

اصل ماکزیمم پونتریاگین برای حل مسائل کنترل بهینه خطی درجه دوم بازه‌ای

سیما سالارزائی^۱، سمیه رضائی‌زاده^۱، مهدی اله‌دادی^{۱*}، سمانه صردی‌زید^۲

^۱ دانشکده ریاضی، آمار و علوم کامپیوتر، دانشگاه سیستان و بلوچستان، زاهدان، ایران

^۲ دانشکده صنعت و معدن، دانشگاه سیستان و بلوچستان، زاهدان، ایران

تاریخ دریافت: ۱۴۰۴/۰۵/۱۳ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۴/۰۸/۰۵

نوع مقاله: علمی-پژوهشی

چکیده. در این مقاله، حل مسائل کنترل بهینه با تابع هدف درجه دوم و سیستم دینامیکی خطی با ضرایب بازه‌ای بررسی شده است. با مطالعه رویکرد های قبلی برای حل این مسائل، نشان خواهیم داد که نتایج ارائه شده در این روش‌ها، علیرغم حل زیرمدل‌های قطعی از مسئله کنترل بهینه بازه‌ای، در نهایت به تقریب‌های غیر دقیقی از جواب بهینه منجر شده است. لذا، با توجه به پیچیدگی ذاتی سیستم های دینامیکی و مشکلات ناشی از عدم قطعیت، نیاز به توسعه الگوریتم‌های جدیدی جهت دستیابی به معیارهای کارآمد است. هدف اصلی این مقاله، ارائه یک رویکرد کارآمد برای حل این دسته از مسائل است. از این‌رو، با اصلاح الگوریتم‌های موجود، مسئله بازه ای حاصل را با تبدیل تابع همیلتونی به دو تابع کران بالا و پایین، قطعی کرده و با اعمال شرایط پونتریاگین جواب مسئله را به دست می‌آوریم. این مقاله در تلاش است دقت و کارایی روش‌های قبلی را در حل مسائل کنترل بهینه بهبود بخشد. برای بدست آوردن نتایج عددی از نرم افزار متلب استفاده شده

2010 Mathematics Subject Classification. 49Lxx ; 49N05

* Corresponding author

E-mails: salarzaee.sima@pgs.usb.ac.ir, somayeh.rezaeizadee.210@gmail.com, m_ allah-dadi@math.usb.ac.ir and soradizeid@eng.usb.ac.ir.

عبارات و کلمات کلیدی. اصل ماکزیمم پونتریاگین، عدم قطعیت بازه‌ای، مسئله کنترل بهینه، کنترل بهینه بازه‌ای، تابع همیلتونی.

است. بعلاوه، نتایج به صورت بازه‌ای گزارش شده است تا در مقایسه با نتایجی که قبلاً برای این مسائل ارائه شده‌اند، به درستی صحت‌سنجی شوند.

۱. مقدمه

در دهه‌های اخیر، محاسبات بازه‌ای و معادلات دیفرانسیل بازه‌ای در زمینه‌های مختلف علوم و مهندسی مورد توجه قرار گرفته است. رویکردهای تحلیل بازه‌ای به عنوان ابزاری برای مقابله با عدم قطعیت‌ها و عدم دقت در سیستم‌های کنترل، به یک زمینه فعال تحقیقاتی و کاربردی تبدیل شده است. به عنوان مثال، در [۱] روش‌هایی برای تقریب مجموعه جواب‌های معادلات غیرخطی با بهینه‌سازی سراسری پیشنهاد شده است و همچنین کاربردهایی را در کنترل مقاوم ارائه داده است. حساب بازه‌ای معمولاً برای تخمین، تثبیت و کنترل دستگاه‌های خطی و غیرخطی با عدم قطعیت استفاده می‌شود [۲]. همچنین، برای تحلیل دقت موقعیت‌یابی ربات‌های صنعتی بر اساس قابلیت اطمینان وابسته به زمان غیر احتمالی نیز به کار گرفته شده است [۳]. در زمینه معادلات دیفرانسیل بازه‌ای، مقدار بازه‌ای به محدوده‌ای از مقادیر متغیر مستقل اشاره دارد که در آن حل معادله دیفرانسیل معتبر است. این مفهوم برای اطمینان از اینکه حل معادله در یک محدوده مشخص و سازگار و معنادار باقی می‌ماند، بسیار مهم است. به عبارت دیگر، معادلات دیفرانسیل بازه‌ای به معادلاتی گفته می‌شود که در یک بازه خاص از متغیر مستقل تعریف می‌شوند. در دنیای واقعی، دستگاه‌های فیزیکی زیادی قابل مشاهده هستند که رفتارشان بر اساس معادلات دیفرانسیل بازه‌ای کنترل می‌شود [۴، ۵]. با توجه به اینکه مطالعه روی مدل‌های بازه‌ای به موضوع جذابی برای پژوهشگران تبدیل شده است، لذا مفهوم مشتق برای توابع بازه‌ای از اهمیت ویژه‌ای برخوردار شده است. محققان با در نظر گرفتن چهار نوع مشتق جانبی هوکوها را [۶]، جایگزین‌هایی برای مشتقات توابع بازه‌ای معرفی کرده‌اند [۷، ۸]. محققان حساب تغییرات و کنترل بهینه تا حد زیادی از مشتقات برای نگاشت‌های بازه‌ای استفاده کرده‌اند. به عنوان مثال، موردخوویچ^۲ [۹، ۱۰] از مشتقات مشترک برای به دست آوردن شرایط بهینگی استفاده کرده و مجومدر^۳ [۱۱] از مشتق تعمیم‌یافته هوکوها را برای بررسی طیف وسیعی از نتایج استفاده کرد. چالکو و همکاران^۴ [۱۲] حساب دیفرانسیل توابع بازه‌ای را با استفاده از مشتق تعمیم‌یافته هوکوها بررسی کردند. استفانینی

¹Hukuhara derivative

²Mordukhovich, B. S.

³Majumder, P.

⁴Chalco et al.

و همکاران^۱ [۱۳] با استفاده از مشتق‌پذیری تعمیم‌یافته هوکوها را از توابع بازه‌ای مقدار به حل معادلات دیفرانسیل بازه‌ای پرداختند.

در سال‌های اخیر، مسائل کنترل بهینه و توانایی آن در مدل‌سازی پدیده‌های دنیای واقعی توجه محققان زیادی در علوم کاربردی مهندسی را به خود جلب کرده است [۱۴، ۱۵]. یک مسئله کنترلی را هنگامی مسئله کنترل بهینه بازه‌ای می‌نامند که شاخص عملکرد و سیستم دینامیکی آن شامل توابع و متغیرهایی با مقادیر بازه‌ای باشد. کنترل بهینه با عدم قطعیت بازه‌ای ضمن فراهم نمودن چارچوب مناسبی برای مدیریت شرایط غیرقطعی، امکان تحلیل جامع تر و طراحی سیستم‌های پیچیده‌تر را فراهم می‌کند [۱۶، ۱۷]. در مسائل بهینه‌سازی و کنترل، موارد زیادی وجود دارد که در آن‌ها تابع هدف دارای عدم قطعیت ذاتی در بازه‌های زمانی پارامترها است [۱۸، ۱۹]. برتین و همکاران^۲ چشم‌اندازهایی را برای حل یک مسئله کنترل بهینه با عدم قطعیت‌های بازه‌ای روی پارامترها با استفاده از حساب بازه‌ها ارائه دادند [۱۴]. رزمجو و رضائی نسخه‌ی بازه‌ای جدیدی از روش رانگ کوتا را برای حل مسائل کنترل بهینه پیشنهاد کردند [۲۰]. نجاریان و فراهی رویکرد جدیدی را برای یک سیستم کنترل بهینه فازی خطی با زمان ثابت و ضرایب فازی بررسی کردند [۲۱]. به دنبال یافتن شرایطی برای وجود جواب مسائل کنترل بهینه تحت عدم قطعیت، فراهی‌نیا در [۲۲] برای حل مسائل کنترل بهینه فازی از اصل ماکزیمم پونتریاگین استفاده کرده است. زارعی و همکاران نیز برای به دست آوردن شرایط بهینه لازم در قالب یک مسئله مقدار مرزی فازی از این اصل استفاده کردند [۲۳]. عمده این روش‌ها مسئله را به دو زیرمدل قطعی از کران‌های بالا و پایین تبدیل می‌کنند و با توجه به اینکه کل بازه را در محاسبات لحاظ نمی‌کنند در یافتن جواب بهینه با اشکال مواجه می‌شوند. شکوهی و همکاران با هدف رفع این مشکل و یافتن یک قانون کنترل بهینه بازه‌ای برای مسائل تنظیم‌کننده خطی درجه دوم تحت عدم قطعیت بازه‌ای با استفاده از اصل بهینه پونتریاگین به حل این مسائل پرداختند [۲۴].

