سیستم های فازی و کاربردها
سال هشتم، شماره اول (بهار و تابستان ۱۴۰۴)
صص. ۲۴۷ تا ۲۶۳

شاپای چاپی: ۲۷۱۷ـ ۴۴۰۹
شاپای الکترونیکی: ۲۷۱۷ـ ۳۹۸۴
DOI:10.22034/jfsa.2025.526538.1277

آزمون فرضِ میانگین متغیرهای تصادفی فازی نرمال بر اساس pـ مقدار

جلال چاچی*

گروه آمار، دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر، دانشگاه شهید چمران اهواز، اهواز، ایران

تاریخ دریافت: ۱۴۰۴/۰۳/۰۶ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۴/۰۶/۲۲

نوع مقاله: علمی ـ پژوهشی

چکیده. در این مقاله یک روش جدید برای آزمون فرضیه‌های فازی بر اساس متغیرهای تصادفی فازی ارائه می‌شود. این روش مبتنی بر آزمون فرضیه‌های است که بر اساس $h-$برش‌های پارامتر فازی به وجود می‌آیند. این فرضیه‌ها در اندازه خطای α و بر اساس داده‌هایی که از $h-$برش‌های مشاهدات متغیرهای تصادفی فازی به‌دست می‌آیند، آزمون می‌شوند. شیوه آزمون این فرضیه‌ها بر اساس مقایسه pـ مقدار هر آزمون با اندازه α است. سپس با معرفی معیاری، تابع آزمون فازی برای این فرضیه‌ها ساخته می‌شود که خود یک مجموعه فازی است. با ارائه یک مثال به بررسی روش ارائه شده در این مقاله می‌پردازیم.

۱. مقدمه

آزمون فرض یکی از پایه‌های اساسی استنباط آماری است. همچنین تصمیم‌گیری در شرایط عدم قطعیت امکانی یکی از مسایل مهم و قابل توجه امروزی است. اما علارقم مطالعات و

2010 *Mathematics Subject Classification.* 62A86; 03E72
* Corresponding author
E-mail: jalal.chachi@scu.ac.ir.
عبارات و کلمات کلیدی. متغیرهای تصادفی فازی، متغیرهای تصادفی فازی نرمال، پارامتر فازی.

تحقیقات گسترده در چنین محیط‌های نادقیقی، همچنان استنباط آماری به خصوص آزمون فرض، جایگاه واقعی و قدرتمند خود را در کاربردهای عملی پیدا نکرده است. این موضوع در زمینه کاربرد با داده‌های غیردقیق و اغلب فازی نیز مغفول مانده است. در آمار کلاسیک تمام مولفه‌های یک مدل از قبیل داده‌ها، فرضیه‌ها و نحوه به دست آوردن آزمون باید دقیق (بدون ابهام) باشند. در عمل و دنیای واقعی خیلی مواقع با داده‌های مبهم، مانند "حدودا ۱۰"، "کم و بیش نزدیک پنج"، "نسبتا بزرگتر از ۱۰۰" و ... مواجه هستیم. بنابراین گاهی اوقات نیاز به بررسی فرضیه‌های فازی مانند "میانگین حدودا ۱۰ است" داریم. همچنین ممکن است بخواهیم یک فرضیه را در سطح معنی‌داری نادقیقی آزمون کنیم. لذا آزمون‌های آماری طی دهه‌های اخیر در تحقیقات بسیار مورد توجه بوده‌اند. در این خصوص بطور گذرا می‌توان به تحقیقات زیر اشاره نمود. آزمون فرضیه‌های آماری دقیق با داده‌های فازی، بر مبنای pــ مقدار فازی توسط فیلزموزر و فیتل [۸] مورد بررسی قرار گرفت. همچنین پرچمی و همکاران [۱۲] به معرفی پی‌ــ مقدار فازی در آزمون فرضیه‌های فازی با داده‌های دقیق پرداختند. وو [۱۶] به آزمون فرضیه‌های آماری برای داده‌های فازی پرداخت. طاهری و عارفی [۱۴] به آزمون فرضیه‌های فازی بر مبنای آماره آزمون فازی پرداختند. عارفی [۳] یک دیدگاه جدید برای آزمون فرضیه‌های فازی بر اساس pــ مقدار معرفی کرد که در آن متغیرهای تصادفی مورد مطالعه حقیقی مقدار اما فرضیه‌ها فازی بودند. حسامیان و اکبری [۱۱] آزمون فرضیه‌ها برای توزیع نرمال چند متغیره با متغیرهای تصادفی فازی را معرفی نمودند. تاکاچی و همکاران [۱۳] با مقایسه آماره آزمون و مقدار بحرانی، درجه پذیرش فرضیه صفر را تعریف کردند. کالپلناپریا و همکاران [۱۰] به تحلیل فراکتال آماری در آزمون فرضیه‌ها با داده‌های غیردقیق پرداختند. چاچی و همکاران [۲] به استنباط آماری رگرسیون وزنی فازی بر مبنی رویکرد بوت استرپ در محیط فازی پرداختند. چاچی و همکاران [۱] به استنباط آماری در مدل تحلیلی لی‌ــ کارتر در محیط فازی پرداختند. چخوروا و جوهانسون [۶] به آزمون فرضیه فازی برای نسبتی از جمعیت بر اساس اطلاعات مجموعه‌ــ مقدار پرداختند. برای مطالعه بیشتر در زمینه آمار با داده‌های نادقیق و در محیط فازی و همچنین احتمال در محیط فازی به مراجع [۴، ۵، ۷، ۹، ۱۵] مراجعه کنید.

آزمون فرض و فاصله اطمینان دو موضوع کلیدی بسیار مهم و مورد توجه در استنباط آماری هستند. بنابراین هدف اصلی ما در این مقاله این است که با معرفی و تعریف فرضیه‌های فازی با پارامترهای فازی بر مبنای متغیرهای تصادفی فازی به آزمون چنین فرضیه‌هایی بپردازیم. روش پیشنهادی، یک تابع آزمون فازی را بر مبنای آماره آزمون و مقدار بحرانی فراهم می‌کند تا بر این

اساس بتوان فرضیه صفر را با میزان درجه‌ای خاص رد کرد و یا پذیرفت. در نهایت، به ارائه یک مثال و بررسی روش ارائه شده در این مقاله می‌پردازیم.

مطالب این مقاله به صورت زیر تدوین شده است. در بخش ۲، برخی از مفاهیم و تعاریف مورد نیاز از مجموعه‌های فازی و متغیرهای تصادفی فازی بیان می‌شوند. در بخش ۳، به آزمون فرضیه‌های آماری درباره میانگین متغیرهای تصادفی فازی نرمال پرداخته می‌شود. در بخش ۴، با استفاده از یک مثال کاربردی با داده‌های واقعی به تحلیل نتایج پرداخته می‌شود. در بخش ۵، به مقایسه بین رویکرد پیشنهادی و دو رویکرد دیگر در زمینه آزمون فرضیه در محیط فازی پرداخته می‌شود. در انتها و در بخش ۶ به بحث و نتیجه‌گیری پرداخته می‌شود.

