

## رویکردی تعمیم یافته برای ارزیابی همزمان معیارها و گزینه‌ها تحت داده‌های نوتروسوفیک

مدینه فرنام<sup>۱\*</sup>، سارا احمدی<sup>۲</sup> و هادی بصیرزاده<sup>۳</sup>

<sup>۱</sup> گروه مهندسی برق، دانشگاه شهید چمران اهواز- پردیس صنعتی شهدای هویزه، دشت

آزادگان، خوزستان، ایران

<sup>۲</sup> پردیس شهید چمران، مرکز شهید بهشتی، دانشگاه فرهنگیان، تهران، ایران

<sup>۳</sup> گروه ریاضی، دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر، دانشگاه شهید چمران اهواز، اهواز، ایران

تاریخ پذیرش: ۱۴۰۴/۰۸/۱۱

تاریخ دریافت: ۱۴۰۴/۰۵/۱۲

نوع مقاله: علمی- پژوهشی

**چکیده.** توسعه نظری مجموعه‌های فازی به مجموعه‌های نوتروسوفیک با تعریف همزمان توابع درستی، ممتنع و نادرستی، نمایش واقع‌نمایانه‌تری از داده‌های غیرقطعی، متناقض و مستقل ارائه می‌دهد. روش‌های کلاسیک تحلیل داده به دلیل اتکای ذاتی بر مقادیر قطعی، در هنگام برخورد با این سختی‌ها ناکارآمد ظاهر می‌شوند. رتبه‌بندی اعداد نوتروسوفیک و میزان صحت عملکرد آنها به دلیل ماهیت چندبعدی و پیچیدگی محاسباتی، مسئله‌ای جدی در مدل‌سازی و به ویژه حل مسائل تصمیم‌گیری مبتنی بر این نوع از رویکردها است. در این راستا، پژوهش حاضر با استوارسازی مبانی نظری، گزاره‌های نوینی برای یک روش رتبه‌بندی پارامتریک اثبات می‌کند. سپس در رویکردی نوآورانه از آن به عنوان ابزاری برای توسعه روش سکا در محیط‌های نوتروسوفیک ذوزنقه‌ای و به منظور سنجش همزمان گزینه‌ها

2010 Mathematics Subject Classification. 49Lxx ; 49N05

\* Corresponding author

E-mails: m.farnam@scu.ac.ir , sara.ahmadi1389@yahoo.com and basirzad@scu.ac.ir.

عبارات و کلمات کلیدی. روش سکا، مجموعه نوتروسوفیک، عدد نوتروسوفیک ذوزنقه‌ای، تصمیم‌گیری چندمعیاره.

و معیارها استفاده می‌شود. لازم به ذکر است در بین روش‌های تصمیم‌گیری تنها روش‌های محدودی به صورت همزمان وزندهی به معیارها و رتبه‌بندی گزینه‌ها را انجام می‌دهند. علاوه بر این، بیشینه‌سازی امتیاز هر گزینه و کمینه‌سازی وزن‌ها براساس فاصله از دو معیار درونی و برونی، به همراه امکان مدل‌سازی یکپارچه ریاضی به عنوان مزایای برجسته‌ای از این روش شناخته می‌شوند. از این رو، برای اولین بار در این مطالعه گسترش روش سکا با تغییراتی تحت داده‌های نوتروسوفیک بررسی شده است. توسعه این روش و ترکیب آن با یک روش رتبه‌بندی منطقی می‌تواند ضمن دریافت کمترین اطلاعات ممکن در تصمیم‌گیری‌ها، رویکردی یکپارچه برای حل بسیاری از مطالعات موردی فراهم آورد. عملکرد روش پیشنهادی از طریق حل مثالی عددی و مقایسه با روش‌های مرجع اعتبارسنجی شده است. یافته‌ها نشان می‌دهد روش پیشنهادی تنها با دریافت ماتریس تصمیم اولیه، قادر به وزندهی به معیارها و رتبه‌بندی گزینه‌ها است. با وجود تفاوت در جزئیات، گزینه برتر در تمامی روش‌ها یکسان است.

## ۱. سرآغاز

عدم قطعیت اطلاعاتی به عنوان مؤلفه‌ای ذاتی در مدل‌سازی مسائل علمی و کاربردی، ضرورت به‌کارگیری ابزارهای انطباق‌پذیر را آشکار می‌سازد. رویکردهای تحلیلی کلاسیک منحصراً با سازوکارهای عددی سازگاری دارند، حال آنکه ادراک انسانی در سطح عمیق‌تر بر داده‌های کیفی غیر از مقادیر دقیق عددی متمرکز است. مجموعه‌های نوتروسوفیک<sup>۱</sup> [۱] دارای قابلیت بی‌نظیری در اندازه‌گیری و مدیریت عدم قطعیت، ابهام و تردید هستند. به همین دلیل، این اعداد در تحقیقات جدید، به‌ویژه در کاربردهای تصمیم‌گیری چندمعیاره [۲]، بسیار مورد توجه قرار گرفته‌اند. مجموعه‌های نوتروسوفیک، در مقایسه با مدل‌های پیشین، مانند مجموعه‌های فازی [۳] و مجموعه‌های فازی شهودی [۴]، رویکرد جامع‌تری برای مدیریت داده‌های مبهم ارائه می‌دهند. به‌عنوان نمونه، در شرایطی که داده‌های نظرسنجی مانند نتایج مسابقات انتخاباتی شامل درصدهای متناقض (مثلاً ۳۰٪ برنده، ۲۰٪ بازنده، ۱۰٪ مساوی) هستند، تنها مجموعه‌های نوتروسوفیک می‌توانند این پیچیدگی را با دقت بالا مدیریت کنند.

تصمیم‌گیری چندمعیاره به‌عنوان چارچوبی محوری، مدیران را در فرآیند انتخاب بهینه‌ترین گزینه براساس ارزیابی تطبیقی آن‌ها نسبت به معیارهای موجود در محیط‌های پیچیده یاری می‌رساند. عملکرد ترکیبی روش‌های رتبه‌بندی در حل مسائل تصمیم‌گیری چندمعیاره نقشی

<sup>1</sup>Neutrosophic sets

اساسی ایفا می‌کند. این سازوکارها در مواجهه با چالش‌های تصمیم‌گیری در شرایط عدم قطعیت، ابزارهای راهبردی محسوب می‌شوند. پژوهشگران متعددی به‌طور مداوم روش‌های مختلفی برای حل مسائل تصمیم‌گیری چندمعیاره توسعه داده‌اند. در این راستا، ژانگ<sup>۱</sup> و همکاران [۵] این ایده را با معرفی مدل مجموعه نوتروسوفیک تک‌مقداری به‌صورتی ساده‌سازی کردند و از آن در تصمیم‌گیری‌های مهندسی و علمی استفاده نمودند. اگرچه مقادیر نوتروسوفیک تک‌مقداری ابزاری مناسب برای مقابله با عدم قطعیت، ناسازگاری و ناکامل بودن اطلاعات است، اما همچنان هر شیء را تنها با یک مقدار برای هر درجه عضویت نمایش می‌دهد. در واقعیت، بیان یک شیء با بیش از یک مقدار حیاتی است و انتظار می‌رود ارزیابی پیوسته و مناسبتری از شیء مورد بررسی ارائه دهد. برای در نظر گرفتن این موضوع، یه [۶] با ترکیب مفهوم عدد فازی ذوزنقه‌ای و نظریه مجموعه‌های نوتروسوفیک، مجموعه نوتروسوفیک ذوزنقه‌ای را معرفی کرد و سپس عدد نوتروسوفیک ذوزنقه‌ای را پیشنهاد داد. از آنجا که یکی از چالش‌های بنیادین در حوزه اعداد فازی و گسترش‌های آن تدوین روش‌های معتبر برای مقایسه، رتبه‌بندی و تجمیع است. او برخی از عملیات پایه روی اعداد نوتروسوفیک ذوزنقه‌ای شامل تابع امتیازدهی برای آن‌ها و دو عملگر تجمیعی به نام‌های میانگین حسابی و هندسی وزنی نوتروسوفیک ذوزنقه‌ای را نیز ارائه داد. لیانگ<sup>۲</sup> و همکاران [۷] تابع امتیاز، تابع دقت و تابع یقین برای مجموعه‌های نوتروسوفیک ذوزنقه‌ای را پیشنهاد نمودند. اغلب این روش‌ها، با وجود سادگی محاسبات غیرپارامتری هستند و فرآیند مقایسه چندمرحله‌ای دارند.

وو<sup>۳</sup> و همکاران [۸] اعداد نوتروسوفیک ذوزنقه‌ای تک‌مقداری را برای مدیریت مسئله تصمیم‌گیری چندمعیاره گروهی طراحی کردند. آنها همچنین عملگری جدید برای اعداد نوتروسوفیک ذوزنقه‌ای تک‌مقداری توسعه دادند تا از تحریف و از دست رفتن اطلاعات در فرآیند تجمیع ارزیابی‌ها جلوگیری کنند. دلی<sup>۴</sup> [۹] گونه دیگری از این نوع اعداد را تعریف کرد و ویژگی‌های آن‌ها را برای به کارگیری تصمیم‌گیری گروهی معرفی نمود. وی همچنین عملگرهای تجمیع جدیدی مانند میانگین هندسی و حسابی وزندار مرتب‌شده، هندسی ترکیبی و حسابی ترکیبی را برای آن‌ها طراحی کرد. چاکرابورتی<sup>۵</sup> و همکاران [۱۰] نقش انواع خطی و غیرخطی اعداد نوتروسوفیک ذوزنقه‌ای را در مدیریت مفاهیم ناکامل بودن و ابهام تحلیل

<sup>1</sup>Zhang<sup>2</sup>Liang<sup>3</sup>Wu<sup>4</sup>Deli<sup>5</sup>Chakraborty

کردند. جانان<sup>۱</sup> و همکاران [۱۱] با ترکیب مجموعه‌های نوتروسوفیک بازه‌ای و اعداد فازی دوزنقه‌ای، مجموعه‌های نوتروسوفیک دوزنقه‌ای بازه‌ای توسعه دادند. لیانگ و همکاران [۱۲] مدلی یکپارچه از اعداد نوتروسوفیک دوزنقه‌ای تک مقداری و میانگین بونفرونی وزن‌دار برای حل مسئله تصمیم‌گیری چندمعیاره گروهی ارائه کردند. چنین ترکیباتی تنها کار رتبه‌بندی گزینه‌ها را براساس وزن‌هایی که از ابتدا توسط تصمیم‌گیرنده مشخص شده‌اند، انجام می‌دهند و قادر به وزن‌دهی همزمان معیارها نیستند. در ادامه، دلی و اوزتورک<sup>۲</sup> [۱۳] روشی برای غیرفازی‌سازی این نوع اعداد و تبدیل آنها به مقادیر قطعی تعریف نمودند. روش ایشان نیز با وجود سادگی در محاسبات، تنها قادر به رتبه‌بندی گزینه‌ها می‌باشد. آل<sup>۳</sup> و همکاران [۱۴] نیز از اعداد نوتروسوفیک دوزنقه‌ای تک مقداری برای پیشنهاد مدلی ارزیابی سیستم‌های اطلاعاتی بهره بردند.