بخشی از فرآیند مدل‌سازی، تصمیم‌گیری در مورد نحوه مرتب‌سازی جواب‌های شدنی است تا بتوان از بین آنها بهترین جواب را انتخاب کرد. نویسندگان در [۲۵] مسائل کنترل بهینه با عدم قطعیت بازه‌ای در تابع هدف را در نظر گرفتند. آن‌ها برای مقابله با عدم قطعیت‌ها، طبق روش‌های بازه‌ای معمول از کران‌های بالا و پایین ضرایب بازه‌ای استفاده کردند و با استفاده از مفاهیم E – مشتق‌پذیری^۳ و مشتق تعمیم‌یافته‌ی هوکوها را برای توابع بازه‌ای مقدار، شرایط لازم

¹Stefanini et al.

² Bertin et al.

³E-differentiable

بهینگی را به دست آوردند. اما نتایج ارائه شده در این مرجع درست نمی‌باشند. به طور خاص، در شکل ۱ از مرجع [۲۵] که برای مثال دوم آن ارائه شده است، متغیرهای حالت و کنترل بازه‌ای نیستند و علاوه بر اینکه به وضوح متغیر کنترل ناپایدار است، همچنین، علیرغم اینکه مسئله اصلی به صورت بازه‌ای بیان شده است اما هیچ جواب بازه‌ای برای آن ارائه نشده است. یک مدل شبکه عصبی کارآمد برای حل مسئله کنترل بهینه خطی درجه دوم با متغیرهای فازی در [۲۶] ارائه شده است که در آن، مسئله اصلی با استفاده از یک تبدیل کارآمد به یک مسئله قطعی کاهش یافته و سپس شبکه عصبی مصنوعی پرسپترون برای حل آن مسئله توسعه داده شده است. هرچند تلاش شده است که نتایج به صورت بازه‌ای گزارش داده شوند اما با دقت در نتایج (نمودارها) ارائه شده متوجه خواهیم شد که بازه‌های به دست آمده برای تابع کنترل نادرست هستند و در واقع در تمام مثال‌ها، کران پایین متغیر کنترل از کران بالای آن بزرگتر است. برای غلبه بر این کاستی‌ها و رفع نواقص موجود در نتایج قبلی، روش ارائه شده در [۲۵] به گونه‌ای بهبود داده شده است تا ایرادات موجود در [۲۵، ۲۶] مرتفع شوند و بعلاوه بتوان آن را به مسائل کنترل بهینه با ضرایب بازه‌ای در سیستم دینامیکی نیز توسعه داد. برای این منظور، با استفاده از کران‌های بالایی و پایینی بازه‌های عدم قطعیت، تابع همیلتونی را به دو تابع کران بالا و پایین تبدیل می‌کنیم. سپس، با بهره‌گیری از اصل پونتریاگین برای استنتاج شرایط لازم بهینگی، کران‌های بالایی و پایینی جواب بهینه بازه‌ای مسئله اصلی را به دست می‌آوریم.

در بخش ۲، مقدماتی از مفاهیم اساسی و پیش‌نیازهای حساب بازه‌ای بیان شده است. در بخش ۳، یک مسئله کنترل بهینه بازه‌ای مقدار شرح داده شده است و روش حل مسئله برای یافتن یک قانون کنترل بهینه توصیف شده است. به منظور راستی‌آزمایی روش ارائه شده، چند مثال عددی در بخش ۴ را بررسی و در نهایت، نتایج به دست آمده ارزیابی شده است.

۲. پیش‌نیازها

حساب بازه‌ای تعمیمی از حساب معمولی با اعداد حقیقی است که در آن، اعداد بازه‌ای جایگزین اعداد حقیقی و تحلیل بازه‌ای جایگزین تحلیل حقیقی می‌شود. از آنجا که مطالعه روی مباحث بازه‌ای به موضوعی جذاب برای ریاضیدانان تبدیل شده است، در این بخش، مقدماتی از حساب بازه‌ای را بیان می‌کنیم.

تعریف ۱.۲. [۲۷] فرض کنید $K = \{[m^-, m^+] \mid m^-, m^+ \in \mathbb{R}, m^- \leq m^+\}$ برای دو بازه حقیقی $m^\pm = [m^-, m^+] \in K$ و $n^\pm = [n^-, n^+] \in K$ عملگرهای

اصلی حساب بازه‌ای به صورت زیر تعریف می‌شوند:

همچنین، برای $C \in \mathbb{R}$ داریم:

$$(۱.۲) \quad Cm^{\pm} = C[m^{-}, m^{+}] = \begin{cases} [Cm^{-}, Cm^{+}] & \text{if } C > ۰, \\ [۰, ۰] & \text{if } C = ۰, \\ [Cm^{+}, Cm^{-}] & \text{if } C < ۰. \end{cases}$$

همچنین، برای تقسیم در اعداد بازه‌ای از روابط زیر استفاده می‌کنیم:

$$\frac{۱}{n^{\pm}} = \left[\frac{۱}{n^{+}}, \frac{۱}{n^{-}} \right], \quad ۰ \notin [n^{-}, n^{+}],$$

$$\frac{m^{\pm}}{n^{\pm}} = \frac{[m^{-}, m^{+}]}{[n^{-}, n^{+}]} = [m^{-}, m^{+}] \cdot \frac{۱}{[n^{+}, n^{-}]}.$$

تعریف ۲.۲. [۲۸] فرض کنید $m^{\pm}, n^{\pm}, p^{\pm} \in K$ بازه‌های حقیقی باشند. تفاضل تعمیم‌یافته

هوکوها را برای اعداد بازه‌ای m^{\pm} و n^{\pm} به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$(۲.۲) \quad [m^{-}, m^{+}] \ominus_{gH} [n^{-}, n^{+}] = [p^{-}, p^{+}]$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{(i) if } \omega(m^{\pm}) \geq \omega(n^{\pm}) : & \begin{cases} m^{-} = n^{-} + p^{-}, \\ m^{+} = n^{+} + p^{+}, \end{cases} \\ \text{(ii) if } \omega(m^{\pm}) < \omega(n^{\pm}) : & \begin{cases} n^{-} = m^{-} - p^{+}, \\ n^{+} = m^{+} - p^{-}. \end{cases} \end{cases}$$

در رابطه (۲.۲)، $\omega(m^{\pm}) = m^{+} - m^{-}$ پهناى بازه $m^{\pm} = [m^{-}, m^{+}] \in K$ را نشان می‌دهد. به عنوان مثال، فرض کنید $m^{\pm} = n^{\pm} = [۲, ۳]$ با استفاده از تفاضل معمولی دو عدد بازه‌ای خواهیم داشت:

$$[۲, ۳] - [۲, ۳] = [۲, ۳] + [-۳, -۲] = [-۱, ۱].$$

اکنون با استفاده از تفاضل تعمیم‌یافته هوکوها را داریم:

$$[۲, ۳] \ominus_{gH} [۲, ۳] = [۰, ۰] = ۰,$$

که مورد انتظار ما می‌باشد.