۲. مفاهیم مقدماتی

۱.۲. مجموعه‌های فازی. فرض کنید $\mathbb{X}$ یک مجموعه مرجع باشد. مجموعه فازی $\widetilde{A}$ از $\mathbb{X}$ با تابع عضویت $\widetilde{A}:\mathbb{X}\to[۰,۱]$ مشخص می‌شود. در این مقاله فرض می‌شود مجموعه مرجع، مجموعه اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ باشد. برای هر $h\in(۰,۱]$، $h-$برش مجموعه فازی $\widetilde{A}$ به‌صورت مجموعه دقیق $\widetilde{A}_h=\{x\in\mathbb{X}\,|\,\widetilde{A}(x)\geq h\}$ تعریف می‌شود. مجموعه فازی $\widetilde{A}$ نرمال نامیده می‌شود هرگاه برای حداقل یک عضو $x\in X$، $\widetilde{A}(x)=۱$. مجموعه فازی $\widetilde{N}$ از $\mathbb{R}$ را یک عدد فازی گوییم هرگاه $\widetilde{N}$ یک مجموعه فازی نرمال با تابع عضویت نیم‌پیوسته بالایی باشد، یعنی برای هر $h\in\mathbb{R}$، مجموعه $\{x\in\mathbb{R}\,|\,f(x)\geq h\}$ بسته باشد. مجموعه تمام اعداد فازی از $\mathbb{R}$ را با $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ نشان می‌دهیم.

حالت خاص و مهمی از عدد فازی، عدد فازی مثلثی است که با نماد $\widetilde{N}=(n,s_l,s_r)_T$ نشان داده می‌شود که در آن n، s_l و s_r به‌ترتیب نشان دهنده مرکز، پهنای چپ و پهنای راست هستند. عدد فازی مثلثی $\widetilde{N}$ بیان کننده مفهوم حدوداً n (یا تقریباً n) است. تابع عضویت و $h-$برش‌های عدد فازی مثلثی $\widetilde{N}$ به‌صورت زیر می‌باشند:

$$\begin{aligned}\widetilde{N}(x) &= \frac{x-(n-s_l)}{s_l}I_{[n-s_l,n)}(x)+\frac{(n+s_r)-x}{s_r}I_{[n,n+s_r]}(x), \quad x\in\mathbb{R},\\ \widetilde{N}_h &= [n_h^l,n_h^u]=[n-(۱-h)s_l,n+(۱-h)s_r], \quad h\in[۰,۱],\end{aligned}$$

که در آن $I_A(\cdot)$ تابع نشانگر مجموعه A است. در این مقاله، از اعداد فازی مثلثی استفاده شده است. البته بنا به زمینه مورد بحث و/یا مشاهدات یک آزمایش می‌توان از انواع دیگر اعداد فازی استفاده نمود. $\widetilde{M}$ را یک نقطه فازی (یا یک عدد معمولی) با مقدار m نامیم هرگاه تابع عضویت آن به‌صورت $\widetilde{M}(x)=I_{\{m\}}(x)$ باشد. بدیهی است که برای هر $h\in[۰,۱]$،

$\widetilde{M}_h = m$. با استفاده از اصل گسترش، حساب اعداد فازی به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$(\widetilde{N} \odot \widetilde{M})(z) = \sup_{x,y:x\circ y=z} \min\{\widetilde{N}(x), \widetilde{M}(y)\}$$

که $\odot$ یکی از اعمال حسابی تعمیم یافته $\oplus$، $\otimes$، $\ominus$ و $\oslash$ است و $\circ$ به‌ترتیب یکی از اعمال حسابی $+$، $\times$، $-$ و $\div$ است. به‌ویژه اگر $\widetilde{N}$ و $\widetilde{M}$ دو عدد فازی باشند، آنگاه $\widetilde{N} \oplus \widetilde{M}$ یک عدد فازی است و طبق حساب بازه‌ای برای هر $h \in [۰, ۱]$، $(\widetilde{N} \oplus \widetilde{M})_h = [n_h^l + m_h^l, n_h^u + m_h^u]$.
برای مطالعه بیشتر در مورد مجموعه‌های فازی و حساب اعداد فازی به [۱۹] مراجعه کنید.

۲.۲. متغیرهای تصادفی فازی. فرض کنید $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ یک فضای احتمال و

$$\widetilde{\mathcal{X}} : \Omega \to \mathcal{F}(\mathbb{R})$$

یک تابع فازی مقدار و

$$X \sim f_{\boldsymbol{\theta}} \qquad \boldsymbol{\theta} = (\theta_۱, \ldots, \theta_p) \in \mathbb{R}^p$$

یک متغیر تصادفی حقیقی مقدار با پارامتر $\boldsymbol{\theta}$ باشند. همچنین فرض کنید کلیه متغیرهای تصادفی، بر فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ تعریف شوند.

تعریف ۱.۲ ([۱۷]). تابع فازی مقدار $\widetilde{\mathcal{X}} : \Omega \to \mathcal{F}(\mathbb{R})$ را یک متغیر تصادفی فازی گوییم، اگر و فقط اگر برای هر $h \in [۰, ۱]$، توابع $X_h^l : \Omega \to \mathbb{R}$ و $X_h^u : \Omega \to \mathbb{R}$ متغیرهای تصادفی حقیقی مقدار باشند (که در آن $\forall \omega \in \Omega;\ \ \mathcal{X}(\omega)_h = [X_h^l(\omega), X_h^u(\omega)]$).

تعریف ۲.۲ ([۱۷]). متغیرهای تصادفی فازی $\widetilde{\mathcal{X}}$ و $\widetilde{\mathcal{Y}}$ را هم‌توزیع گوییم اگر برای هر $h \in [۰, ۱]$، $X_h^l \overset{D}{=} Y_h^l$ و $X_h^u \overset{D}{=} Y_h^u$، و آنها را مستقل گوییم هرگاه هر عضو مجموعه $\{X_h^l, X_h^u \,|\, h \in [۰, ۱]\}$ از هر عضو مجموعه $\{Y_h^l, Y_h^u \,|\, h \in [۰, ۱]\}$ مستقل باشد.

برای مثال، گوییم $\widetilde{\mathcal{X}}$ دارای توزیع نرمال با میانگین فازی $\widetilde{\theta}$ و واریانس $\sigma^۲$ است، هرگاه برای هر $h \in [۰, ۱]$، $X_h^l \sim N(\theta_h^l, \sigma^۲)$ و $X_h^u \sim N(\theta_h^u, \sigma^۲)$. در این حالت، اصطلاحاً گوییم $\mathcal{X}$ دارای توزیع $N(\widetilde{\theta}, \sigma^۲)$ است و می‌نویسیم $\widetilde{\mathcal{X}} \sim N(\widetilde{\theta}, \sigma^۲)$.

تعریف ۳.۲ ([۱۷]). گوییم $\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{X}}} = \left(\widetilde{\mathcal{X}}_۱, \ldots, \widetilde{\mathcal{X}}_n\right)$ یک نمونه تصادفی فازی nتایی از توزیع نرمال با میانگین فازی $\widetilde{\theta}$ و واریانس حقیقی مقدار $\sigma^۲$ است، هرگاه $\widetilde{\mathcal{X}}_i$ها متغیرهای تصادفی فازی نرمالِ مستقل و هم‌توزیع، با میانگین فازی $\widetilde{\theta}$ و واریانس فازی $\sigma^۲$ باشند. در این حالت می‌نویسیم $\widetilde{\mathcal{X}}_۱, \ldots, \widetilde{\mathcal{X}}_n \overset{i.i.d.}{\sim} N(\widetilde{\theta}, \sigma^۲)$.

نتیجه ۴.۲ ([۱۷]). *فرض کنید* $\widetilde{\mathcal{X}}_1, \ldots, \widetilde{\mathcal{X}}_n \overset{i.i.d.}{\sim} N(\widetilde{\theta}, \sigma^2)$*، آنگاه*

$$X^l_{1h}, \ldots, X^l_{nh} \overset{i.i.d.}{\sim} N(\theta^l_h, \sigma^2) \qquad h \in [0, 1],$$
$$X^u_{1h}, \ldots, X^u_{nh} \overset{i.i.d.}{\sim} N(\theta^u_h, \sigma^2) \qquad h \in [0, 1].$$

۳.۲. انواع فرضیه‌های آماری برای پارامتر فازی، و تابع آزمون فازی.

