G}_{2\mathcal{L}}$  همریخت است، هرگاه

تابع  $f : V_1 \rightarrow V_2$  موجود باشد به طوری که برای هر  $u, v \in V_1$ ، شرایط زیر

برای آن برقرار باشند:

(الف): اگر  $uv \in E_1$ ، آنگاه  $f(u)f(v) \in E_2$ .

(ب): اگر  $\alpha_1(u) > c$ ، آنگاه  $\alpha_2(f(u)) > c$ .

(ج): اگر  $\beta_1(uv) > c$ ، آنگاه  $\beta_2(f(u)f(v)) > c$ .

تابع  $f$  در این حالت، همریختی با آستانه‌ی  $c$  نامیده می‌شود. اگر این شرایط برای همه‌ی  $c \in L \setminus \{1\}$  برقرار باشد،  $f$  را یک همریختی می‌نامیم.

(ii):  $\mathcal{L}$ -گراف  $\mathcal{G}_1$  همریخت قوی با آستانه‌ی  $c$  با  $\mathcal{L}$ -گراف  $\mathcal{G}_2$  می‌باشد هرگاه تابع

$f: V_1 \rightarrow V_2$  یک تابع همریختی با آستانه‌ی  $c$  از  $\mathcal{L}$ -گراف‌های  $\mathcal{G}_1$  به  $\mathcal{G}_2$

باشد. همچنین، تابعی مانند  $g: V_2 \rightarrow V_1$  موجود باشد به‌قسمی که با آستانه‌ی  $c$

شرط (الف) و (ب) برای آن برقرار باشد.

$f$  همریختی قوی می‌باشد اگر و تنها اگر برای هر  $c \in L \setminus \{1\}$ ،  $f$  یک همریختی

قوی با آستانه‌ی  $c$  باشد.

**ملاحظه ۲.۳.** اگر  $f$  یک تابع دوسویی باشد و هر دو جهت با آستانه‌ی  $c$  برقرار باشند، آنگاه

این دو  $\mathcal{L}$ -گراف یکرخت با آستانه‌ی  $c$  نامیده می‌شوند و با نماد  $\mathcal{G}_1 \cong_c \mathcal{G}_2$  نمایش داده می‌شوند.

$f$  یک تابع یکرختی ( $\cong$ ) می‌باشد اگر و تنها اگر برای هر  $c \in L \setminus \{1\}$ ،  $f$  تابع یکرختی با آستانه‌ی  $c$  باشد.

**مثال ۳.۳.** دو  $\mathcal{L}$ -گراف  $\mathcal{G}_1 = (V_1, E_1)$  و  $\mathcal{G}_2 = (V_2, E_2)$  و  $\mathcal{H}_1 = (\alpha_1, \beta_1)$  و  $\mathcal{H}_2 = (\alpha_2, \beta_2)$  روی

$\mathcal{H}^* = (V_2, E_2)$  را مانند شکل ۱ در نظر بگیرید به‌طوری که مشبکه باقی‌مانده

$\mathcal{L} = ([0, 1], \min, \max, \otimes, \rightarrow, \circ, 1)$  با ساختار گودل<sup>۱</sup> به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$a \otimes b = \min\{a, b\}, \quad a \rightarrow b = \begin{cases} 1 & \text{اگر } a \leq b \text{ آنگاه} \\ b & \text{اگر } a > b \text{ آنگاه} \end{cases}$$

در این صورت فرض کنید تابع  $g$  به صورت زیر تعریف شده است:

$$g(q_1) = q'_1, \quad g(q_2) = q'_2, \quad g(q_3) = q'_3.$$

(الف): به راحتی می‌توان دید که به ازای هر  $c \in L \setminus \{1\}$ ،  $\mathcal{G}_1$  همریخت با  $\mathcal{H}_1$

است. درحالی که اگر  $c = 0/7$  مفروض شود، آنگاه  $\mathcal{H}_1$  همریخت با آستانه‌ی  $c$

<sup>1</sup>Godel

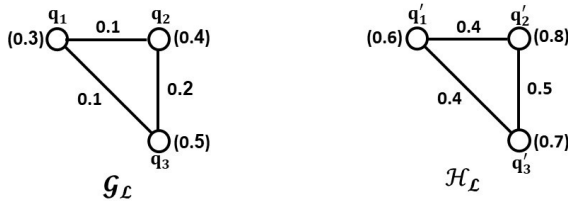
$\mathcal{G}_{\mathcal{L}}$  نخواهد شد. اما اگر  $c = 0.05$  را فرض کنیم، آنگاه  $\mathcal{H}_{\mathcal{L}}$  همریخت با آستانه

$c$  با  $\mathcal{G}_{\mathcal{L}}$  می شود. پس می توان گفت که  $\mathcal{H}_{\mathcal{L}}$  همریخت با  $\mathcal{G}_{\mathcal{L}}$  نمی باشد.

(ب): همچنین، ملاحظه می نمائید که به ازای هر  $c \in L \setminus \{1\}$ ،  $\mathcal{G}_{\mathcal{L}}$  همریخت قوی

با  $\mathcal{H}_{\mathcal{L}}$  نیست. ولی اگر  $c = 0.2$ ، آنگاه  $\mathcal{G}_{\mathcal{L}}$  همریخت قوی با  $\mathcal{H}_{\mathcal{L}}$  با آستانه  $c$

می شود ولی عکس آن برقرار نمی باشد.



شکل ۱: دو  $\mathcal{L}$ -گراف  $\mathcal{G}_{\mathcal{L}}$  و  $\mathcal{H}_{\mathcal{L}}$ .

**قضیه ۴.۳.** فرض کنید مشبکه باقی مانده  $(\wedge, \vee, \otimes, \rightarrow, \circ, 1)$  یک زنجیر نیز باشد

و  $\mathcal{G}_{\mathcal{L}} = (\alpha_1, \beta_1)$  روی  $\mathcal{G}^* = (V_1, E_1)$  یک  $\mathcal{L}$ -گراف باشد به طوری که همریخت (قوی)

با  $\mathcal{L}$ -گراف  $\mathcal{G}'_{\mathcal{L}} = (\alpha'_1, \beta'_1)$  روی  $\mathcal{G}'^* = (V'_1, E'_1)$  است. همچنین،  $\mathcal{H}_{\mathcal{L}} = (\alpha_2, \beta_2)$

روی  $\mathcal{H}^* = (V_2, E_2)$  نیز یک  $\mathcal{L}$ -گراف بوده به طوری که همریخت (قوی) با  $\mathcal{L}$ -گراف

$\mathcal{H}'_{\mathcal{L}} = (\alpha'_2, \beta'_2)$  روی گراف ساده  $\mathcal{H}'^* = (V'_2, E'_2)$  می باشد. آنگاه  $\mathcal{L}$ -گراف  $\mathcal{G}_{\mathcal{L}} \otimes \mathcal{H}_{\mathcal{L}}$

با  $\mathcal{L}$ -گراف  $\mathcal{G}'_{\mathcal{L}} \otimes \mathcal{H}'_{\mathcal{L}}$  همریخت (قوی) می شود.