تعریف ۳.۲. [۲۹] تابع $L^\pm : [t_0, t_f] \rightarrow K(\mathbb{R})$ یک تابع بازه‌ای مقدار است و به صورت

$$L^\pm(t) = [L^-(t), L^+(t)],$$

نشان داده می‌شود، به طوری که $L^-(t) \leq L^+(t)$ برای هر $t \in [t_0, t_f]$. توابع $L^-(t)$ و $L^+(t)$ به ترتیب، توابع کران پایین و کران بالای تابع بازه‌ای مقدار $L^\pm(t)$ نامیده می‌شوند.

تعریف ۴.۲. [۱۲] اگر $L^\pm : (t_0, t_f) \rightarrow K(\mathbb{R})$ یک تابع بازه‌ای مقدار باشد، $t \in (t_0, t_f)$ و $h \in \mathbb{R}$ به طوری که $t+h \in (t_0, t_f)$ ، آنگاه مشتق L^\pm در t به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$(۳.۲) \quad \dot{L}^\pm(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{L^\pm(t+h) \ominus_{gH} L^\pm(t)}{h}.$$

اگر $L^\pm(t) \in K(\mathbb{R})$ در رابطه (۳.۲) صدق کند، آنگاه L^\pm مشتق پذیر هوکوهارای تعمیم یافته (یا به اختصار، مشتق پذیر gH) در t است. علاوه بر این، L^\pm مشتق پذیر gH روی (t_0, t_f) است، اگر L^\pm در تمام نقاط $t \in (t_0, t_f)$ مشتق پذیر gH باشد.

تعریف ۵.۲. [۲۶] فرض کنید A یک عدد فازی یا یک مجموعه فازی باشد که بر روی دامنه X که زیر مجموعه ای از فضای n -بعدی حقیقی است، تعریف شده است. α -برش یا مجموعه تراز α از A که با نماد A^α یا $[A]_\alpha$ نشان داده می‌شود، به صورت زیر است:

$$A^\alpha = \{x \in X, \mu(x) \geq \alpha\}, \quad \alpha \in (0, 1].$$

برای هر مجموعه فازی A ، مجموعه های تراز α همواره بازه های بسته و محدود هستند. این بازه ها به صورت $[A]_\alpha = [\underline{A}^\alpha, \overline{A}^\alpha]$ تعریف می‌شوند که در آن، \underline{A}^α کران پایین و \overline{A}^α کران بالای α -برش هستند.

قضیه ۶.۲. [۲۹] اگر $L^\pm : (t_0, t_f) \rightarrow K(\mathbb{R})$ یک تابع بازه‌ای مقدار به صورت زیر باشد،

$$L^\pm(t) = [L^-(t), L^+(t)],$$

آنگاه L^\pm در $t \in (t_0, t_f)$ مشتق پذیر gH است اگر و فقط اگر یکی از موارد زیر برقرار باشد:

- (۱) توابع L^- و L^+ در $t \in (t_0, t_f)$ مشتق پذیر باشند.
- (۲) مشتقات جزئی $\dot{L}^-(t)$ و $\dot{L}^+(t)$ (به مفهوم مشتق کلاسیک) وجود داشته باشند و $\dot{L}^-(t) = \dot{L}^+(t)$ ، $t \in (t_0, t_f)$

قضیه ۷.۲. [۲۹] اگر تابع بازه‌ای مقدار $L^\pm : (t_0, t_f) \rightarrow K(\mathbb{R})$ در $t \in (t_0, t_f)$ مشتق پذیر gH باشد، آنگاه L^\pm در t پیوسته است.

۳. مسئله کنترل بهینه با عدم قطعیت بازه‌ای

در این بخش مسئله کنترل بهینه با عدم قطعیت بازه‌ای در ضرایب تابع هدف و ضرایب سیستم دینامیکی با استفاده از اصل ماکزیمم پونتریاگین بحث و بررسی شده است. برای این منظور، ابتدا تابع همیلتونی برای مسئله کنترل بهینه تعیین شده و سپس با استفاده از اصل پونتریاگین، یک دستگاه از معادلات دیفرانسیل به دست می‌آید که جواب به دست آمده از حل این دستگاه، در شرایط لازم بهینگی برای جواب مسئله کنترل بهینه صدق می‌کند. بسیاری از محققین این شیوه را در حل مدل‌های کنترل بهینه بازه‌ای استفاده کرده‌اند [۲۳، ۳۰]. نویسندگان در [۲۵، ۲۶] به حل یک مسئله کنترل بهینه بازه‌ای پرداختند که در آن مقادیر کران بالای متغیر کنترل در نمودارهای داده شده از مقادیر کران پایین کمتر شده است و شرط اولیه مسئله برای متغیر حالت نیز برآورده نشده است. برای رفع این مشکل، با توسیع روش بیان شده در [۲۵] به مسائل کنترل بهینه با ضرایب بازه‌ای در تابع هدف و سیستم دینامیکی، مسئله بازه‌ای حاصل را با تبدیل تابع همیلتونی به دو تابع کران بالا و پایین و پیاده سازی دستگاه معادلات مربوطه حل کرده و نشان خواهیم داد که نتایج حاصل از خواص بازه‌ها و استاندارد های کنترل بهینه تبعیت می‌کنند.

مسئله کنترل بهینه بازه‌ای به فرم کلی زیر تعریف می‌شود:

$$(۱.۳) \quad \min I^\pm(x^\pm, u^\pm) = \int_t^{t_f} L^\pm(t, x^\pm(t), u^\pm(t)) dt,$$

$$(۲.۳) \quad \text{s.t. } \dot{x}^\pm = f^\pm(t, x^\pm(t), u^\pm(t)),$$

$$(۳.۳) \quad x^\pm(t_0) = x_0^\pm,$$

که در آن، $x^\pm(t)$ متغیر حالت بازه‌ای وابسته به زمان است که در معادله دینامیکی (۲.۳) صدق می‌کند و x_0^\pm وضعیت اولیه سیستم در زمان شروع t_0 است و t_f زمان نهایی سیستم می‌باشد. همچنین، $u^\pm(t)$ یک پارامتر آزاد به نام متغیر کنترل است. هدف از حل مسئله کنترل بهینه (۱.۳)–(۳.۳)، به حداقل رساندن تابع هدف (۱.۳) است که در آن L^\pm یک تابع بازه‌ای مقدار است [۱۲]. به این ترتیب، تابع بازه‌ای مقدار L^\pm را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$L^\pm(t, x^\pm(t), u^\pm(t)) = [L^-(t, x^\pm(t), u^\pm(t)), L^+(t, x^\pm(t), u^\pm(t))].$$

تعریف ۱.۳. متغیرهای حالت و کنترل $(x^{\pm*}(t), u^{\pm*}(t))$ یک جواب بهینه برای مسئله کنترل بهینه بازه‌ای (۱.۳)–(۳.۳) هستند، اگر $x^{\pm*}(t)$ در سیستم دینامیکی (۱.۳) با شرط

اولیه داده شده در (۲.۳) و برای کنترل متناظر $u^{\pm*}(t)$ صدق کند، و همچنین برای هر جواب شدنی $(x^{\pm}(t), u^{\pm}(t))$ از این مسئله، داشته باشیم $I^{\pm}(x^{\pm}, u^{\pm}) \leq I^{\pm}(x^{\pm*}, u^{\pm*})$.