در زمینه پیشرفت‌های روش شناختی برای وزن‌دهی به معیارها، یکپارچه‌سازی روش‌های تحلیل سلسله مراتبی و دلفی در محیط دوزنقه‌ای نوتروسوفیک برای مدل‌سازی مقایسه‌های زوجی توسط عبدالباسط<sup>۴</sup> و همکاران [۱۵] مورد توجه قرار گرفت. اگر چه، این روش‌ها در ترکیب با روش‌های رتبه‌بندی می‌توانند عملکرد مناسب داشته باشند. اما حجم محاسبات انجام شده در آن‌ها به مراتب از بسیاری روش‌های نوین وزندهی بیشتر است. در سال ۲۰۱۸، روش ویکور توسط پرامانیک<sup>۵</sup> و مالیک<sup>۶</sup> تحت اعداد نوتروسوفیک توسعه داده شد. سپس، بیسواس<sup>۷</sup> و همکاران [۱۷] تکنیک ترجیح نظم‌دهی براساس شباهت به راه‌حل ایده‌آل را در محیط نوتروسوفیک دوزنقه‌ای بسط دادند. در ادامه پرامانیک و مالیک [۱۸] استراتژی تودیم را برای همین نوع از داده‌ها توسعه دادند. هر سه روش ارائه شده در منابع [۱۶-۱۸] تنها براساس وزن‌های پیش فرض عمل می‌کنند و براساس آن وزن‌ها رتبه نهایی گزینه‌ها را محاسبه می‌کنند. بعدها، بهات<sup>۸</sup> [۱۹] با توسعه و بهبود مدل تحلیل سلسله مراتبی گروهی نوتروسوفیک تحت اعداد نوتروسوفیک دوزنقه‌ای، امکان نمایش دقیق‌تر قضاوت‌های خبرگان تحت عدم قطعیت را فراهم کرده است. مدل ایشان از طریق اصلاح ریاضی ساختار ماتریس‌های مقایسه‌ای، خاصیت تقارنی را به‌طور ساختاری حفظ می‌کند و تناقضات محاسباتی روش‌های پیشین را حل می‌نماید.

<sup>1</sup> Jana

<sup>2</sup> Öztürk

<sup>3</sup> Aal

<sup>4</sup> Abdel-Basset

<sup>5</sup> Pramanik

<sup>6</sup> Mallick

<sup>7</sup> Biswas

<sup>8</sup> Bhat

با این حال حجم محاسبات در این نوع از روش‌ها نیز به دلیل استفاده از ماتریس‌های مقایسه‌ای همچنان بالا است.

با این وجود، غالب روش‌های نامبرده موجود با محدودیت‌های ساختاری زیر مواجه هستند:

- تمرکز انحصاری بر ارزیابی گزینه‌ها
- عدم محاسبه همزمان وزن معیارها و امتیاز گزینه‌ها
- غفلت از تأثیر تغییرپذیری درون‌معیاری و همبستگی بین معیارها بر تخصیص وزن‌های مسئله

روش سکا (SECA)<sup>۱</sup> که به معنای ارزیابی همزمان معیارها و گزینه‌ها است، با رویکردی نوین [۲۰]، از طریق مدل‌سازی چندهدفه، تخصیص وزن معیارها و رتبه‌بندی گزینه‌ها را یکپارچه می‌سازد. این روش به‌طور جامع تأثیر نوسان‌های اطلاعات درون‌معیاری و همبستگی‌های بین‌معیاری را لحاظ می‌کند. کاربردهای موفق سکا در حوزه‌های عملیاتی شامل: ارزیابی استراتژی‌های تولید [۲۱]، تخصیص بهینه منابع [۲۲]، انتخاب تأمین‌کننده پایدار [۲۳] و ارزیابی ریسک‌ها [۲۴] بوده است. با این حال، توسعه این روش برای محیط نوتروسوفیک دوزنقه‌ای تک‌مقداری (Neu-SECA)<sup>۲</sup> در ادبیات پژوهشی مغفول مانده است.

شکاف تحقیقاتی محوری حاضر، عدم توسعه سکا برای اعداد نوتروسوفیک دوزنقه‌ای تک‌مقداری است که مانع بهره‌برداری کامل از قابلیت‌های آن در شرایط واقعی شده است. این پژوهش با هدف پرکردن این خلا، سه دستاورد بنیادین ارائه می‌دهد:

۱. تقویت مبانی نظری تابع رتبه‌بندی پیشنهادی [۲۵]، از طریق اثبات گزاره‌های ۱، ۲، ۳ و نتایج آنها به همراه تحلیل عملکردشان بر روی یک عدد نوتروسوفیک دوزنقه‌ای برای نشان دادن تطبیق‌پذیری گسترده این تابع در مدل‌سازی و مسائل کاربردی
۲. جایگزینی انحراف معیار با آنترپی شانون<sup>۳</sup> در محاسبه وزن‌های درون‌معیاری، به منظور تولید وزن‌های دقیق‌تر و قابل اتکاتر در ادبیات موضوعی مربوط به مسائل تصمیم‌گیری چندمعیاره روش آنترپی شانون اغلب به‌عنوان یک روش مستقل به تنهایی برای تعیین وزن‌ها استفاده شده است [۲۶] جایگزینی انحراف معیار با آنترپی شانون در روش سکا، یک بهبود مفهومی محسوب می‌شود. این تغییر، مبنا را از سنجش صرف "پراکندگی آماری" به سنجش "محتوای اطلاعاتی و توانایی تمایزگذاری" معیارها تغییر می‌دهد. آنترپی شانون

<sup>۱</sup> Simultaneous Evaluation of Criteria and Alternatives (SECA)

<sup>۲</sup> واژه‌ای اختصاری برای معرفی روش سکا تحت داده‌های نوتروسوفیک

<sup>۳</sup> Shannon entropy

به دلیل پایه تئوریک قوی در تئوری اطلاعات، حساسیت کمتر به داده‌های پرت، و تمرکز ذاتی بر مفاهیم اطلاعات و عدم قطعیت، وزن‌های معتبرتر و مرتبط‌تری برای فرآیند تصمیم‌گیری تولید می‌کند. این جایگزینی، همسو با انتقادات مطرح شده در ادبیات موضوعی [۲۸، ۲۷] بر محدودیت‌های روش‌های کاملاً عینی مانند انحراف معیار است.

۳. توسعه روش سکا در محیط نوتروسوفیک ذوزنقه‌ای تک مقداری تحت روش رتبه‌بندی پیشنهادی و با توجه به اثبات گزاره مربوط به کرانداری خروجی‌های تابع رتبه

۴. تحلیل نتایج حاصل از روش سکای توسعه‌یافته در مقایسه با برخی از روش‌های موجود در مثالی کاربردی

این نوآوری‌ها، روش سکای توسعه‌یافته را به عنوان چارچوبی تحلیلی- نظری در مسائل تصمیم‌گیری چندمعیاره تحت شرایط نامعین تثبیت می‌کند. ساختار نظام‌مند پژوهش برای رسیدن به این اهداف به شرحی که در ادامه می‌آید طراحی گردیده است: در بخش ۲، مبانی مفهومی اعداد نوتروسوفیک با تمرکز ویژه بر اعداد ذوزنقه‌ای تک‌مقداری بازتعریف می‌شود تا زیربنای نظری لازم برای توسعه روش‌شناسی اصلی فراهم آید. بخش ۳ با رویکردی دوگانه، نخست چارچوب کلاسیک روش سکا را تبیین می‌نماید و سپس گسترش آن به محیط نوتروسوفیک تحت عنوان Neu-SECA را محقق می‌سازد. برای دستیابی به این هدف، استفاده از یک روش رتبه‌بندی پارامتری با تقویت مبانی نظری (شامل اثبات گزاره‌های جدید) و اعتبارسنجی عددی، برای به کارگیری در مسائل عملی مورد توجه قرار گرفته است. در بخش ۴، کاربرد الگوریتم توسعه‌یافته در حل مسئله انتخاب بهترین سرمایه‌گذار همراه با تحلیل حساسیت و تحلیل مقایسه‌ای نتایج ارائه می‌گردد. سرانجام، یافته‌های کلیدی، پیشنهاد‌های کاربردی و جهت‌گیری‌های پژوهشی آتی در بخش ۵ گردآوری شده‌اند.

## ۲. مفاهیم پایه‌ای

در این بخش، مفاهیم پایه‌ای مجموعه‌ها و اعداد نوتروسوفیک، به‌ویژه اعداد نوتروسوفیک ذوزنقه‌ای تک‌مقداری، که برای معرفی روش پیشنهادی ضروری هستند، با فرض مجموعه جهانی  $\Pi$  مرور می‌شوند.

تعریف ۱.۲. یک مجموعه نوتروسوفیک تک‌مقداری  $\tilde{A}$  روی مجموعه  $\Pi$  به صورت زیر نمایش داده می‌شود [۵].

$$(۱.۲) \quad \tilde{A} = \left\{ \langle x, (\mu_{\tilde{A}}(x), \tau_{\tilde{A}}(x), \varphi_{\tilde{A}}(x)) \rangle \mid x \in \Pi \right\},$$

که در آن  $\mu_{\tilde{A}}(x)$ ،  $\tau_{\tilde{A}}(x)$  و  $\varphi_{\tilde{A}}(x)$  ترتیب نمایش دهنده توابع متناظر با مقادیر عضویت درستی، ممتنع و نادرستی از مجموعه جهانی  $\Pi$  به بازه  $[0, 1]$  هستند. علاوه بر این، برای هر عددی مانند  $x$  در مجموعه  $\Pi$  مقادیر  $\mu_{\tilde{A}}(x)$ ،  $\tau_{\tilde{A}}(x)$  و  $\varphi_{\tilde{A}}(x)$  در شرط زیر صادق می‌باشند.

$$(۲.۲) \quad 0 \leq \mu_{\tilde{A}}(x) + \tau_{\tilde{A}}(x) + \varphi_{\tilde{A}}(x) \leq 3$$

**تعریف ۲.۲.** یک عدد نوتروسوفیک به فرم  $\tilde{A} = \langle (m, n, p, q); w_{\tilde{A}}, \vartheta_{\tilde{A}}, \theta_{\tilde{A}} \rangle$  عدد نوتروسوفیک ذوزنقه‌ای تک مقداری نامیده می‌شود که در آن  $m, n, p, q$  مقادیری حقیقی و صادق در رابطه  $m \leq n \leq p \leq q$  هستند. علاوه بر این؛

$$(۳.۲) \quad 0 \leq w_{\tilde{A}}, \vartheta_{\tilde{A}}, \theta_{\tilde{A}} \leq 1$$

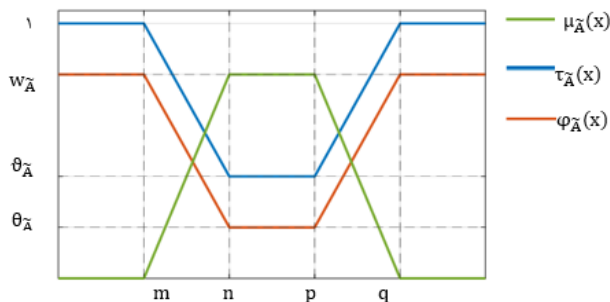
برای چنین عددی، تابع عضویت درستی  $[\cdot, w_{\tilde{A}}]$ ،  $\mu_{\tilde{A}} : \mathbb{R} \rightarrow [\cdot, w_{\tilde{A}}]$  تابع عضویت ممتنع  $[\vartheta_{\tilde{A}}, 1]$ ،  $\tau_{\tilde{A}}(x) : \mathbb{R} \rightarrow [\vartheta_{\tilde{A}}, 1]$  و تابع عضویت نادرستی  $[\theta_{\tilde{A}}, 1]$ ،  $\varphi_{\tilde{A}}(x) : \mathbb{R} \rightarrow [\theta_{\tilde{A}}, 1]$  به ترتیب زیر تعریف شده‌اند [۶].

$$(۴.۲) \quad \tilde{\mu}_A(x) = \begin{cases} \frac{x-m}{n-m} w_{\tilde{A}}, & m \leq x \leq n, \\ w_{\tilde{A}}, & n \leq x \leq p, \\ \frac{q-x}{q-p} w_{\tilde{A}}, & p \leq x \leq q, \\ 0, & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

$$(۵.۲) \quad \tilde{\tau}_A(x) = \begin{cases} \frac{n-x+\tilde{\vartheta}_A(x-m)}{n-m}, & m \leq x \leq n, \\ \tilde{\vartheta}_A, & n \leq x \leq p, \\ \frac{x-p+\tilde{\vartheta}_A(q-x)}{q-p}, & p \leq x \leq q, \\ 1, & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

$$(۶.۲) \quad \tilde{\varphi}_A(x) = \begin{cases} \frac{n-x+\tilde{\theta}_A(x-m)}{n-m}, & m \leq x \leq n, \\ \tilde{\theta}_A, & n \leq x \leq p, \\ \frac{x-p+\tilde{\theta}_A(q-x)}{q-p}, & p \leq x \leq q, \\ 1, & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

شکل ۱، نمایشی از یک عدد نوتروسوفیک ذوزنقه‌ای تک‌مقداری را ارائه داده است. بیشترین درجه عضویت درستی با  $w_{\tilde{A}}$ ، کمترین درجه عضویت ممتنع با  $\vartheta_{\tilde{A}}$  و کمترین درجه عضویت نادرستی با  $\theta_{\tilde{A}}$  نشان داده شده است.  $\mathcal{U}(\mathbb{R})$  نشانگر مجموعه تمام اعداد نوتروسوفیک ذوزنقه‌ای تک‌مقداری روی  $\mathbb{R}$  است.



