سیستم های فازی و کاربردها
سال هشتم، شماره اول (بهار و تابستان ۱۴۰۴)
صص. ۲۶۵ تا ۲۸۹

شاپای چاپی: ۲۷۱۷-۴۴۰۹
شاپای الکترونیکی: ۲۷۱۷-۳۹۸۴
DOI:10.22034/jfsa.2025.524419.1274

مشبکه همنهشتی فازی روی ابرجبرها و همنهشتی روی ابرجبرهای فازی

الهام سادات حسینی[۱]، طاهره نوذری[۱*]، رضا عامری[۲] و نعیمه اونق[۱]

[۱] گروه ریاضی و علوم کامپیوتر، دانشکده علوم، دانشگاه گلستان، گرگان، ایران
[۲] گروه ریاضی، دانشکده ریاضی، آمار و علوم کامپیوتر، دانشگاه تهران، تهران، ایران

تاریخ دریافت: ۱۴۰۴/۰۲/۲۸ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۴/۰۵/۳۱

نوع مقاله: علمی-پژوهشی

چکیده. در این مقاله به تحلیل روابط سازگاری و همنهشتی (فازی) در ابرجبرها (فازی) پرداخته می‌شود و درک بهتری از این روابط در ساختارهای جبر فازی ارائه می‌شود. هدف ما تحلیل دقیق روابط سازگاری و همنهشتی در ابرجبرها (فازی) تحت همریختی و بررسی ویژگی‌های این روابط در ابعاد مختلف است. همچنین، ابرجبرهای خارج قسمتی (فازی) و قضایای همریختی مرتبط با آن‌ها در این تحقیق معرفی و تحلیل می‌شوند. نتایج این تحقیق نشان می‌دهد که پیوند میان ابرجبرها (فازی) و جبرهای کلاسیک می‌تواند به توسعه مفاهیم جدید در ابرجبر فازی کمک کند.

2010 *Mathematics Subject Classification.* 03E72; 08A72
* Corresponding author
E-mails: e.hoseini99@stu.gu.ac.ir, t.nozari@gu.ac.ir, rameri@ut.ac.ir and bn.onagh@gu.ac.ir.
عبارات و کلمات کلیدی. ابرجبر فازی، رابطه سازگاری، رابطه همنهشتی، همریختی.

۱. سرآغاز

مفهوم ابرساختار برای نخستین بار توسط مارتی[1] [۲۱] در سال ۱۹۳۴ در هشتمین کنگره ریاضی‌دانان اسکاندیناوی معرفی شد. این مفهوم به‌عنوان چارچوبی نظری برای بررسی ساختارهای جبری مختلف، به ویژه در زمینه‌های پیچیده‌تر ریاضی مورد توجه قرار گرفت. به‌دنبال آن، زاده[2] [۲۸] در سال ۱۹۶۵ مفهوم مجموعه‌های فازی را ارائه داد و روابط هم‌ارزی فازی را به‌عنوان تعمیمی از مفهوم رابطه هم‌ارزی تعریف نمود. در سال‌های اخیر، پژوهشگران مختلفی از جمله پیکت[3] [۲۴، ۲۵] و هانسول[4] [۱۴] به بررسی جنبه‌های مختلف همریختی، زیرجبرها و تجزیه‌های زیرمستقیم ابرجبرها پرداخته‌اند.

روابط همنهشتی فازی در ابرجبرها به‌عنوان روابط هم‌ارزی فازی شناخته می‌شوند که با همه عمل‌های اساسی در ابرجبر سازگارند. این روابط در ساختارهای جبری مختلفی از جمله نیم‌گروه‌ها [۲۷]، گروه‌ها [۹، ۱۱، ۱۸]، حلقه‌ها [۱۹] و مدول‌ها [۲۰] مورد مطالعه قرار گرفته‌اند. شوایگرت[5] [۲۶] به بررسی همنشتی‌ها در چندجبر پرداخته است و عامری و زاهدی [۴] مفهوم ابرجبر را معرفی کرده‌اند. در ادامه، عامری و روزنبرگ[6] [۲، ۳] با پیروی از کارهای قبلی، به معرفی مفهوم سازگاری و همنهشتی‌های ابرجبرها پرداخته‌اند و برخی از ویژگی‌های همنهشتی در ابرجبرها را مطالعه کرده‌اند. همچنین پژوهش‌هایی مانند [۱۶] و [۱۷] بر توسعه ساختارهای نوین فازی، مانند ابرعمل‌های گرافی و گروه‌های کاهش‌یافته فازی، تمرکز داشته‌اند که می‌توانند افق‌های جدیدی در بررسی روابط هم‌ارزی و همنهشتی فراهم کنند.

در سال‌های اخیر، توجه به عمل‌های معمولی بر روی مجموعه‌های فازی افزایش یافته است. کرسینی[7] و لئورانو[8] [۱۰] به طور خاص به بررسی این اعمال پرداخته‌اند. سن[9]، عامری و چودری[10] [۲۷] نیز رویکرد جدیدی را برای نیم‌ابرگروه‌های فازی معرفی کرده‌اند که به‌طور قابل توجهی به گسترش مفاهیم در این حوزه کمک کرده است. این روش به مفاهیم ابرحلقه‌های فازی و ابرمدول‌های فازی نیز گسترش یافته است.

---

[1] Marty
[2] Zadeh
[3] Pickett
[4] Hansoul
[5] Schweigert
[6] Rosenberg
[7] Corsini
[8] Leoreanu
[9] Sen
[10] Chowdhory

با تکیه بر کارهای پیشین، عامری و نوذری [۵] این رویکرد را به ابرجبرها گسترش دادند و مفهوم ابرجبرهای فازی و روابط آن‌ها با ابرجبرها را معرفی و تحلیل کردند. این پژوهش‌ها به برقراری پیوندی میان ابرجبرهای فازی و جبرهای معمولی کمک می‌کنند و زمینه‌ساز توسعه نظریه‌های جدید در این حوزه می‌شوند.

در این مقاله، روابط سازگاری و همنهشتی (فازی) در ابرجبرها (فازی) معرفی می‌شود. همچنین تصویر و تصویر معکوس ابرجبر (فازی) تحت همریختی مورد بررسی قرار می‌گیرد. در ادامه، ابرجبرهای خارج قسمتی (فازی) و قضایای همریختی مرتبط با آن‌ها تعریف می‌شوند. در پایان، با ارائه تحلیل یکپارچه‌ای از روابط همنهشتی (فازی)، ساختار مشبکه‌ای آن‌ها و ویژگی‌های همریختی در ابرجبرها (فازی) گامی در جهت توسعه بیشتر چارچوب‌های نظری در این حوزه خواهد شد.

۲. مفاهیم و نتایج مقدماتی

در این بخش، برخی از تعاریف، نمادها و نتایج مهم در نظریه ابرساختارهای جبری، روابط هم‌ارزی تعریف‌شده بر روی آن‌ها و نظریه مجموعه‌های فازی معرفی می‌شود.

فرض کنید H یک مجموعه ناتهی و $P^*(H)$ مجموعه تمام زیرمجموعه‌های ناتهی H باشد. همچنین فرض کنید H^n، که در آن n یک عدد صحیح مثبت است، نمایانگر مجموعه همه n–تایی ها از عناصر H باشد. نگاشت $\beta : H^n \to P^*(H)$ یک ابرعمل n–تایی روی H نامیده می‌شود که به هر n–تایی از عناصر H^n یک زیرمجموعه ناتهی از H را اختصاص می‌دهد. در این تعریف، مقدار n رتبه ابرعمل β نامیده می‌شود. همچنین، یک ابرعمل پوچ روی H به‌عنوان یک عضو از $P^*(H)$، یعنی یک زیرمجموعه ناتهی از H تعریف می‌شود [۲].

فرض کنید H یک مجموعه ناتهی باشد و برای هر $i \in I$ که I یک مجموعه اندیس‌گذار است، β_i یک ابرعمل n_i–تایی روی H باشد. در این صورت $\mathbb{H} = \langle H, (\beta_i|\ i \in I)\rangle$ یک ابرجبر نامیده می‌شود. همچنین دنباله $(n_i \mid i \in I)$ که به هر $i \in I$ رتبهٔ β_i را نسبت می‌دهد، نوع ابرجبر نامیده می‌شود. این دنباله تابعی از I به مجموعه اعداد حسابی $\mathbb{W}$ است. دو ابرجبر که از یک نوع باشند، مشابه نامیده می‌شوند [۲].

فرض کنید $\mathbb{H} = \langle H, (\beta_i|\ i \in I)\rangle$ یک ابرجبر باشد. زیرمجموعه ناتهی S از $\mathbb{H}$ ابر زیرجبر نامیده می‌شود هرگاه برای هر $i \in I$ و هر $a_1, \dots, a_{n_i} \in S$، داشته باشیم $\beta_i(a_1, \dots, a_{n_i}) \subseteq S$ [۲].

تعریف ۱.۲ ([۲]). فرض کنید $\mathbb{H} = \langle H, (\beta_i |\ i \in I)\rangle$ و $\mathbb{H}' = \langle H', (\beta'_i |\ i \in I)\rangle$ دو ابرجبر از یک نوع باشند و $h : H \to H'$ یک نگاشت باشد. در این صورت

(آ) h یک همریختی نامیده می‌شود هرگاه برای هر $i \in I$ و هر $(a_1, ..., a_{n_i}) \in H^{n_i}$،

$$h(\beta_i((a_1, ..., a_{n_i})) \subseteq \beta'_i(h(a_1), ..., h(a_{n_i})),$$

(ب) h یک همریختی خوب نامیده می‌شود هرگاه برای هر $i \in I$ و هر $(a_1, ..., a_{n_i}) \in H^{n_i}$،

$$h(\beta_i((a_1, ..., a_{n_i})) = \beta'_i(h(a_1), ..., h(a_{n_i})),$$

(پ) h یک یکریختی نامیده می‌شود هرگاه h یک‌به‌یک، پوشا و یک همریختی خوب باشد.