تعریف ۲.۳. [۱۳، ۳۲] اگر $(x^{\pm*}(t), u^{\pm*}(t))$ یک جواب شدنی برای مسئله کنترل بهینه بازه‌ای (۱.۳)–(۳.۳) باشد، آنگاه $(x^{\pm*}(t), u^{\pm*}(t))$ یک جواب بهینه- LU برای این مسئله خواهد بود، اگر برای هر جواب شدنی $(x^{\pm}(t), u^{\pm}(t))$ از این مسئله، داشته باشیم:

$$I^{\pm}(x^{\pm*}, u^{\pm*}) \leq_{LU} I^{\pm}(x^{\pm}, u^{\pm}).$$

نویسندگان در [۲۵] به منظور به دست آوردن شرایط لازم بهینگی با استفاده از اصل ماکزیم پونتریاگین، فرض کردند که در مسئله کنترل بهینه بازه‌ای (۱.۳)–(۳.۳)، تابع هدف L^{\pm} بازه‌ای بوده و برای متغیرهای x^{\pm} و u^{\pm} ، در هر $t \in [t_0, t_f]$ – مشتق پذیر و LU –محدب باشد. همچنین فرض کردند که تابع f در سیستم دینامیکی (۲.۳)، ضریب بازه‌ای نداشته باشد و برای متغیرهای x^{\pm} و u^{\pm} ، پیوسته و برای هر $t \in [t_0, t_f]$ مشتق پذیر و محدب باشد. به این ترتیب، آن‌ها اثبات کردند که اگر $(x^{\pm*}(t), u^{\pm*}(t))$ یک جواب بهینه- LU برای مسئله کنترل بهینه بازه‌ای بیان شده باشد، آنگاه یک عملگر ضربی لاگرانژ $\lambda^{\pm*}(t)$ وجود دارد به گونه‌ای که سه تایی $(x^{\pm*}(t), u^{\pm*}(t), \lambda^{\pm*}(t))$ در دستگاه معادلات زیر صدق می‌کند:

$$\begin{aligned} \dot{x}^{\pm*}(t) &= \frac{\partial H^{\pm}(x^{\pm*}(t), u^{\pm*}(t), \lambda^{\pm*}(t))}{\partial \lambda}, \\ \dot{\lambda}^{\pm*}(t) &= -\frac{\partial H^{\pm}(x^{\pm*}(t), u^{\pm*}(t), \lambda^{\pm*}(t))}{\partial x}, \\ \bullet &= \frac{\partial H^{\pm}(x^{\pm*}(t), u^{\pm*}(t), \lambda^{\pm*}(t))}{\partial u}, \\ x^{\pm}(t_0) &= x_0^{\pm}, \quad \lambda^{\pm}(t_f) = \bullet. \end{aligned} \tag{۴.۳}$$

روابط (۴.۳) شرایط لازم برای جواب مسئله کنترل بهینه بازه‌ای (۱.۳)–(۳.۳) هستند که در آن، $H^{\pm}(t, x^{\pm}(t), u^{\pm}(t), \lambda^{\pm}(t))$ تابع همیلتونی است و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} H^{\pm}(t, x^{\pm}(t), u^{\pm}(t), \lambda^{\pm}(t)) &= \mu_1 L^{-}(t, x^{\pm}(t), u^{\pm}(t)) \\ &+ \mu_2 L^{+}(t, x^{\pm}(t), u^{\pm}(t)) + \lambda^{\pm}(t) f^{\pm}(t, x^{\pm}(t), u^{\pm}(t)), \end{aligned}$$

که در آن، $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$ ، $0 < \mu_1, \mu_2$ و به ترتیب، ضرایب کران پایین و کران بالای تابعی هدف L^{\pm} هستند به طوری که $\mu_1 + \mu_2 = 1$ و λ^{\pm} ضریب لاگرانژ برای تابع بازه‌ای f^{\pm} است.

در ادامه، لیل و همکارانش^۱ برای به دست آوردن شرایط بهینگی از مفاهیم اکسترمال و مشتق هوکوهارای تعمیم یافته برای توابع بازه‌ای استفاده کردند. در واقع، آنها فقط عدم قطعیت بازه‌ای را در ضرایب تابعی هدف مسائل کنترل به عنوان اولین تلاش برای ارائه بهینگی برای این نوع مسائل کنترل بهینه در نظر گرفتند. با توجه به اینکه آنها از روابط مرتبه‌ای بین دو بازه بسته برای مرتب کردن جواب‌های ممکن استفاده کردند، انتخاب مناسب حداقل و حداکثر برای هر پارامتر چالش‌هایی را ایجاد کرده است که در حل مسائل کنترل بهینه بازه‌ای مشکلاتی را به وجود آورده است. در بررسی نتایج عددی که توسط لیل و همکارانش در [۲۵] آورده شده است، دریافتیم که حتی با انتخاب $\alpha = 0.5$ هم $\mu_1 = \mu_2$ هم پاسخ درستی از مسائل کنترل بهینه با ضرایب بازه‌ای به دست نیآورده‌اند، زیرا متغیر کنترل ناپایدار است و شرط اولیه مسئله برای متغیر حالت نیز برآورده نشده است. نویسندگان در [۲۶] با بهره‌گیری از اصل ماکزیم پونتریاگین، یک مدل شبکه عصبی برای حل مسائل کنترل بهینه خطی درجه دوم با ضرایب فازی ارائه دادند. نتایج گزارش شده نه تنها برای α -برش‌های مختلف در دسترس نیستند، بلکه تنها برای دو برش $\alpha = 1$ و $\alpha = 0.5$ آورده شده‌اند که به وضوح در تمام نمودارهای رسم‌شده به ازای $\alpha = 0.5$ ، کران بالای متغیر کنترل کمتر از مقادیر کران پایین آن به دست آمده است.

برای رفع این کاستی‌ها، در این مقاله، روش بیان‌شده در [۲۵] را به مسائل کنترل بهینه خطی درجه دوم که دارای ضرایب بازه‌ای در تابع هدف و سیستم دینامیکی هستند، توسعه می‌دهیم. برای این منظور، فرض کنید مسئله کنترل بهینه بازه‌ای (۱.۳)–(۳.۳) به فرم خطی درجه دوم زیر باشد:

(۵.۳)

$$\begin{aligned} \min I^\pm(x^\pm, u^\pm) &= \frac{1}{\gamma} \int_{t_0}^{t_f} \left[x^{\pm T}(t) Q^\pm(t) x^\pm(t) + u^{\pm T}(t) R^\pm(t) u^\pm(t) \right] dt \\ \text{s.t.} \quad \dot{x}^\pm(t) &= A^\pm x^\pm(t) + B^\pm u^\pm(t), \quad t_0 \leq t \leq t_f, \\ x^\pm(t_0) &= x_0^\pm, \end{aligned}$$

که در آن، ماتریس $Q^\pm \in K$ متقارن و نیمه‌معین مثبت، و $R^\pm \in K \subset \mathbb{R}^{n \times n}$ یک ماتریس متقارن و معین مثبت است. همچنین، A^\pm و B^\pm ماتریس‌هایی با مقادیر بازه‌ای ثابت هستند. با استفاده از روش گفته‌شده در [۲۵]، با تبدیل تابع همیلتونی به دو تابع کران بالا و

¹Leal et al.

پایین، مسئله بازه‌ای حاصل را به دو زیرمسئله قطعی تبدیل کرده و با استفاده از اصل ماکزیمم پونتریاگین، شرایط لازم بهینگی را در قالب دو دستگاه معادلات به دست می‌آوریم [۳۱]. با حل این دستگاه‌های معادلات، نشان خواهیم داد که نتایج حاصل، ایرادات روش‌های قبلی را برطرف کرده و از خواص بازه‌ها و استانداردهای کنترل بهینه تبعیت می‌کنند. به منظور حصول اطمینان و نتیجه‌گیری بهتر، نتایج به دست آمده را با نظریه‌های موجود و داده‌های تجربی مقایسه خواهیم کرد. جزئیات محاسباتی این روش، در بخش نتایج عددی به طور مبسوط مورد بحث و بررسی قرار گرفته است.