**اثبات.** از آنجا که  $\mathcal{L}$ -گراف  $\mathcal{G}_{\mathcal{L}}$  با  $\mathcal{L}$ -گراف  $\mathcal{G}'_{\mathcal{L}}$  همریخت است و  $\mathcal{L}$ -گراف  $\mathcal{H}_{\mathcal{L}}$  نیز

با  $\mathcal{L}$ -گراف  $\mathcal{H}'_{\mathcal{L}}$  همریخت می باشد. بنابراین، دو تابع  $g : V_1 \rightarrow V'_1$  و  $g' : V_2 \rightarrow V'_2$

وجود دارند به قسمی که برای آنها روابط زیر برقرار می باشند:

(الف)

$$q_i q_j \in E_1 \implies g(q_i)g(q_j) \in E'_1,$$

(ب)

$$\alpha_1(q_i) \geq c \implies \alpha'_1(g(q_i)) \geq c,$$

(ج)

$$\beta_1(q_i q_j) \geq c \implies \beta'_1(g(q_i)g(q_j)) \geq c,$$

(د)

$$p_i p_j \in E_{\gamma} \implies g'(p_i) g'(p_j) \in E'_{\gamma},$$

(ه)

$$\alpha_{\gamma}(p_i) \geq c' \implies \alpha'_{\gamma}(g'(p_i)) \geq c',$$

(و)

$$\beta_{\gamma}(p_i p_j) \geq c' \implies \beta'_{\gamma}(g'(p_i) g'(p_j)) \geq c'.$$

اکنون دو  $\mathcal{L}$ -گراف  $\mathcal{G}_{\mathcal{L}} \otimes \mathcal{H}_{\mathcal{L}} = (\alpha, \beta)$  روی  $(\mathcal{G} \otimes \mathcal{H})^* = (V, E)$  و  $\mathcal{G}'_{\mathcal{L}} \otimes \mathcal{H}'_{\mathcal{L}} = (\alpha', \beta')$  روی  $(\mathcal{G}' \otimes \mathcal{H}')^* = (V', E')$  را با تابع  $f: V \rightarrow V'$  در نظر بگیرید. بدون کم شدن از کلیت مسئله می‌توان هر  $q \in V$  را به صورت زیر نیز نوشت:

$$q = (q_i, p_j); \quad q_i \in V_1, \quad p_j \in V_2.$$

بنابراین، تابع  $f$  را به صورت  $f(q) = (g(q_i), g'(p_j))$  تعریف می‌کنیم. به راحتی می‌توان نشان داد که:

$$qp \in E \implies f(q)f(p) \in E'.$$

اکنون فرض کنید:

$$\alpha(q) > c''$$

بنابراین، طبق تعریف حاصل ضرب کرونکر دو  $\mathcal{L}$ -گراف:

$$\alpha_1(q_i) \otimes \alpha_2(p_j) = \alpha(q) > c''.$$

حال فرض کنید  $\alpha_1(q_i) = c_1 \in L$  و  $\alpha_2(p_j) = c_2 \in L$ . پس داریم:

$$c'' < c_1 \otimes c_2.$$

اکنون ادعا می‌کنیم که  $c_1 \leq \alpha'_1(g(q_i))$ . با برهان خلف فرض می‌کنیم  $c_1 \not\leq \alpha'_1(g(q_i))$ ، از آنجا که  $\mathcal{L}$  یک زنجیر است، پس:

$$\alpha'_1(g(q_i)) < c_1 \implies c' = \alpha'_1(g(q_i)) < \alpha_1(q_i)$$

$$\implies c' < \alpha'_1(g(q_i)), \text{ طبق تعریف همریختی}$$

که این با فرض خلف در تناقض است. بنابراین،  $c_1 \leq \alpha'_1(g(q_i))$ . به همین روش ثابت می‌کنیم  $c_2 \leq \alpha'_2(g'(p_j))$ . لذا می‌توان نتیجه گرفت:

$$c < c_1 \otimes c_2 \leq \alpha'_1(g(q_i)) \otimes \alpha'_2(g'(p_j)) = \alpha(f(q)).$$

به همین روش شرط دوم را نیز با اعمال تغییرات جزئی در اثبات قبل، اثبات می‌کنیم.  $\square$

ملاحظه ۵.۳. مثال بعد نشان می‌دهد که شرط زنجیر بودن مشبکه در قضیه ۴.۳ لازم می‌باشد.

مثال ۶.۳. فرض کنید  $X = \{a, b, c, d\}$  و  $\mathcal{L} = (P(X), \cap, \cup, \otimes, \rightarrow, \emptyset, X)$  مشبکه باقی‌مانده است به طوری که:

$$A \otimes B = A \cap B \text{ و } A \rightarrow B = X \setminus (A \setminus B).$$

همچنین، فرض کنید  $\mathcal{G}_{\mathcal{L}} = (\alpha_1, \beta_1)$  روی  $\mathcal{G}^* = (V_1, E_1)$  یک  $\mathcal{L}$ -گراف مانند شکل ۲ باشد. همچنین،  $\mathcal{H}_{\mathcal{L}} = (\alpha_2, \beta_2)$  روی  $\mathcal{H}^* = (V_2, E_2)$  نیز یک  $\mathcal{L}$ -گراف همریخت قوی با  $\mathcal{L}$ -گراف  $\mathcal{H}'_{\mathcal{L}} = (\alpha'_2, \beta'_2)$  روی  $\mathcal{H}'^* = (V'_2, E'_2)$  مانند شکل ۲ می‌باشند. آنگاه  $\mathcal{L}$ -گرافهای  $\mathcal{G}_{\mathcal{L}} \otimes \mathcal{H}'_{\mathcal{L}}$  و  $\mathcal{G}_{\mathcal{L}} \otimes \mathcal{H}_{\mathcal{L}}$  مانند شکل ۳ به دست می‌آیند به طوری که:

$$A_{\mathcal{G}_{\mathcal{L}} \otimes \mathcal{H}_{\mathcal{L}}} = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}, \alpha_{\mathcal{G}_{\mathcal{L}} \otimes \mathcal{H}_{\mathcal{L}}} = \begin{bmatrix} \{b\} \\ \{b\} \\ \{b, c\} \end{bmatrix} \odot [\{d\}] = \begin{bmatrix} \{\} \\ \{\} \\ \{\} \end{bmatrix},$$

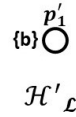
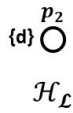
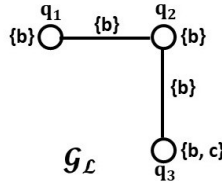
$$\beta_{\mathcal{G}_{\mathcal{L}} \otimes \mathcal{H}_{\mathcal{L}}} = \begin{bmatrix} \{\} & \{b\} & \{\} \\ \{b\} & \{\} & \{b\} \\ \{\} & \{b\} & \{\} \end{bmatrix} \odot [\{\}] = \begin{bmatrix} \{\} & \{\} & \{\} \\ \{\} & \{\} & \{\} \\ \{\} & \{\} & \{\} \end{bmatrix},$$

$$A_{\mathcal{G}_{\mathcal{L}} \otimes \mathcal{H}'_{\mathcal{L}}} = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}, \alpha_{\mathcal{G}_{\mathcal{L}} \otimes \mathcal{H}'_{\mathcal{L}}} = \begin{bmatrix} \{b\} \\ \{b\} \\ \{b, c\} \end{bmatrix} \odot [\{b\}] = \begin{bmatrix} \{b\} \\ \{b\} \\ \{b\} \end{bmatrix}$$