شکل ۱. عدد نوتروسوفیک ذوزنقه‌ای تک‌مقداری دلخواه

**تعریف ۳.۲.** برای دو عدد نوتروسوفیک ذوزنقه‌ای تک‌مقداری  $\tilde{A}_1 = \langle (m_1, n_1, p_1, q_1); w_{\tilde{A}_1}, \vartheta_{\tilde{A}_1}, \theta_{\tilde{A}_1} \rangle$  و  $\tilde{A}_2 = \langle (m_2, n_2, p_2, q_2); w_{\tilde{A}_2}, \vartheta_{\tilde{A}_2}, \theta_{\tilde{A}_2} \rangle$  اسکالر  $\varkappa$  عملیات جبری زیر تعریف شده‌اند [۷]:

$$(۷.۲) \quad ۱) \quad \tilde{A}_1 \oplus \tilde{A}_2 = \langle (m_1 + m_2, n_1 + n_2, p_1 + p_2, q_1 + q_2); w_{\tilde{A}_1} \wedge w_{\tilde{A}_2}, \vartheta_{\tilde{A}_1} \vee \vartheta_{\tilde{A}_2}, \theta_{\tilde{A}_1} \vee \theta_{\tilde{A}_2} \rangle.$$

$$۲) \quad \varkappa \tilde{A}_1 = \begin{cases} \langle (\varkappa m_1, \varkappa n_1, \varkappa p_1, \varkappa q_1); w_{\tilde{A}_1}, \vartheta_{\tilde{A}_1}, \theta_{\tilde{A}_1} \rangle, & \varkappa \geq 0, \\ \langle (\varkappa q_1, \varkappa p_1, \varkappa n_1, \varkappa m_1); w_{\tilde{A}_1}, \vartheta_{\tilde{A}_1}, \theta_{\tilde{A}_1} \rangle, & \varkappa \leq 0. \end{cases}$$

**تعریف ۴.۲.** برای عدد نوتروسوفیک ذوزنقه‌ای تک‌مقداری  $\tilde{A} = \langle (m, n, p, q); w_{\tilde{A}}, \vartheta_{\tilde{A}}, \theta_{\tilde{A}} \rangle$  سه نوع مجموعه برش مجزا:  $\alpha$  برش،  $\beta$  برش و  $\delta$  برش و مجموعه برش ترکیبی:  $(\alpha, \beta, \delta)$

برش، به صورت زیر تعریف می‌شوند [۲۵]:

(۱۰.۲)

$$۱) \tilde{A}_\alpha = \{x \mid \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha\} = \left[ m + \frac{\alpha}{w_{\tilde{A}}}(n-m), q + \frac{\alpha}{w_{\tilde{A}}}(p-q) \right], \quad 0 \leq \alpha \leq w_{\tilde{A}}.$$

(۱۱.۲)

$$۲) \tilde{A}_\beta = \{x \mid \tau_{\tilde{A}}(x) \leq \beta\} = \left[ m + \frac{1-\beta}{1-\vartheta_{\tilde{A}}}(n-m), q + \frac{1-\beta}{1-\vartheta_{\tilde{A}}}(p-q) \right], \quad \vartheta_{\tilde{A}} \leq \beta \leq 1.$$

(۱۲.۲)

$$۳) \tilde{A}_\delta = \{x \mid \varphi_{\tilde{A}}(x) \leq \delta\} = \left[ m + \frac{1-\delta}{1-\theta_{\tilde{A}}}(n-m), q + \frac{1-\delta}{1-\theta_{\tilde{A}}}(p-q) \right], \quad \theta_{\tilde{A}} \leq \delta \leq 1.$$

$$\begin{aligned} ۴) \tilde{A}_{(\alpha, \beta, \delta)} &= \{x \mid \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha, \tau_{\tilde{A}}(x) \leq \beta, \varphi_{\tilde{A}}(x) \leq \delta\} \\ &= \left[ m + \frac{\alpha}{w_{\tilde{A}}}(n-m), q + \frac{\alpha}{w_{\tilde{A}}}(p-q) \right] \cap \left[ m + \frac{1-\beta}{1-\vartheta_{\tilde{A}}}(n-m), q + \frac{1-\beta}{1-\vartheta_{\tilde{A}}}(p-q) \right] \cap \\ &\left[ m + \frac{1-\delta}{1-\theta_{\tilde{A}}}(n-m), q + \frac{1-\delta}{1-\theta_{\tilde{A}}}(p-q) \right], \end{aligned}$$

(۱۳.۲)

$$0 \leq \alpha \leq w_{\tilde{A}}, \quad \vartheta_{\tilde{A}} \leq \beta \leq 1, \quad \theta_{\tilde{A}} \leq \delta \leq 1, \quad 0 \leq \alpha + \beta + \delta \leq 2 + w_{\tilde{A}}.$$

**تعریف ۵.۲.** برای عدد نوتروسوفیک دوزنقه‌ای تک‌مقداری مانند  $\tilde{A} = \langle (m, n, p, q); w_{\tilde{A}}, \vartheta_{\tilde{A}}, \theta_{\tilde{A}} \rangle$  مجموعه‌های  $\beta'$  برش،  $\delta'$  برش و  $(\alpha, \beta', \delta')$  برش به ترتیب با بازه‌های زیر نمایش داده شده است [۲۵].

$$۱) \tilde{A}_{\beta'} = \{x \mid \tau'_{\tilde{A}}(x) \geq \beta'\} = \left[ m + \frac{\beta'}{1-\vartheta_{\tilde{A}}}(n-m), q + \frac{\beta'}{1-\vartheta_{\tilde{A}}}(p-q) \right],$$

(۱۴.۲)

$$0 \leq \beta' \leq 1 - \vartheta_{\tilde{A}}.$$

$$۲) \tilde{A}_{\delta'} = \{x \mid \varphi'_{\tilde{A}}(x) \geq \delta'\} = \left[ m + \frac{\delta'}{1-\theta_{\tilde{A}}}(n-m), q + \frac{\delta'}{1-\theta_{\tilde{A}}}(p-q) \right],$$

(۱۵.۲)

$$0 \leq \delta' \leq 1 - \theta_{\tilde{A}}.$$

$$۳) \tilde{A}_{(\alpha, \beta', \delta')} = \left\{ x \mid \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha, \tau'_{\tilde{A}}(x) \geq \beta', \varphi'_{\tilde{A}}(x) \geq \delta' \right\} =$$

(۱۶.۲)

$$\begin{aligned} &\left[ m + \frac{\alpha}{w_{\tilde{A}}}(n-m), q + \frac{\alpha}{w_{\tilde{A}}}(p-q) \right] \cap \left[ m + \frac{\beta'}{1-\vartheta_{\tilde{A}}}(n-m), q + \frac{\beta'}{1-\vartheta_{\tilde{A}}}(p-q) \right] \\ &\cap \left[ m + \frac{\delta'}{1-\theta_{\tilde{A}}}(n-m), q + \frac{\delta'}{1-\theta_{\tilde{A}}}(p-q) \right], \quad 0 \leq \alpha \leq w_{\tilde{A}}, \end{aligned}$$

(۱۷.۲)

$$0 \leq \beta' \leq 1 - \vartheta_{\tilde{A}}, \quad 0 \leq \delta' \leq 1 - \theta_{\tilde{A}}, \quad 0 \leq \alpha + \beta' + \delta' \leq 2 + w_{\tilde{A}} - \vartheta_{\tilde{A}} - \theta_{\tilde{A}}.$$

در ادامه، به منظور گسترش برخی مفاهیم و مبانی نظری در بخش‌های پیش‌رو، یک روش رتبه‌بندی پارامتریک که توسط فرنام و همکاران [۲۵] (براساس گسترش تئوری و کاربردی در منابع [۲۹، ۳۰]) معرفی شده است را بیان می‌کنیم. لازم به ذکر است پیشرفت در مبانی نظری رتبه‌بندی اعداد نوتروسوفیک ذوزنقه‌ای، نه تنها یک ضرورت آکادمیک، بلکه پایه‌ای برای دگرگونی در سیستم‌های تصمیم‌گیری کاربردی شناخته می‌شود.

**تعریف ۶.۲.** برای عدد نوتروسوفیک ذوزنقه‌ای مانند  $\tilde{A} = \langle (m, n, p, q); w_{\tilde{A}}, \vartheta_{\tilde{A}}, \theta_{\tilde{A}} \rangle$ ، براساس بازه‌های برش تابع عضویت  $\tilde{A}_\alpha = [\underline{F}(z), \overline{F}(z)]$ ، برش متمم  $\tilde{A}_{\delta'} = [\underline{h}'(z), \overline{h}'(z)]$  و برش متمم نادرستی  $\tilde{A}_{\beta'} = [\underline{g}'(z), \overline{g}'(z)]$  می‌شود:

$$R_{(\alpha, \beta', \delta')}(\tilde{A}) = \int_{\alpha}^{w_{\tilde{A}}} (\underline{F}(z) + \overline{F}(z)) dz + \int_{\beta'}^{1-\vartheta_{\tilde{A}}} (\underline{g}'(z) + \overline{g}'(z)) dz + \int_{\delta'}^{1-\theta_{\tilde{A}}} (\underline{h}'(z) + \overline{h}'(z)) dz. \quad (18.2)$$

که در آن

(۱۹.۲)

$$\int_{\alpha}^{w_{\tilde{A}}} (\underline{F}(z) + \overline{F}(z)) dz = (m+q)(w_{\tilde{A}} - \alpha) + (n+p-m-q) \frac{w_{\tilde{A}}^{\vartheta} - \alpha^{\vartheta}}{\vartheta w_{\tilde{A}}}$$

(۲۰.۲)

$$\int_{\beta'}^{1-\vartheta_{\tilde{A}}} (\underline{g}'(z) + \overline{g}'(z)) dz = (m+q)(1 - \vartheta_{\tilde{A}} - \beta') + (n+p-m-q) \frac{(1 - \vartheta_{\tilde{A}})^{\vartheta} - \beta'^{\vartheta}}{\vartheta (1 - \vartheta_{\tilde{A}})}$$