۴. نتایج عددی

در این بخش دو مثال از مسائل کنترل بهینه با ضرایب بازه‌ای در تابع هدف و سیستم دینامیکی ارائه شده است تا اعتبار و کارایی روش اصلاح شده را نشان دهد. برای این منظور از نرم افزار متلب ۲۰۱۶ و جعبه ابزار اینتل استفاده شده است. تمامی نتایج به صورت بازه‌ای گزارش داده شده‌اند تا امکان مقایسه و صحت‌سنجی به راحتی میسر باشد. همچنین، پارامترهای استفاده شده در این مقاله، در جدول ۱ آورده شده‌اند.

مثال ۱.۴. مسئله کنترل بهینه خطی درجه دوم با ضرایب بازه‌ای در تابع هدف و سیستم دینامیکی را به صورت زیر در نظر بگیرید:

(۱.۴)

$$\min I^\pm(x^\pm, u^\pm) = \frac{1}{4} \int_0^1 (x^\pm(t)[0.9, 1/1]x^\pm(t) + u^\pm(t)[0.9, 1/1]u^\pm(t)) dt,$$

$$\text{s.t. } \dot{x}^\pm(t) = [2 + \alpha, 4 - \alpha]x^\pm(t) + u^\pm(t), \quad \alpha \in [0, 1],$$

$$x^\pm(0) = 1.$$

با فرض $\alpha = 1$ در سیستم دینامیکی، مسئله (۱.۴) به یک مسئله کنترل بهینه با ضرایب بازه‌ای در تابع هدف تبدیل می‌شود که همان مدل حل شده در مرجع [۲۵] است. لیل و همکارانش در [۲۵] با در نظر گرفتن تابعی هدف،

$$L^\pm(t, x^\pm, u^\pm) = \left[\frac{0.9}{4}(x^{\pm 2} + u^{\pm 2}), \frac{1/1}{4}(x^{\pm 2} + u^{\pm 2}) \right],$$

تابع همیلتونی زیر را تعریف کردند:

$$H^\pm(t, x^\pm(t), u^\pm(t), \lambda^\pm) = \mu_1 \frac{0.9}{4}(x^{\pm 2} + u^{\pm 2}) + \mu_2 \frac{1/1}{4}(x^{\pm 2} + u^{\pm 2}) + \lambda^\pm(x^\pm(t) + u^\pm(t)).$$

سپس، شرایط لازم بهیگی را مطابق روابط (۴.۳) به‌دست آوردند، اما نتایج ارائه‌شده توسط آن‌ها به‌ازای $\mu_1 = \mu_2 = 0.5$ برای متغیرهای حالت و کنترل بازه‌ای نیستند. بعلاوه، در نمودار رسم‌شده برای متغیر حالت، شرط اولیه مسئله کنترل بهینه بازه‌ای $x^\pm(0) = 1$ نیز برقرار نشده است.

از این‌رو، به‌منظور رفع این نواقص و با در نظر گرفتن ضریب بازه‌ای برای سیستم دینامیکی مسئله (۱.۴)، روش ارائه‌شده توسط لیل و همکارانش را توسعه خواهیم داد. به این ترتیب، تابع همیلتونی برای مسئله کنترل بهینه بازه‌ای (۱.۴) به‌صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$H^\pm(t, x^\pm(t), u^\pm(t), \lambda^\pm) = \mu_1 \frac{0.9}{4} (x^{\pm 2} + u^{\pm 2}) + \mu_2 \frac{1/1}{4} (x^{\pm 2} + u^{\pm 2}) + \lambda^\pm(t) [(2 + \alpha, 4 - \alpha)x^\pm(t) + u^\pm(t)].$$

با فرض $\mu_1 = \mu_2 = 0.5$ و با تبدیل تابع همیلتونی به دو تابع کران بالا و پایین، داریم:

$$H^+(t, x^\pm(t), u^\pm(t), \lambda^\pm) = \frac{1}{4} (x^{+2} + u^{+2}) + \lambda^+(t) ((4 - \alpha)x^+(t) + u^+(t)),$$

$$H^-(t, x^\pm(t), u^\pm(t), \lambda^\pm) = \frac{1}{4} (x^{-2} + u^{-2}) + \lambda^-(t) ((2 + \alpha)x^-(t) + u^-(t)).$$

اکنون با اعمال اصل ماکزیمم پونتریاگین، شرایط لازم بهیگی برای مسئله کنترل بهینه بازه‌ای (۱.۴) به‌صورت دو دستگاه معادلات زیر به‌دست می‌آید:

شرایط لازم بهیگی برای کران پایین

$$\dot{x}^-(t) = \frac{\partial H^-}{\partial \lambda^-} = (2 + \alpha)x^-(t) + u^-(t),$$

$$(2.4) \quad \dot{\lambda}^-(t) = -\frac{\partial H^-}{\partial x^-} = -(x^-(t) + (2 + \alpha)\lambda^-(t)),$$

$$0 = \frac{\partial H^-}{\partial u^-} = u^-(t) + \lambda^-(t),$$

$$x^-(0) = 1, \quad \lambda^-(1) = 0.$$

شرایط لازم بهینگی برای کران بالا

$$\begin{aligned} \dot{x}^+(t) &= \frac{\partial H^+}{\partial \lambda^+} = (\Psi - \alpha)x^+(t) + u^+(t), \\ (3.4) \quad \dot{\lambda}^+(t) &= -\frac{\partial H^+}{\partial x^+} = -(x^+(t) + (\Psi - \alpha)\lambda^+(t)), \\ \bullet &= \frac{\partial H^+}{\partial u^+} = u^+(t) + \lambda^+(t), \\ x^+(\bullet) &= 1, \quad \lambda^+(1) = \bullet. \end{aligned}$$

با حل دستگاه معادلات (۲.۴) داریم:

$$\begin{aligned} x^{*-}(t) &= c_1^- e^{\sqrt{k_1}t} (-\sqrt{k_1} - (\Psi + \alpha)) + c_2^- e^{-\sqrt{k_1}t} (\sqrt{k_1} - (\Psi + \alpha)), \\ u^{*-}(t) &= -c_1^- e^{\sqrt{k_1}t} - c_2^- e^{-\sqrt{k_1}t}. \end{aligned}$$

به‌طور مشابه، با حل شرایط لازم بهینگی (۳.۴) داریم:

$$\begin{aligned} x^{*+}(t) &= c_1^+ e^{\sqrt{k_2}t} (-\sqrt{k_2} - (\Psi - \alpha)) + c_2^+ e^{-\sqrt{k_2}t} (\sqrt{k_2} - (\Psi - \alpha)), \\ u^{*+}(t) &= -c_1^+ e^{\sqrt{k_2}t} - c_2^+ e^{-\sqrt{k_2}t}, \end{aligned}$$

که در آن

$$\begin{aligned} c_1^- &= \frac{-1}{\sqrt{k_1}(1 + e^{2\sqrt{k_1}}) + (\Psi + \alpha)(1 - e^{2\sqrt{k_1}})}, & c_2^- &= -c_1^- e^{2\sqrt{k_1}}, \\ c_1^+ &= \frac{-1}{\sqrt{k_2}(1 + e^{2\sqrt{k_2}}) + (\Psi - \alpha)(1 - e^{2\sqrt{k_2}})}, & c_2^+ &= -c_1^+ e^{2\sqrt{k_2}}, \\ k_1 &= \sqrt{(\Psi + \alpha)^2 + 1}, & k_2 &= \sqrt{(\Psi - \alpha)^2 + 1}, \quad \alpha \in [0, 1], \end{aligned}$$