تعریف ۵.۲. فرض کنید $\widetilde{\Theta} = \mathcal{F}(\Theta)$ رده‌ی اعداد فازی بر فضای پارامتر Θ و $\widetilde{\theta}_0$ یک عدد فازی معلوم در $\widetilde{\Theta}$ باشد. در این‌صورت

(۱) هر فرضیه به‌صورت "$\widetilde{H}_0 : \ \widetilde{\theta} = \widetilde{\theta}_0$" یک فرضیه ساده نامیده می‌شود.

(۲) هر فرضیه به‌صورت "$\widetilde{H}_1 : \ \widetilde{\theta} \neq \widetilde{\theta}_0$" یک فرضیه دوطرفه فازی نامیده می‌شود. این فرضیه معادل است با

$$\widetilde{H}_1 : \ \widetilde{\theta} \in \widetilde{\Theta}_1$$

که در آن $\widetilde{\Theta}_1$ گردایه‌ای از مجموعه‌های فازی است که به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود

$$\widetilde{\Theta}_1 = \{\widetilde{\theta} \in \widetilde{\Theta} \mid \theta^l_h \neq \theta^l_{0h}, \ \theta^u_h \neq \theta^u_{0h} \ ; \ \forall h \in (0, 1]\}.$$

(۳) هر فرضیه به‌صورت "$\widetilde{H}_1 : \ \widetilde{\theta} \succ \widetilde{\theta}_0$" یک فرضیه یکطرفه راست نامیده می‌شود. این فرضیه معادل است با

$$\widetilde{H}_1 : \ \widetilde{\theta} \in \widetilde{\Theta}_1$$

که در آن فضای پارامتر فرضیه $\widetilde{H}_1$، یعنی $\widetilde{\Theta}_1$، گردایه‌ای از مجموعه‌های فازی است که به‌صورت زیر در نظر گرفته می‌شود

$$\widetilde{\Theta}_1 = \{\widetilde{\theta} \in \widetilde{\Theta} \mid \theta^l_h > \theta^l_{0h}, \ \theta^u_h > \theta^u_{0h} \ ; \ \forall h \in (0, 1]\}$$

(۴) هر فرضیه به‌صورت "$\widetilde{H}_1 : \ \widetilde{\theta} \prec \widetilde{\theta}_0$" یک فرضیه یکطرفه چپ نامیده می‌شود. این فرضیه معادل است با

$$\widetilde{H}_1 : \ \widetilde{\theta} \in \widetilde{\Theta}_1$$

که در آن $\widetilde{\Theta}_1$، فضای پارامتر فرضیه $\widetilde{H}_1$، گردایه‌ای از مجموعه‌های فازی است که به‌صورت زیر در نظر گرفته می‌شود

$$\widetilde{\Theta}_1 = \{\widetilde{\theta} \in \widetilde{\Theta} \mid \theta^l_h < \theta^l_{0h},\ \theta^u_h < \theta^u_{0h}\ ;\ \forall h \in (0, 1]\}.$$

دقت کنید که در چارچوب تعریف بالا، در واقع مقادیر پارامتر به‌صورت مقادیر زبانی هستند [۱۹].

مثال ۶.۲. فرض کنید $\widetilde{\Theta} = \mathcal{F}(\mathbb{R})$ فضای پارامتر مربوط به میانگین فازی توزیع نرمال $N(\widetilde{\theta}, 1)$ باشد. در این‌صورت

(۱) فرضیه "$\widetilde{H}_0 : \widetilde{\theta} = (1, 1, 2)_T$" یک فرضیه ساده است.

(۲) فرضیه "$\widetilde{H}_1 : \widetilde{\theta} \succ (1, 1, 2)_T$" یک فرضیه یکطرفه راست است. این فرضیه معادل است با

$$\widetilde{H}_1 : \widetilde{\theta} \in \widetilde{\Theta}_1$$

که در آن

$$\widetilde{\Theta}_1 = \{\widetilde{\theta} \in \widetilde{\Theta} \mid \theta^l_h > h,\ \theta^u_h > 3 - 2h;\ \forall h \in (0, 1]\}$$

(۳) فرضیه "$\widetilde{H}_1 : \widetilde{\theta} \prec (1, 1, 2)_T$" یک فرضیه یکطرفه چپ است. این فرضیه معادل است با

$$\widetilde{H}_1 : \widetilde{\theta} \in \widetilde{\Theta}_1$$

که در آن

$$\widetilde{\Theta}_1 = \{\widetilde{\theta} \in \widetilde{\Theta} \mid \theta^l_h < h,\ \theta^u_h < 3 - 2h;\ \forall h \in (0, 1]\}.$$

در مسأله آزمون فرضیه با نمونه تصادفی فازی $\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{X}}} = (\widetilde{\mathcal{X}}_1, \ldots, \widetilde{\mathcal{X}}_n)$، تعریف زیر را برای یک تابع آزمون فازی ارائه می‌دهیم.

تعریف ۷.۲. تابع $\widetilde{\varphi} : \mathcal{F}^n(\mathbb{R}) \to \mathcal{F}(\{0, 1\})$ را یک تابع آزمون فازی گوییم هرگاه $\widetilde{\varphi}(\cdot)$ درجه رد و درجه پذیرش فرضیه‌های $\widetilde{H}_0$ و $\widetilde{H}_1$ را به‌صورت یک مجموعه فازی از $\{0, 1\}$، برای هر عضو $\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{X}}} \in \mathcal{F}^n(\mathbb{R})$ نشان دهد. "۰" و "۱" به‌ترتیب برای پذیرش و رد فرضیه $\widetilde{H}_0$ به‌کار می‌روند و $\mathcal{F}(\{0, 1\})$ رده‌ی مجموعه‌های فازی بر مجموعه $\{0, 1\}$ است.

۳. آزمون فرضیه‌های آماری درباره میانگین متغیرهای تصادفی فازی نرمال

در این بخش می‌خواهیم آزمون فرضیه‌های آماری را به حالتی که پارامتر مورد توجه فازی باشد و نمونه‌ی حاصله نیز بر اساس مقادیر متغیر تصادفی فازی باشد، تعمیم دهیم. گر چه روش پیشنهادی یک روش کلی است، اما در این مقاله توجه خود را به آزمون فرضیه در مورد میانگین توزیع نرمال فازی معطوف می‌نماییم. به‌ویژه می‌خواهیم براساس نمونه تصادفی فازی $\widetilde{\mathcal{X}}_1, \ldots, \widetilde{\mathcal{X}}_n$ از توزیع $N(\widetilde{\theta}, \sigma^2)$ با واریانس ثابت σ^2، فرضیه‌های

$$\widetilde{H}_0 : \widetilde{\theta} = \widetilde{\theta}_0 \quad vs \quad \widetilde{H}_1 : \widetilde{\theta} \neq \widetilde{\theta}_0,$$
$$\widetilde{H}_0 : \widetilde{\theta} = \widetilde{\theta}_0 \quad vs \quad \widetilde{H}_1 : \widetilde{\theta} \prec \widetilde{\theta}_0,$$
$$\widetilde{H}_0 : \widetilde{\theta} = \widetilde{\theta}_0 \quad vs \quad \widetilde{H}_1 : \widetilde{\theta} \succ \widetilde{\theta}_0.$$

را در اندازه α آزمون کنیم. احتمال خطای نوع اول که عبارت است از احتمال رد فرضیه H_0 وقتی که درست باشد را با α نشان می‌دهیم. در این فرضیه‌ها، $\widetilde{\theta}_0$ یک عدد فازی معلوم در $\mathcal{F}(\Theta)$ است.