(۲۱.۲)

$$\int_{\delta'}^{1-\theta_{\tilde{A}}} (\underline{h}'(z) + \overline{h}'(z)) dz = (m+q)(1 - \theta_{\tilde{A}} - \delta') + (n+p-m-q) \frac{(1 - \theta_{\tilde{A}})^{\vartheta} - \delta'^{\vartheta}}{\vartheta (1 - \theta_{\tilde{A}})}$$

به این معنا که برای برش‌های با مقادیر بالاتر، رتبه متناظر عددی بیشتر به دست می‌آید. به‌طور خلاصه:

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}_{(\alpha, \beta', \delta')}(\tilde{A}) &= (m+q)(w_{\tilde{A}} - \alpha) + (n+p-m-q) \left( \frac{w_{\tilde{A}}^{\vartheta} - \alpha^{\vartheta}}{\vartheta w_{\tilde{A}}} \right) \\ &+ (m+q)(1 - \vartheta_{\tilde{A}} - \beta') + (n+p-m-q) \left( \frac{(1 - \vartheta_{\tilde{A}})^{\vartheta} - \beta'^{\vartheta}}{\vartheta (1 - \vartheta_{\tilde{A}})} \right) \\ &+ (m+q)(1 - \theta_{\tilde{A}} - \delta') + (n+p-m-q) \left( \frac{(1 - \theta_{\tilde{A}})^{\vartheta} - \delta'^{\vartheta}}{\vartheta (1 - \theta_{\tilde{A}})} \right). \end{aligned} \quad (22.2)$$

طبق رابطه (۲۲.۲) داریم:

$$\mathfrak{R}_{\alpha, \beta', \delta'}(\tilde{A}) = 0 \text{ آن‌گاه } \tilde{A} = \langle (0, 0, 0, 0); 1, 0, 0 \rangle \text{ ویژگی ۱: اگر}$$

ویژگی ۲: اگر  $\langle 1, 0, 0 \rangle$ ،  $\tilde{A} = \langle (m, m, m, m) \rangle$ ، آن‌گاه

$$\mathfrak{R}_{\alpha, \beta', \delta'} = 2m(1 - \alpha) + 2m(1 - \delta')$$

در حالت خاص تر  $\mathfrak{R}_{.,.,.}(\tilde{A}) = 6m$

### ۳. توسعه روش سکا

به دلیل اهمیت رویکردهای نوین در تصمیم‌گیری، در این بخش یکی از جدیدترین روش‌ها را بررسی و طبق ساختاری منطقی برای به‌کارگیری تحت داده‌های نوتروسوفیک گسترش می‌دهیم.

#### ۱.۳. روش سکای کلاسیک.

روش سکا که در سال ۲۰۱۸ توسط کشاورز قربایی و همکاران ارائه شد [۲۰]، یک چارچوب نوین در تصمیم‌گیری چندمعیاره محسوب می‌گردد. این روش با به‌کارگیری مدل برنامه‌ریزی چندهدفه غیرخطی، امکان ارزیابی یکپارچه معیارها و گزینه‌ها را فراهم می‌سازد. ویژگی خاص روش سکا، محاسبه همزمان وزن معیارها و امتیاز نهایی گزینه‌ها است، ضمن آنکه تغییرپذیری وزن‌های درون‌معیاری و بین‌معیاری را نیز مدل‌سازی می‌کند. حل این مدل به تصمیم‌گیرنده اجازه می‌دهد تا اهمیت نسبی معیارها و عملکرد کلی گزینه‌ها را با دقت و کارایی مناسب استنباط نماید [۲۱].

در کاربرد عملی، فرض کنید مجموعه گزینه‌های  $\tilde{E} = \{E_1, E_2, \dots, E_t\}$  را به همراه معیارهای  $\tilde{C} = \{\tilde{C}_1, \tilde{C}_2, \dots, \tilde{C}_u\}$  در اختیار داشته باشیم. در ماتریس تصمیم اطلاعات اولیه  $Z = (z_{ij})_{t \times u}$  عدد  $z_{ij}$  نمایانگر عملکرد گزینه  $i$ ام تحت معیار  $j$ ام است. نرمال‌سازی ماتریس تصمیم برای معیارهای سود  $b$  و هزینه  $c$  مطابق با روش زیر انجام می‌پذیرد.

$$z_{ij}^n = \begin{cases} \frac{z_{ij}}{\max_i z_{ij}}, & j \in b, \\ \frac{\min_i z_{ij}}{z_{ij}}, & j \in c. \end{cases}$$

که در این رابطه  $z_{ij}^n$ ، نشان‌دهنده مقدار نرمال مربوط به امتیاز هر یک از گزینه‌ها در هر معیار است. در ادامه طبق داده‌های ماتریس تصمیم نرمالیزه، دو گروه وزن زیر برای معیارها در نظر گرفته می‌شوند.

(۱) وزن اختصاص‌یافته به انحراف معیار  $\sigma_j$  که بیانگر پراکندگی درون‌بردار داده‌های معیار  $j$ ام است.

۲) جهت استخراج اطلاعات بین معیاری از ماتریس تصمیم، می‌بایست ضریب همبستگی زوجی بین بردارهای معیار محاسبه گردد. در اینجا  $r_{jl}$  نمایانگر همبستگی بین بردارهای معیار  $j$  و  $l$  بوده و درجه‌ی تقابل معیار  $j$ ام با سایر معیارها  $\rho_j$  از رابطه‌ی (۱.۳) استنتاج می‌شود.

$$(۱.۳) \quad \rho_j = \sum_{l=1}^u (1 - r_{jl})$$

وزن‌های ناشی از اطلاعات درون معیاری و بین معیاری مطابق فرمول‌های (۲.۳) و (۳.۳) نرمال‌سازی می‌گردند.

$$(۲.۳) \quad \bar{\sigma}_j = \frac{\sigma_j}{\sum_{l=1}^u \sigma_l}$$

$$(۳.۳) \quad \bar{\rho}_j = \frac{\rho_j}{\sum_{l=1}^u \rho_l}$$

که در آن  $\bar{\sigma}_j$  و  $\bar{\rho}_j$  به ترتیب انحراف معیار نرمال و شاخص همبستگی نرمال را نشان می‌دهند. ساختار اصلی مدل سکا پس از مرحله نرمال‌سازی داده‌ها و تعیین وزن‌های آغازین بر مبنای ارزیابی‌های درون معیاری و بین معیاری به این شکل تعریف می‌شود:

ساختار ۱

$$\text{Max } S_i = \sum_{j=1}^u \omega_j z_{ij}^n, \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, t\},$$

$$\text{Min } l_{\bar{\sigma}} = \sum_{j=1}^u (\omega_j - \bar{\sigma}_j)^2,$$

$$\text{Min } l_{\bar{\rho}} = \sum_{j=1}^u (\omega_j - \bar{\rho}_j)^2,$$

$$\sum_{j=1}^u \omega_j = 1,$$

$$\varepsilon \leq \omega_j, \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, u\}.$$

که در آن  $\omega_j$  وزن نهایی معیار  $j$ ام،  $S_i$  امتیاز گزینه  $i$ ام،  $l_{\bar{\sigma}}$  مجموع انحرافات وزن‌ها از انحراف معیار نرمال،  $l_{\bar{\rho}}$  مجموع انحرافات وزن‌ها از همبستگی نرمال و  $\varepsilon$  عدد مثبت کوچکی می‌باشند. تبدیل مدل چندهدفه در ساختار ۱ به مدل تک‌هدفه تحت چارچوب تابع هدف جدید، به منظور پیشینه‌سازی برای حداقل امتیاز عملکرد کلی گزینه‌ها انجام می‌شود. با توجه به ضرورت مینیمم‌سازی انحراف از نقاط مرجع، این مؤلفه با ضریب  $\zeta$  از تابع هدف کسر می‌گردد. ضریب  $\zeta$  میزان اهمیت تحقق نقاط مرجع در وزن‌دهی معیارها را تنظیم می‌کند. محدودیت  $\omega_j \leq S_i$

برای هر  $i \in \{1, 2, \dots, t\}$  کران پایینی برای امتیاز عملکرد کلی هر گزینه تعیین می‌نماید. ساختار ۲

$$\begin{aligned} \text{Max } Z &= l_S - \zeta(l_{\bar{\sigma}} + l_{\bar{\rho}}) \\ \text{s.t. } l_S &\leq S_i, \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, t\}, \end{aligned}$$

$$S_i = \sum_{j=1}^u \omega_j z_{ij}^n, \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, t\},$$

$$l_{\bar{\sigma}} = \sum_{j=1}^u (\omega_j - \bar{\sigma}_j)^2,$$

$$l_{\bar{\rho}} = \sum_{j=1}^u (\omega_j - \bar{\rho}_j)^2,$$

$$\sum_{j=1}^u \omega_j = 1,$$

$$\varepsilon \leq \omega_j, \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, u\}.$$

با تنظیم ضریب همگرایی  $\zeta$  و حل مدل نهایی، امتیاز بهینه گزینه‌ها  $S_i$  و وزن‌های مطلوب معیارها  $\omega_j$  استخراج می‌شوند.

### ۲.۳. رتبه‌بندی اعداد نوتروسوفیک؛ توسعه مفاهیم نظری.

اعداد نوتروسوفیک پیوسته، با عبور از محدودیت‌های سیستم‌های کلاسیک، سه مؤلفه‌ی درستی، ممتنع و نادرستی را به‌طور همزمان مدل‌سازی می‌کنند و بدین ترتیب به ابزاری خاص برای نمایش واقعیت‌های چندلایه و مستقل داده‌ها تبدیل می‌شوند. با این حال، قدرت تحلیلی این اعداد تنها در سایه‌ی روش‌های رتبه‌بندی منطقی آشکار می‌گردد. نخستین چالش، ماهیت پیوسته‌ی آن‌هاست که در مقایسه با اعداد گسسته، مستلزم محاسبات پیچیده‌تر و توابع ریاضی پیشرفته است. افزون بر این، تقابل ذاتی بین مؤلفه‌های متضاد (مانند عملکرد ایده‌آل در یک شاخص و ضعف در دیگری) سیستم‌ها را با معمای ایجاد تعادل مواجه می‌سازد. اما حیاتی‌ترین چالش، نحوه برخورد با بخش ممتنع و نادرستی است که می‌تواند تصمیم‌گیری را به فرآیندی تصادفی تقلیل می‌دهد. با وجود این چالش‌ها، دامنه‌ی کاربردهای رتبه‌بندی این اعداد در مواردی همچون تشخیص پزشکی، اولویت‌بندی تشخیص‌های احتمالی بر اساس ترکیب شواهد مثبت، منفی و عدم قطعیت‌ها؛ مدیریت ریسک، پیشگیری از فجایع از طریق محاسبه‌ی همزمان احتمال وقوع حادثه و اطمینان به راهکارهای پیشگیرانه؛ و در سیستم‌های توصیه‌گر، تحلیل ترجیحات کاربران

همراه با انتقادات و ابهامات برای ارائه‌ی پیشنهادهای شفاف‌تر به‌حدی گسترده و اثرگذار است که نمی‌توان آن را نادیده گرفت.