مشابه تعاریف فوق، می‌توان تعاریف مشابهی را بر روی ابرجبرهای فازی نیز ارائه داد.

تعریف ۲.۲ ([۵]). یک ابرعمل n-تایی فازی f^n، $n \in \mathbb{N}$، روی مجموعه ناتهی H به‌صورت نگاشت $f^n : H^n \to \mathcal{F}^*(H)$ تعریف می‌شود، که به هر n-تایی $(a_1, \ldots, a_n)$ از عناصر H یک زیرمجموعه فازی غیرصفر $f^n(a_1, \ldots, a_n)$ را اختصاص می‌دهد. در اینجا، $\mathcal{F}^*(H)$ مجموعه تمام زیرمجموعه‌های فازی غیرصفر مجموعه H است.
یادآوری می‌کنیم که یک زیرمجموعه فازی μ از مجموعه ناتهی H، تابعی از H به بازه $[0, 1]$ است. یک ابرعمل فازی پوچ روی H به‌عنوان یک عضو از $\mathcal{F}^*(H)$، یعنی یک زیرمجموعه فازی غیرصفر از H تعریف می‌شود.

فرض کنید μ و ν دو زیرمجموعه فازی از H باشند. در این صورت $\mu \subseteq \nu$ اگر و تنها اگر برای هر $x \in H$، داشته باشیم $\mu(x) \leq \nu(x)$.

تعریف ۳.۲. فرض کنید μ یک زیرمجموعه فازی از H باشد. برش μ_a از μ برای هر $a \in [0, 1]$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mu_a = \{x \in H |\ \mu(x) \geq a\}.$$

به‌آسانی دیده می‌شود که برای هر دو زیرمجموعه فازی μ و ν از H و هر $a, b \in H$ موارد زیر برقرار است:

(آ) اگر $\mu \subseteq \nu$، آنگاه $\mu_a \subseteq \nu_a$،

(ب) اگر $b \leq a$، آنگاه $\mu_a \subseteq \mu_b$،

(پ) $\mu=\nu$ اگر و تنها اگر برای هر $a\in H$، $\mu_a=\nu_a$.

تعریف ۴.۲ ([۵]). فرض کنید H و H' دو مجموعه ناتهی و $f:H\to H'$ یک نگاشت باشد. همچنین μ و ν به‌ترتیب دو زیرمجموعه فازی از H و H' باشند. در این صورت $f(\mu)$ و $f^{-1}(\nu)$ به‌ترتیب دو زیرمجموعه فازی روی H' و H هستند که به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$f(\mu)(b)=\begin{cases}\bigvee\{\mu(a)\mid a\in f^{-1}(b)\} & f^{-1}(b)\neq\emptyset\\ 0 & f^{-1}(b)=\emptyset.\end{cases}$$

و $f^{-1}(\nu)(x)=\nu(f(x))$.

یادآوری می‌شود که یک رابطه دوتایی روی مجموعه H، زیرمجموعه ای از H^2 است. رابطه دوتایی ρ روی H هم‌ارزی نامیده می‌شود هرگاه

(آ) برای هر $a\in H$، $(a,a)\in H$ (انعکاسی)،

(ب) برای هر $a,b\in H$، اگر $(a,b)\in\rho$، آنگاه $(b,a)\in\rho$ (تقارنی)،

(پ) برای هر $a,b,c\in H$، اگر $(a,b)\in\rho$ و $(b,c)\in\rho$، آنگاه $(a,c)\in\rho$ (تعدی).

فرض کنید ρ و ϕ روابط دوتایی روی مجموعه ناتهی H باشند. ترکیب $\rho\circ\phi$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\rho\circ\phi=\big\{(x,y)\mid (x,u)\in\rho,(u,y)\in\phi,\ u\in H\big\}.$$

تعریف ۵.۲. فرض کنید A یک مجموعه باشد. رابطه $\leq$ روی A را یک ترتیب جزئی می‌نامند هرگاه برای هر $a,b,c\in A$ ویژگی‌های زیر برقرار باشند:

(آ) $a\leq a$ (انعکاسی)،

(ب) $a\leq b$ و $b\leq a$ نتیجه دهد $a=b$ (پاد تقارنی)،

(پ) $a\leq b$ و $b\leq c$ نتیجه دهد $a\leq c$ (تعدی).

در این صورت $(A,\leq)$ را یک مجموعه مرتب جزئی می‌نامند.

تعریف ۶.۲ ([۱۴]). فرض کنید $(P,\leq)$ یک مجموعه مرتب جزئی باشد و $A\subseteq P$. کوچک‌ترین کران بالای A عضوی مانند $a\in P$ است به طوری‌که

(آ) برای هر $x\in A$، $x\leq a$ (یعنی a یک کران بالای A باشد)،

(ب) برای هر کران بالای A مانند b، $a\leq b$.

به طور مشابه، بزرگ‌ترین کران پایین A تعریف می‌شود. بزرگ‌ترین کران پایین A را با $\inf A$ یا $\bigwedge A$ و کوچک‌ترین کران بالای A را با $\sup A$ یا $\bigvee A$ نشان می‌دهند.

مجموعه مرتب جزئی $(L, \leq)$ را یک مشبکه می‌نامند هرگاه برای هر $a, b \in L$، $\inf\{a, b\}$ و $\sup\{a, b\}$ که به‌ترتیب با $a \wedge b$ و $a \vee b$ نشان داده می‌شوند، وجود داشته باشند. مشبکه L را کامل می‌نامند هرگاه برای هر زیرمجموعه A از L، $\bigwedge A$ و $\bigvee A$ وجود داشته باشند.

تعریف ۷.۲ ([۵]). فرض کنید H یک مجموعه ناتهی باشد و برای هر $i \in I$ که I یک مجموعه اندیس‌گذار است، β_i یک ابرعمل n_i–تایی فازی روی H باشد. در این صورت $\mathbb{H} = \langle H, (\beta_i | \ i \in I) \rangle$ یک ابرجبر فازی نامیده می‌شود و $(n_i | \ i \in I)$ نوع این ابرجبر فازی محسوب می‌شود. دو ابرجبر فازی مشابه نامیده می‌شوند هرگاه از یک نوع باشند.

تعریف ۸.۲ ([۵]). فرض کنید $\mathbb{H} = \langle H, (\beta_i | \ i \in I) \rangle$ یک ابرجبر فازی باشد. زیرمجموعه ناتهی S از H را ابر زیرجبر فازی می‌نامند هرگاه برای هر $i \in I$ و هر $a_1, \dots, a_{n_i} \in S$، چنانچه $\beta_i(a_1, \dots, a_{n_i})(x) > 0$ آنگاه $x \in S$. مجموعه تمام ابر زیرجبرهای فازی $\mathbb{H}$ با نماد $S(\mathbb{H})$ نشان داده می‌شود.

تعریف ۹.۲ ([۵]). فرض کنید $\mathbb{H} = \langle H, (\beta_i | \ i \in I) \rangle$ و $\mathbb{H}' = \langle H', (\beta_i' \mid i \in I) \rangle$ دو ابرجبر فازی از یک نوع باشند و $f : H \to H'$ یک نگاشت باشد. در این صورت

(آ) f یک همریختی از ابرجبرهای فازی است هرگاه برای هر $i \in I$ و هر $a_1, \dots, a_{n_i}$،
$$f(\beta_i(a_1, \dots, a_{n_i})) \subseteq \beta_i'(f(a_1), \dots, f(a_{n_i})),$$

(ب) f یک همریختی خوب از ابرجبرهای فازی است هرگاه برای هر $i \in I$ و هر $a_1, \dots, a_{n_i}$،
$$f(\beta_i(a_1, \dots, a_{n_i})) = \beta_i'(f(a_1), \dots, f(a_{n_i})),$$

(پ) f یک یکریختی است از ابرجبرهای فازی است هرگاه f یک‌به‌یک، پوشا و یک همریختی خوب باشد.

تعریف ۱۰.۲ ([۵]). فرض کنید ρ یک رابطه هم‌ارزی روی ابرجبر $\mathbb{H} = \langle H, (\beta_i | \ i \in I) \rangle$ و μ و ν دو زیرمجموعه فازی از H باشند. در این صورت $\mu \bar{\rho} \nu$ هرگاه شرایط زیر برقرار باشد:

(آ) برای هر $a \in H$، اگر $\mu(a) > 0$، آنگاه عنصر $b \in H$ وجود داشته باشد به طوری‌که $\nu(b) > 0$ و $(a, b) \in \rho$،

(ب) برای هر $b \in H$، اگر $\nu(b) > 0$، آنگاه عنصر $a \in H$ وجود داشته باشد به طوری‌که $\mu(a) > 0$ و $(a, b) \in \rho$،

همچنین $\mu\overline{\overline{\rho}}\nu$ هرگاه برای هر $a,b\in H$ که $\mu(a)>\circ$ و $\nu(b)>\circ$ داشته باشیم $(a,b)\in\rho$.
لازم به ذکر است که تعریف رابطه هم‌ارزی در ابرجبرها، مانند تعریف کلاسیک در مجموعه‌ها است و صرفاً روی مجموعه زمینه اعمال می‌شود و مستقل از ساختار جبری ابرجبر است.