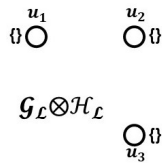
$$\beta_{\mathcal{G}_{\mathcal{L}} \otimes \mathcal{H}'_{\mathcal{L}}} = \begin{bmatrix} \{\} & \{b\} & \{\} \\ \{b\} & \{\} & \{b\} \\ \{\} & \{b\} & \{\} \end{bmatrix} \odot [\{\}] = \begin{bmatrix} \{\} & \{\} & \{\} \\ \{\} & \{\} & \{\} \\ \{\} & \{\} & \{\} \end{bmatrix}.$$

و

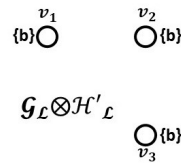
به راحتی مشاهده می‌نمائید که  $\mathcal{G}_{\mathcal{L}} \otimes \mathcal{H}_{\mathcal{L}}$  همریخت قوی با  $\mathcal{G}_{\mathcal{L}} \otimes \mathcal{H}'_{\mathcal{L}}$  نبوده ولی همریخت می‌باشد. لذا  $\mathcal{G}_{\mathcal{L}} \otimes \mathcal{H}'_{\mathcal{L}}$  همریخت با  $\mathcal{G}_{\mathcal{L}} \otimes \mathcal{H}_{\mathcal{L}}$  نمی‌تواند باشد. در نتیجه در قضیه ۴.۳ شرط زنجیر بودن لازم است.



شکل ۲:  $\mathcal{L}$ -گراف‌های  $\mathcal{G}_{\mathcal{L}}$  و  $\mathcal{H}_{\mathcal{L}}$  و  $\mathcal{H}'_{\mathcal{L}}$ .



$\mathcal{G}_{\mathcal{L}} \otimes \mathcal{H}_{\mathcal{L}}$



$\mathcal{G}_{\mathcal{L}} \otimes \mathcal{H}'_{\mathcal{L}}$

شکل ۳:  $\mathcal{L}$ -گراف‌های  $\mathcal{G}_{\mathcal{L}} \otimes \mathcal{H}_{\mathcal{L}}$  و  $\mathcal{G}_{\mathcal{L}} \otimes \mathcal{H}'_{\mathcal{L}}$ .

قضیه ۷.۳.  $\mathcal{L}$ -گراف‌های  $\mathcal{G}_{\mathcal{L}} = (\alpha_1, \beta_1)$  روی  $\mathcal{G}^* = (V_1, E_1)$  و  $\mathcal{G}'_{\mathcal{L}} = (\alpha'_1, \beta'_1)$  روی  $\mathcal{G}'^* = (V'_1, E'_1)$  را در نظر بگیرید. آنگاه  $\mathcal{G}_{\mathcal{L}} \otimes \mathcal{G}'_{\mathcal{L}}$  همریخت با آستانه  $\{1\} \setminus c \in L$  می‌شود.

اثبات.  $\mathcal{L}$ -گراف‌های  $\mathcal{G}_{\mathcal{L}}$  و  $\mathcal{G}'_{\mathcal{L}}$  را در نظر بگیرید به قسمی که:

$$V_1 = \{p_1, p_2, \dots, p_k\}, V'_1 = \{p'_1, p'_2, \dots, p'_l\}.$$

دراین صورت حاصل ضرب کرونگر  $\mathcal{G}'_{\mathcal{L}} \otimes \mathcal{G}_{\mathcal{L}} = (\alpha, \beta)$  روی  $(V, E)$   $(\mathcal{G}_{\mathcal{L}} \otimes \mathcal{G}'_{\mathcal{L}})^*$  را طوری در نظر بگیرید که:

$$V = \{q_1, q_2, \dots, q_{kl}\}.$$

اکنون، با در نظر گرفتن تابع  $f: V \rightarrow V_1$  به صورت زیر:

$$f(q_1) = f(q_2) = \dots = f(q_l) = p_1,$$

$$f(q_{l+1}) = f(q_{l+2}) = \dots = f(q_{l+l}) = p_2,$$

...

$$f(q_{(k-1)l+1}) = f(q_{(k-1)l+2}) = \dots = f(q_{(k-1)l+l}) = p_k.$$

به راحتی می‌توان نشان داد که  $\mathcal{L}$ -گراف  $\mathcal{G}_{\mathcal{L}} \otimes \mathcal{G}'_{\mathcal{L}}$  همریخت با آستانه  $\{1\} \setminus L$  با  $c \in \mathcal{G}_{\mathcal{L}}$  می‌شود.

با یک سری تغییرات کوچک می‌توان نشان داد که همریخت با آستانه  $\{1\} \setminus L$  با  $c \in \mathcal{G}'_{\mathcal{L}}$  نیز برقرار می‌باشد.  $\square$

**نتیجه ۸.۳.**  $\mathcal{L}$ -گراف‌های  $\mathcal{G}_{\mathcal{L}}$  و  $\mathcal{G}'_{\mathcal{L}}$  را در نظر بگیرید. آنگاه  $\mathcal{G}_{\mathcal{L}} \otimes \mathcal{G}'_{\mathcal{L}}$  همریخت با  $\mathcal{L}$ -گراف‌های  $\mathcal{G}_{\mathcal{L}}$  و  $\mathcal{G}'_{\mathcal{L}}$  می‌شود.

**مثال ۹.۳.**  $\mathcal{L}$ -گراف‌های  $\mathcal{G}_{\mathcal{L}}$ ،  $\mathcal{H}_{\mathcal{L}}$  و حاصل ضرب کرونگرشان  $\mathcal{G}_{\mathcal{L}} \otimes \mathcal{H}_{\mathcal{L}}$  در مثال ۶.۳ را در نظر بگیرید. آنگاه  $\mathcal{G}_{\mathcal{L}} \otimes \mathcal{H}_{\mathcal{L}}$  با  $\mathcal{L}$ -گراف‌های  $\mathcal{G}_{\mathcal{L}}$  و  $\mathcal{H}_{\mathcal{L}}$  همریخت است درحالی‌که همریخت قوی نمی‌باشد.

در ادامه با معرفی زیر  $\mathcal{L}$ -گراف، شبه همریختی قوی را برای  $\mathcal{L}$ -گراف‌ها تعریف می‌نمائیم و با بیان مثال‌هایی آنها را توضیح می‌دهیم. در ادامه قضیه ۴.۳ را برای شبه همریختی قوی ارائه می‌کنیم. سپس قضیه‌ای را ثابت می‌کنیم که نشان می‌دهد تحت چه شرایطی  $\mathcal{G}_{\mathcal{L}}$  با  $\mathcal{G}'_{\mathcal{L}}$  شبه همریخت قوی می‌شود و با ذکر یک مثال نشان می‌دهیم که این شرایط لازم است.