بدون تقویت نظریه، روش‌های رتبه‌بندی ممکن است ناقص، ناعادلانه یا گمراه‌کننده عمل کنند. از جمله دلایل کلیدی اهمیت توسعه‌ی نظری در این حوزه شامل مواردی همچون پایه‌ریزی معیارهای دقیق برای مقایسه‌ی منصفانه و تدوین اصول فراگیر مانند یکنواختی در ارزیابی یا توزیع عادلانه‌ی اهمیت مؤلفه‌ها است. بیان ویژگی‌های ریاضی مانند یکنوایی در رتبه‌بندی اعداد نوتروسوفیک ذوزنقه‌ای تک مقداری نه تنها یک ضرورت نظری، بلکه پیش‌نیازی عملیاتی برای تضمین اعتبارسنجی روش، قابلیت بخشی برای پیش‌بینی نتایج و نوعی انصاف تحلیلی در سیستم‌های تصمیم‌گیری است. این تحلیل ریاضی قادر است:

۱. از بروز ناسازگاری‌های رتبه‌ای جلوگیری نماید،
۲. شفافیت فرآیند تصمیم‌گیری را ارتقا بخشد،
۳. و کاربردپذیری در حوزه‌های حساس (پزشکی، مالی، مدیریت بحران) را ممکن سازد.

نکته اساسی آنکه روش‌های فاقد یکنوایی، مستعد تولید خروجی‌های ناپایدار هستند که می‌توانند منجر به خطاهای سیستماتیک در تصمیم‌گیری و پیامدهای جبران‌ناپذیر عملیاتی گردند. بنابراین، اثبات یکنوایی نه صرفاً یک مزیت جانبی، بلکه سنگ بنای توسعه عملیاتی این روش رتبه‌بندی محسوب می‌شود. به‌طور کلی، گزاره‌ها و نتایج زیر برای اعداد نوتروسوفیک ذوزنقه‌ای مثبت ذکر می‌شود.

**گزاره ۱.۳.** اگر  $\langle (m_1, n_1, p_1, q_1); w_{\tilde{A}_1}, \vartheta_{\tilde{A}_1}, \theta_{\tilde{A}_1} \rangle$  و  $\langle (m_2, n_2, p_2, q_2); w_{\tilde{A}_2}, \vartheta_{\tilde{A}_2}, \theta_{\tilde{A}_2} \rangle$  دو عدد نوتروسوفیک ذوزنقه‌ای تک‌مقداری باشند، آنگاه هر یک از موارد زیر برای تابع رتبه (۲.۲) برقرار است.

(۱) اگر  $m_2 = m_1 + \varsigma, n_2 = n_1, p_2 = p_1, q_2 = q_1$  و  $w_{\tilde{A}_2} = w_{\tilde{A}_1}, \vartheta_{\tilde{A}_2} = \vartheta_{\tilde{A}_1}, \theta_{\tilde{A}_2} = \theta_{\tilde{A}_1}$ ، به‌طوری‌که  $0 \leq \varsigma \leq n_2 - m_2$  آنگاه  $\mathfrak{R}_{\alpha, \beta', \delta'}(\tilde{A}_2) \geq \mathfrak{R}_{\alpha, \beta', \delta'}(\tilde{A}_1)$

(۲) اگر  $m_2 = m_1, n_2 = n_1 + \varsigma, p_2 = p_1, q_2 = q_1$  و  $\theta_{\tilde{A}_2} = \theta_{\tilde{A}_1}$ ، به‌طوری‌که  $0 \leq \varsigma \leq p_2 - n_2$  آنگاه  $w_{\tilde{A}_2} = w_{\tilde{A}_1}, \vartheta_{\tilde{A}_2} = \vartheta_{\tilde{A}_1}$  و  $\mathfrak{R}_{\alpha, \beta', \delta'}(\tilde{A}_2) \geq \mathfrak{R}_{\alpha, \beta', \delta'}(\tilde{A}_1)$

(۳) اگر  $m_2 = m_1, n_2 = n_1, p_2 = p_1 + \varsigma, q_2 = q_1$  و

به طوری که  $w_{\tilde{A}_2} = w_{\tilde{A}_1}, \vartheta_{\tilde{A}_2} = \vartheta_{\tilde{A}_1}, \theta_{\tilde{A}_2} = \theta_{\tilde{A}_1}$ ، آن گاه  $\mathfrak{R}_{(\alpha, \beta', \delta')}(\tilde{A}_2) \geq \mathfrak{R}_{(\alpha, \beta', \delta')}(\tilde{A}_1)$

(۴) اگر  $w_{\tilde{A}_2} = w_{\tilde{A}_1}$  و  $m_2 = m_1, n_2 = n_1, p_2 = p_1, q_2 = q_1 + \varsigma$ ، آن گاه  $\mathfrak{R}_{(\alpha, \beta', \delta')}(\tilde{A}_2) \geq \mathfrak{R}_{(\alpha, \beta', \delta')}(\tilde{A}_1)$  به طوری که  $\bullet \leq \varsigma$ ،  $\vartheta_{\tilde{A}_2} = \vartheta_{\tilde{A}_1}, \theta_{\tilde{A}_2} = \theta_{\tilde{A}_1}$

**اثبات.** (۱) با جایگذاری فرضیه‌ها در تابع رتبه ارائه شده در رابطه (۲۲.۲) برای عدد

$$\tilde{A}_2 = \langle (m_1 + \varsigma, n_1, p_1, q_1); w_{\tilde{A}_1}, \vartheta_{\tilde{A}_1}, \theta_{\tilde{A}_1} \rangle$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}_{(\alpha, \beta', \delta')}(\tilde{A}_2) &= (m_1 + \varsigma + q_1)(w_{\tilde{A}_1} - \alpha) + (n_1 + p_1 - m_1 - \varsigma - q_1) \left( \frac{w_{\tilde{A}_1}^\gamma - \alpha^\gamma}{\gamma w_{\tilde{A}_1}} \right) \\ &\quad + (m_1 + \varsigma + q_1)(1 - \vartheta_{\tilde{A}_1} - \beta') + (n_1 + p_1 - m_1 - \varsigma - q_1) \frac{(1 - \vartheta_{\tilde{A}_1})^\gamma - (\beta')^\gamma}{\gamma(1 - \vartheta_{\tilde{A}_1})} \\ &\quad + (m_1 + \varsigma + q_1)(1 - \theta_{\tilde{A}_1} - \delta') + (n_1 + p_1 - m_1 - \varsigma - q_1) \frac{(1 - \theta_{\tilde{A}_1})^\gamma - (\delta')^\gamma}{\gamma(1 - \theta_{\tilde{A}_1})}. \end{aligned}$$

پس از فاکتورگیری داریم:

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}_{(\alpha, \beta', \delta')}(\tilde{A}_2) &= (m_1 + \varsigma + q_1) \left( w_{\tilde{A}_1} - \alpha + 1 - \vartheta_{\tilde{A}_1} - \beta' + 1 - \theta_{\tilde{A}_1} - \delta' \right) \\ &\quad + (n_1 + p_1 - m_1 - \varsigma - q_1) \left( \frac{w_{\tilde{A}_1}^\gamma - \alpha^\gamma}{\gamma w_{\tilde{A}_1}} + \frac{(1 - \vartheta_{\tilde{A}_1})^\gamma - \beta'^\gamma}{\gamma(1 - \vartheta_{\tilde{A}_1})} + \frac{(1 - \theta_{\tilde{A}_1})^\gamma - \delta'^\gamma}{\gamma(1 - \theta_{\tilde{A}_1})} \right). \end{aligned}$$

اکنون کافی است نشان دهیم که  $\mathfrak{R}_{(\alpha, \beta', \delta')}(\tilde{A}_2) - \mathfrak{R}_{(\alpha, \beta', \delta')}(\tilde{A}_1) \geq \bullet$

$$\begin{aligned} &\mathfrak{R}_{(\alpha, \beta', \delta')}(\tilde{A}_2) - \mathfrak{R}_{(\alpha, \beta', \delta')}(\tilde{A}_1) \\ &= \left\{ (m_1 + \varsigma + q_1) (w_{\tilde{A}_1} - \alpha + 1 - \vartheta_{\tilde{A}_1} - \beta' + 1 - \theta_{\tilde{A}_1} - \delta') \right. \\ &\quad \left. + (n_1 + p_1 - m_1 - \varsigma - q_1) \left( \frac{w_{\tilde{A}_1}^\gamma - \alpha^\gamma}{\gamma w_{\tilde{A}_1}} + \frac{(1 - \vartheta_{\tilde{A}_1})^\gamma - \beta'^\gamma}{\gamma(1 - \vartheta_{\tilde{A}_1})} + \frac{(1 - \theta_{\tilde{A}_1})^\gamma - \delta'^\gamma}{\gamma(1 - \theta_{\tilde{A}_1})} \right) \right\} \\ &\quad - \left\{ (m_1 + q_1) (w_{\tilde{A}_1} - \alpha + 1 - \vartheta_{\tilde{A}_1} - \beta' + 1 - \theta_{\tilde{A}_1} - \delta') \right. \\ &\quad \left. + (n_1 + p_1 - m_1 - q_1) \left( \frac{w_{\tilde{A}_1}^\gamma - \alpha^\gamma}{\gamma w_{\tilde{A}_1}} + \frac{(1 - \vartheta_{\tilde{A}_1})^\gamma - \beta'^\gamma}{\gamma(1 - \vartheta_{\tilde{A}_1})} + \frac{(1 - \theta_{\tilde{A}_1})^\gamma - \delta'^\gamma}{\gamma(1 - \theta_{\tilde{A}_1})} \right) \right\} \end{aligned}$$

با حذف جمله‌های مشابه:

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}_{(\alpha, \beta', \delta')}(\tilde{A}_2) - \mathfrak{R}_{(\alpha, \beta', \delta')}(\tilde{A}_1) &= \varsigma \left( w_{\tilde{A}_1} - \alpha + 1 - \vartheta_{\tilde{A}_1} - \beta' + 1 - \theta_{\tilde{A}_1} - \delta' \right) \\ &\quad - \varsigma \left( \frac{w_{\tilde{A}_1}^\gamma - \alpha^\gamma}{\gamma w_{\tilde{A}_1}} + \frac{(1 - \vartheta_{\tilde{A}_1})^\gamma - \beta'^\gamma}{\gamma(1 - \vartheta_{\tilde{A}_1})} + \frac{(1 - \theta_{\tilde{A}_1})^\gamma - \delta'^\gamma}{\gamma(1 - \theta_{\tilde{A}_1})} \right). \end{aligned}$$

از آنجا که رابطه بالا، دارای سه تفاضل مربوط به قسمت درستی، ممتنع و نادرستی است. برای هر یک می‌توان نوشت:

$$i. \quad \varsigma(w_{\bar{A}_1} - \alpha) - \varsigma\left(\frac{w_{\bar{A}_1}^\gamma - \alpha^\gamma}{\gamma w_{\bar{A}_1}}\right) = \varsigma(w_{\bar{A}_1} - \alpha) \left(1 - \frac{w_{\bar{A}_1} + \alpha}{\gamma w_{\bar{A}_1}}\right) \\ = \varsigma(w_{\bar{A}_1} - \alpha) \left(\frac{w_{\bar{A}_1} - \alpha}{\gamma w_{\bar{A}_1}}\right) \geq 0,$$

$$ii. \quad \varsigma(1 - \vartheta_{\bar{A}_1} - \beta') - \varsigma\left(\frac{(1 - \vartheta_{\bar{A}_1})^\gamma - \beta'^\gamma}{\gamma(1 - \vartheta_{\bar{A}_1})}\right) \\ = \varsigma(1 - \vartheta_{\bar{A}_1} - \beta') \left(1 - \frac{1 - \vartheta_{\bar{A}_1} + \beta'}{\gamma(1 - \vartheta_{\bar{A}_1})}\right) = \varsigma(1 - \vartheta_{\bar{A}_1} - \beta') \left(\frac{1 - \vartheta_{\bar{A}_1} - \beta'}{\gamma(1 - \vartheta_{\bar{A}_1})}\right) \geq 0,$$

$$iii. \quad \varsigma(1 - \theta_{\bar{A}_1} - \delta') - \varsigma\left(\frac{(1 - \theta_{\bar{A}_1})^\gamma - \delta'^\gamma}{\gamma(1 - \theta_{\bar{A}_1})}\right) \\ = \varsigma(1 - \theta_{\bar{A}_1} - \delta') \left(1 - \frac{1 - \theta_{\bar{A}_1} + \delta'}{\gamma(1 - \theta_{\bar{A}_1})}\right) = \varsigma(1 - \theta_{\bar{A}_1} - \delta') \left(\frac{1 - \theta_{\bar{A}_1} - \delta'}{\gamma(1 - \theta_{\bar{A}_1})}\right) \geq 0.$$

در نتیجه  $\mathfrak{R}_{(\alpha, \beta', \delta')}(\tilde{A}_2) - \mathfrak{R}_{(\alpha, \beta', \delta')}(\tilde{A}_1) \geq 0$  اثبات سایر موارد مشابه حالت اول است. □

**نتیجه ۲.۳.** تابع رتبه  $\mathfrak{R}_{(\alpha, \beta', \delta')}$ ، برای هر عدد دلخواه  $\tilde{A}_1 = \langle (m_1, n_1, p_1, q_1); w_{\bar{A}_1}, \vartheta_{\bar{A}_1}, \theta_{\bar{A}_1} \rangle$

(۱) در صورت افزایش هر یک از مقادیر  $m_1, n_1, p_1, q_1$  حافظ یکنوایی است.