تعریف ۱۱.۲ ([۲]). رابطه دوتایی ρ روی H با ابرعمل n-تایی β سازگار (قوی) نامیده می‌شود هرگاه برای هر عدد طبیعی n، هر $1\leq i\leq n$ و هر $a_i,b_i\in H$، $(a_i,b_i)\in\rho$ نتیجه دهد که

$$\beta(a_1,...,a_n)\ \overline{\rho}\ \beta(b_1,...,b_n),$$
$$(\beta(a_1,...,a_n)\ \overline{\overline{\rho}}\ \beta(b_1,...,b_n)).$$

اگر $\mathbb{H}=\langle H,(\beta_i|i\in I)\rangle$ یک ابرجبر باشد، آن‌گاه رابطه هم‌ارزی ρ روی H را همنهشتی (قوی) از H نامند هرگاه ρ با هر β_i، $1\leq i\leq n$، سازگار (قوی) باشد.

۳. روابط سازگاری و هم‌نهشتی (فازی) در ابرجبرها (فازی)

در این بخش، به معرفی روابط همنهشتی فازی روی ابرجبرها و روابط همنهشتی روی ابرجبرهای فازی پرداخته می‌شود. همچنین، ابرجبرهای خارج‌قسمتی فازی القا شده توسط یک رابطه همنهشتی بررسی و برخی از قضایای همریختی و یکریختی برای این ابرجبرهای فازی ارائه می‌شود. علاوه بر این، ابرجبرهای خارج‌قسمتی القا شده توسط یک رابطه همنهشتی فازی معرفی و قضایای همریختی و یکریختی مشابه نشان داده می‌شود.

تعریف ۱.۳ ([۵]). فرض کنید H یک مجموعه ناتهی باشد. یک رابطه فازی ρ روی H تابعی به‌صورت زیر است:

$$\rho: H\times H\to[\circ,1].$$

رابطه فازی ρ روی ابرجبر $\mathbb{H}=\langle H,(\beta_i|\ i\in I)\rangle$ یک رابطه هم‌ارزی فازی نامیده می‌شود هرگاه شرایط زیر برقرار باشد:

(آ) برای $a\in H$، $\rho(a,a)=1$ (انعکاسی فازی)،
(ب) برای هر $a,b\in H$، $\rho(a,b)=\rho(b,a)$ (تقارنی فازی)،
(پ) برای هر $a,b\in H$، $\rho\circ\rho(a,b)\subseteq\rho(a,b)$ (تعدی فازی).

در ادامه، لازم است بدانیم که یک رابطه هم‌ارزی چگونه روی ابرعمل‌های یک ابرجبر تأثیر می‌گذارد. برای این منظور، تعریف زیر را ارائه می‌دهیم:

تعریف ۲.۳. فرض کنید $\mathbb{H} = \langle H, (\beta_i |\ i \in I)\rangle$ یک ابرجبر و ρ یک رابطه هم‌ارزی فازی روی آن باشد. برای هر $a_1, \ldots, a_{n_i}, b_1, \ldots, b_{n_i} \in H$، تعریف می‌کنیم

$$\rho\big(\beta_i(a_1, \ldots, a_{n_i}), \beta_i(b_1, \ldots, b_{n_i})\big) = \bigwedge_{\substack{a \in \beta_i(a_1, \ldots, a_{n_i}) \\ b \in \beta_i(b_1, \ldots, b_{n_i})}} \rho(a, b).$$

اکنون می‌توانیم رابطه همنهشتی فازی را روی ابرجبرها معرفی کنیم:

تعریف ۳.۳. فرض کنید ρ رابطه هم‌ارزی فازی روی ابرجبر $\mathbb{H} = \langle H, (\beta_i |\ i \in I)\rangle$ باشد. در این صورت ρ روی $\mathbb{H}$ یک رابطه همنهشتی فازی است هرگاه یک رابطه سازگاری فازی روی $\mathbb{H}$ باشد؛ یعنی برای هر $i \in I$، $a_1, \ldots, a_{n_i}, b_1, \ldots, b_{n_i} \in H$ و هر ابرعمل β_i،

$$\rho\big(\beta_i(a_1, \ldots, a_{n_i}), \beta_i(b_1, \ldots, b_{n_i})\big) \geq \bigwedge_{1 \leq i \leq n_i} \rho(a_i, b_i).$$

مجموعه تمام روابط همنهشتی فازی روی ابرجبر $\mathbb{H}$ را با نماد $\mathcal{FC}(\mathbb{H})$ نشان می‌دهیم.

مثال ۴.۳. فرض کنید $H = \{x, y, z\}$ و ابرعمل β روی H به‌صورت زیر تعریف شده باشد:

$$\beta(x, x) = \{x\}, \quad \beta(y, y) = \{y\}, \quad \beta(z, z) = \{z\},$$
$$\beta(x, y) = \beta(y, x) = \{x, y\}, \quad \beta(y, z) = \beta(z, y) = \{y, z\},$$
$$\beta(x, z) = \beta(z, x) = \{z\}.$$

در این صورت $\mathbb{H} = \langle H, \beta\rangle$ یک ابرجبر است. رابطه فازی دوتایی ρ را روی H به‌صورت جدول زیر تعریف می‌کنیم: در این صورت ρ یک همنهشتی فازی روی $\mathbb{H}$ است.

جدول ۱: رابطه فازی ρ روی H

ρ	x	y	z
x	۱	۰.۸	۰.۶
y	۰.۸	۱	۰.۶
z	۰.۶	۰.۶	۱

فرض کنید $\mathbb{H} = \langle H, (\beta_i |\ i \in I)\rangle$ یک ابرجبر باشد. روابط همنهشتی فازی $\Delta_{\mathbb{H}}$ و $\nabla_{\mathbb{H}}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\Delta_{\mathbb{H}}(x, y) = \begin{cases} ۱ & x = y \\ ۰ & x \neq y \end{cases} \qquad\qquad \nabla_{\mathbb{H}}(x, y) = ۱$$

که در آن $x, y \in H$.

در قضیه زیر ساختار مشبکه‌ای مجموعه تمام همنهشتی‌های فازی روی یک ابرجبر را ارائه می‌دهیم.

قضیه ۵.۳. مجموعه مرتب جزئی $(\mathcal{FC}(\mathbb{H}), \subseteq)$ یک مشبکه کامل است که کوچکترین عضو آن $\Delta_{\mathbb{H}}$ و بزرگترین عضو آن $\nabla_{\mathbb{H}}$ است.

اثبات. مجموعه $\mathcal{FC}(\mathbb{H})$ تحت رابطه $\subseteq$ یک مجموعه مرتب جزئی است. چون این مجموعه دارای کوچکترین عضو $\Delta_{\mathbb{H}}$ و بزرگترین عضو $\nabla_{\mathbb{H}}$ است و تحت اجتماع و اشتراک بسته است، به سادگی نتیجه می‌شود که $\mathcal{FC}(\mathbb{H})$ یک مشبکه کامل است. $\square$

تعریف ۶.۳. فرض کنید $\mathbb{H} = \langle H, (\beta_i |\ i \in I)\rangle$ و $\mathbb{H}' = \langle H', (\beta'_i |\ i \in I)\rangle$ دو ابرجبر مشابه باشند و $h : \mathbb{H} \to \mathbb{H}'$ یک همریختی بین آن‌ها باشد. فرض کنید ρ و ϕ به‌ترتیب دو رابطه فازی روی $\mathbb{H}$ و $\mathbb{H}'$ باشند. تصویر وارون ϕ را، که یک رابطه فازی روی $\mathbb{H}$ است، به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$h^{-۱}(\phi)(a_۱, a_۲) = \phi\big(h(a_۱), h(a_۲)\big), \qquad\qquad \forall a_۱, a_۲ \in H.$$

تصویر ρ را با $h(\rho)$ نشان می‌دهیم که به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$h(\rho)(a'_۱, a'_۲) = \sup\{\rho(a_۱, a_۲) |\ a_۱ \in h^{-۱}(a'_۱),\ a_۲ \in h^{-۱}(a'_۲)\}, \tag{۱.۳}$$

که در آن $a'_۱, a'_۲ \in H'$. توجه شود که $h(\rho)$ یک رابطه فازی روی $\mathbb{H}'$ است. رابطه فوق را اصل گسترش فازی می‌نامیم.

قضیه ۷.۳. فرض کنید $\mathbb{H} = \langle H, (\beta_i |\ i \in I)\rangle$ و $\mathbb{H}' = \langle H', (\beta'_i |\ i \in I)\rangle$ دو ابرجبر مشابه باشند و $h : \mathbb{H} \to \mathbb{H}'$ یک همریختی پوشا بین آن‌ها باشد. در این صورت

(آ) اگر $\phi \in \mathcal{FC}(\mathbb{H}')$، آن‌گاه $h^{-۱}(\phi) \in \mathcal{FC}(\mathbb{H})$؛

(ب) اگر $\rho \in \mathcal{FC}(\mathbb{H})$، آن‌گاه $h(\rho) \in \mathcal{FC}(\mathbb{H}')$.

اثبات. (آ) می‌توان ثابت کرد که $h^{-1}(\phi)$ یک رابطه هم‌ارزی فازی روی $\mathbb{H}$ است. کافی است نشان دهیم که $h^{-1}(\phi)$ یک رابطه سازگاری فازی روی $\mathbb{H}$ است.