بنابراین، مقدار بهینه متغیر حالت و متغیر کنترل برای مسئله (۱.۴) به ترتیب به صورت $x^{*\pm}(t) = [x^{*-}(t), x^{*+}(t)]$ و $u^{*\pm}(t) = [u^{*-}(t), u^{*+}(t)]$ به دست می‌آید که نتایج عددی مربوط به آن به ازای $\alpha = 0.5$ در جدول ۲ آورده شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود، شرط اولیه مسئله (۱.۴) برآورده شده است و در هر لحظه، کران پایین متغیر کنترل کمتر از کران بالای آن است. همچنین، اشکالات مرجع [۲۵] برطرف شده است و متغیرهای حالت و کنترل دارای مقادیر بازه‌ای هستند. نمودار مربوط به ارزیابی توابع حالت و کنترل به ازای $\alpha = 1$ و $\alpha = 0.5$ در شکل ۱ رسم شده است. همان‌طور که در این شکل مشاهده می‌شود، کران‌های بالا و پایین متغیرهای $x^{*\pm}(t)$ و $u^{*\pm}(t)$ به ازای $\alpha = 1$ روی هم قرار گرفته‌اند و به ازای

$\alpha = 0.5$ ، کران پایین جواب، کوچکتر از کران بالای آن است و شرط اولیه مسئله (۱.۴) نیز به خوبی برآورده شده است. نمودار جواب مربوط به متغیرهای $x^{(\pm)}(t)$ و $u^{(\pm)}(t)$ به ازای مقادیر مختلف α در شکل ۲ رسم شده است. ملاحظه می‌شود تمام جواب‌ها به صورت بازه‌ای هستند و شرط اولیه مسئله به ازای تمام مقادیر α برقرار است.

مثال ۲.۴. مسئله کنترل بهینه خطی درجه دوم با ضرایب بازه‌ای را به صورت زیر در نظر بگیرید [۲۶]:

$$\begin{aligned} \min I^\pm(x^\pm, u^\pm) &= \int_0^1 (x^{\pm 2}(t) + u^{\pm 2}(t)) dt, \\ \text{s.t. } \dot{x}^\pm(t) &= [\alpha, 2 - \alpha]u^\pm(t), \quad \alpha \in [0, 1], \\ x^\pm(0) &= 1. \end{aligned} \quad (4.4)$$

این مسئله در مرجع [۲۶] به صورت فازی در نظر گرفته شده است که با انتخاب مقادیر مختلف α در سیستم دینامیکی مسئله (۴.۴)، شرایط مدل حل شده در مرجع مذکور به ازای α - برش‌های متفاوت فراهم می‌شود. نتایج ارائه شده در [۲۶] نشان می‌دهند که نویسندگان، مقادیر کران پایین و بالای متغیر کنترل را به ازای $\alpha = 0.5$ در نقطه شروع، به ترتیب به صورت $u^-(0) = -0.36$ و $u^+(0) = -1/1$ به دست آورده‌اند که به وضوح $u^-(0) > u^+(0)$ همچنین، مقادیر $x^-(0) = 0.5$ و $x^+(0) = 1/5$ گزارش شده‌اند که شرط اولیه $x^\pm(0) = 1$ را به طور دقیق برآورده نکرده است. ملاحظه خواهیم کرد که روش پیشنهادی در مقایسه با نتایج مرجع [۲۶]، جواب را بهبود داده و شرط اولیه را به طور دقیق برآورده می‌کند. برای این منظور، تابع همیلتونی برای مسئله کنترل بهینه بازه‌ای (۴.۴) به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$H^\pm(t, x^\pm(t), u^\pm(t), \lambda^\pm(t)) = x^{\pm 2}(t) + u^{\pm 2}(t) + \lambda^\pm(t) ([\alpha, 2 - \alpha]u^\pm(t)).$$

مشابه قبل، با تبدیل تابع همیلتونی به دو تابع کران بالا و پایین و اعمال اصل ماکزیم پونتری‌اگین، شرایط لازم بهیئگی برای مسئله کنترل بهینه بازه‌ای (۱.۴) به صورت زیر به دست

می‌آید:

شرایط لازم بهینگی برای کران پایین

$$\begin{aligned} \dot{x}^{-}(t) &= (2 - \alpha)u^{-}(t), \\ \dot{\lambda}^{-}(t) &= -2x^{-}(t), \\ \bullet &= \frac{\partial H^{-}}{\partial u^{-}} = 2u^{-}(t) + (2 - \alpha)\lambda^{-}(t), \\ x^{-}(\bullet) &= 1, \quad \lambda^{-}(1) = \bullet, \end{aligned} \tag{5.4}$$

شرایط لازم بهینگی برای کران بالا

$$\begin{aligned} \dot{x}^{+}(t) &= \alpha u^{+}(t), \\ \dot{\lambda}^{+}(t) &= -2x^{+}(t), \\ \bullet &= \frac{\partial H^{+}}{\partial u^{+}} = 2u^{+}(t) + \alpha\lambda^{+}(t), \\ x^{+}(\bullet) &= 1, \quad \lambda^{+}(1) = \bullet. \end{aligned} \tag{6.4}$$

با حل دستگاه‌های معادلات (5.4) و (6.4)، مقادیر $x^{*\pm}(t)$ و $u^{*\pm}(t)$ برای مسئله کنترل بهینه بازه‌ای (4.4) به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$\begin{aligned} x^{*\pm}(t) &= \left[\frac{e^{(2-\alpha)t} + e^{(2-\alpha)(2-t)}}{1 + e^{2(2-\alpha)}}, \quad \frac{e^{\alpha t} + e^{\alpha(2-t)}}{1 + e^{2\alpha}} \right], \\ u^{*\pm}(t) &= \left[\frac{e^{(2-\alpha)t} - e^{(2-\alpha)(2-t)}}{1 + e^{2(2-\alpha)}}, \quad \frac{e^{\alpha t} - e^{\alpha(2-t)}}{1 + e^{2\alpha}} \right]. \end{aligned}$$

نمودار جواب مربوط به متغیرهای $x^{*\pm}(t)$ و $u^{*\pm}(t)$ به ازای مقادیر مختلف α که دارای مقادیر بازه‌ای هستند، در شکل ۳ رسم شده است. نتایج این شکل نشان می‌دهد که با نزدیک شدن مقدار α به یک، پاسخ‌های مسئله به پاسخ واقعی نزدیک شده و همچنین، به ازای تمام مقادیر α ، جواب‌های به دست آمده در شرط اولیه مسئله (4.4)، یعنی $x^{\pm}(\bullet) = 1$ صدق می‌کنند. بعلاوه، نتایج تماماً به صورت بازه‌ای هستند و در تابع کنترل، به ازای تمام مقادیر α ، $u^{-}(t) < u^{+}(t)$. نتایج عددی مربوط به متغیرهای حالت و کنترل بازه‌ای، به ازای $\alpha = 0.5$ در جدول ۳ آورده شده است. همان‌طور که در این جدول مشاهده می‌شود، مقادیر بهینه به دست آمده با استفاده از روش ارائه شده، به صورت عدد بازه‌ای هستند و متغیر حالت در نقطه شروع $x^{\pm}(\bullet) = [1, 1]$ است. این در حالی است که در مرجع [۲۶]، کران پایین متغیر کنترل

از کران بالای آن بزرگ‌تر شده است و متغیر حالت نیز در بازه مناسب و دقیق تری با توجه به شرط اولیه مسئله قرار می‌گیرد.