**تعریف ۱۰.۳.** فرض کنید  $\mathcal{G}_{\mathcal{L}} = (\alpha_1, \beta_1)$  و  $\mathcal{H}_{\mathcal{L}} = (\alpha_2, \beta_2)$  دو  $\mathcal{L}$ -گراف تعریف شده به ترتیب روی گراف‌های  $\mathcal{G}^* = (V_1, E_1)$  و  $\mathcal{H}^* = (V_2, E_2)$  باشند. دراین صورت به  $\mathcal{L}$ -گراف  $\mathcal{G}'_{\mathcal{L}}$  زیر  $\mathcal{L}$ -گراف گوئیم هرگاه:

(الف):  $\mathcal{G}'^*$  زیر گرافی از  $\mathcal{G}^*$  باشد،

(ب): برای هر  $q \in V_2$ ، داشته باشیم:

$$\alpha_2(q) \leq \alpha_1(q),$$

(ج): برای هر  $qq' \in E_2$ ، داشته باشیم:

$$\beta_2(qq') \leq \beta_1(qq').$$

مثال ۱۱.۳. مشبکه باقی مانده  $L = ([0, 1], \wedge, \vee, \otimes, \rightarrow, \circ, 1)$  با ساختار لوکاسویچ<sup>۱</sup> و  $-\mathcal{L}$

گراف  $\mathcal{G}_L = (\alpha_1, \beta_1)$  روی گراف ساده  $\mathcal{G}^* = (V_1, E_1)$  مانند شکل ۴ را در نظر بگیرید به طوری که:

$$a \otimes b = \begin{cases} (a + b - 1) & \text{اگر } a + b \geq 1 \text{ آنگاه} \\ \circ & \text{اگر } a + b < 1 \text{ آنگاه} \end{cases},$$

$$a \rightarrow b = \begin{cases} 1 & \text{اگر } b - a \geq \circ \text{ آنگاه} \\ (1 - a + b) & \text{اگر } b - a < \circ \text{ آنگاه} \end{cases},$$

$$V = \{q_1, q_2, q_3, q_4, q_5\}, E = \{q_1q_2, q_2q_3, q_3q_4, q_4q_5\},$$

$$\alpha_1(q_1) = \circ/8, \alpha_1(q_2) = \circ/7, \alpha_1(q_3) = \circ/9, \alpha_1(q_4) = 1, \alpha_1(q_5) = \circ/5,$$

$$\beta_1(q_1q_2) = \circ/5, \beta_1(q_2q_3) = \circ/6, \beta_1(q_3q_4) = \circ/9, \beta_1(q_4q_5) = \circ/5.$$

همچنین،  $-\mathcal{L}$  گراف  $\mathcal{G}'_L = (\alpha_2, \beta_2)$  روی گراف ساده  $\mathcal{G}^* = (V_1, E_1)$  مانند شکل ۴ را نیز در نظر بگیرید به طوری که:

$$\alpha_2(q_1) = \circ/7, \alpha_2(q_2) = \circ/6, \alpha_2(q_3) = \circ/9, \alpha_2(q_4) = \circ/9, \alpha_2(q_5) = \circ/4,$$

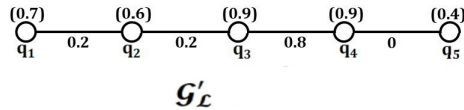
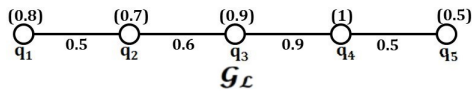
$$\beta_2(q_1q_2) = \circ/2, \beta_2(q_2q_3) = \circ/2, \beta_2(q_3q_4) = \circ/8, \beta_2(q_4q_5) = \circ.$$

به راحتی می توان دید که  $\mathcal{G}'_L$  یک زیر  $-\mathcal{L}$  گراف از  $-\mathcal{L}$  گراف  $\mathcal{G}_L$  است.

تعریف ۱۲.۳.  $-\mathcal{L}$  گراف  $\mathcal{G}_L = (\alpha_1, \beta_1)$  روی  $\mathcal{G}^* = (V_1, E_1)$  با  $-\mathcal{L}$  گراف

$\mathcal{G}_2 = (\alpha_2, \beta_2)$  روی  $\mathcal{G}^* = (V_2, E_2)$  را شبه همریخت قوی با آستانه  $c \in L \setminus \{1\}$  می نامیم، هرگاه زیر  $-\mathcal{L}$  گرافی از  $\mathcal{G}_L$  به صورت  $\mathcal{G}'_L = (\alpha'_L, \beta'_L)$  روی  $\mathcal{G}^* = (V'_L, E'_L)$

<sup>1</sup>Lukasiewicz



شکل ۴:  $\mathcal{L}$ -گراف مسیره‌های  $G_L$  و  $G'_L$ .

وجود داشته باشد به طوری که  $G_{1L}$  با  $G'_L$  همریخت قوی با آستانه  $c$  باشد.  $f$  شبه همریختی قوی می‌باشد اگر و تنها اگر برای هر  $c \in L \setminus \{1\}$ ،  $f$  یک شبه همریختی قوی با آستانه  $c$  باشد. این مفهوم انعطاف‌پذیری بیشتری نسبت به همریختی دارد و در کاربردهای عملی ارزشمند است.

**مثال ۱۳.۳.**  $\mathcal{L}$ -گراف‌های  $\mathcal{H}_L$  و  $G_L$  در مثال ۶.۳ را در نظر بگیرید. آنگاه با انتخاب زیر  $\mathcal{L}$ -گرافی از  $G_L$ ، می‌توان نشان داد که  $\mathcal{H}_L$  با  $\mathcal{L}$ -گراف  $G_L$  شبه همریخت قوی است درحالی‌که وجود ندارد  $c \in L \setminus \{1\}$  به قسمی که  $\mathcal{H}_L$  با  $G_L$  همریخت قوی با آستانه  $c$  باشد. همچنین، لازم به ذکر است  $c \in L \setminus \{1\}$  وجود ندارد به طوری که  $G_L$  با  $\mathcal{H}_L$  (شبه) همریخت (قوی) باشد.

این نشان می‌دهد که شبه همریختی قوی می‌تواند در موقعیت‌هایی که همریختی دقیق ممکن نیست، راه‌حل مناسبی فراهم سازد.

**نتیجه ۱۴.۳.** فرض کنید مشبکه باقی‌مانده  $\mathcal{L} = (L, \wedge, \vee, \otimes, \rightarrow, \circ, 1)$  یک زنجیر بوده و  $G_L = (\alpha_1, \beta_1)$  روی  $G^* = (V_1, E_1)$  یک  $\mathcal{L}$ -گراف باشد به طوری که شبه همریخت قوی با  $\mathcal{L}$ -گراف  $G'_L = (\alpha'_1, \beta'_1)$  روی  $G'^* = (V'_1, E'_1)$  می‌باشد. همچنین،  $\mathcal{H}_L = (\alpha_2, \beta_2)$  روی  $\mathcal{H}^* = (V_2, E_2)$  نیز یک  $\mathcal{L}$ -گراف است به طوری که شبه همریخت قوی با  $\mathcal{L}$ -گراف  $\mathcal{H}'_L = (\alpha'_2, \beta'_2)$  روی  $\mathcal{H}'^* = (V'_2, E'_2)$  می‌باشد. آنگاه  $\mathcal{L}$ -گراف  $G_L \otimes \mathcal{H}_L$  با  $\mathcal{L}$ -گراف  $G'_L \otimes \mathcal{H}'_L$  شبه همریخت قوی می‌شود.

اثبات. اثبات با تغییراتی جزئی مانند قضیه ۴.۳ می‌باشد. □

قضیه ۱۵.۳.  $\mathcal{L}$ -گراف  $\mathcal{G}_{\mathcal{L}} = (\alpha_1, \beta_1)$  روی  $\mathcal{G}^* = (V_1, E_1)$  و  $\mathcal{G}'_{\mathcal{L}} = (\alpha'_1, \beta'_1)$  روی  $\mathcal{G}'^* = (V'_1, E'_1)$  را در نظر بگیرید. اگر  $\mathcal{G}_{\mathcal{L}}$  یک  $\mathcal{L}$ -گراف کاملاً قوی باشد که در آن:

$$\alpha(q) = 1 \in L; q \in V.$$

آنگاه  $\mathcal{G}'_{\mathcal{L}}$  شبه همریخت قوی با  $\mathcal{L}$ -گراف  $\mathcal{G}_{\mathcal{L}} \otimes \mathcal{G}'_{\mathcal{L}}$  می‌باشد.