فرض کنید $a_1,\dots,a_{n_i},b_1,\dots,b_{n_i}\in H$. در این صورت

$$\begin{aligned}
&h^{-1}(\phi)\big(\beta_i(a_1,\dots,a_{n_i}),\beta_i(b_1,\dots,b_{n_i})\big)\\
&=\phi\big(h\big(\beta_i(a_1,\dots,a_{n_i})\big),h\big(\beta_i(b_1,\dots,b_{n_i})\big)\big)\\
&=\phi\big(\beta'_i\big(h(a_1),\dots,h(a_{n_i})\big),\beta'_i\big(h(b_1),\dots,h(b_{n_i})\big)\big)\\
&=\bigwedge_{\substack{a\in\beta'_i(h(a_1),\dots,h(a_{n_i}))\\ b\in\beta'_i(h(b_1),\dots,h(b_{n_i}))}}\phi(a,b)\\
&\geq\bigwedge_{1\leq i\leq n_i}\phi\big(h(a_i),h(b_i)\big)\\
&=\bigwedge_{1\leq i\leq n_i}h^{-1}(\phi)(a_i,b_i).
\end{aligned}$$

بنابراین $h^{-1}(\phi)$ یک رابطه همنهشتی فازی روی $\mathbb{H}$ است.

(ب) می‌توان ثابت کرد که $h(\rho)$ یک رابطه هم‌ارزی فازی روی $\mathbb{H}'$ است. کافی است نشان دهیم که $h(\rho)$ یک رابطه سازگاری فازی روی $\mathbb{H}'$ است.

فرض کنید $a'_1,\dots,a'_{n_i},b'_1,\dots,b'_{n_i}\in H'$. در این صورت

$$\begin{aligned}
&h(\rho)\big(\beta'_i(a'_1,\dots,a'_{n_i}),\beta'_i(b'_1,\dots,b'_{n_i})\big)\\
&=\sup_{\substack{\beta_i(a_1,\dots,a_{n_i})\in h^{-1}(\beta'_i(a'_1,\dots,a'_{n_i}))\\ \beta_i(b_1,\dots,b_{n_i})\in h^{-1}(\beta'_i(b'_1,\dots,b'_{n_i}))}}\{\rho\big(\beta_i(a_1,\dots,a_{n_i}),\beta_i(b_1,\dots,b_{n_i})\big)\}\\
&\geq\sup\{\bigwedge\rho(a_i,b_i)\mid 1\leq i\leq n_i\}\\
&=\sup\bigwedge_{1\leq i\leq n_i}\sup\{\rho(h^{-1}(a'_i),h^{-1}(b'_i))\}\\
&=\bigwedge_{1\leq i\leq n_i}h(\rho)(a'_i,b'_i).
\end{aligned}$$

لذا $h(\rho)$ یک رابطه همنهشتی فازی روی $\mathbb{H}'$ است. $\square$

فرض کنید $\mathbb{H} = \langle H, (\beta_i|\ i \in I)\rangle$ یک ابرجبر باشد، $\rho \in \mathcal{FC}(\mathbb{H})$ و $a \in H$. کلاس همنهشتی فازی a و ρ، که با $a\rho$ نشان می‌دهیم به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$a\rho(b) = \rho(a, b), \qquad\qquad \forall b \in H.$$

توجه شود که $a\rho$ یک زیرمجموعه فازی از H است

گزاره ۸.۳. فرض کنید $\mathbb{H} = \langle H, (\beta_i|\ i \in I)\rangle$ یک ابرجبر باشد، $\rho \in \mathcal{FC}(\mathbb{H})$ و $a, b \in H$. در این صورت $a\rho = b\rho$ اگر و تنها اگر $\rho(a, b) = ۱$.

اثبات. به آسانی قابل اثبات است. □

تعریف ۹.۳. فرض کنید $\mathbb{H} = \langle H, (\beta_i|\ i \in I)\rangle$ یک ابرجبر باشد، $\rho \in \mathcal{FC}(\mathbb{H})$ و H/ρ مجموعه تمام کلاس‌های همنهشتی فازی ρ باشد؛ یعنی $H/\rho = \{a\rho|\ a \in H\}$. اکنون ابرعمل القاشده توسط β_i و H روی H/ρ را برای هر $a_۱, \dots, a_{n_i} \in H$ به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\beta_i^{H/\rho}(a_۱\rho, \dots, a_{n_i}\rho) = \{a\rho|\ a \in \beta_i(a_۱, \dots, a_{n_i})\}.$$

در گزاره بعدی خوش‌تعریفی این ابرعمل بررسی می‌شود.

گزاره ۱۰.۳. فرض کنید $\mathbb{H} = \langle H, (\beta_i|\ i \in I)\rangle$ یک ابرجبر باشد و $\rho \in \mathcal{FC}(\mathbb{H})$. در این صورت ابرعمل $\beta_i^{H/\rho}$ خوش‌تعریف است.

اثبات. فرض کنید $a_۱, \dots, a_{n_i}, b_۱, \dots, b_{n_i} \in H$ به طوری‌که

$$(a_۱\rho, \dots, a_{n_i}\rho) = (b_۱\rho, \dots, b_{n_i}\rho).$$

در این صورت برای هر $i = ۱, \dots, n_i$، $a_i\rho = b_i\rho$. حال بنابر گزاره ۸.۳، برای هر $i = ۱, \dots, n_i$، داریم $\rho(a_i, b_i) = ۱$. بنابراین

$$\begin{aligned}\rho\big(\beta_i(a_۱, \dots, a_{n_i}), \beta_i(b_۱, \dots, b_{n_i})\big) &= \bigwedge_{\substack{a \in \beta_i(a_۱, \dots, a_{n_i}) \\ b \in \beta_i(b_۱, \dots, b_{n_i})}} \rho(a, b) \\ &\geq \bigwedge_{۱ \leq i \leq n_i} \rho(a_i, b_i) \\ &= ۱.\end{aligned}$$

لذا برای هر $a \in \beta_i(a_1, \ldots, a_{n_i})$ و $b \in \beta_i(b_1, \ldots, b_{n_i})$، داریم $\rho(a, b) = 1$. مجدداً بنابر گزاره ۸.۳ داریم

$$\{a\rho|\ a \in \beta_i(a_1, \ldots, a_{n_i})\} = \{b\rho|\ b \in \beta_i(b_1, \ldots, b_{n_i})\}.$$

در نتیجه ابرعمل $\beta_i^{H/\rho}$ خوش‌تعریف است. □

مفاهیم مطرح شده، برای ابرجبرهای فازی قابل اعمال هستند و می‌توانیم نتایج مشابهی را در این زمینه به دست آوریم.

تعریف ۱۱.۳. رابطه دوتایی ρ روی ابرجبر فازی $\mathbb{H} = \langle H, (\beta_i|\ i \in I)\rangle$ با ابرعمل فازی β_i سازگار است هرگاه برای هر $i \in I$ و هر $a_1, \ldots, a_{n_i}, b_1, \ldots b_{n_i}$ از عناصر H که $a_1\rho b_1, \ldots, a_{n_i}\rho b_{n_i}$، داشته باشیم

$$\beta_i(a_1, \ldots, a_{n_i})\ \overline{\rho}\ \beta_i(b_1, \ldots, b_{n_i}).$$

رابطه هم‌ارزی ρ روی ابرجبر فازی $\mathbb{H}$ یک همنهشتی است هرگاه برای هر $i \in I$، رابطه ρ با هر ابرعمل فازی β_i سازگار باشد.

به طور مشابه، می‌توان رابطه سازگاری قوی و همنهشتی قوی را روی یک ابرجبر فازی تعریف کرد.

رابطه دوتایی ρ روی ابرجبر فازی $\mathbb{H} = \langle H, (\beta_i|\ i \in I)\rangle$ با ابرعمل فازی β_i سازگاری قوی است هرگاه برای هر $i \in I$ و هر $a_1, \ldots, a_{n_i}, b_1, \ldots b_{n_i}$ از عناصر H که $a_1\rho b_1, \ldots, a_{n_i}\rho b_{n_i}$، داشته باشیم

$$\beta_i(a_1, \ldots, a_{n_i})\ \overline{\overline{\rho}}\ \beta_i(b_1, \ldots, b_{n_i}).$$

رابطه هم‌ارزی ρ روی ابرجبر فازی $\mathbb{H}$ یک همنهشتی قوی است هرگاه برای هر $i \in I$، رابطه ρ با هر ابرعمل فازی β_i سازگاری قوی باشد.

مجموعه تمام همنهشتی‌ها روی $\mathbb{H}$ را با $Con(\mathbb{H})$ و مجموعه تمام همنهشتی‌های قوی روی $\mathbb{H}$ را با $Cons(\mathbb{H})$ نشان می‌دهیم.

به‌وضوح، هر رابطه همنهشتی قوی روی یک ابرجبر فازی، یک رابطه همنهشتی نیز است.
مثال زیر نمونه‌ای از یک رابطه هم‌ارزی است که با ابرعمل فازی تعریف‌شده نیز سازگار بوده و یک رابطه همنهشتی است. هدف از این مثال، نمایش عینی تعریف همنهشتی و روشن‌سازی نحوه بررسی سازگاری در عمل است.