(۲) در صورت افزایش همزمان مقادیر  $m_1, n_1, p_1, q_1$  حافظ یکنوایی است.

**گزاره ۳.۳.** اگر  $\tilde{A}_1 = \langle (m_1, n_1, p_1, q_1); w_{\bar{A}_1}, \vartheta_{\bar{A}_1}, \theta_{\bar{A}_1} \rangle$  و  $\tilde{A}_2 = \langle (m_2, n_2, p_2, q_2); w_{\bar{A}_2}, \vartheta_{\bar{A}_2}, \theta_{\bar{A}_2} \rangle$  باشند، آن‌گاه هر یک از موارد زیر برای تابع رتبه (۲۲.۲) برقرار است.

(۱) اگر  $m_2 = m_1, n_2 = n_1, p_2 = p_1, q_2 = q_1$  و  $0 \leq \varsigma \leq 1 - w_{\bar{A}_1}$  به‌طوریکه  $w_{\bar{A}_2} = w_{\bar{A}_1} + \varsigma, \vartheta_{\bar{A}_2} = \vartheta_{\bar{A}_1}, \theta_{\bar{A}_2} = \theta_{\bar{A}_1}$  باشد، آن‌گاه  $\mathfrak{R}_{(\alpha, \beta', \delta')}(\tilde{A}_2) \geq \mathfrak{R}_{(\alpha, \beta', \delta')}(\tilde{A}_1)$

(۲) اگر  $m_2 = m_1, n_2 = n_1, p_2 = p_1, q_2 = q_1$  و  $0 \leq \varsigma \leq 1 - \vartheta_{\bar{A}_1}$  به‌طوریکه  $w_{\bar{A}_2} = w_{\bar{A}_1}, \vartheta_{\bar{A}_2} = \vartheta_{\bar{A}_1} + \varsigma, \theta_{\bar{A}_2} = \theta_{\bar{A}_1}$  باشد، آن‌گاه  $\mathfrak{R}_{(\alpha, \beta', \delta')}(\tilde{A}_2) \leq \mathfrak{R}_{(\alpha, \beta', \delta')}(\tilde{A}_1)$

(۳) اگر  $m_2 = m_1, n_2 = n_1, p_2 = p_1, q_2 = q_1$  و  $w_{\tilde{A}_2} = w_{\tilde{A}_1}, \vartheta_{\tilde{A}_2} = \vartheta_{\tilde{A}_1}, \theta_{\tilde{A}_2} = \theta_{\tilde{A}_1} + \varsigma$  به طوری که  $0 \leq \varsigma \leq 1 - \theta_{\tilde{A}_1}$  آنگاه  $\mathfrak{R}_{(\alpha, \beta', \delta')}(\tilde{A}_2) \leq \mathfrak{R}_{(\alpha, \beta', \delta')}(\tilde{A}_1)$ .

**اثبات.** (۱) با جایگذاری فرضیه‌ها در تابع رتبه ارائه شده در رابطه (۲۲.۲) برای عدد  $\tilde{A}_2 = \langle (m_1, n_1, p_1, q_1); w_{\tilde{A}_1} + \varsigma, \vartheta_{\tilde{A}_1}, \theta_{\tilde{A}_1} \rangle$

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}_{(\alpha, \beta', \delta')}(\tilde{A}_2) &= (m_1 + q_1)((w_{\tilde{A}_1} + \varsigma) - \alpha) + (n_1 + p_1 - m_1 - q_1) \left( \frac{(w_{\tilde{A}_1} + \varsigma)^r - \alpha^r}{r(w_{\tilde{A}_1} + \varsigma)} \right) \\ &\quad + (m_1 + q_1)(1 - \vartheta_{\tilde{A}_1} - \beta') + (n_1 + p_1 - m_1 - q_1) \left( \frac{(1 - \vartheta_{\tilde{A}_1})^r - \beta'^r}{r(1 - \vartheta_{\tilde{A}_1})} \right) \\ &\quad + (m_1 + q_1)(1 - \theta_{\tilde{A}_1} - \delta') + (n_1 + p_1 - m_1 - q_1) \left( \frac{(1 - \theta_{\tilde{A}_1})^r - \delta'^r}{r(1 - \theta_{\tilde{A}_1})} \right). \end{aligned}$$

پس از فاکتورگیری داریم:

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}_{(\alpha, \beta', \delta')}(\tilde{A}_2) &= (m_1 + q_1) \left( (w_{\tilde{A}_1} + \varsigma) - \alpha + 1 - \vartheta_{\tilde{A}_1} - \beta' + 1 - \theta_{\tilde{A}_1} - \delta' \right) \\ &\quad + (n_1 + p_1 - m_1 - q_1) \left( \frac{(w_{\tilde{A}_1} + \varsigma)^r - \alpha^r}{r(w_{\tilde{A}_1} + \varsigma)} + \frac{(1 - \vartheta_{\tilde{A}_1})^r - \beta'^r}{r(1 - \vartheta_{\tilde{A}_1})} + \frac{(1 - \theta_{\tilde{A}_1})^r - \delta'^r}{r(1 - \theta_{\tilde{A}_1})} \right). \end{aligned}$$

اکنون کافی است نشان دهیم که  $\mathfrak{R}_{(\alpha, \beta', \delta')}(\tilde{A}_2) - \mathfrak{R}_{(\alpha, \beta', \delta')}(\tilde{A}_1) \geq 0$

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}_{(\alpha, \beta', \delta')}(\tilde{A}_2) - \mathfrak{R}_{(\alpha, \beta', \delta')}(\tilde{A}_1) &= \left\{ (m_1 + q_1)((w_{\tilde{A}_1} + \varsigma) - \alpha + 1 - \vartheta_{\tilde{A}_1} - \beta' + 1 - \theta_{\tilde{A}_1} - \delta') \right. \\ &\quad \left. + (n_1 + p_1 - m_1 - q_1) \left( \frac{(w_{\tilde{A}_1} + \varsigma)^r - \alpha^r}{r(w_{\tilde{A}_1} + \varsigma)} + \frac{(1 - \vartheta_{\tilde{A}_1})^r - \beta'^r}{r(1 - \vartheta_{\tilde{A}_1})} + \frac{(1 - \theta_{\tilde{A}_1})^r - \delta'^r}{r(1 - \theta_{\tilde{A}_1})} \right) \right\} \\ &\quad - \left\{ (m_1 + q_1)(w_{\tilde{A}_1} - \alpha + 1 - \vartheta_{\tilde{A}_1} - \beta' + 1 - \theta_{\tilde{A}_1} - \delta') \right. \\ &\quad \left. + (n_1 + p_1 - m_1 - q_1) \left( \frac{w_{\tilde{A}_1}^r - \alpha^r}{r w_{\tilde{A}_1}} + \frac{(1 - \vartheta_{\tilde{A}_1})^r - \beta'^r}{r(1 - \vartheta_{\tilde{A}_1})} + \frac{(1 - \theta_{\tilde{A}_1})^r - \delta'^r}{r(1 - \theta_{\tilde{A}_1})} \right) \right\}. \end{aligned}$$

با حذف جمله‌های مشابه عبارت زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned} &\mathfrak{R}_{(\alpha, \beta', \delta')}(\tilde{A}_2) - \mathfrak{R}_{(\alpha, \beta', \delta')}(\tilde{A}_1) \\ &= (m_1 + q_1)\varsigma + (n_1 + p_1 - (m_1 + q_1)) \left( \frac{(w_{\tilde{A}_1} + \varsigma)^r - \alpha^r}{r(w_{\tilde{A}_1} + \varsigma)} - \frac{w_{\tilde{A}_1}^r - \alpha^r}{r w_{\tilde{A}_1}} \right). \end{aligned}$$

که در آن  $\Delta = \frac{(w_{\tilde{A}_1} + \varsigma)^{\gamma} - \alpha^{\gamma}}{\gamma(w_{\tilde{A}_1} + \varsigma)} - \frac{w_{\tilde{A}_1}^{\gamma} - \alpha^{\gamma}}{\gamma w_{\tilde{A}_1}}$  ، زیرا  $\Delta \geq 0$  ،

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{(w_{\tilde{A}_1} + \varsigma)^{\gamma} - \alpha^{\gamma}}{\gamma(w_{\tilde{A}_1} + \varsigma)} - \frac{w_{\tilde{A}_1}^{\gamma} - \alpha^{\gamma}}{\gamma w_{\tilde{A}_1}} \\ &= \frac{w_{\tilde{A}_1} (w_{\tilde{A}_1}^{\gamma} + \gamma w_{\tilde{A}_1} \varsigma + \varsigma^{\gamma}) - w_{\tilde{A}_1} \alpha^{\gamma} - (w_{\tilde{A}_1} + \varsigma)(w_{\tilde{A}_1}^{\gamma} - \alpha^{\gamma})}{\gamma w_{\tilde{A}_1} (w_{\tilde{A}_1} + \varsigma)} \\ &= \frac{w_{\tilde{A}_1}^{\gamma} + \gamma w_{\tilde{A}_1}^{\gamma} \varsigma + w_{\tilde{A}_1} \varsigma^{\gamma} - w_{\tilde{A}_1} \alpha^{\gamma} - (w_{\tilde{A}_1}^{\gamma} - w_{\tilde{A}_1} \alpha^{\gamma} + \varsigma w_{\tilde{A}_1}^{\gamma} - \varsigma \alpha^{\gamma})}{\gamma w_{\tilde{A}_1} (w_{\tilde{A}_1} + \varsigma)} \\ &= \frac{w_{\tilde{A}_1}^{\gamma} \varsigma + w_{\tilde{A}_1} \varsigma^{\gamma} + \varsigma \alpha^{\gamma}}{\gamma w_{\tilde{A}_1} (w_{\tilde{A}_1} + \varsigma)} = \frac{\varsigma (w_{\tilde{A}_1}^{\gamma} + w_{\tilde{A}_1} \varsigma + \alpha^{\gamma})}{\gamma w_{\tilde{A}_1} (w_{\tilde{A}_1} + \varsigma)} \geq 0. \\ \rightarrow \Delta &= \frac{\varsigma (w_{\tilde{A}_1}^{\gamma} + w_{\tilde{A}_1} \varsigma + \alpha^{\gamma})}{\gamma w_{\tilde{A}_1} (w_{\tilde{A}_1} + \varsigma)} \geq 0. \end{aligned}$$