اثبات. برای اثبات کافی است زیر  $\mathcal{L}$ -گراف  $\mathcal{G}_{\mathcal{L}} \otimes \mathcal{G}'_{\mathcal{L}} = (\alpha, \beta)$  روی گراف ساده  $\mathcal{K}_{\mathcal{L}} = (\alpha, \beta)$  را به صورت  $(\mathcal{G}_{\mathcal{L}} \otimes \mathcal{G}'_{\mathcal{L}})^* = (V, E)$  روی گراف ساده  $\mathcal{K}^* = (V', E')$  در نظر بگیرید به طوری که:

$$V' = \{q_i \in V \mid i = 1, |V_1| + 1, 2|V_1| + 1, \dots, |V'_1| - 1, |V_1| + |V'_1|\}$$

و

$$E' = \{q_i q_j \mid q_i, q_j \in V'; q_i q_j \in E\}.$$

اکنون با در نظر گرفتن:

$$f: \mathcal{G}'_{\mathcal{L}} \rightarrow \mathcal{K}_{\mathcal{L}}; f(q'_i) = q_{\text{mod}(i, |V_1|)}; V'_1 = \{q'_i \mid 1 \leq i \leq |V'_1|\}$$

به راحتی ثابت می‌شود که  $\mathcal{G}'_{\mathcal{L}}$  همریخت با  $\mathcal{K}_{\mathcal{L}}$  می‌باشد.  $\square$

ملاحظه ۱۶.۳. مثال بعد نشان می‌دهد که شرایط مطرح شده در قضیه ۱۵.۳ لازم می‌باشند.

مثال ۱۷.۳. فرض کنید  $\mathcal{L} = ([0, 1], \min, \max, \otimes, \rightarrow, \emptyset, X)$  یک مشبکه باقی مانده با ساختار لوکاسویچ<sup>۱</sup>:

$$a \otimes b = \begin{cases} (a + b - 1) & \text{اگر } 1, a + b \geq 1 \text{ آنگاه} \\ \cdot & \text{اگر } 1, a + b < 1 \text{ آنگاه} \end{cases}$$

و

$$a \rightarrow b = \begin{cases} 1 & \text{اگر } 0, b - a \geq 0 \text{ آنگاه} \\ (1 - a + b) & \text{اگر } 0, b - a < 0 \text{ آنگاه} \end{cases}.$$

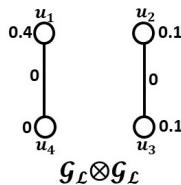
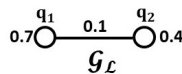
<sup>1</sup>Lukasiewicz

است. همچنین، فرض کنید  $\mathcal{G}_{\mathcal{L}} = (\alpha_1, \beta_1)$  روی  $\mathcal{G}^* = (V_1, E_1)$  یک  $\mathcal{L}$ -گراف مانند شکل ۵ باشد. آنگاه  $\mathcal{L}$ -گراف‌های  $\mathcal{G}_{\mathcal{L}} \otimes \mathcal{G}_{\mathcal{L}} = (\alpha, \beta)$  مانند شکل ۵ به دست می‌آیند به طوری که:

$$A_{\mathcal{G}_{\mathcal{L}} \otimes \mathcal{H}_{\mathcal{L}}} = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ 1 & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}, \alpha_{\mathcal{G}_{\mathcal{L}} \otimes \mathcal{G}_{\mathcal{L}}} = \begin{bmatrix} \cdot/1 \\ \cdot/4 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} \cdot/1 \\ \cdot/4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot/4 \\ \cdot/1 \\ \cdot/1 \\ \cdot \end{bmatrix},$$

$$\beta_{\mathcal{G}_{\mathcal{L}} \otimes \mathcal{G}_{\mathcal{L}}} = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot/1 \\ \cdot/1 & \cdot \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} \cdot & \cdot/1 \\ \cdot/1 & \cdot \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}.$$

به راحتی مشاهده می‌نمائید که  $\mathcal{G}_{\mathcal{L}}$  شبه همریخت (قوی) با  $\mathcal{G}_{\mathcal{L}} \otimes \mathcal{G}_{\mathcal{L}}$  نمی‌باشد.



شکل ۵:  $\mathcal{L}$ -گراف‌های  $\mathcal{G}_{\mathcal{L}}$  و  $\mathcal{G}_{\mathcal{L}} \otimes \mathcal{G}_{\mathcal{L}}$ .

در پایان این بخش، در یک کاربرد عملی، فرض کنید بیمار برای درمان دو بیماری، داروهای متفاوتی مصرف می‌کند. برای بررسی اینکه کدام داروها ممکن است در ترکیب با هم، عوارض جانبی شدیدتری ایجاد کنند، می‌توان با مدل‌سازی  $\mathcal{L}$ -گرافی داروها و استفاده از حاصل ضرب کرونکر  $\mathcal{L}$ -گراف‌های مربوط به داروها، الگوی تداخل‌های بالقوه را تحلیل کرد.

کاربرد ۱۸.۳. فرض کنید شخصی برای درمان یک بیماری چندین دارو مصرف می‌کرده است و اکنون به دلیل ابتلا به بیماری دیگری مجبور به مصرف داروهای دیگر می‌شود. برای آنکه ببینیم مصرف کدام یک از این داروها احتمال ایجاد عوارض دارویی را افزایش می‌دهد. می‌توانیم از حاصل ضرب کرونکر دو  $\mathcal{L}$ -گراف استفاده کنیم.

فرض کنید  $X = \{a, b, c, d\}$  و  $\mathcal{L} = (P(X), \cap, \cup, \otimes, \rightarrow, \emptyset, X)$  شبکه باقی‌مانده است به طوری که:

$$A \otimes B = A \cap B \text{ و } A \rightarrow B = X \setminus (A \setminus B).$$

سپس اولین گروه از داروها توسط  $\mathcal{L}$ -گراف  $G_{\mathcal{L}} = (\alpha_1, \beta_1)$  روی گراف ساده  $G^* = (V_1, E_1)$  به صورت زیر مدل‌سازی می‌شوند:

(الف): هر یک از این داروها را با برجسب  $q_i$  به ازای هر  $1 \leq i \leq n$  در نظر می‌گیریم. سپس،  $V_1 = \{q_i \mid 1 \leq i \leq n\}$ .

(ب): اگر دو دارو  $q_i$  و  $q_j$  دارای حداقل یک عوارض جانبی مشابه باشند، آنگاه بین آنها یک یال رسم می‌کنیم.

(ج):  $\alpha_1(q_i)$  برابر عوارض جانبی دارو  $q_i$  است.

(د): به ازای هر  $q_i, q_j \in E_1$ ،  $\beta_1(q_i, q_j) = \alpha_1(q_i) \otimes \alpha_1(q_j)$ .

با در نظر گرفتن یک تغییر مناسب، گروه دوم داروها، مانند گروه اول با  $\mathcal{L}$ -گراف  $\mathcal{H}_{\mathcal{L}} = (\alpha_2, \beta_2)$  روی گراف ساده  $\mathcal{H}^* = (V_2, E_2)$  مدل‌سازی می‌شوند. بنابراین حاصل ضرب کرونکر آنها اثر جانبی این گروه از داروها را بر یکدیگر نشان می‌دهد. لذا می‌توان گفت که بیشترین مقدار  $\beta$  نشان دهنده وقوع عارضه جانبی می‌باشد.