مثال ۱۲.۳. فرض کنید $\mathbb{H} = \langle H = \{a, b, c\}, \beta \rangle$ و $\mathbb{H}' = \langle H' = \{x, y, z\}, \beta' \rangle$ دو ابرجبر فازی از نوع دو باشند که ابرعمل‌های فازی β و β' به‌ترتیب در جدول‌های ۲ و ۳ آمده است. فرض کنید

$$\rho =\{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (b, a)\} \subseteq H \times H,$$
$$\sigma =\{(x, x), (y, y), (z, z), (y, z), (z, y)\} \subseteq H' \times H'.$$

در این صورت ρ و σ به‌ترتیب رابطه هم‌ارزی دوتایی روی مجموعه‌های H و H' هستند.

جدول ۲: جدول ابرعمل فازی β برای $\mathbb{H}$

H	$\beta(a, a)$	$\beta(a, b)$	$\beta(a, c)$	$\beta(b, a)$	$\beta(b, b)$	$\beta(b, c)$	$\beta(c, a)$	$\beta(c, b)$	$\beta(c, c)$
a	۰	۰.۲	۰.۳	۰.۳	۰	۰.۴	۰.۱	۰	۰.۷
b	۰.۲	۰.۳	۰.۵	۰	۰.۳	۰.۵	۰	۰.۲	۰.۲
c	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰.۳

جدول ۳: جدول ابرعمل فازی β' برای $\mathbb{H}'$

H'	$\beta'(x, x)$	$\beta'(x, y)$	$\beta'(x, z)$	$\beta'(y, x)$	$\beta'(y, y)$	$\beta'(y, z)$	$\beta'(z, x)$	$\beta'(z, y)$	$\beta'(z, z)$
x	۰.۱	۰	۰	۰.۷	۰.۲	۰.۱	۰.۵	۰.۱	۰.۱
y	۰	۰.۵	۰	۰.۱	۰.۸	۰.۴	۰	۰.۴	۰
z	۰	۰.۶	۰.۵	۰	۰.۶	۰.۳	۰.۶	۰	۰.۴

همچنین این روابط با ابرعمل‌های تعریف‌شده نیز سازگارند.
برای مثال، $(a, a), (a, b) \in \rho$. با توجه به جدول ۲، چون $\beta(a, a)(b) > ۰$ و عنصر a وجود دارد که $\beta(a, b)(a) > ۰$ و $(a, b) \in \rho$. پس شرط سازگاری در این حالت برقرار است. به طور مشابه، می‌توان برای سایر حالت‌ها نیز بررسی کرد. بنابراین ρ یک رابطه همنهشتی روی $\mathbb{H}$ و σ یک رابطه همنهشتی روی $\mathbb{H}'$ است.

نمونه‌ای از همنهشتی قوی در ابرجبرهای فازی در مثال زیر ارائه شده است.

مثال ۱۳.۳. فرض کنید $H = \{a, b, c\}$ و $\mathbb{H} = \langle H, \beta \rangle$ یک ابرجبر فازی باشد که ابرعمل فازی $\beta : H \times H \to \mathcal{F}^*(H)$ طبق جدول زیر تعریف شده است.

جدول ۴: جدول ابرعمل فازی β برای $\mathbb{H}$

H	$\beta(a,a)$	$\beta(a,b)$	$\beta(a,c)$	$\beta(b,b)$	$\beta(b,c)$	$\beta(c,c)$
a	۱	۰.۷	۰	۱	۰	۰
b	۰	۰.۷	۰	۰	۰	۰
c	۰	۰	۱	۰	۱	۱

رابطه هم‌ارزی دوتایی $\rho = \{(a,a),(b,b),(a,b),(b,a),(c,c)\}$ روی H را درنظر بگیرید. ρ با تمام ابرعمل‌های تعریف شده سازگار است. بنابراین ρ یک رابطه همنهشتی قوی روی ابرجبر فازی $\mathbb{H}$ است.

در مثال زیر نشان می‌دهیم که هر رابطه همنهشتی روی یک ابرجبر فازی الزاما همنهشتی قوی نیست.

مثال ۱۴.۳. فرض کنید $H = \{a,b,c\}$ و $\mathbb{H} = \langle H, \beta\rangle$ یک ابرجبر فازی باشد که ابرعمل فازی $\beta : H \times H \to \mathcal{F}^*(H)$ طبق جدول زیر تعریف شده است:

جدول ۵: جدول ابرعمل فازی β برای $\mathbb{H}$

H	$\beta(a,a)$	$\beta(a,b)$	$\beta(a,c)$	$\beta(b,b)$	$\beta(b,c)$	$\beta(c,c)$
a	۱	۰.۷	۰.۵	۱	۰	۰
b	۰	۰.۷	۰	۰	۰.۵	۰
c	۰	۰	۰.۵	۰	۰.۵	۱

رابطه هم‌ارزی زیر را روی H در نظر بگیرید:

$$\rho = \{(a,a),(b,b),(c,c),(a,b),(b,a)\}$$

در این صورت ρ یک رابطه همنهشتی روی $\mathbb{H}$ است، اما همنهشتی قوی نیست. برای مثال، $(a,a),(c,c) \in \rho$. با توجه به جدول ۵، $\beta(a,c)(a) > 0$ و $\beta(a,c)(c) > 0$، در حالی‌که $(a,c) \notin \rho$.

مشابه وارون و تصویر وارون در ابرجبرها، این مفاهیم در ابرجبرهای فازی نیز قابل تعریف هستند که در تعریف بعدی ارائه شده‌اند.

تعریف ۱۵.۳. فرض کنید $\mathbb{H}$ و $\mathbb{H}'$ دو ابرجبر فازی مشابه باشند و $f:\mathbb{H}\to\mathbb{H}'$ یک همریختی باشد. همچنین فرض کنید ρ و σ به ترتیب روابط دوتایی روی $\mathbb{H}$ و $\mathbb{H}'$ باشند. تصویر ρ که با $f(\rho)$ نشان داده می‌شود، یک رابطه دوتایی روی $\mathbb{H}'$ است که به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$f(\rho)=\big\{(f(x),f(y))\in H'\times H' \mid (x,y)\in\rho\big\}.$$

تصویر وارون σ که با $f^{-1}(\sigma)$ نشان داده می‌شود، یک رابطه دوتایی روی $\mathbb{H}$ است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$f^{-1}(\sigma)=\{(a,b)\in H\times H \mid \exists x,y\in H',\ a\in f^{-1}(x),\ b\in f^{-1}(y),\ (x,y)\in\sigma\}.$$

در ادامه برای نمایش نحوه عملکرد تصویر و تصویر وارون یک رابطه تحت همریختی مثالی ارائه می‌شود.

مثال ۱۶.۳. فرض کنید $\mathbb{H}$ و $\mathbb{H}'$ دو ابرجبر فازی معرفی شده در مثال ۱۲.۳ و $f:H\to H'$ یک همریختی از ابرجبرهای فازی باشد که

$$f(a)=y,\quad f(b)=z,\quad f(c)=y.$$

در این صورت

$$f(\rho)=\{(y,y),\ (z,z),\ (y,z),\ (z,y)\}.$$

همچنین

$$f^{-1}(\sigma)=\{(a,a),\ (b,b),\ (c,c),\ (a,b),\ (b,a),\ (b,c),\ (c,b)\}.$$

در قضیه زیر نشان می‌دهیم که تصویر یک رابطه همنهشتی و تصویر وارون یک رابطه همنهشتی نیز روابط همنهشتی هستند.

قضیه ۱۷.۳. فرض کنید $\mathbb{H}=\langle H,(\beta_i \mid i\in I)\rangle$ و $\mathbb{H}'=\langle H',(\beta'_i \mid i\in I)\rangle$ دو ابرجبر فازی مشابه باشند و $f:\mathbb{H}\to\mathbb{H}'$ یک همریختی پوشا باشد. در این صورت

(آ) اگر $\sigma\in Con(\mathbb{H}')$، آن‌گاه $f^{-1}(\sigma)\in Con(\mathbb{H})$،

(ب) اگر $\rho\in Con(\mathbb{H})$، آن‌گاه $f(\rho)\in Con(\mathbb{H}')$.

اثبات. (آ) به‌وضوح $f^{-1}(\sigma)$ یک رابطه هم‌ارزی روی $\mathbb{H}$ است.
فرض کنید $u \in H$، $\beta_i(a_1, \ldots, a_{n_i})(u) > 0$ و $f(u) = m$. چون برای هر $i = 1, \ldots, n_i$، طبق فرض $(a_i, b_i) \in f^{-1}(\sigma)$، عناصر x_i, y_i از H' وجود دارند به طوری‌که $a_i \in f^{-1}(x_i)$ و $b_i \in f^{-1}(y_i)$ و $(x_i, y_i) \in \sigma$. توجه شود که

$$\begin{aligned} 0 < \bigvee\{\beta_i(a_1, \ldots, a_{n_i})(s) |\ f(s) = m\} &= f(\beta_i(a_1, \ldots, a_{n_i}))(m) \\ &= \beta'_i(f(a_1), \ldots, f(a_{n_i}))(m) \\ &= \beta'_i(x_1, \ldots, x_{n_i})(m). \end{aligned} \tag{۲.۳}$$

چون σ یک رابطه همنهشتی روی $\mathbb{H}'$ است و $(x_i, y_i) \in \sigma$، بنابر (۲.۳)، می‌توان عنصر $n \in H'$ را یافت به طوری‌که $\beta'_i(y_1, \ldots, y_{n_i})(n) > 0$ و $(m, n) \in \sigma$. بنابراین

$$\begin{aligned} 0 < \beta'_i(y_1, \ldots, y_{n_i})(n) &= \beta'_i(f(b_1), \ldots, f(b_{n_i}))(n) \\ &= f(\beta_i(b_1, \ldots, b_{n_i}))(n) \\ &= \bigvee\{\beta_i(b_1, \ldots, b_{n_i})(r) |\ f(r) = n\}. \end{aligned}$$