برای آزمون فرضیه‌های فازی (3.1)، ابتدا در هر سطح $h \in [0, 1]$ فرضیه‌های زیر را متناظر با فرضیه‌های فازی (3.1) در نظر می‌گیریم

$$H^l_{0h} : \theta^l_h = \theta^l_{0h} \; vs \; H^l_{1h} : \theta^l_h \neq \theta^l_{0h}, \qquad H^u_{0h} : \theta^u_h = \theta^u_{0h} \; vs \; H^u_{1h} : \theta^u_h \neq \theta^u_{0h},$$
$$H^l_{0h} : \theta^l_h = \theta^l_{0h} \; vs \; H^l_{1h} : \theta^l_h < \theta^l_{0h}, \qquad H^u_{0h} : \theta^u_h = \theta^u_{0h} \; vs \; H^u_{1h} : \theta^u_h < \theta^u_{0h},$$
$$H^l_{0h} : \theta^l_h = \theta^l_{0h} \; vs \; H^l_{1h} : \theta^l_h > \theta^l_{0h}, \qquad H^u_{0h} : \theta^u_h = \theta^u_{0h} \; vs \; H^u_{1h} : \theta^u_h > \theta^u_{0h}.$$

حال چون $\widetilde{\mathcal{X}}_1, \ldots, \widetilde{\mathcal{X}}_n \overset{i.i.d.}{\sim} N(\widetilde{\theta}, \sigma^2)$، طبق نتیجه 2.4 برای هر $h \in [0, 1]$ داریم

$$X^l_{1h}, \ldots, X^l_{nh} \overset{i.i.d.}{\sim} N(\theta^l_h, \sigma^2), \qquad X^u_{1h}, \ldots, X^u_{nh} \overset{i.i.d.}{\sim} N(\theta^u_h, \sigma^2).$$

از این نمونه‌ها برای آزمون فرضیه‌های (3.2) در اندازه α استفاده می‌کنیم. نواحی رد متناظر با فرضیه‌های صفر (3.2) به‌ترتیب به‌صورت زیر می‌باشند

$$C^l_h = \left\{\underline{x}^l_h | \bar{x}^l_h \notin [a^l_h, b^l_h]\right\}, \qquad C^u_h = \left\{\underline{x}^u_h | \bar{x}^u_h \notin [a^u_h, b^u_h]\right\},$$
$$C^l_h = \left\{\underline{x}^l_h | \bar{x}^l_h < a^l_h\right\}, \qquad C^u_h = \left\{\underline{x}^u_h | \bar{x}^u_h < a^u_h\right\},$$
$$C^l_h = \left\{\underline{x}^l_h | \bar{x}^l_h > a^l_h\right\}, \qquad C^u_h = \left\{\underline{x}^u_h | \bar{x}^u_h > a^u_h\right\}.$$

که در آن‌ها $\bar{x}_h^l = \frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^n x_{ih}^l$، $\bar{x}_h^u = \frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^n x_{ih}^u$، و مقادیر a_h^i و b_h^i برای $i = l, u$، چندک‌هایی از توزیع آماره‌های $\bar{X}_h^i$ هستند که به‌گونه‌ای تعیین می‌شوند تا نواحی رد (3.4) در اندازه α شوند، یعنی $P_{\theta^i_{\cdot h}}\left\{\bar{X}_h^i \in C_h^i\right\} = \alpha$. بر اساس نمونه‌های (3.3)، هر فرضیه صفر (3.2) در اندازه α رد می شود اگر و فقط اگر این نمونه‌ها در ناحیه رد متناظر با آن فرضیه قرار گیرد.

یک روش دیگر برای آزمون فرضیه‌های (3.2)، که هم‌ارز با روش بالا است، استفاده از تعریف $P-$مقدار است. $P-$مقدارِ فرضیه‌های (3.2) به‌ترتیب به صورت زیر تعریف می‌شوند

$$
\begin{aligned}
Pv\left(\bar{x}_h^l\right) &= ۲\min\left\{P_{\theta^l_{\cdot h}}\left\{\bar{X}_h^l \geq \bar{x}_h^l\right\}, P_{\theta^l_{\cdot h}}\left\{\bar{X}_h^l \leq \bar{x}_h^l\right\}\right\},\\
Pv\left(\bar{x}_h^u\right) &= ۲\min\left\{P_{\theta^u_{\cdot h}}\left\{\bar{X}_h^u \geq \bar{x}_h^u\right\}, P_{\theta^u_{\cdot h}}\left\{\bar{X}_h^u \leq \bar{x}_h^u\right\}\right\},\\
Pv\left(\bar{x}_h^l\right) &= P_{\theta^l_{\cdot h}}\left\{\bar{X}_h^l \leq \bar{x}_h^l\right\},\\
Pv\left(\bar{x}_h^u\right) &= P_{\theta^u_{\cdot h}}\left\{\bar{X}_h^u \leq \bar{x}_h^u\right\},\\
Pv\left(\bar{x}_h^l\right) &= P_{\theta^l_{\cdot h}}\left\{\bar{X}_h^l \geq \bar{x}_h^l\right\},\\
Pv\left(\bar{x}_h^u\right) &= P_{\theta^u_{\cdot h}}\left\{\bar{X}_h^u \geq \bar{x}_h^u\right\}.
\end{aligned}
$$

در روش آزمون فرضیه‌های آماری با استفاده از $P-$مقدار، فرضیه صفر رد می‌شود اگر و فقط اگر $P-$مقدار آزمون کمتر از α باشد. بنابراین با مقایسه مقادیر $P-$مقدار (3.5) با α فرضیه‌های (3.2) را آزمون می‌کنیم. با آزمون فرضیه‌های (3.2) برای تمام hها بر اساس $P-$مقدار، مجموعه‌های زیر به‌دست می‌آیند

$$
\begin{aligned}
A^l_{\tilde{\theta}_\cdot;\alpha} &= \left\{h \in [۰,۱] \,\middle|\, Pv\left(\underline{x}_h^l\right) \geq \alpha\right\},\\
A^u_{\tilde{\theta}_\cdot;\alpha} &= \left\{h \in [۰,۱] \,|\, Pv\left(\underline{x}_h^u\right) \geq \alpha\right\},
\end{aligned}
$$

و قرار می‌دهیم $R^l_{\tilde{\theta}_\cdot;\alpha} = \left(A^l_{\tilde{\theta}_\cdot;\alpha}\right)^c$ و $R^u_{\tilde{\theta}_\cdot;\alpha} = \left(A^u_{\tilde{\theta}_\cdot;\alpha}\right)^c$.
مجموعه‌های $A^l_{\tilde{\theta}_\cdot;\alpha}$ و $A^u_{\tilde{\theta}_\cdot;\alpha}$ نمایانگر مقادیری از h هستند که برای آن‌ها روش آزمون بر مبنای $P-$مقدار بر اساس داده‌های (3.3)، منجر به پذیرش فرضیه‌های صفر (3.2) در اندازه α شده است و مجموعه‌های $R^l_{\tilde{\theta}_\cdot;\alpha}$ و $R^u_{\tilde{\theta}_\cdot;\alpha}$ نمایانگر مقادیری از h هستند که برای آن‌ها روش آزمون بر مبنای $P-$مقدار بر اساس داده‌های (3.3)، منجر به رد فرضیه‌های صفر (3.2) در اندازه α شده است.