#### ۴. برخی خواص حاصل ضرب کرونکر دو اتوماتای $\mathcal{L}$ -گرافی

در این بخش ابتدا مفهوم (شبه) همریختی (قوی) برای اتوماتاهای  $\mathcal{L}$ -گرافی معرفی می‌گردد. سپس این مفاهیم را با یک مثال توضیح می‌دهیم. در ادامه ارتباطی را بین همریختی  $\mathcal{L}$ -گراف‌ها و اتوماتاهای  $\mathcal{L}$ -گرافی برقرار می‌کنیم. همچنین، قضیه‌ای برای نشان دادن ارتباط بین تابع پاسخ حاصل ضرب کرونکر دو اتوماتای  $\mathcal{L}$ -گرافی و تابع انتقال بیان می‌کنیم. سپس آن را با یک مثال توضیح می‌دهیم. در انتها ارتباط بین رفتار حاصل ضرب دو اتوماتای  $\mathcal{L}$ -گرافی و رفتار اجزای تشکیل دهنده آن را نشان می‌دهیم.

تعریف ۱.۴. فرض کنید:

دو  $\tilde{\mathcal{A}}_{\mathcal{L}}(\mathcal{Z}(\mathcal{H}_{\mathcal{L}})) = (Q_2, X, \mu_2, \sigma_2, F_2)$  و  $\tilde{\mathcal{A}}_{\mathcal{L}}(\mathcal{Z}(\mathcal{G}_{\mathcal{L}})) = (Q_1, X, \mu_1, \sigma_1, F_1)$  اتوماتای  $\mathcal{L}$ -گرافی باشند. آنگاه گوییم:

الف): تابع  $\psi : Q_1 \rightarrow Q_2$  یک همریختی با آستانه  $c$  از  $\tilde{\mathcal{A}}_{\mathcal{L}}(\mathcal{Z}(\mathcal{G}_{\mathcal{L}}))$  به  $\tilde{\mathcal{A}}_{\mathcal{L}}(\mathcal{Z}(\mathcal{H}_{\mathcal{L}}))$  است هرگاه به ازای هر  $q, q' \in Q_1$  و  $a \in X$  داشته باشیم:

$$(1)$$

$$\mu_1(q, a, q') > c \implies \mu_2(\psi(q), a, \psi(q')) > c,$$

(۲):

$$\sigma_1(q) > c \implies \sigma_2(\psi(q)) > c,$$

(۳):

$$q \in F_1 \implies \psi(q) \in F_2.$$

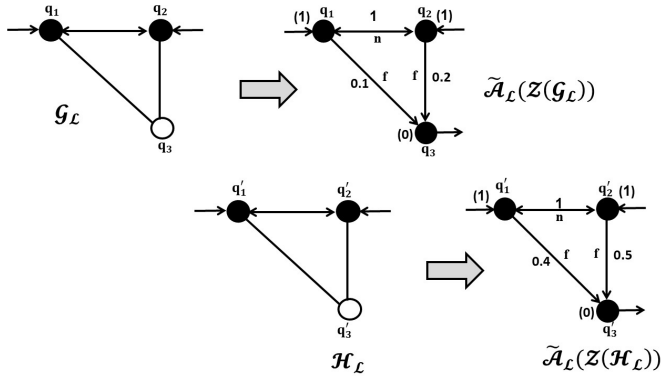
ب): تابع  $\psi$  یک همریختی قوی با آستانه  $c$  می باشد هرگاه  $\psi$  یک همریختی با آستانه  $c$  بوده و عبارت زیر نیز برای آن برقرار است:

$$q \in F_1 \iff \psi(q) \in F_2.$$

ج): اگر شروط قسمت (الف) و (ب) تنها برای  $f \in X$  برقرار باشد، آنگاه تابع مدنظر را به ترتیب شبه همریخت و شبه همریخت قوی با آستانه  $c$  گوییم.

لازم به ذکر است که اگر برای هر  $c \in L \setminus \{1\}$  روابط بالا برقرار باشد آنگاه به ترتیب به آنها همریختی، همریختی قوی، شبه همریختی و شبه همریختی قوی می گوییم.

مثال ۲.۴. دو  $\mathcal{L}$ -گراف  $\mathcal{G}_{\mathcal{L}} = (\alpha_1, \beta_1)$  روی  $\mathcal{G}^* = (V_1, E_1)$  و  $\mathcal{H}_{\mathcal{L}} = (\alpha_2, \beta_2)$  روی  $\mathcal{H}^* = (V_2, E_2)$  مانند مثال ۳.۳ را در نظر بگیرید. آنگاه دو اتوماتای  $\mathcal{L}$ -گرافی  $\tilde{\mathcal{A}}_{\mathcal{L}}(\mathcal{Z}(\mathcal{H}_{\mathcal{L}}))$  و  $\tilde{\mathcal{A}}_{\mathcal{L}}(\mathcal{Z}(\mathcal{G}_{\mathcal{L}}))$  مانند شکل ۶ به دست می آیند به طوری که اتوماتای  $\mathcal{L}$ -گرافی  $\tilde{\mathcal{A}}_{\mathcal{L}}(\mathcal{Z}(\mathcal{G}_{\mathcal{L}}))$  با  $\tilde{\mathcal{A}}_{\mathcal{L}}(\mathcal{Z}(\mathcal{H}_{\mathcal{L}}))$  همریخت (قوی) می باشد. درحالی که اتوماتای  $\mathcal{L}$ -گرافی  $\tilde{\mathcal{A}}_{\mathcal{L}}(\mathcal{Z}(\mathcal{H}_{\mathcal{L}}))$  با  $\tilde{\mathcal{A}}_{\mathcal{L}}(\mathcal{Z}(\mathcal{G}_{\mathcal{L}}))$  تنها به ازای  $1 < c < 5/6$  همریخت (قوی) با آستانه  $c$  می باشد.



شکل ۶: اتوماتاهای  $\mathcal{L}$ -گرافی  $\tilde{\mathcal{A}}_{\mathcal{L}}(\mathcal{Z}(\mathcal{G}_{\mathcal{L}}))$  و  $\tilde{\mathcal{A}}_{\mathcal{L}}(\mathcal{Z}(\mathcal{H}_{\mathcal{L}}))$ .