لذا $v \in H$ وجود دارد به طوری‌که $f(v) = n$ و $\beta_i(b_1, \ldots, b_{n_i})(v) > 0$. حال چون $f(u) = m$، $f(v) = n$ و $(m, n) \in \sigma$، نتیجه می‌شود که $(u, v) \in f^{-1}(\sigma)$. به طور مشابه، ثابت می‌شود که برای هر $v' \in H$، اگر $\beta_i(b_1, \ldots, b_{n_i})(v') > 0$، آن‌گاه $u' \in H$ای وجود دارد به طوری‌که $\beta_i(a_1, \ldots, a_{n_i})(u') > 0$ و $(u', v') \in f^{-1}(\sigma)$. لذا $f^{-1}(\sigma)$ یک رابطه همنهشتی روی $\mathbb{H}$ است.
(ب) می‌توان ثابت کرد که $f(\rho)$ یک رابطه هم‌ارزی روی $\mathbb{H}'$ است.
برای هر $i = 1, \ldots, n_i$، فرض کنید $x_i', y_i' \in H'$ و $(x_i', y_i') \in f(\rho)$. لذا برای هر $i = 1, \ldots, n_i$، عناصر $x_i, y_i \in H$ وجود دارند به طوری‌که $f(x_i) = x_i'$ و $f(y_i) = y_i'$. بنابراین $(x_i, y_i) \in \rho$.
چون ρ یک رابطه همنهشتی روی $\mathbb{H}$ است، برای هر $i = 1, \ldots, n_i$ داریم

$$\beta_i(x_1, \ldots, x_{n_i})\ \overline{\rho}\ \beta_i(y_1, \ldots, y_{n_i}). \tag{۳.۳}$$

باید نشان دهیم که

$$\beta'_i(x_1', \ldots, x_{n_i}')\ \overline{f(\rho)}\ \beta'_i(y_1', \ldots, y_{n_i}').$$

فرض کنید برای هر $a \in H'$ داشته باشیم $\beta'_i({x_1}', \dots, {x_{n_i}}')(a) > 0$. در این صورت

$$\begin{aligned} 0 < \beta'_i({x_1}', \dots, {x_{n_i}}')(a) &= \beta'_i(f(x_1), \dots, f(x_{n_i}))(a) \\ &= f(\beta_i(x_1, \dots, x_{n_i}))(a) \\ &= \bigvee \{\beta_i(x_1, \dots, x_{n_i})(r) \mid f(r) = a\}. \end{aligned}$$

لذا $t \in H$ای وجود دارد به طوری‌که $\beta_i(x_1, \dots, x_{n_i})(t) > 0$ و $f(t) = a$. بنابر (۳.۳)، $s \in H$ای وجود دارد به طوری‌که $\beta_i(y_1, \dots, y_{n_i})(s) > 0$ و $(t, s) \in \rho$. فرض کنید $f(s) = b$. در این صورت

$$\begin{aligned} 0 < \bigvee \{\beta_i(y_1, \dots, y_{n_i})(p) \mid f(p) = b\} &= f(\beta_i(y_1, \dots, y_{n_i}))(b) \\ &= \beta'_i(f(y_1), \dots, f(y_{n_i}))(b) \\ &= \beta'_i({y_1}', \dots, {y_{n_i}}')(b). \end{aligned}$$

چون $(t, s) \in \rho$، $f(t) = a$ و $f(s) = b$، می‌توان نتیجه گرفت که $(a, b) \in f(\rho)$. به طور مشابه، می‌توان ثابت کرد برای هر $b' \in H'$، اگر $\beta'_i({y_1}', \dots, {y_{n_i}}')(b') > 0$، آن‌گاه $a' \in H'$ای وجود دارد به طوری‌که $\beta'_i({x_1}', \dots, {x_{n_i}}')(a') > 0$ و $(a', b') \in f(\rho)$. لذا $f(\rho)$ یک رابطه همنهشتی روی $\mathbb{H}'$ است. $\square$

ملاحظه ۱۸.۳. در قضیه ۱۷.۳، f باید همریختی پوشا باشد. در مثال ۱۶.۳، چون f همریختی پوشا نیست، $f(\rho)$ یک رابطه همنهشتی روی $\mathbb{H}'$ همنهشتی نیست.

تعریف ۱۹.۳. فرض کنید $\mathbb{H} = \langle H, (\beta_i \mid i \in I)\rangle$ و $\mathbb{H}' = \langle H', (\beta'_i \mid i \in I)\rangle$ دو ابرجبر فازی مشابه باشند و $f : \mathbb{H} \to \mathbb{H}'$ یک همریختی باشد. هسته همریختی f را به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\ker f = \big\{(a, b) \in H \times H \mid f(a) = f(b)\big\}.$$

قضیه ۲۰.۳. فرض کنید $\mathbb{H} = \langle H, (\beta_i \mid i \in I)\rangle$ و $\mathbb{H}' = \langle H', (\beta'_i \mid i \in I)\rangle$ دو ابرجبر فازی مشابه باشند و $f : \mathbb{H} \to \mathbb{H}'$ یک همریختی باشد. در این صورت $\ker f$ یک رابطه همنهشتی روی $\mathbb{H}$ است.

اثبات. قرار دهید $K := \ker f$. به‌وضوح K یک رابطه هم‌ارزی روی $\mathbb{H}$ است. کافی است نشان دهیم که $\ker f$ یک رابطه سازگاری است. فرض کنید $a_۱ K b_۱, \ldots, a_{n_i} K b_{n_i}$. باید نشان دهیم که

$$\beta_i(a_۱, \ldots, a_{n_i}) \, \overline{K} \, \beta_i(b_۱, \ldots, b_{n_i}).$$

چون برای هر $i = ۱, \ldots, n_i$، طبق فرض $(a_i, b_i) \in K$، پس $f(a_i) = f(b_i)$.
فرض کنید $x \in H$ دلخواه باشد، $\beta_i(a_۱, \ldots, a_{n_i})(x) > ۰$ و $f(x) = z$. در این صورت

$$\begin{aligned}
&\bigvee\{\beta_i((a_۱), \ldots, (a_{n_i}))(s) \mid f(s) = z\} > ۰\\
&\Rightarrow f(\beta_i(a_۱, \ldots, a_{n_i}))(z) > ۰\\
&\Rightarrow \beta'_i(f(a_۱), \ldots, f(a_{n_i}))(z) > ۰\\
&\Rightarrow \beta'_i(f(b_۱), \ldots, f(b_{n_i}))(z) > ۰\\
&\Rightarrow f(\beta_i(b_۱, \ldots, b_{n_i}))(z) > ۰\\
&\Rightarrow \bigvee\{\beta_i(b_۱, \ldots, b_{n_i})(r) \mid f(r) = z\} > ۰
\end{aligned}$$

لذا $y \in H$ای وجود دارد به طوری‌که $\beta_i(b_۱, \ldots, b_{n_i})(y) > ۰$ و $f(y) = z$. از طرفی $f(x) = z$. بنابراین $f(x) = f(y)$ و $(x, y) \in K$. □

مشابه تعریف ۹.۳ که در آن ابرعمل القا شده در ابرجبرها تعریف شد، در اینجا قصد داریم تعریفی مشابه برای ابرجبرهای فازی ارائه دهیم.

فرض کنید $\mathbb{H} = \langle H, (\beta_i | \, i \in I) \rangle$ یک ابرجبر فازی، ρ رابطه همنهشتی روی $\mathbb{H}$ و x عنصر دلخواهی از H باشد. کلاس همنهشتی x تحت رابطه ρ، که با ρ_x نشان داده می‌شود، به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\rho_x = \{y \in H | \; (x, y) \in \rho\}.$$

تعریف ۲۱.۳. فرض کنید $\mathbb{H} = \langle H, (\beta_i | \; i \in I) \rangle$ یک ابرجبر فازی، ρ یک رابطه همنهشتی روی $\mathbb{H}$ و H/ρ مجموعه تمام کلاس‌های همنهشتی روی $\mathbb{H}$ باشد؛ یعنی

$$H/\rho = \{\rho_x | \; x \in H\}.$$

برای هر $x_1, \dots, x_{n_i} \in H$، ابرعمل فازی β_i روی H/ρ القاشده توسط ρ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\beta_i^{H/\rho}(\rho_{x_1}, \dots, \rho_{x_{n_i}})(\rho_x) = \bigvee_{\substack{t_i \in \rho_{x_i} \\ t \in \rho_x}} \beta_i(t_1, \dots, t_{n_i})(t),$$

ابرجبر فازی $\mathbb{H}/\rho = \langle H/\rho, (\beta_i^{H/\rho} |\ i \in I) \rangle$ را ابرجبر فازی خارج‌قسمتی از $\mathbb{H}$ القاشده توسط ρ می‌نامیم.

در گزاره زیر نشان می‌دهیم که ابرعمل فازی $\beta_i^{H/\rho}$ خوش‌تعریف است.

گزاره ۲۲.۳. فرض کنید $\mathbb{H} = \langle H, (\beta_i |\ i \in I) \rangle$ یک ابرجبر فازی و ρ یک رابطه همنهشتی روی $\mathbb{H}$ باشد. در این صورت ابرعمل فازی $\beta_i^{H/\rho}$ خوش‌تعریف است.