تعریف ۱.۳. در مسئله آزمون فرضیه‌های فازی (3.1) بر اساس $P-$مقدار، فرضیه فازی $\widetilde{H}_۰$ در مقابل $\widetilde{H}_۱$ را با درجه

$$\begin{aligned} DA &= \frac{\mathcal{L}\left(A^{l}_{\widetilde{\theta}_۰;\alpha}\right)+\mathcal{L}\left(A^{u}_{\widetilde{\theta}_۰;\alpha}\right)}{\mathcal{L}\left(A^{l}_{\widetilde{\theta}_۰;\alpha}\right)+\mathcal{L}\left(A^{u}_{\widetilde{\theta}_۰;\alpha}\right)+\mathcal{L}\left(R^{l}_{\widetilde{\theta}_۰;\alpha}\right)+\mathcal{L}\left(R^{u}_{\widetilde{\theta}_۰;\alpha}\right)} \\ &= \frac{\mathcal{L}\left(A^{l}_{\widetilde{\theta}_۰;\alpha}\right)+\mathcal{L}\left(A^{u}_{\widetilde{\theta}_۰;\alpha}\right)}{۲}, \end{aligned}$$

می‌پذیریم و با درجه $DR = ۱ - DA$ رد می‌کنیم، که در آن $\mathcal{L}(A)$ اندازه لبگ مجموعه A است.

گزاره ۲.۳. *به راحتی می‌توان نشان داد که درجه پذیرش DA و درجه رد DR همواره بین صفر و یک هستند، به عبارتی $DA \in [۰, ۱]$ و $DR \in [۰, ۱]$.*

۴. مثال کاربردی

یک شرکت لاستیک‌سازی می‌خواهد متوسط عمر لاستیکی را که به تازگی تولید کرده است برآورد کند. ۲۴ لاستیک توسط ۶ ماشین هم‌مدل مورد آزمایش قرار می‌گیرند. به دلیل برخی محدودیت‌ها، طول عمر لاستیک‌ها را نمی‌توان به‌دقت ثبت کرد، و لذا داده‌ها به‌صورت اعداد فازی مثلثی زیر گزارش شده‌اند (داده‌ها برگرفته از مرجع [16] می‌باشند)

$(۳۲۶۱۱, ۸۹۱, ۸۸۶)_T$	$(۳۳۰۵۲, ۴۶۷, ۷۳۵)_T$	$(۳۲۶۱۷, ۵۲۴, ۶۳۸)_T$	$(۳۳۹۷۸, ۷۱۲, ۹۱۱)_T$
$(۳۲۴۶۶, ۵۲۳, ۷۴۶)_T$	$(۳۳۴۶۳, ۳۶۸, ۶۶۸)_T$	$(۳۲۴۵۵, ۴۷۸, ۵۷۹)_T$	$(۳۳۴۱۸, ۶۱۲, ۴۹۰)_T$
$(۳۳۵۴۳, ۶۴۳, ۷۹۲)_T$	$(۳۳۱۲۷, ۷۱۲, ۹۴۵)_T$	$(۳۳۰۷۰, ۹۰۱, ۸۹۸)_T$	$(۳۱۶۲۴, ۸۸۱, ۸۳۶)_T$
$(۳۱۵۶۵, ۳۷۸, ۶۷۲)_T$	$(۳۲۵۹۷, ۴۱۲, ۵۸۹)_T$	$(۳۰۸۸۱, ۵۵۴, ۵۶۴)_T$	$(۳۳۲۲۴, ۵۳۷, ۶۸۴)_T$
$(۳۱۸۳۸, ۸۹۳, ۹۰۱)_T$	$(۳۲۵۸۴, ۹۴۵, ۹۵۸)_T$	$(۳۴۰۵۳, ۸۴۵, ۸۲۳)_T$	$(۳۴۰۳۶, ۶۱۳, ۷۳۵)_T$
$(۳۴۱۵۷, ۶۹۳, ۸۱۷)_T$	$(۳۳۸۴۴, ۷۸۴, ۶۰۵)_T$	$(۳۲۸۰۰, ۸۶۶, ۶۴۵)_T$	$(۳۲۲۹۰, ۷۷۹, ۷۷۴)_T$

با توجه به نتایج و تجربیات قبلی می‌توان فرض کرد که داده‌ها از یک توزیع نرمال فازی با واریانس ۷۴۷۰۰۰ هستند. می‌خواهیم فرضیه فازی $\widetilde{H}_۰ : \widetilde{\theta} = (۳۲۰۰۰, ۲۰۰۰, ۲۰۰۰)_T$ را در مقابل فرضیه‌های دوطرفه، یکطرفه راست و یکطرفه چپ فازی در اندازه $\alpha = ۰/۰۵$ آزمون کنیم. با استفاده از حساب اعداد فازی، داریم

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{X}} &= (۳۲۸۸۷, ۶۶۷, ۷۴۵)_T, \\ \bar{\mathcal{X}}_h &= \left[\bar{x}^{l}_{h}, \bar{x}^{u}_{h}\right] = [۳۲۲۲۰ + ۶۶۷h, ۳۳۶۳۲ - ۷۴۵h], \\ \widetilde{\theta}_{۰h} &= \left[\theta^{l}_{۰h}, \theta^{u}_{۰h}\right] = [۳۰۰۰۰ + ۲۰۰۰h, ۳۴۰۰۰ - ۲۰۰۰h]. \end{aligned}$$

از طرفی

$$X^l_{1h}, \ldots, X^l_{24h} \overset{i.i.d.}{\sim} N(\theta^l_{\cdot h}, 747000)$$
$$X^u_{1h}, \ldots, X^u_{24h} \overset{i.i.d.}{\sim} N(\theta^u_{\cdot h}, 747000).$$

۱.۴. آزمون فرضیه‌های دوطرفه فازی. در این بخش به آزمون فرضیه‌های دوطرفه زیر خواهیم پرداخت

$$\widetilde{H}_0: \quad \widetilde{\theta} = (32000, 2000, 2000)_T$$
$$\widetilde{H}_1: \quad \widetilde{\theta} \neq (32000, 2000, 2000)_T.$$

ابتدا در هر سطح $h \in [0, 1]$، فرضیه‌های دوطرفه زیر را بر اساس روش $P-$مقدار آزمون می‌کنیم

$$H^l_{0h}: \theta^l_h = 30000 + 2000h \quad vs \quad H^l_{1h}: \theta^l_h \neq 30000 + 2000h,$$
$$H^u_{0h}: \theta^u_h = 34000 - 2000h \quad vs \quad H^u_{1h}: \theta^u_h \neq 34000 - 2000h.$$