نتیجه‌گیری

این مقاله با هدف بهبود نتایج حل مسائل کنترل بهینه خطی درجه دوم با عدم قطعیت بازه‌ای که پیش تر در [۲۵، ۲۶] مطرح شده بود، انجام شد. رویکرد ما بر مبنای بهره‌گیری از اصول و استانداردهای حل مسائل کنترل بهینه است و تلاش کردیم تا نتایجی قابل استناد و دقیق‌تر بدست آوریم. برای این منظور، عدم قطعیت بازه‌ای را علاوه بر تابع هدف، به سیستم دینامیکی مسئله نیز تعمیم دادیم و با استفاده از کران‌های بالایی و پایینی بازه‌های عدم قطعیت، تابع همیلتونی را به دو تابع کران بالا و پایین تبدیل کردیم. سپس، با اعمال اصل ماکزیمم پونتریاگین، شرایط لازم برای کران‌های بالایی و پایینی جواب بهینه مسئله اصلی تعیین شد. نتایج عددی حاصل که در قالب جداول و نمودارها ارائه شده‌اند، نشان می‌دهند که محدودیت‌های موجود در پژوهش‌های پیشین مرتفع شده است و مقادیر دقیق‌تری برای متغیرهای حالت و کنترل بدست آمده است. مزیت اصلی این رویکرد در سادگی نسبی و قابلیت پیاده‌سازی آن با نرم‌افزارهای محاسباتی مانند متلب است که امکان استفاده عملی و کارآمد در مواجهه با مسائل کنترل بهینه با عدم قطعیت بازه‌ای را فراهم می‌سازد. برای کاربرد گسترده‌تر این روش، تحقیقات بیشتری لازم است تا دامنه کاربرد آن به مسائل پیچیده‌تر و واقعی‌تر گسترش یابد. همچنین، بررسی کاربرد این روش در مسائل کنترل غیرخطی یا سیستم‌های چندمتغیره، و ترکیب روش بازه‌ای با سایر روش‌های مدیریت عدم قطعیت (مانند فازی) برای بهبود انعطاف‌پذیری، از جمله مباحث برای آینده پژوهش در این زمینه هستند.

مراجع

- [1] Andrew, A. M. (2002) Applied interval analysis: with examples in parameter and state estimation, robust control and robotics. *Kybernetes*, 31(5).
- [2] Yang, C., Lu, W., Xia, Y. (2023) Reliability-constrained optimal attitude-vibration control for rigid-flexible coupling satellite using interval dimension-wise analysis. *Reliability Engineering & System Safety*, 237, 109382.
- [3] Yang, C., Lu, W., Xia, Y. (2023) Positioning accuracy analysis of industrial robots based on non-probabilistic time-dependent reliability. *IEEE Transactions on Reliability*, 73(1), 608-621.

- [4] Ghosh, D., Chauhan, R. S., Mesiar, R., Debnath, A. K. (2020) Generalized Hukuhara Gâteaux and Fréchet derivatives of interval-valued functions and their application in optimization with interval-valued functions. *Information Sciences*, 510, 317-340.
- [5] Campos, J. R., Assunção, E., Silva, G. N., Lodwick, W. A., Teixeira, M. C. M., Maqui-Huamán, G. G. (2020) Fuzzy interval optimal control problem. *Fuzzy Sets and Systems*, 385, 169-181.
- [6] Lupulescu, V. (2013) Hukuhara differentiability of interval-valued functions and interval differential equations on time scales. *Information Sciences*, 248, 50-67.
- [7] Stefanini, L., Bede, B. (2009) Generalized Hukuhara differentiability of interval-valued functions and interval differential equations. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 71(3-4), 1311-1328.
- [8] Stefanini, L., Bede, B. (2012) Some notes on generalized Hukuhara differentiability of interval-valued functions and interval differential equations. *Technical Report No. 1208*.
- [9] Mordukhovich, B. S. (1997) Coderivatives of set-valued mappings: calculus and applications. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 30(5), 3059-3070.
- [10] Mordukhovich, B. S. (2006) Coderivative calculus and robust Lipschitzian stability of variational systems. *Journal of Convex Analysis*, 13(3/4), 799.
- [11] Majumder, P., Mondal, S. P., Bera, U. K., Maiti, M. (2016) Application of Generalized Hukuhara derivative approach in an economic production quantity model with partial trade credit policy under fuzzy environment. *Operations Research Perspectives*, 3, 77-91.
- [12] Stefanini, L., Bede, B. (2009) Generalized Hukuhara differentiability of interval-valued functions and interval differential equations. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 71(3-4), 1311-1328.
- [13] Chalco-Cano, Y., Lodwick, W. A., Rufián-Lizana, A. (2013) Optimality conditions of type KKT for optimization problem with interval-valued objective function via generalized derivative. *Fuzzy Optimization and Decision Making*, 12(3), 305-322.
- [14] Bertin, E., Brendel, E., Hérisse, B., Sandretto, J. A. D., Chapoutot, A. (2021) Prospects on solving an optimal control problem with bounded uncertainties on parameters using interval arithmetics. *Acta Cybernetica*, 1-25.
- [15] Campos, J. R., Assunção, E., Silva, G. N., Lodwick, W. A., Teixeira, M. C. M., Maqui-Huamán, G. G. (2020) Fuzzy interval optimal control problem. *Fuzzy Sets and Systems*, 385, 169-181.
- [16] Campos, J. R., Assunção, E., Silva, G. N., Lodwick, W. A., Teixeira, M. C. (2019) Discrete-time interval optimal control problem. *International Journal of Control*, 92(8), 1778-1784.
- [17] Lodwick, W. A., Jamison, K. D. (2018) A constraint fuzzy interval analysis approach to fuzzy optimization. *Information Sciences*, 426, 38-49.

- [18] Leal, U. S., Stiegelmeier, E., Silva, G., Lodwick, W. (2016) Optimal Control with an Interval-valued Objective Function: an Application in Weed Management. *Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics*, 4(1).
- [19] Lodwick, W. A. (2012) An overview of flexibility and generalized uncertainty in optimization. *Computational & Applied Mathematics*, 31, 569-589.
- [20] Razmjoo, N., Ramezani, M. (2019) Interval structure of Runge-Kutta methods for solving optimal control problems with uncertainties. *Computational Methods for Differential Equations*, 7(2), 235-251.
- [21] Farahi, M. H., Keshtegar, M., Najariyan, M. (2014) Fuzzy optimal control of a poisoning-pest model by using α -cut. *Journal of Engineering Research & Technology*, 1(3), 79-88.
- [22] Farhadinia, B. (2014) Pontryagin's minimum principle for fuzzy optimal control problems. *Iranian Journal of Fuzzy Systems*, 11(2), 27-43.
- [23] Zarei, H., Khastan, A., Rodríguez-López, R. (2023) Suboptimal control of linear fuzzy systems. *Fuzzy Sets and Systems*, 453, 130-163.
- [24] Shokouhi, T., Soradi Zeid, S., Allahdadi, M. (2023) Solving quadratic linear optimal control problems under interval uncertainty. *Fuzzy Systems and its Applications*, 6(1), 245-267.
- [25] Leal, U., Lodwick, W., Silva, G., Maqui-Huaman, G. G. (2021) Interval optimal control for uncertain problems. *Fuzzy Sets and Systems*, 402, 142-154.
- [26] Effati, S., Mansoori, A., Eshaghezhad, M. (2021) Linear quadratic optimal control problem with fuzzy variables via neural network. *Journal of Experimental & Theoretical Artificial Intelligence*, 33(2), 283-296.
- [27] Hansen, E., Walster, G. W. (2003) *Global optimization using interval analysis: revised and expanded* (264). CRC Press.
- [28] Lupulescu, V. (2013) Hukuhara differentiability of interval-valued functions and interval differential equations on time scales. *Information Sciences*, 248(3-4), 50-67.
- [29] Chalco-Cano, Y., Rufián-Lizana, A., Román-Flores, H., Jiménez-Gamero, M. D. (2013) Calculus for interval-valued functions using generalized Hukuhara derivative and applications. *Fuzzy Sets and Systems*, 219, 49-67.
- [30] Hosseini, E., Allahdadi, M., Soradi-Zeid, S., Torabi, H. (2024) Refinements the solutions of fuzzy optimal control problems. *International Journal of Dynamics and Control*, 12(6), 1860-1873.
- [31] Pontryagin, L. S. (2018) *Mathematical theory of optimal processes*. Routledge. DOI: 10.1201/9780203749319.
- [32] Ishibuchi, H., Tanaka, H. (1990) Multiobjective programming in optimization of the interval objective function. *European Journal of Operational Research*, 48(2), 219-225.