اثبات. فرض کنید برای هر $j = 1, \dots, n_i$، $x_j, y_j, t_j, s_j \in H$ و همچنین $x, y, t, s \in H$ به طوری‌که $\rho_{x_j} = \rho_{y_j}$ و $\rho_x = \rho_y$. در این صورت

$$\beta_i^{H/\rho}(\rho_{x_1}, \dots, \rho_{x_{n_i}})(\rho_x) = \bigvee_{\substack{t_j \in \rho_{x_j} \\ t \in \rho_x}} \beta_i(t_1, \dots, t_{n_i})(t),$$

$$\beta_i^{H/\rho}(\rho_{y_1}, \dots, \rho_{y_{n_i}})(\rho_y) = \bigvee_{\substack{s_j \in \rho_{y_j} \\ s \in \rho_y}} \beta_i(s_1, \dots, s_{n_i})(s).$$

چون $\rho_{x_j} = \rho_{y_j} = \rho_{s_j} = \rho_{t_j}$ و $\rho_x = \rho_y = \rho_s = \rho_t$، مقدار دو عبارت فوق برابر است. بنابراین $\beta_i^{H/\rho}$ خوش‌تعریف است. $\square$

قضیه ۲۳.۳. فرض کنید ρ یک رابطه همنهشتی روی ابرجبر فازی $\mathbb{H} = \langle H, (\beta_i |\ i \in I) \rangle$ باشد. برای هر $a \in H$، نگاشت طبیعی $\pi : \mathbb{H} \to \mathbb{H}/\rho$ تعریف شده توسط $\pi(a) = \rho_a$ یک همریختی پوشا است به طوری‌که $\ker(\pi) = \rho$.

اثبات. فرض کنید برای هر $a \in H$، $\rho_a \in H/\rho$ و $\rho_a = \pi(a)$. برای هر $a_1, \ldots, a_{n_i} \in H$ داریم

$$\begin{aligned}
\beta_i^{H/\rho}(\pi(a_1), \ldots, \pi(a_{n_i}))(\pi(a)) &= \beta_i^{H/\rho}(\rho_{a_1}, \ldots, \rho_{a_{n_i}}))(\rho_a) \\
&= \bigvee_{\substack{t_i \in \rho_{a_i} \\ t \in \rho_a}} \beta_i(t_1, \ldots, t_{n_i})(t) \\
&\geq \bigvee_{\pi(a)=\rho_a} \beta_i(a_1, \ldots, a_{n_i})(a) \\
&= \pi(\beta_i(a_1, \ldots, a_{n_i}))(\rho_a)
\end{aligned}$$

بنابراین π یک همریختی است. همچنین

$$\begin{aligned}
\ker(\pi) &= \{(a,b) \in H \times H \mid \pi(a) = \pi(b)\} \\
&= \{(a,b) \in H \times H \mid \rho_a = \rho_b\} \\
&= \{(a,b) \in H \times H \mid (a,b) \in \rho\} \\
&= \rho,
\end{aligned}$$

و این اثبات قضیه را کامل می‌کند. $\square$

قضیه زیر مشابه قضیه اول یکریختی در ساختارهای جبری نظیر گروه‌ها و حلقه‌ها است.

قضیه ۲۴.۳. فرض کنید $\mathbb{H}$ و $\mathbb{H}'$ دو ابرجبر فازی مشابه باشند و ϕ یک همریختی خوب از $\mathbb{H}$ به‌روی $\mathbb{H}'$ باشد. در این صورت

$$\mathbb{H}/\ker\phi \cong \mathbb{H}',$$

و دیاگرام زیر جابجایی است:

H [r، "ϕ"][dr, "π"]$\mathbb{H}/\ker f$[d, "f"]"

H′

اثبات. قرار دهید $K := \ker\phi$. با استفاده از نگاشت طبیعی π، نگاشت $f : \mathbb{H}/\ker\phi \to \mathbb{H}'$ را برای هر $a \in H$، به صورت $f(K_a) = \phi(a)$ تعریف می‌کنیم. ابتدا نشان می‌دهیم که این نگاشت خوش‌تعریف است. فرض کنید $K_a = K_b$. در این صورت $(a,b) \in K$ و $\phi(a) = \phi(b)$. می‌توان ثابت کرد که ϕ یک‌به‌یک است. حال نشان می‌دهیم که

f پوشا است. فرض کنید $y \in H'$ دلخواه باشد. در این صورت $x \in H$ای وجود دارد به طوری‌که $\phi(x) = y$. حال قرار دهید $a = K_x$. در این صورت $f(a) = f(K_x) = \phi(x) = y$. لذا f پوشا است. همچنین، چون برای هر $a \in H$، داریم $f(\pi(a)) = f(k_a) = \phi(a)$، پس دیاگرام جابجایی است. اکنون، برای هر $a_1, \dots, a_{n_i} \in H$ داریم

$$\begin{aligned} f(\beta_i(K_{a_1}, \dots, K_{a_{n_i}}))(K_a) &= f(\bigvee_{\substack{t_i \in K_{a_i} \\ t \in K_a}} \beta_i(t_1, \dots, t_{n_i}))(t) \\ &= \pi(\beta_i(a_1, \dots, a_{n_i})) \\ &= \beta_i(\pi(a_1), \dots, \pi(a_{n_i})) \\ &= \beta_i(f(a_1), \dots, f(a_{n_i})). \end{aligned}$$

بنابراین f یک همریختی خوب است. $\square$

قضیه ۲۵.۳. فرض کنید $\mathbb{H} = \langle H, (\beta_i| \ i \in I) \rangle$ یک ابرجبر فازی باشد و ρ و σ روابط همنهشتی روی $\mathbb{H}$ باشند به طوری‌که $\rho \subseteq \sigma$. فرض کنید

$$\sigma/\rho = \{(\rho_x, \rho_y) \in (\mathbb{H}/\rho)^2 | \ (x, y) \in \sigma\}.$$

در این صورت σ/ρ یک رابطه همنشهتی روی $\mathbb{H}/\rho$ است.

اثبات. فرض کنید $(\rho_{a_i}, \rho_{b_i}) \in \sigma/\rho$. در این صورت $(a_i, b_i) \in \sigma$. چون σ رابطه همنهشتی روی H است، پس برای هر $x \in H$، اگر $\beta_i(a_1, \dots, a_{n_i})(x) > 0$، آن‌گاه $y \in H$ای وجود دارد به طوری‌که $\beta_i(b_1, \dots, b_{n_i})(y) > 0$ و $(x, y) \in \sigma$. همچنین برای هر $y' \in H$، اگر $\beta_i(b_1, \dots, b_{n_i})(y') > 0$، آن‌گاه $x' \in H$ای وجود دارد به طوری‌که $\beta_i(a_1, \dots, a_{n_i})(x') > 0$ و $(x', y') \in \sigma$. بنابراین $(\rho_x, \rho_y) \in \sigma/\rho$.
از طرفی، باید نشان دهیم که

$$\beta_i^{H/\rho}(\rho_{a_1}, \dots, \rho_{a_{n_i}}) \quad \overline{\sigma/\rho} \quad \beta_i^{H/\rho}(\rho_{b_1}, \dots, \rho b_{n_i}).$$

فرض کنید برای هر $a \in H/\rho$، داشته باشیم $\beta_i^{H/\rho}(\rho_{a_1}, \dots, \rho_{a_{n_i}})(\rho_x) > 0$. بنابر تعریف ۲۱.۳، داریم

$$\beta_i^{H/\rho}(\rho_{a_1}, \dots, \rho_{a_{n_i}})(\rho_x) = \bigvee_{\substack{t_i \in \rho_{a_i} \\ t \in \rho_x}} \beta_i(t_1, \dots, t_{n_i})(t) > 0.$$

چون $t_i \in \rho_{a_i}$ و $(\rho_{a_i}, \rho_{b_i}) \in \sigma/\rho$، پس $t_i \in \rho_{b_i}$. به طور مشابه، چون $t \in \rho_x$ و $(\rho_x, \rho_y) \in \sigma/\rho$، پس $t \in \rho_y$. لذا

$$\bigvee_{\substack{t_i \in \rho_{b_i} \\ t \in \rho_y}} \beta_i(t_1, \dots, t_{n_i})(t) > 0.$$

با استفاده مجدد از تعریف ۲۱.۳ داریم

$$\beta_i^{H/\rho}(\rho_{a_1}, \dots, \rho_{b_{n_i}})(\rho_y) > 0.$$

به طور مشابه، برای هر $\rho_y \in H/\rho$، اگر $\beta_i^{H/\rho}(\rho_{a_1}, \dots, \rho_{b_{n_i}})(\rho_y) > 0$، آن‌گاه $\rho_x \in H/\rho$ای وجود دارد به طوری‌که $\beta_i^{H/\rho}(\rho_{a_1}, \dots, \rho_{a_{n_i}})(\rho_x) > 0$ و $(\rho_y, \rho_x) \in \sigma/\rho$. بنابراین σ/ρ یک رابطه همنهشتی روی $\mathbb{H}/\rho$ است. □

قضیه زیر مشابه قضیه دوم یکریختی در ساختارهای جبری مانند گروه‌ها و حلقه‌ها است.