در این حالت داریم

$$\begin{aligned}
Pv\left(\bar{x}_h^l\right) &= ۲\min\left\{P_{\theta^l_{\cdot h}}\left\{\bar{X}_h^l \geq \bar{x}_h^l\right\}, P_{\theta^l_{\cdot h}}\left\{\bar{X}_h^l \leq \bar{x}_h^l\right\}\right\} \\
&= ۲\min\left\{\Phi\left(\sqrt{\frac{۲۴}{۷۴۷۰۰۰}}(۱۳۳۳h - ۲۲۲۰)\right),\right. \\
&\qquad \left.\Phi\left(\sqrt{\frac{۲۴}{۷۴۷۰۰۰}}(۲۲۲۰ - ۱۳۳۳h)\right)\right\} \\
&= ۲\Phi\left(\sqrt{\frac{۲۴}{۷۴۷۰۰۰}}(۱۳۳۳h - ۲۲۲۰)\right), \\
Pv\left(\bar{x}_h^u\right) &= ۲\min\left\{P_{\theta^u_{\cdot h}}\left\{\bar{X}_h^u \geq \bar{x}_h^u\right\}, P_{\theta^u_{\cdot h}}\left\{\bar{X}_h^u \leq \bar{x}_h^u\right\}\right\} \\
&= ۲\min\left\{\Phi\left(\sqrt{\frac{۲۴}{۷۴۷۰۰۰}}(۳۶۸ - ۱۲۵۵h)\right),\right. \\
&\qquad \left.\Phi\left(\sqrt{\frac{۲۴}{۷۴۷۰۰۰}}(۱۲۵۵h - ۳۶۸)\right)\right\} \\
&= \begin{cases} ۲\Phi\left(\sqrt{\frac{۲۴}{۷۴۷۰۰۰}}(۱۲۵۵h - ۳۶۸)\right) & h \in \left[۰, \frac{۳۶۸}{۱۲۵۵}\right) \\ ۲\Phi\left(\sqrt{\frac{۲۴}{۷۴۷۰۰۰}}(۳۶۸ - ۱۲۵۵h)\right) & h \in \left(\frac{۳۶۸}{۱۲۵۵}, ۱\right) \end{cases},
\end{aligned}$$

و $A^l_{\widetilde{\theta}_\cdot;\alpha} = \emptyset$، $A^u_{\widetilde{\theta}_\cdot;\alpha} = [۰, ۰/۵۶۸۷]$. پس در این‌جا فرضیه $\widetilde{H}_\cdot$ در اندازه $\alpha = ۰/۰۵$ با درجه ۰/۲۸۴۳ پذیرفته می‌شود و با درجه ۰/۷۱۵۷ رد می‌شود. به عبارتی مجموعه فازی زیر به عنوان تابع آزمون فازی این فرضیه‌ها به دست می‌آید

$$\phi(\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{X}}}) = \left\{\frac{۰/۲۸۴۳}{۰}, \frac{۰/۷۱۵۷}{۱}\right\}.$$

۲.۴. آزمون فرضیه‌های یکطرفه چپ فازی. در این بخش به آزمون فرضیه‌های یکطرفه چپ فازی زیر خواهیم پرداخت

$$\begin{aligned}
\widetilde{H}_\cdot: &\quad \widetilde{\theta} = (۳۲۰۰۰, ۲۰۰۰, ۲۰۰۰)_T \\
\widetilde{H}_۱: &\quad \widetilde{\theta} \prec (۳۲۰۰۰, ۲۰۰۰, ۲۰۰۰)_T.
\end{aligned}$$

در هر سطح $h \in [\cdot, 1]$، $P-$مقدار آزمون فرضیه‌های یکطرفه

$$H^l_{\cdot h}: \theta^l_h = 30000 + 2000h \quad vs \quad H^l_{1h}: \theta^l_h < 30000 + 2000h,$$
$$H^u_{\cdot h}: \theta^u_h = 34000 - 2000h \quad vs \quad H^u_{1h}: \theta^u_h < 34000 - 2000h.$$

به صورت زیر است

$$Pv\left(\bar{x}^l_h\right) = P_{\theta^l_{\cdot h}}\left\{\bar{X}^l_h \le \bar{x}^l_h\right\} = \Phi\left(\sqrt{\frac{24}{747000}}(2220 - 1333h)\right),$$
$$Pv\left(\bar{x}^u_h\right) = P_{\theta^u_{\cdot h}}\left\{\bar{X}^u_h \le \bar{x}^u_h\right\} = \Phi\left(\sqrt{\frac{24}{747000}}(1255h - 368)\right).$$

و $A^l_{\widetilde{\theta}_\cdot;\alpha} = [0, 1]$، $A^u_{\widetilde{\theta}_\cdot;\alpha} = [0/0619, 1]$. بنابراین فرضیه $\widetilde{H}_\cdot$ در اندازه $\alpha = 0/05$ با درجه ۰/۹۶۹۰ پذیرفته می‌شود و با درجه ۰/۰۳۱۰ رد می‌شود. به عبارتی مجموعه فازی زیر به عنوان تابع آزمون فازی این فرضیه‌ها به دست می‌آید

$$\phi(\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{X}}}) = \left\{\frac{0/9690}{0}, \frac{0/0310}{1}\right\}.$$

۳.۴. آزمون فرضیه‌های یکطرفه راست فازی. در ادامه به آزمون فرضیه‌های یکطرفه راست فازی به صورت زیر خواهیم پرداخت

$$\widetilde{H}_\cdot: \quad \widetilde{\theta} = (32000, 2000, 2000)_T$$
$$\widetilde{H}_1: \quad \widetilde{\theta} \succ (32000, 2000, 2000)_T.$$

در هر سطح $h \in [\cdot, 1]$، $P-$مقدار آزمون فرضیه‌های یکطرفه

$$H^l_{\cdot h}: \theta^l_h = 30000 + 2000h \quad vs \quad H^l_{1h}: \theta^l_h > 30000 + 2000h,$$
$$H^u_{\cdot h}: \theta^u_h = 34000 - 2000h \quad vs \quad H^u_{1h}: \theta^u_h > 34000 - 2000h.$$

به صورت زیر است

$$Pv\left(\bar{x}^l_h\right) = P_{\theta^l_{\cdot h}}\left\{\bar{X}^l_h \ge \bar{x}^l_h\right\} = \Phi\left(\sqrt{\frac{24}{747000}}(1333h - 2220)\right),$$
$$Pv\left(\bar{x}^u_h\right) = P_{\theta^u_{\cdot h}}\left\{\bar{X}^u_h \ge \bar{x}^u_h\right\} = \Phi\left(\sqrt{\frac{24}{747000}}(368 - 1255h)\right).$$

و $A^l_{\widetilde{\theta}_{\circ};\alpha} = \emptyset$، $A^u_{\widetilde{\theta}_{\circ};\alpha} = [\circ/۵۲۴۵, ۱]$. بنابراین فرضیه $\widetilde{H}_{\circ}$ در اندازه $\alpha = \circ/\circ۵$ با درجه $\circ/۲۳۷۷$ پذیرفته می‌شود و با درجه $\circ/۷۶۲۳$ رد می‌شود. به عبارتی مجموعه فازی زیر به عنوان تابع آزمون فازی این فرضیه‌ها به دست می‌آید

$$\phi(\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{X}}}) = \left\{\frac{\circ/۲۳۷۷}{\circ}, \frac{\circ/۷۶۲۳}{۱}\right\}.$$

۵. مقایسه با روشهای دیگر

۱.۵. مقایسه با روش فیلزموزر و فیتل [۸]. یکی از شیوه‌های انجام آزمون فرضیه‌های آماری دقیق با داده‌های فازی، بر مبنای pـ مقدار فازی توسط فیلزموزر و فیتل [۸] مورد بررسی قرار گرفته است. در این روش X یک متغیر تصادفی حقیقی مقدار از توزیع F_θ با پارامتر θ است. در مشاهده نمونه تصادفی از X داده‌ها به‌صورت مقادیر نادقیق یا مقادیر فازی $\widetilde{x}_۱, \ldots, \widetilde{x}_n$ با توابع عضویت مختلف ثبت می‌شوند. آزمون فرضیه‌های آماری در حالت کلاسیک برای آزمون فرضیه‌های $H_\circ : \theta \in \Theta_\circ$ در مقابل $H_۱ : \theta \notin \Theta_\circ$ برپایه یک آماره آزمون به‌صورت $T(\underline{X}) = g(X_۱, \ldots, X_n)$ است. بنا به نوع فرضیه‌های $H_\circ$ و $H_۱$ و بر پایه آماره آزمون T، ناحیه بحرانی آزمون، C، به‌صورت یکی از موارد زیر است

$$T \leq t_l \equiv C = (-\infty, t_l],$$

$$T \geq t_u \equiv C = [t_u, \infty),$$

$$T \notin (t_a, t_b) \ \equiv C = (-\infty, t_a] \cup [t_b, \infty).$$

مقادیر t_l، t_l، t_l و t_l چندک‌هایی از توزیع آماره T هستند و به‌گونه‌ای انتخاب می‌شوند که انازه آزمون α شود.