**قضیه ۳.۴.** دو  $\mathcal{L}$ -گراف  $\mathcal{G}_{\mathcal{L}} = (\alpha_1, \beta_1)$  روی  $\mathcal{G}^* = (V_1, E_1)$  و  $\mathcal{H}_{\mathcal{L}} = (\alpha_2, \beta_2)$  روی  $\mathcal{H}^* = (V_2, E_2)$  را در نظر بگیرید به طوری که  $\mathcal{G}^* = P_n$  و رابطه زیر نیز برای اتوماتاهای  $\mathcal{L}$ -گرافی مرتبطشان برقرار باشد:

$$|\mathcal{Z}(\tilde{\mathcal{A}}_{\mathcal{L}}(\mathcal{Z}(\mathcal{G}_{\mathcal{L}})))| \times |Q_2| < |\mathcal{Z}(\tilde{\mathcal{A}}_{\mathcal{L}}(\mathcal{Z}(\mathcal{H}_{\mathcal{L}})))| \times |Q_1|.$$

آنگاه اتوماتای حاصل ضرب کرونکرشان به صورت

$\tilde{\mathcal{A}}_{\mathcal{L}} = \tilde{\mathcal{A}}_{\mathcal{L}}(\mathcal{Z}(\mathcal{G}_{\mathcal{L}})) * \tilde{\mathcal{A}}_{\mathcal{L}}(\mathcal{Z}(\mathcal{H}_{\mathcal{L}})) = (Q, X, \mu, \sigma, F)$  می‌باشد و رابطه زیر برقرار می‌شود:

$$\bigvee_{(q, q') \in F} r_{\mu_{\mathcal{L}}}(\tilde{\mathcal{A}}_{\mathcal{L}}, f^{n-1}, (q, q')) \leq \mu_1^*(q_1, f^{n-1}, q_n).$$

**اثبات.** از قسمت (ب) حالت اول تعریف ۱۲.۲، استفاده می‌نمائیم. لذا داریم:

$$\sigma_{\mathcal{L}}(q_i, q'_j) = \begin{cases} 1 & \text{اگر } q_i = q_1, q'_j \in Q_2 \text{ آنگاه} \\ 0 & \text{در غیراین صورت} \end{cases}$$

همچنین،  $\mu_{\mathcal{L}} : Q \times X \times Q \rightarrow L$ ، تابع انتقال است و اگر حداقل یک انتقال با حرف  $u'$  از  $q'_i$  به  $q'_l$  یا از  $q'_l$  به  $q'_i$  وجود داشته باشد و  $\mu_{\mathcal{L}}(q_t, u, q_k) \geq 0$  نیز موجود باشد، آنگاه یک انتقال با برجسب  $u$  از حالت  $(q_t, q'_l)$  به حالت  $(q_k, q'_l)$  موجود بوده به طوری که:

$$\mu_{\mathcal{L}}((q_t, q'_l), u, (q_k, q'_l)) =$$



ج):

$$\mu_{\mathcal{L}}((q_1, q'_1), f, (q_2, q'_2)) = \mu_{\mathcal{L}}((q_1, q'_1), f, (q_2, q'_1)) = 0.1$$

$$\mu_{\mathcal{L}}((q_1, q'_2), f, (q_2, q'_2)) = \mu_{\mathcal{L}}((q_1, q'_1), f, (q_2, q'_2)) = 0.1$$

$$\mu_{\mathcal{L}}((q_1, q'_2), f, (q_2, q'_1)) = \mu_{\mathcal{L}}((q_1, q'_1), f, (q_2, q'_1)) = 0.1$$

$$\mu_{\mathcal{L}}((q_2, q'_1), f, (q_3, q'_2)) = \mu_{\mathcal{L}}((q_2, q'_1), f, (q_3, q'_1)) = 0.2$$

$$\mu_{\mathcal{L}}((q_2, q'_2), f, (q_3, q'_2)) = \mu_{\mathcal{L}}((q_2, q'_1), f, (q_3, q'_2)) = 0.2$$

$$\mu_{\mathcal{L}}((q_2, q'_2), f, (q_3, q'_1)) = \mu_{\mathcal{L}}((q_2, q'_1), f, (q_3, q'_1)) = 0.2,$$

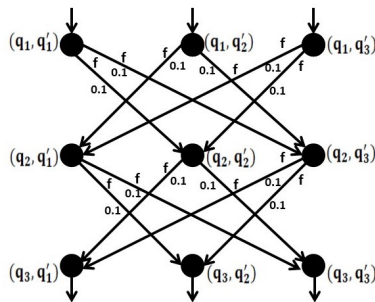
$$.F = \{(q_3, q'_1), (q_3, q'_2), (q_3, q'_2)\} : د)$$

در این صورت:

$$0.1 = \bigvee_{(q, q') \in F} r_{\mu_{\mathcal{L}}}(\tilde{\mathcal{A}}_{\mathcal{L}}, f^{\vee}, (q, q')) = \mu_1^*(q_1, f^{\vee}, q_3) = 0.1.$$



شکل ۷:  $\mathcal{L}$ -گراف  $G_{\mathcal{L}}$  و اتوماتای  $\mathcal{L}$ -گرافی  $\tilde{\mathcal{A}}_{\mathcal{L}}(Z(G_{\mathcal{L}}))$ .



شکل ۸: اتوماتای  $\mathcal{L}$ -گرافی  $\tilde{\mathcal{A}}_{\mathcal{L}}$ .

قضیه ۵.۴. اگر دو اتوماتای  $\mathcal{L}$ -گرافی به صورت  $(Q_1, X, \mu_1, \sigma_1, F_1)$  و  $(Q_2, X, \mu_2, \sigma_2, F_2)$  و  $\tilde{\mathcal{A}}_{\mathcal{L}}(\mathcal{Z}(\mathcal{G}_{\mathcal{L}})) = (Q_1, X, \mu_1, \sigma_1, F_1)$  و  $\tilde{\mathcal{A}}_{\mathcal{L}}(\mathcal{Z}(\mathcal{H}_{\mathcal{L}})) = (Q_2, X, \mu_2, \sigma_2, F_2)$  روی  $\mathcal{L}$  تعریف شده باشند، آنگاه برای حاصل ضرب کرونگرشان  $(Q, X, \mu, \sigma, F)$   $\tilde{\mathcal{A}}_{\mathcal{L}} = \tilde{\mathcal{A}}_{\mathcal{L}}(\mathcal{Z}(\mathcal{G}_{\mathcal{L}})) * \tilde{\mathcal{A}}_{\mathcal{L}}(\mathcal{Z}(\mathcal{H}_{\mathcal{L}})) = (Q, X, \mu, \sigma, F)$  به ازای هر  $x \in X^*$

(الف) اگر  $|Q_1| \times |\mathcal{Z}(\tilde{\mathcal{A}}_{\mathcal{L}}(\mathcal{Z}(\mathcal{H}_{\mathcal{L}})))| \leq |Q_2| \times |\mathcal{Z}(\tilde{\mathcal{A}}_{\mathcal{L}}(\mathcal{Z}(\mathcal{G}_{\mathcal{L}})))|$  آنگاه:

$$x \in B_k(\tilde{\mathcal{A}}_{\mathcal{L}}, c) \implies x \in B_k(\tilde{\mathcal{A}}_{\mathcal{L}}(\mathcal{Z}(\mathcal{G}_{\mathcal{L}})), c).$$

(ب) اگر  $|Q_2| \times |\mathcal{Z}(\tilde{\mathcal{A}}_{\mathcal{L}}(\mathcal{Z}(\mathcal{H}_{\mathcal{L}})))| \leq |Q_1| \times |\mathcal{Z}(\tilde{\mathcal{A}}_{\mathcal{L}}(\mathcal{Z}(\mathcal{G}_{\mathcal{L}})))|$  آنگاه:

$$x \in B_k(\tilde{\mathcal{A}}_{\mathcal{L}}, c) \implies x \in B_k(\tilde{\mathcal{A}}_{\mathcal{L}}(\mathcal{Z}(\mathcal{H}_{\mathcal{L}})), c).$$

اثبات. (الف)

$$\begin{aligned} x \in B_k(\tilde{\mathcal{A}}_{\mathcal{L}}, c) &\implies c < \bigvee_{(q', p') \in F} r_{\mu_{\mathcal{L}}}(\tilde{\mathcal{A}}_{\mathcal{L}}, x, (q', p')) \\ &\leq \bigvee_{(q', p') \in F} \sigma_{\mathcal{L}}(q, p) \otimes \mu_{\mathcal{L}}^*((q, p), x, (q', p')) \\ &\leq \bigvee_{q \in \mathcal{Z}(\mathcal{G}_{\mathcal{L}})} \bigvee_{q' \in F_1} \mu_1^*(q, x, q'), \quad \text{براساس تعریف ۱۲.۲} \\ &\implies x \in B_k(\tilde{\mathcal{A}}_{\mathcal{L}}(\mathcal{Z}(\mathcal{G}_{\mathcal{L}})), c). \end{aligned}$$

□ قسمت (ب) مانند قسمت قبل با اعمال تغییراتی جزئی اثبات می‌گردد.