اکنون داریم:

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}_{(\alpha, \beta', \delta')}(\tilde{A}_2) - \mathfrak{R}_{(\alpha, \beta', \delta')}(\tilde{A}_1) &= (m_1 + q_1) \varsigma + (n_1 + p_1) \frac{\varsigma (w_{\tilde{A}_1}^{\gamma} + w_{\tilde{A}_1} \varsigma + \alpha^{\gamma})}{\gamma w_{\tilde{A}_1} (w_{\tilde{A}_1} + \varsigma)} \\ &\quad - (m_1 + q_1) \frac{\varsigma (w_{\tilde{A}_1}^{\gamma} + w_{\tilde{A}_1} \varsigma + \alpha^{\gamma})}{\gamma w_{\tilde{A}_1} (w_{\tilde{A}_1} + \varsigma)}. \\ (m_1 + q_1) \varsigma &\left( 1 - \frac{w_{\tilde{A}_1}^{\gamma} + w_{\tilde{A}_1} \varsigma + \alpha^{\gamma}}{\gamma w_{\tilde{A}_1} (w_{\tilde{A}_1} + \varsigma)} \right) + (n_1 + p_1) \left( \frac{\varsigma (w_{\tilde{A}_1}^{\gamma} + w_{\tilde{A}_1} \varsigma + \alpha^{\gamma})}{\gamma w_{\tilde{A}_1} (w_{\tilde{A}_1} + \varsigma)} \right). \end{aligned}$$

حال کافی است نشان دهیم  $1 - \frac{(w_{\tilde{A}_1}^{\gamma} + w_{\tilde{A}_1} \varsigma + \alpha^{\gamma})}{\gamma w_{\tilde{A}_1} (w_{\tilde{A}_1} + \varsigma)} > 0$  مقداری نامنفی دارد. برای این منظور نشان می‌دهیم:

$$w_{\tilde{A}_1}^{\gamma} + w_{\tilde{A}_1} \varsigma + \alpha^{\gamma} \leq \gamma w_{\tilde{A}_1} (w_{\tilde{A}_1} + \varsigma)$$

از آن جا که  $\alpha \leq w_{\tilde{A}_1}$  می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} w_{\tilde{A}_1}^{\gamma} + w_{\tilde{A}_1} \varsigma + \alpha^{\gamma} &\leq w_{\tilde{A}_1}^{\gamma} + w_{\tilde{A}_1} \varsigma + w_{\tilde{A}_1}^{\gamma} \leq \gamma w_{\tilde{A}_1}^{\gamma} + w_{\tilde{A}_1} \varsigma \\ &\leq \gamma w_{\tilde{A}_1}^{\gamma} + \gamma w_{\tilde{A}_1} \varsigma \leq \gamma w_{\tilde{A}_1} (w_{\tilde{A}_1} + \varsigma) \end{aligned}$$

در نتیجه  $\mathfrak{R}_{(\alpha, \beta', \delta')}(\tilde{A}_2) - \mathfrak{R}_{(\alpha, \beta', \delta')}(\tilde{A}_1) \geq 0$  و حکم حاصل می‌شود.

□

اثبات سایر موارد مشابه حالت اول است.

نتیجه ۴.۳. تابع رتبه  $\mathfrak{R}_{(\alpha, \beta', \delta')}$ ، برای هر عدد دلخواه  $(m_1, n_1, p_1, q_1; w_{\tilde{A}_1}, \vartheta_{\tilde{A}_1}, \theta_{\tilde{A}_1})$ ،

- (۱) در صورت افزایش در  $w_{\bar{A}_1}$  حافظ یکنوایی (غیرنزولی) است.
- (۲) در صورت افزایش در هر یک از مقادیر  $\vartheta_{\bar{A}_1}$  و  $\theta_{\bar{A}_1}$  حافظ یکنوایی (غیرصعودی) است.
- (۳) در صورت افزایش همزمان در  $w_{\bar{A}_1}$  و کاهش در مقادیر  $\vartheta_{\bar{A}_1}$  و  $\theta_{\bar{A}_1}$  حافظ یکنوایی (غیرنزولی) است.
- (۴) در صورت کاهش همزمان در  $w_{\bar{A}_1}$  و افزایش در مقادیر  $\vartheta_{\bar{A}_1}$  و  $\theta_{\bar{A}_1}$  حافظ یکنوایی (غیرصعودی) است.

گزاره ۵.۳. فرض کنید  $\langle (m_1, n_1, p_1, q_1); w_{\bar{A}}, \vartheta_{\bar{A}}, \theta_{\bar{A}} \rangle$  و  $\langle (m_2, n_2, p_2, q_2); w_{\bar{A}}, \vartheta_{\bar{A}}, \theta_{\bar{A}} \rangle$  دو عدد نوتروسوفیک ذوزنقه‌ای تک‌مقداری باشند. در این صورت

$$\mathfrak{R}_{\alpha, \beta', \delta'}(\bar{A}_1 \oplus \bar{A}_2) \geq \max \left\{ \mathfrak{R}_{\alpha, \beta', \delta'}(\bar{A}_1), \mathfrak{R}_{\alpha, \beta', \delta'}(\bar{A}_2) \right\}.$$

اثبات. در واقع برای دو عدد نوتروسوفیک ذوزنقه‌ای تک‌مقداری  $\bar{A}_1$  و  $\bar{A}_2$  با توجه به اثر تابع رتبه باید نشان دهیم یکی از موارد زیر برقرار است:

الف) اگر  $\mathfrak{R}_{\alpha, \beta', \delta'}(\bar{A}_1) \geq \mathfrak{R}_{\alpha, \beta', \delta'}(\bar{A}_2)$  آن‌گاه  $\mathfrak{R}_{\alpha, \beta', \delta'}(\bar{A}_1 \oplus \bar{A}_2) \geq \mathfrak{R}_{\alpha, \beta', \delta'}(\bar{A}_1)$

ب) اگر  $\mathfrak{R}_{\alpha, \beta', \delta'}(\bar{A}_2) \geq \mathfrak{R}_{\alpha, \beta', \delta'}(\bar{A}_1)$  آن‌گاه  $\mathfrak{R}_{\alpha, \beta', \delta'}(\bar{A}_1 \oplus \bar{A}_2) \geq \mathfrak{R}_{\alpha, \beta', \delta'}(\bar{A}_2)$

بدون از دست دادن کلیت موضوع الف را نشان می‌دهیم. با شروع از سمت چپ و براساس اثر تابع رتبه بر تعریف جمع داریم:

$$\begin{aligned} R_{\alpha, \beta', \delta'}(\bar{A}_1 \oplus \bar{A}_2) &= (m_1 + m_2 + q_1 + q_2)(w_{\bar{A}} - \alpha) \\ &+ (n_1 + n_2 + p_1 + p_2 - m_1 - m_2 - q_1 - q_2) \left( \frac{w_{\bar{A}}^\gamma - \alpha^\gamma}{2w_{\bar{A}}} \right) \\ &+ (m_1 + m_2 + q_1 + q_2)(1 - \vartheta_{\bar{A}} - \beta') \\ &+ (n_1 + n_2 + p_1 + p_2 - m_1 - m_2 - q_1 - q_2) \left( \frac{(1 - \vartheta_{\bar{A}})^\gamma - \beta'^\gamma}{2(1 - \vartheta_{\bar{A}})} \right) \\ &+ (m_1 + m_2 + q_1 + q_2)(1 - \theta_{\bar{A}} - \delta') \\ &+ (n_1 + n_2 + p_1 + p_2 - m_1 - m_2 - q_1 - q_2) \left( \frac{(1 - \theta_{\bar{A}})^\gamma - \delta'^\gamma}{2(1 - \theta_{\bar{A}})} \right). \end{aligned}$$

با توجه به تعریف جمع

$$m_1 + m_2 \geq m_1, \quad n_1 + n_2 \geq n_1, \quad p_1 + p_2 \geq p_1, \quad q_1 + q_2 \geq q_1.$$

طبق گزاره ۱.۳ رابطه  $\mathfrak{R}_{\alpha, \beta', \delta'}(\tilde{A}_1) \geq \mathfrak{R}_{\alpha, \beta', \delta'}(\tilde{A}_2)$  وقتی برقرار است که  $\tilde{A}_1$  نسبت به  $\tilde{A}_2$  حداقل در یکی از مقادیر دوزنقه‌ای افزایش داشته باشد. از این‌رو:

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}_{\alpha, \beta', \delta'}(\tilde{A}_1 \oplus \tilde{A}_2) &\geq (m_1 + q_1)(\bar{w}_A - \alpha) + (n_1 + p_1 - m_1 - q_1) \frac{w_{\tilde{A}}^r - \alpha^r}{2w_{\tilde{A}}} \\ &+ (m_1 + q_1)(1 - \vartheta_{\tilde{A}} - \beta') + (n_1 + p_1 - m_1 - q_1) \frac{(1 - \vartheta_{\tilde{A}})^r - \beta'^r}{2(1 - \vartheta_{\tilde{A}})} \\ &+ (m_1 + q_1)(1 - \theta_{\tilde{A}} - \delta') + (n_1 + p_1 - m_1 - q_1) \frac{(1 - \theta_{\tilde{A}})^r - \delta'^r}{2(1 - \theta_{\tilde{A}})} \\ &= \mathfrak{R}_{\alpha, \beta', \delta'}(\tilde{A}_1). \end{aligned}$$

□

مثال ۶.۳. برای بررسی تجربی ویژگی‌های مذکور، فرض کنید

$$\tilde{A}_1 = \langle (0/1, 0/3, 0/5, 0/7); 0/8, 0/2, 0/2 \rangle$$

یک عدد نوتروسوفیک دوزنقه‌ای تک‌مقداری باشد. با در نظر گرفتن مقادیر

$$\varsigma = 0/00, 0/01, 0/02, 0/03, 0/04, 0/05, 0/06, 0/07, 0/08, 0/09, 0/10$$

تغییرات اندیس رتبه‌بندی بر مبنای  $\mathfrak{R}_{0/4, 0/4, 0/4}$  و گزاره‌ها در جداول ۱ تا ۴ و شکل ۲ از آتا د تحلیل می‌شود.

جدول ۱. تحلیل عملکرد  $\mathfrak{R}_{0/4, 0/4, 0/4}$  براساس افزایش مقادیر  $m_1, n_1, p_1, q_1$ .

	$\varsigma = 0/00$	$\varsigma = 0/01$	$\varsigma = 0/02$	$\varsigma = 0/03$	$\varsigma = 0/04$	$\varsigma = 0/05$	$\varsigma = 0/06$	$\varsigma = 0/07$	$\varsigma = 0/08$	$\varsigma = 0/09$	$\varsigma = 0/10$
$m_1$	0/9600	0/9630	0/9660	0/9690	0/9720	0/9750	0/9780	0/9810	0/9840	0/9870	0/9900
$n_1$	0/9600	0/9690	0/9780	0/9870	0/9960	1/0050	1/0140	1/0230	1/0320	1/0410	1/0500
$p_1$	0/9600	0/9690	0/9780	0/9870	0/9960	1/0050	1/0140	1/0230	1/0320	1/0410	1/0500
$q_1$	0/9600	0/9630	0/9660	0/9690	0/9720	0/9750	0/9780	0/9810	0/9840	0/9870	0/9900

جدول ۲. تحلیل عملکرد  $\mathfrak{R}_{0/4, 0/4, 0/4}$  براساس کاهش مقادیر  $m_1, n_1, p_1, q_1$ .