در حالتی که داده‌ها به صورت مقادیر فازی $\widetilde{x}_۱, \ldots, \widetilde{x}_n$ ثبت می‌شوند، $\widetilde{T}(\widetilde{\underline{X}}) = g(\widetilde{X}_۱, \ldots, \widetilde{X}_n)$ نیز یک مقدار نادقیق یا فازی است که تابع عضویت آن بر اساس اصل گسترش به‌دست می‌آید. *فیلزموزر* و *فیتل* برای آزمون فرضیه‌های $H_\circ : \theta \in \Theta_\circ$ در مقابل $H_۱ : \theta \notin \Theta_\circ$ بر پایه داده‌های فازی و مجموعه فازی $P-$مقدار فازی را معرفی می‌کنند. در این حالت اگر برای هر $h \in (\circ, ۱]$، $h-$برش‌های مجوعه فازی $\widetilde{T}$ یعنی $[t^l_h, t^u_h]$ فواصل بسته و کراندار باشند آن‌گاه $h-$برش‌های مجوعه فازی $P-$مقدار یعنی $\widetilde{P}$ ، متناظر با روابط زیر به دست می‌آیند

$$\widetilde{P}_h = [p^l_h, p^u_h] = [P(T \leq t^l_h), P(T \leq t^u_h)],$$

$$\widetilde{P}_h = [p^l_h, p^u_h] = [P(T \geq t^u_h), P(T \geq t^l_h)].$$

لذا، آنها نخست با استفاده از اصل گسترش، مجموعه فازی $\widetilde{\eta}(.)$ را بر مبنای آماره آزمون $T = g(X_۱, ..., X_n)$ و اعمال آن بر داده‌های فازی $\widetilde{X}_۱, \widetilde{X}_۲, ..., \widetilde{X}_n$، به‌دست می آوردند. اگر δــ برش مجموعه فازی $\widetilde{\eta}(.)$ را با $[t_۱(\delta), t_۲(\delta)]$ نشان دهیم، δــ برش pــ مقدار فازی برای فرضیه‌های یکطرفه و دوطرفه به‌ترتیب به‌صورت زیر ارائه می‌شود:

(۱) برای آزمون فرضیه $H_۰ : \theta \geq \theta_۰$ در مقابل $H_۱ : \theta < \theta_۰$، δــ برش pــ مقدار فازی به صورت

$$C_\delta(p_*) = [P(T \leq t_۱(\delta)), P(T \leq t_۲(\delta))],$$

تعریف می‌شود.

(۲) برای آزمون فرضیه $H_۰ : \theta \leq \theta_۰$ در مقابل $H_۱ : \theta > \theta_۰$، δــ برش pــ مقدار فازی به صورت

$$C_\delta(p_*) = [P(T \geq t_۲(\delta)), P(T \geq t_۱(\delta))],$$

تعریف می‌شود.

(۳) برای آزمون فرضیه $H_۰ : \theta = \theta_۰$ در مقابل $H_۱ : \theta \neq \theta_۰$، δــ برش pــ مقدار فازی به صورت

$$C_\delta(p_*) = \begin{cases} [۲P(T \leq t_۱(\delta)), \min[۱, ۲P(T \leq t_۲(\delta))] & A_l > A_r \\ [۲P(T \geq t_۲(\delta)), \min[۱, ۲P(T \geq t_۱(\delta))] & A_l \leq A_r \end{cases}$$

تعریف می‌شود، که در آن A_l و A_r به‌ترتیب سطح سمت چپ و راست زیر نمودار $\widetilde{\eta}(.)$ از نقطه میانه توزیع آماره آزمون T می‌باشد.

پس از محاسبه pــ مقدار فازی، سطح معنی‌داری آزمون با آن مقایسه می‌شود. در صورتی که سطح معنی‌داری آزمون خارج و در سمت راست تکیه‌گاه pــ مقدار فازی واقع شود، آنگاه فرضیه $H_۰$ رد می‌شود و اگر سطح معنی‌داری آزمون خارج و در سمت چپ تکیه‌گاه pــ مقدار فازی واقع شود، آنگاه فرضیه $H_۰$ پذیرفته می‌شود. در غیر این حالات، قاعده‌ای برای انجام آزمون ارائه نشده است. لذا در این روش، اگرچه یک pــ مقدار فازی برای انجام آزمون فرضیه‌های آماری و بر پایه داده‌های فازی نتیجه می‌شود، اما فقط قادر به انجام آزمون در حالتی هستیم که سطح معنی‌داری آزمون خارج تکیه‌گاه pــ مقدار فازی قرار گیرد. در غیر اینصورت، قاعده‌ای برای رد یا قبول فرض صفر داده نشده است و توصیه به اخذ نمونه بیشتر شده است.

۲.۵. مقایسه با روش پرچمی و همکاران [۱۲]. روش دیگری برای انجام آزمون فرضیه‌های فازی با داده‌های حقیقی مقدار و بر مبنی استفاده از pــ مقدار فازی، توسط پرچمی و همکاران [۱۲] ارائه شده است. در این روش، فرضیه‌های فازی یکطرفه و دوطرفه به‌صورت «$\widetilde{H}$: $\theta \ \ is \ \ H(\theta)$» صورت‌بندی می‌شوند. در آزمون فرضیه‌های فازی فوق با داده‌های حقیقی مقدار، ابتدا pــ مقدار فازی، بر اساس اصل گسترش، به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$P(p) = G(\widetilde{H}_{\cdot})(p) = \sup_{p=g(\theta)} \widetilde{H}_{\cdot}(\theta),$$

که در آن $g : \Theta \to [۰, ۱]$، pــ مقدار برای آزمون فرضیه‌های دقیق است و $G : F(\Theta) \to F([۰, ۱])$، تابعی بر ردهٔ مجموعه‌های فازی Θ است. در این روش، سطح معنی‌داری آزمون نیز به‌صورت یک مجموعه فازی، مانند S، روی بازه $(۰, ۱)$ تعریف می‌شود. پس از محاسبه pــ مقدار فازی، با سطح معنی‌داری فازی آزمون S، بر مبنای معیار ترتیب زیر مقایسه می‌شود. این معیار میزان و درجه درستی عبارت «A بزرگتر از B است» را به‌صورت زیر بیان می‌کند

$$D(\widetilde{A} > \widetilde{B}) = \frac{\Delta_{\widetilde{A}\widetilde{B}}}{\Delta_{\widetilde{A}\widetilde{B}} + \Delta_{\widetilde{B}\widetilde{A}}},$$

که در آن،

$$\Delta_{\widetilde{A}\widetilde{B}} = \int_{a^+_{A_h} > a^-_{B_h}} (a^+_{A_h} - a^-_{B_h})dh + \int_{a^-_{A_h} > a^+_{B_h}} (a^-_{A_h} - a^+_{B_h})dh,$$

و $a^-_{A_h} = \inf\{x : x \in A_h\}$ و $a^+_{A_h} = \sup\{x : x \in A_h\}$.
سرانجام برای آزمون فرضیه‌های فازی فوق، فرضیه فازی $\widetilde{H}_{\cdot}$ با درجه $D(P > S)$ پذیرفته می‌شود و با درجه $D(S > P) = ۱ - D(P > S)$ رد می‌شود. تفاوت اصلی بین روش معرفی شده در این مقاله و رویکرد پرچمی و همکاران در نوع تعریف فضای پارامتری فرضیه‌ها به همراه نحوه آزمون آنها می‌باشد. همچنین در روش معرفی شده در این مقاله، در انتها یک تابع آزمون فازی برای رد یا پذیرش فرضیه‌های فازی معرفی شده ساخته شد.