## ۵. نتیجه‌گیری

در این مقاله، مفاهیم جدیدی پیرامون حاصل ضرب کرونگر دو  $\mathcal{L}$ -گراف و اتوماتاهای  $\mathcal{L}$ -گرافی مطرح گردید. با هدف تبیین ارتباط میان این ساختارها، چندین قضیه ارائه شد که با مثال‌هایی مناسب نیز همراه بودند. مطالب ارائه شده نشان می‌دهند که ابزارهای نظری همچون همریختی، شبه‌همریختی و نسخه‌های قوی آنها در تحلیل رفتار سیستم‌های پیچیده، کاربردی هستند و می‌توانند در مدل‌سازی روابط و ویژگی‌های ساختارهای فازی مفید واقع شوند. این قابلیت امکان پیش‌بینی رفتار کلی سیستم از اجزای آن را فراهم می‌آورد و راهی برای مدل‌سازی مسائل کاربردی مانند تحلیل داروها یا رفتارهای شبکه‌ای ارائه می‌دهد. در پژوهش‌های آتی، می‌توان از این ساختارها برای بررسی و بهینه‌سازی مدل‌های پیچیده‌تر در حوزه‌هایی مانند شبکه

کامپیوتری، تشخیص الگو، زیست‌فناوری و سامانه‌های فازی استفاده نمود. تمرکز ما در ادامه، بر یافتن روابط ژرف‌تری میان این ساختارها خواهد بود، تا بتوان آنها را به‌عنوان ابزاری اثربخش در تحلیل داده‌ها و طراحی سیستم‌های هوشمند به‌کار گرفت.

### تشکر و قدردانی

این پژوهش در قالب طرح پژوهشی شماره ۰۳/۳۰۰۸/ص/۷ با استفاده از اعتبارات پژوهشی دانشگاه تحصیلات تکمیلی صنعتی و فناوری پیشرفته، کرمان، ایران انجام شده است.

### مراجع

- [1] Kh. Abolpour, and M. M. Zahedi, LB-valued general fuzzy automata, *Fuzzy Sets and Systems*, 422 (2022), 288-308.
- [2] L. Chen, Application of fuzzy pattern recognition in comprehensive evaluation of ship navigation system performance, *Journal of Coastal Research*, 115 (2020), 196-198.
- [3] M. Ciric, and B. Stojan, Lattices of subautomata and direct sum decompositions of automata, *Algebra Colloquium*, 6 (1999), 71-88.
- [4] W. Dunham, Euler: The master of us all (dolciani mathematical expositions), *Mathematical Association of America*, 1999.
- [5] L. Euler, *Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis*, *Commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae*, 8 (1741), 128-140.
- [6] A. Kauffman, *Introduction a La theorie des sousensembles flous: A L'Usage Des Ingenieurs (Fuzzy Sets Theory)*, Tome III. Masson Et Cie, Editeurs, French, 1975.
- [7] J. N. Mordeson, and S. Mathew, *Mathematics of uncertainty for coping with world challenges: climate change, world hunger, modern slavery, coronavirus, human trafficking*, Springer, Switzerland, 2021.
- [8] D. Qiu, Automata theory based on complete residuated lattice-valued logic(I), *Science in China Series : Information Sciences*, 44 (2001), 419-429.
- [9] D. Qiu, Automata theory based on complete residuated lattice-valued logic (II), *Science in China Series : Information Sciences*, 45 (2002), 442-452.
- [10] E. Raisi Sarbizhan, M. M. Zahedi, and M. Shamsizade, L-graph automata and some applications, *The Computer Journal*, 66 (2023), 1698-1716.
- [11] E. Raisi Sarbizhan, and M. M. Zahedi, Maximal product of two L-graph automata and some applications, *Iranian Journal of Fuzzy Systems*, 19 (2022), 107-126.

- [12] E. Raisi Sarbizhan and M. M. Zahedi, On kronecker product of two RL-graphs and some related results, *Journal of Mahani Mathematical Research*, 11 (2022), 87-107.
- [13] E. Raisi Sarbizhan, Some applications of maximal product in RL-graphs, *Journal of Algebraic Hyperstructures and Logical Algebras*, 4 (2023), 81-95.
- [14] E. Raisi Sarbizhan and M. M. Zahedi, The behavior of L-graph automata, 2022 9th Iranian Joint Congress on Fuzzy and Intelligent Systems (CFIS), 2022, 430-434.
- [15] Y. Rao, S. Kosari, Z. Shao, A. A Talebi, A. Mahdavi, and H. Rashmanlou, New concepts of intuitionistic fuzzy trees with applications international journal of computational intelligence systems, 14 (2021), 1-12.
- [16] A. Rosenfeld, Fuzzy groups, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 35 (1971), 512-517.
- [17] E. S. Santos, Maxmin automata, *Information Control*, 13 (1968), 363-377.
- [18] M. Shamsizadeh, M. M Zahedi, and M. J. Agelizade, Minimization of Hesitant L-fuzzy Automaton, *Fuzzy Sets and Systems*, 477, (2024), 108793.
- [19] S.P. Tiwari, A. K. Singh, and S. Sharan, Fuzzy Automata based on Lattice-Ordered Monoid and Associated Topology, *Journal of Uncertain Systems*, 6 (2012), 51-55.
- [20] M. Ward, and R.P. Dilworth, Residuated lattices, *Transactions of The American Society*, 45 (1939), 335-354.
- [21] W. G. Wee, On generalization of adaptive algorithm and application of the fuzzy sets concept to pattern classification, Ph.D. Thesis, Purdue University, Lafayette, India, 1967.
- [22] L. A. Zadeh, Similarity relations and fuzzy orderings. *Information Sciences*, 3 (1971), 177-200.
- [23] M. M. Zahedi, and E. Raisi Sarbizhan, Some properties of L-graphs, *Proceedings of 2022 9th Iranian Joint Congress on Fuzzy and Intelligent Systems (CFIS)*, (2022) 405-410.
- [24] M. M. Zahedi, E. Raisi Sarbizhan, Combined Product of Two RL-graphs and It's Applications, *Transactions on Fuzzy Sets and Systems 2* (2023), 179-194.
- [۲۵] محمد مهدی زاهدی و الهام رئیسی سربیزن، اتوماتای  $\mathcal{L}$ -فازی، اتوماتای  $\mathcal{L}$ -گرافی و برخی کاربردهای آن، انتشارات دانشگاه تحصیلات تکمیلی صنعتی و فناوری پیشرفته، کرمان، ایران، ۱۴۰۳.
- [۲۶] محمد مهدی زاهدی و الهام رئیسی سربیزن، نظریه زبان و اتوماتا (براساس نظریه گراف)، انتشارات دانشگاه تحصیلات تکمیلی صنعتی و فناوری پیشرفته، کرمان، ایران، ۱۴۰۳.