قضیه ۲۶.۳. فرض کنید ρ و σ دو رابطه همنهشتی روی ابرجبر فازی $\mathbb{H} = \langle H, (\beta_i |\ i \in I) \rangle$ باشند و $\rho \subseteq \sigma$. در این صورت، رابطه همنهشتی σ/ρ روی ابرجبر فازی $\mathbb{H}/\rho$ وجود دارد به طوری‌که

$$H/\sigma \cong (H/\rho)/(\sigma/\rho),$$

و دیاگرام زیر جابجایی است:

$$\rho[r, "\phi'"][dr, "f"]\mathbb{H}/\rho/\sigma/\rho[d, "\psi"]\mathbb{H}/$$
$$\sigma\mathbb{H}/$$

اثبات. بنابر قضیه ۲۳.۳، نگاشت‌های طبیعی $\pi : H \to H/\rho$ و $\phi : H \to H/\sigma$ را در نظر بگیرید. بنابر قضیه ۲۴.۳، $\ker \pi = \rho$ و $\ker\ \phi = \sigma$. نگاشت $f : H/\rho \to H/\sigma$ با ضابطه $f(\rho_a) = \sigma_a$ را در نظر بگیرید. چون $\rho_a = \rho_b$، پس $(a, b) \in \rho$. چون $\rho \subseteq \sigma$، پس

σ $(a,b)\in\sigma$ و $\sigma_a=\sigma_b$. لذا f خوش‌تعریف است. همچنین

$$\begin{aligned}
f(\beta_i^{H/\rho}(\rho_{a_1},\ldots,\rho_{a_{n_i}}))(\sigma_x) &= \bigvee\{\beta_i^{H/\rho}(\rho_{a_1},\ldots,\rho_{a_{n_i}})(\rho_x) \mid f(\rho_x)=\sigma_x\}\\
&= \bigvee_{f(\rho_x)=\sigma_x}\ \bigvee_{\substack{t_i\in\rho_{a_i}\\ t\in\rho_x}} \beta_i(t_1,\ldots,t_{n_i})(t)\\
&= \bigvee_{f(\rho_x)=\sigma_x}\ \bigvee_{\substack{t_i\in\sigma_{a_i}\\ t\in\sigma_x}} \beta_i(t_1,\ldots,t_{n_i})(t)\\
&= \bigvee_{f(\rho_x)=\sigma_x} \beta_i^{H/\sigma}(\sigma_{a_1},\ldots,\sigma_{a_{n_i}}))(\rho_x)\\
&= \beta_i^{H/\sigma}(f(\rho_{a_1}),\ldots,f(\rho_{a_{n_i}}))(\sigma_x)
\end{aligned}$$

بنابراین f یک همریختی خوب از H/ρ به H/σ است. از طرفی

$$\begin{aligned}
\ker f &= \{(\rho_a,\rho_b) \mid f(\rho_a)=f(\rho_b)\}\\
&= \{(\rho_a,\rho_b) \mid \sigma_a=\sigma_b\}\\
&= \{(\rho_a,\rho_b) \mid (a,b)\in\sigma\}\\
&= \sigma/\rho.
\end{aligned}$$

به‌وضوح f پوشا است. بنابر قضیه ۲۴.۳، یکریختی $\psi:(H/\rho)/(\sigma/\rho)\to H/\sigma$ وجود دارد به طوری‌که برای هر $x\in H$،

$$\psi\circ\phi'(\rho_x)=\psi(\phi'(\rho_x))=\sigma_x=f(\rho_x).$$

لذا دیاگرام

$$\rho[r,"\phi'"][dr,"f"]\mathbb{H}/\rho/\sigma/\rho[d,"\psi"]\mathrm{H}/$$
$$\sigma\mathrm{H}/$$

جابجایی است. □

۴. نتیجه‌گیری

در این مقاله، روابط همنهشتی در ابرجبرهای فازی و تأثیر آن‌ها بر ساختارهای این ابرجبرها بررسی شد. نشان دادیم که اگر ρ و σ دو رابطه همنهشتی روی یک ابرجبر فازی $\mathbb{H}$ باشند و $\rho\subseteq\sigma$ باشد، آن‌گاه می‌توان رابطه همنهشتی σ/ρ را روی ابرجبر فازی $\mathbb{H}/\rho$ تعریف کرد. همچنین، مشخص

شد که نگاشت‌های طبیعی می‌توانند این ساختارها را به یکدیگر متصل کنند و به‌ویژه، همریختی‌های خوبی را بین ساختارهای H/ρ و H/σ ایجاد کنند.

با استفاده از ویژگی‌های نگاشت‌های طبیعی و قضایای مرتبط، اثبات کردیم که رابطه همنهشتی σ/ρ به‌طور مناسبی بر روی ابرجبر فازی $\mathbb{H}/\rho$ اعمال می‌شود و این نگاشت‌ها به‌طور دقیق و خوش‌تعریف، ساختارهای جدیدی از ابرجبر فازی را به وجود می‌آورند. به علاوه، مشاهده شد که دیاگرام مربوط به این روابط جابجایی است و یکریختی بین این ساختارها برقرار است.

این نتایج می‌توانند در توسعه تئوری‌های فازی و همچنین در کاربردهای عملی در زمینه‌های مختلف مانند سیستم‌های اطلاعاتی، پردازش داده‌ها و منطق فازی کاربردهای چشمگیری داشته باشند. علاوه بر این، ساختارهای معرفی‌شده در این مقاله می‌توانند به‌عنوان ابزارهایی برای تحلیل و طراحی سیستم‌های پیچیده‌تری که از روابط همنهشتی بهره می‌برند، مورد استفاده قرار گیرند. برای نمونه، در تحلیل داده‌هایی که ساختار فازی دارند، می‌توان از این روابط برای شناسایی عناصر مشابه و گروه‌بندی آن‌ها در کلاس‌های فازی استفاده کرد؛ به‌گونه‌ای که تحلیل و پردازش داده‌ها به‌صورت ساختار یافته و ساده‌تر انجام شود.

مراجع

[1] Ameri, R., Bakhshi, M., Nematollahzadeh, S., and Borzooei, R. A. (2007) Fuzzy (strong) congruence relations on hypergroupoids and hyper BCK-algebras. Quasigroups and Related Systems, 15(2), 219–232.

[2] Ameri, R. and Rosenberg, I.G. (2009) Congruences of multialgebras. Journal of Multiple-Valued Logic and Soft Computing, 15, 525-536.

[3] Ameri, R. and Rosenberg, I.G. (2013) L-multialgebras and P-fuzzy congruences of multialgebras. Journal of Multiple-Valued Logic and Soft Computing, 20, 239-253.

[4] Ameri, R. and Zahedi, M.M. (1999) Hyperalgebraic systems. Italian Journal of Pure and Applied Mathematics, 6, 21-32.

[5] Ameri, R. and Nozari, T. (2011) Fuzzy hyperalgebras. Computers and Mathematics with Applications, 61, 149-154.

[6] Bakhshi, M. and Borzooei, R.A. (2007) Lattice structure on fuzzy congruence relations of a hypergroupoid. Information Sciences, 177, 3305-3313.

[7] Borzooei, R.A., Bakhshi, M. and Jun, Y.B. (2005) Fuzzy congruence relations on hyper BCK-algebras. J. Fuzzy Math., 13(3), 627-636.

[8] Burris, S. and Sankappanavar, H.P. (1981) A course in universal algebra. Springer.

[9] Corsini, P. (1994) Prolegomena of hypergroup theory. Aviani.

[10] Corsini, P. and Leoreanu, V. (2003) Application of hyperstructure theory. Springer.

[11] Corsini, P. and Tofan, I. (1997) On fuzzy hypergroups. PU.M.A., 8, 29-37.

[12] Davvaz, B. and Cristea, I. (2015) Fuzzy algebraic hyperstructures: an introduction. Springer.

[13] Grätzer, G. (2003) General lattice theory: Second Edition. Springer Basel AG.

[14] Hansoul, G.E. (1981) A simultaneous characterization of subalgebras and conditional subalgebras of multialgebra. Bull. Soc. Roy. Science. Liege, 50, 16-19.

[15] Hoseini, E.S., Nozari, T., Ameri, R., and Onagh, N. (2025) Congruences on fuzzy hyperalgebras. Journal of Advanced Mathematics Studies, 18(1), 86-95.

[16] Kalampakas, A. (2025). Fuzzy graph hyperoperations and path-based algebraic structures. Mathematics, 13(13), 2180.

[17] Kankaraš, M. and Cristea, I. (2020). Fuzzy reduced hypergroups. Mathematics, 8(2), 263.

[18] Kim, J.P. and Bea, D.R. (1997) Fuzzy congruences in groups. Fuzzy Sets and Systems, 85, 115-120.

[19] Leorenu-Fotea, V. and Davvaz, B. (2008) Fuzzy hyperrings. Fuzzy sets and Systems, 160, 2366-2378.

[20] Leorenu-Fotea, V. (2009) Fuzzy hypermodules. Comput. Math. Appl., 57, 466-475.

[21] Marty, F. (1934) Sur une generalization de la notion de groupe. In: 8th Congress Math. Scandianaves, Stockholm, 45-49.

[22] Murali, V. (1989) Fuzzy equivalence relations. Fuzzy Sets and Systems, 30, 155-163.

[23] Murali, V. (1991) Fuzzy congruence relations. Fuzzy Sets and Systems, 41, 359-369.

[24] Pickett, H.E. (1964) Subdirect representations of relational systems. Fund. Math., 56, 223-240.

[25] Pickett, H.E. (1967) Homomorphisms and subalgebras of multialgebras. Pacific Journal of Mathematics, 21, 327-343.

[26] Schweigert, D. (1985) Congruence relations of multialgebras. Discrete Mathematics, 53, 249-253.

[27] Sen, M.K., Ameri, R. and Chowdhory, G. (2008) Fuzzy hypersemigroups. Soft Comput., 12, 891-900.

[28] Zadeh, L.A. (1965) Fuzzy sets. Information and Control, 8, 338-353.