۳.۵. مقایسه با روش عارفی [۳]. عارفی [۳]، یک شیوه جدید برای آزمون فرضیه‌های فازی بر اساس رویکرد pــ مقدار معرفی نمود. در این روش متغیرهای تصادفی حقیقی مقدار هستند و فرضیه‌های مورد نظر بر اساس مجموعه‌های فازی تعریف شده‌اند. این شیوه، مبتنی بر سطوح تراز فرضیه فازی صفر استوار است که بر این اساس pــ مقدار بر اساس انتگرال‌گیری روی hــ برش‌های فرضیه صفر فازی محاسبه می‌گردد. با مقایسه pــ مقدار ارائه شده با سطح معناداری آزمون، تصمیم‌گیری در مورد رد یا پذیرش فرضیه صفر فازی انجام می‌گیرد.

خصوصیت این روش نسبت به بقیه روش‌های ارائه شده بر اساس pـ مقدار در این است که اولاً برای هر نوع فرضیه فازی کاربرد دارد و معطوف به حالت خاصی از فرضیه‌های فازی نیست و ثانیاً بر اساس مقدار محاسبه شده، می‌توانیم به‌طور قطع در مورد رد یا پذیرش فرضیه‌های فازی تصمیم‌گیری نمود. از جمله تفاوت‌های اساسی موجود بین روش پیشنهادی در این مقاله و رویکرد عارفی [۳] می‌توان به نوع متغیرهای تصادفی و نحوه ساختاربندی فرضیه‌های مورد آزمون اشاره نمود. همچنین در رویکرد پیشنهادی ما در این مقاله، در نهایت یک تابع آزمون فازی ساخته می‌شود و تصمیم‌گیری پیرامون رد یا پذیرش فرضیه صفر بر مبنای آن صورت می‌پذیرد.

۶. نتیجه‌گیری

مطالبی که در این مقاله بیان شدند، نحوه ساخت آزمون‌های آماری را برای فرضیه‌های فازی با استفاده از داده‌های فازی نشان می‌دهند. البته آزمون‌های مشابهی را با معیارهای دیگر از قبیل معیار امکان برتری اکید نیز می‌توان ساخت. آزمون‌های پیشنهادی خوش‌تعریف هستند، زیرا اگر از داده‌های دقیق به جای مشاهدات فازی استفاده شوند و همچنین فرضیه‌های فازی با انواع دقیق آنها، این آزمون‌ها تبدیل به آزمون‌های معنی‌داری کلاسیک می‌شوند. بکارگیری این نوع آزمون‌ها در عمل بسیار ساده است. از آنجا که ابهام هم در داده‌ها و هم در فرضیه‌ها وارد شده است، خروجی این آزمون‌ها نیز به صورت فازی هستند. به عبارتی، آزمون‌های پیشنهاد شده منجر به تصمیم‌گیری فازی درباره رد یا پذیرش فرضیه تحت مطالعه می شوند. مطالعه تابع توان فازی به همراه تعریف مفاهیم خطای نوع اول فازی و خطای نوع دوم فازی در چنین آزمون‌هایی از جمله زمینه‌های تحقیقاتی در آینده است.

مراجع

[۱] چاچی، ج.، آخوند م. و احمدی ش. (۱۴۰۳). مدل لی‌ـ کارتر فازی در تحلیل داده‌های مرگ و میر. مجله علوم آماری. دوره ۱۸، شماره ۱، ص ص ۲۳۵ ـ ۲۵۲.

[۲] چاچی، ج. ، آخوند، م. و هندالی، خ. (۱۴۰۲). استنباط آماری رگرسیون وزنی فازی بر مبنی رویکرد بوت استرپ. سیستم های فازی و کاربردها، دوره ۶، شماره ۱، ص ص ۱۲۷ ـ ۱۴۹.

[۳] عارفی، م. (۱۳۹۶). یک نگرش جدید برای آزمون فرضیه های فازی بر اساس p—مقدار. مدل سازی پیشرفته ریاضی، دوره ۷، شماره ۲، ص ص ۱ ـ ۲۳.

[4] Beer, M. (2023). *Fuzzy Probability Theory*. In: Lin, TY., Liau, CJ., Kacprzyk, J. (eds) Granular, Fuzzy, and Soft Computing. Encyclopedia of Complexity and Systems Science Series.

[5] Berkachy, R. (2021). *Fuzzy Statistical Inference*. The Signed Distance Measure in Fuzzy Statistical Analysis: Theoretical, Empirical and Programming Advances, 115-175.

[6] Chukhrova, N., Johannssen, A. (2020). *Fuzzy hypothesis testing for a population proportion based on set-valued information*. Fuzzy sets and systems, 387, 127-157.

[7] Chukhrova, N., Johannssen, A. (2021). *Fuzzy hypothesis testing: Systematic review and bibliography*. Applied soft computing, 106, 107331.

[8] Filzmoser, P., Viertl, R. (2004), *Testing hypotheses with fuzzy data: the fuzzy p-value*, Metrika 59:21-29.

[9] Gil, M. Á., Hryniewicz, O. (2023). *Statistics with imprecise data*. In Granular, Fuzzy, and Soft Computing (pp. 895-909). New York, NY: Springer US.

[10] Kalpanapriya, D., Devi, N. S., Unnissa, M. M., Fathima, D. (2024). *Statistical fractal analysis in testing the Hypotheses with imprecise data*. Methods X, 13, 102945.

[11] Hesamian, G., Ghasem Akbari, M. (2022). *Testing hypotheses for multivariate normal distribution with fuzzy random variables*. International Journal of Systems Science, 53(1), 14-24.

[12] Parchami, A., Taheri, S.M., Mashinchi, M. (2010). *Fuzzy p-value in testing fuzzy hypotheses with crisp data*, Statistical Papers, 51, 209-226.

[13] Takači, A., Štajner-Papuga, I., Lozanov-Crvenković, Z., Jočić, D., Grujić, G., Došenović, T. (2024). *On Horizontal Fuzzy Relations and Hypotheses Testing*. Acta Polytechnica Hungarica, 21(10) 153-166.

[14] Taheri, S.M., Arefi, M. (2009). *Testing fuzzy hypotheses based on fuzzy test statistic*. Soft Comput 13, 617-625.

[15] Viertl, R. (2011). *Statistical methods for fuzzy data*. John Wiley & Sons.

[16] Wu, H.C. (2005). *Statistical hypotheses testing for fuzzy data*, Information Sciences, 175: 30-57.

[17] Wu, H.C. (2009). *Statistical confidence intervals for fuzzy data*, Expert Systems with Applications, 36: 2670-2676.

[18] Zadeh, L.A. (1965). *Fuzzy sets*, Information and Control, 8: 338-353.

[19] Zimmermann, H. J. (2011). *Fuzzy set theory-and its applications*. Springer Science & Business Media.