جدول ۱: پارامترهای مورد استفاده در مقاله.

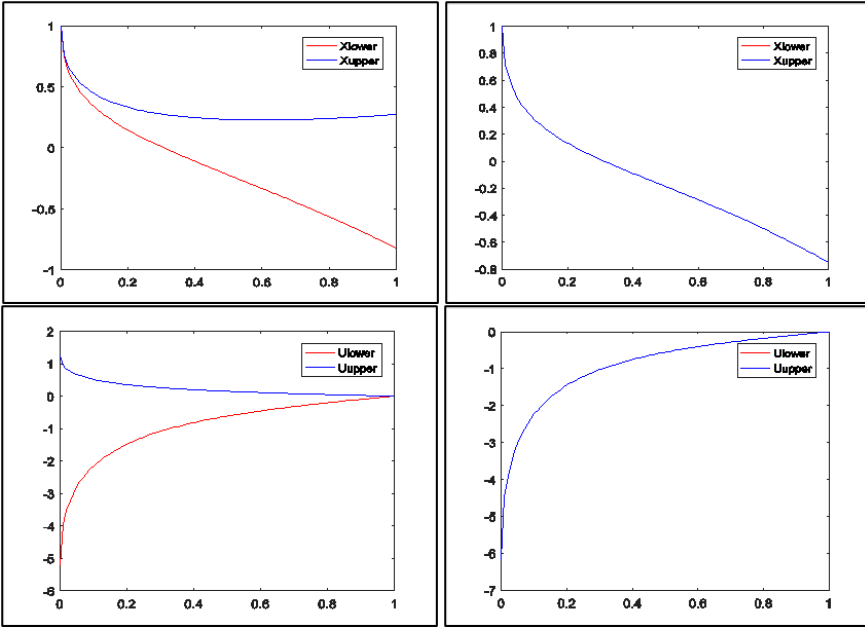
نام متغیر	عنوان	توضیحات
μ_1	ضریب L^- (کران پایین تابعی بازه‌ای)	$\mu_1 \in \mathbb{R}, \mu_1 + \mu_2 = 1$
μ_2	ضریب L^+ (کران بالای تابعی بازه‌ای)	$\mu_2 \in \mathbb{R}, \mu_1 + \mu_2 = 1$
λ^\pm	ضریبگر لاگرانژ	$\lambda^-, \lambda^+ \in \mathbb{R}$
α	برش بازه (پارامتر عدم قطعیت)	$\alpha \in [0, 1]$

جدول ۲: مقادیر بهینه متغیرهای حالت و کنترل به ازای $\alpha = 0.5$ برای مثال ۱.۴.

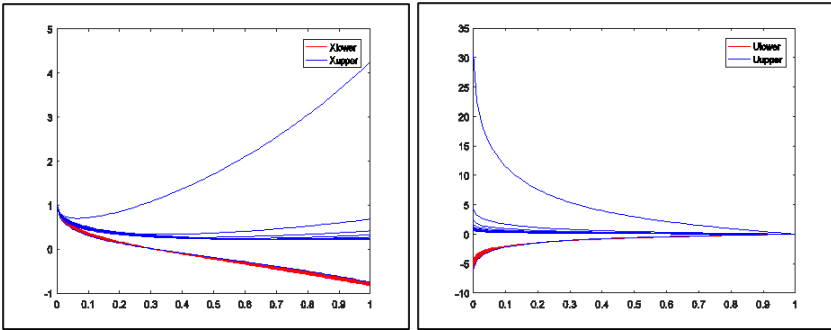
$x^{*\pm}(t)$	$u^{*\pm}(t)$	t
[۱/۰۰۰۰, ۱/۰۰۰۰]	[-۵/۱۹۲۶, ۱/۲۳۸۵]	۰/۰
[۰/۱۴۳۳, ۰/۳۳۱۱]	[-۱/۴۷۵۰, ۰/۳۵۱۸]	۰/۲
[-۰/۱۱۵۳, ۰/۲۴۶۵]	[-۰/۸۰۹۶, ۰/۱۹۳۱]	۰/۴
[-۰/۳۴۰۵, ۰/۲۲۸۵]	[-۰/۴۴۶۷, ۰/۱۰۶۵]	۰/۶
[-۰/۵۷۵۳, ۰/۲۴۲۱]	[-۰/۱۹۴۶, ۰/۰۴۶۴]	۰/۸
[-۰/۸۲۳۲, ۰/۲۷۴۹]	[-۰/۰۰۰۰, ۰/۰۰۰۰]	۱/۰

جدول ۳: مقادیر بهینه متغیرهای حالت و کنترل به ازای $\alpha = 0.5$ برای مثال ۲.۴.

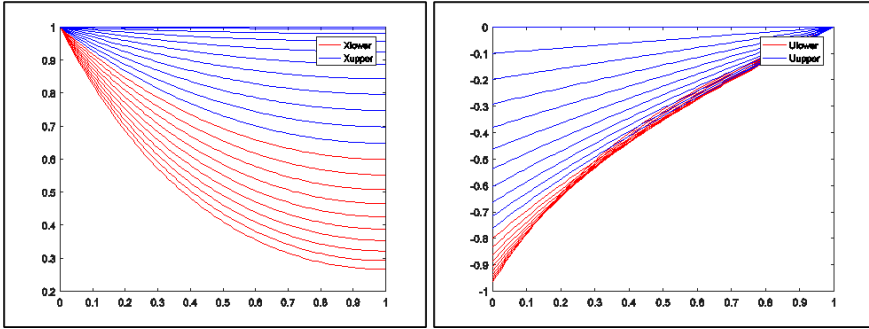
$x^{*\pm}(t)$	$u^{*\pm}(t)$	t
[۱/۰۰۰۰, ۱/۰۰۰۰]	[-۰/۹۰۵۱, -۰/۴۶۲۱]	۰/۰
[۰/۷۶۷۸, ۰/۹۵۸۳]	[-۰/۶۳۹۳, -۰/۳۶۳۳]	۰/۲
[۰/۶۰۶۶, ۰/۹۲۶۵]	[-۰/۴۳۲۷, -۰/۲۶۸۲]	۰/۴
[۰/۵۰۱۵, ۰/۹۰۴۱]	[-۰/۲۶۶۱, -۰/۱۷۵۸]	۰/۶
[۰/۴۴۲۸, ۰/۸۹۰۹]	[-۰/۱۲۴۱, -۰/۰۸۵۲]	۰/۸
[۰/۴۲۵۱, ۰/۸۸۶۸]	[-۰/۰۰۰۰, -۰/۰۰۰۰]	۱/۰



شکل ۱: توابع حالت و کنترل ارزیابی شده به ازای $\alpha = 0.5$ (شکل سمت چپ) و $\alpha = 1$ (شکل سمت راست) برای مثال ۱.۴.



شکل ۲: توابع حالت و کنترل ارزیابی شده به ازای مقادیر مختلف $\alpha = 0, 0.1, 0.2, \dots, 1$ برای مثال ۱.۴.



شکل ۳: توابع حالت و کنترل ارزیابی شده به ازای مقادیر مختلف $\alpha = 0, 0/1, 0/2, \dots, 1$ برای مثال ۲.۴.