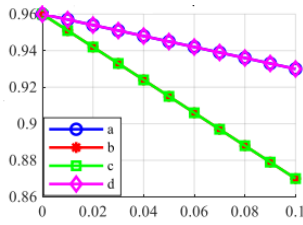
	$\varsigma = 0/00$	$\varsigma = 0/01$	$\varsigma = 0/02$	$\varsigma = 0/03$	$\varsigma = 0/04$	$\varsigma = 0/05$	$\varsigma = 0/06$	$\varsigma = 0/07$	$\varsigma = 0/08$	$\varsigma = 0/09$	$\varsigma = 0/10$
$m_1$	0/9600	0/9570	0/9540	0/9510	0/9480	0/9450	0/9420	0/9390	0/9360	0/9330	0/9300
$n_1$	0/9600	0/9510	0/9420	0/9330	0/9240	0/9150	0/9060	0/8970	0/8880	0/8790	0/8700
$p_1$	0/9600	0/9510	0/9420	0/9330	0/9240	0/9150	0/9060	0/8970	0/8880	0/8790	0/8700
$q_1$	0/9600	0/9570	0/9540	0/9510	0/9480	0/9450	0/9420	0/9390	0/9360	0/9330	0/9300

**جدول ۳. تحلیل عملکرد  $\mathfrak{R}_{.74, .74, .74}$  براساس افزایش مقادیر  $w_{\bar{A}_1}, \vartheta_{\bar{A}_1}, \theta_{\bar{A}_1}$**

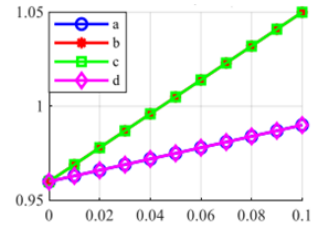
	$\varsigma = 0/00$	$\varsigma = 0/01$	$\varsigma = 0/02$	$\varsigma = 0/03$	$\varsigma = 0/04$	$\varsigma = 0/05$	$\varsigma = 0/06$	$\varsigma = 0/07$	$\varsigma = 0/08$	$\varsigma = 0/09$	$\varsigma = 0/10$
$w_{\bar{A}_1}$	۰/۹۶۰۰	۰/۹۶۸۰	۰/۹۷۶۰	۰/۹۸۴۰	۰/۹۹۲۰	۱/۰۰۰۰	۱/۰۰۸۰	۱/۰۱۶۰	۱/۰۲۴۰	۱/۰۳۲۰	۱/۰۴۰۰
$\vartheta_{\bar{A}_1}$	۰/۹۶۰۰	۰/۹۵۲۰	۰/۹۴۴۰	۰/۹۳۶۰	۰/۹۲۸۰	۰/۹۲۰۰	۰/۹۱۲۰	۰/۹۰۴۰	۰/۸۹۶۰	۰/۸۸۸۰	۰/۸۸۰۰
$\theta_{\bar{A}_1}$	۰/۹۶۰۰	۰/۹۵۲۰	۰/۹۴۴۰	۰/۹۳۶۰	۰/۹۲۸۰	۰/۹۲۰۰	۰/۹۱۲۰	۰/۹۰۴۰	۰/۸۹۶۰	۰/۸۸۸۰	۰/۸۸۰۰

**جدول ۴. تحلیل عملکرد  $\mathfrak{R}_{.74, .74, .74}$  براساس کاهش مقادیر  $w_{\bar{A}_1}, \vartheta_{\bar{A}_1}, \theta_{\bar{A}_1}$**

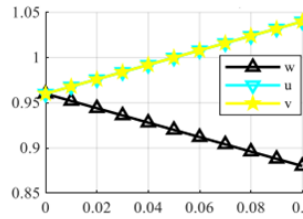
	$\varsigma = 0/00$	$\varsigma = 0/01$	$\varsigma = 0/02$	$\varsigma = 0/03$	$\varsigma = 0/04$	$\varsigma = 0/05$	$\varsigma = 0/06$	$\varsigma = 0/07$	$\varsigma = 0/08$	$\varsigma = 0/09$	$\varsigma = 0/10$
$w_{\bar{A}_1}$	۰/۹۶۰۰	۰/۹۵۲۰	۰/۹۴۴۰	۰/۹۳۶۰	۰/۹۲۸۰	۰/۹۲۰۰	۰/۹۱۲۰	۰/۹۰۴۰	۰/۸۹۶۰	۰/۸۸۸۰	۰/۸۸۰۰
$\vartheta_{\bar{A}_1}$	۰/۹۶۰۰	۰/۹۶۸۰	۰/۹۷۶۰	۰/۹۸۴۰	۰/۹۹۲۰	۱/۰۰۰۰	۱/۰۰۸۰	۱/۰۱۶۰	۱/۰۲۴۰	۱/۰۳۲۰	۱/۰۴۰۰
$\theta_{\bar{A}_1}$	۰/۹۶۰۰	۰/۹۶۸۰	۰/۹۷۶۰	۰/۹۸۴۰	۰/۹۹۲۰	۱/۰۰۰۰	۱/۰۰۸۰	۱/۰۱۶۰	۱/۰۲۴۰	۱/۰۳۲۰	۱/۰۴۰۰



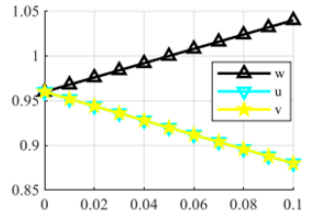
(ب) تغییرات  $\mathfrak{R}_{.74, .74, .74}$  براساس کاهش مقادیر  $m_1, n_1, p_1, q_1$



(آ) تغییرات  $\mathfrak{R}_{.74, .74, .74}$  براساس افزایش مقادیر  $m_1, n_1, p_1, q_1$



(د) تغییرات  $\mathfrak{R}_{.74, .74, .74}$  براساس کاهش مقادیر  $w_{\bar{A}_1}, \vartheta_{\bar{A}_1}, \theta_{\bar{A}_1}$



(ج) تغییرات  $\mathfrak{R}_{.74, .74, .74}$  براساس افزایش مقادیر  $w_{\bar{A}_1}, \vartheta_{\bar{A}_1}, \theta_{\bar{A}_1}$

**شکل ۲. تغییرات  $\mathfrak{R}_{.74, .74, .74}$  براساس سناریوهای گوناگون**

مطابق جدول ۱ و شکل ۲ متناظر با آن؛ افزایش گام به گام مقادیر  $m_1, n_1, p_1, q_1$  (با طول گام ۰/۰۱) به طور سیستماتیک منجر به ارتقای خطی اندیس رتبه بندی می شود. این رفتار دقیقاً مطابق پیش بینی های گزاره ی ۱.۳ است و نشان دهنده ی حساسیت ذاتی تابع به گستره ی اعداد نوتروسوفیک است. جالب تر آن که بیشترین حساسیت به مقادیر مرکزی ذوزنقه  $n_1$  و  $p_1$  در متعلق است که بیانگر نقش محوری این پارامترها در تعیین هسته ی قطعیت عدد است. در

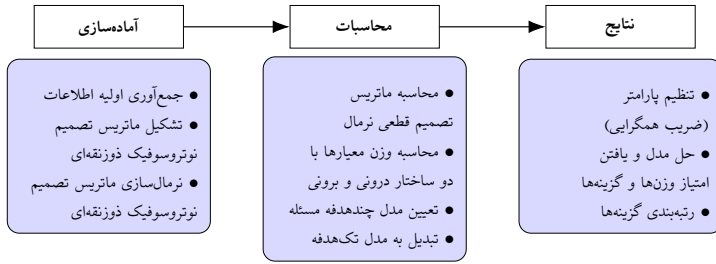
مقابل، کاهش همین پارامترها براساس جدول ۲ و شکل ۲ب متناظر با آن تغییراتی با شیب منفی در رتبه ایجاد می‌کند. این تقارن رفتاری، نشان‌دهنده‌ی تعادل ریاضیاتی در طراحی تابع است.

علاوه براین، مطابق جدول ۳ و شکل ۲ج متناظر با آن؛ افزایش درجه‌ی درستی  $w_{\bar{A}_1}$  بهبود رتبه را به‌همراه دارد، درحالی‌که افزایش درجه‌های ممتنع  $\vartheta_{\bar{A}_1}$  و نادرستی  $\theta_{\bar{A}_1}$  اثری کاهشی را نشان می‌دهد. این الگو، مستقیماً از گزاره‌ی ۳.۳ و نتیجه‌ی ۴.۳ پیروی و تأیید می‌کند که کاهش ابهام و نادرستی یا افزایش قطعیت به‌طور مستقیم بر ارزیابی‌ها تأثیر می‌گذارد. نکته‌ی کلیدی، رفتار متقارن پارامترهای  $\vartheta_{\bar{A}_1}$  و  $\theta_{\bar{A}_1}$  است که هم‌پوشانی مفهومی آن‌ها در نمایش عدم قطعیت را منعکس می‌کند. نتایج مربوط به کاهش مقادیر  $w_{\bar{A}_1}$ ،  $\vartheta_{\bar{A}_1}$  و  $\theta_{\bar{A}_1}$  بر تابع رتبه مطابق اطلاعات جدول ۴ و شکل ۲د متناظر با آن؛ به ترتیب تغییراتی کاهشی، افزایشی و افزایشی را نشان می‌دهد.

بررسی سیستماتیک رفتار تابع رتبه‌بندی  $\mathfrak{N}_{\alpha, \beta, \delta}$  در مواجهه با تغییرات پارامترهای هندسی و عدم قطعیت، نه‌تنها صحت قضایای مطرح‌شده را به‌طور تجربی تأیید می‌نماید، بلکه گواهی روشن بر انسجام درونی و قابلیت اتکای این چارچوب نوین در محیط‌های تصمیم‌گیری واقعی است. یافته‌های تجربی حاضر، حلقه‌ای حیاتی میان توسعه‌ی نظری و کاربرد عملی روش ایجاد می‌کند و با آشکارسازی روابط علی بین پارامترها و خروجی‌ها، راه را برای بهینه‌سازی فرآیندهای تصمیم‌گیری در شرایط عدم قطعیت هموار می‌سازد.

### ۳.۳. چارچوبی توسعه‌یافته برای حل مسئله تصمیم‌گیری چندمعیاره؛ Neu-SECA.

اعداد نوتروسوفیک دوزنقه‌ای تک مقداری با ارائه‌ی نمایش دقیق‌تر داده‌های ناقص و مبهم، شفافیت نتایج را از طریق توصیف همزمان سطوح درستی، ممتنع و نادرستی افزایش می‌دهند. توسعه‌ی روش سکا در این محیط، گامی نوآورانه و اساسی برای بهبود کارایی و دقت آن در مسائل واقعی محسوب می‌شود. در این مطالعه، این گسترش با به‌کارگیری روش رتبه‌بندی  $\mathfrak{N}_{\alpha, \beta, \delta}$  و تصمیم‌گیری منطقی در شرایط ابهام را ممکن می‌سازد. این ایده، روش را به‌عنوان ابزاری پیشرفته در حل مسائل تصمیم‌گیری چندمعیاره تحت اعداد نوتروسوفیک دوزنقه‌ای تک مقداری تثبیت می‌نماید. شکل ۳ نمایی کلی از مراحل اساسی رویکرد را به تصویر کشیده است. برای بررسی جزئیات بیشتر مراحل روش به‌شرح ذیل طراحی شده‌اند.



شکل ۳. مراحل اصلی روش Neu-SECA

فرآیند حل؛ روش Neu-SECA

گام ۱. تشکیل ماتریس تصمیم نوتروسوفیک دوزنقه‌ای در چارچوب روش‌های تصمیم‌گیری چندشاخه، گام نخست تشکیل ماتریس تصمیم در  $\tilde{Z} = (\tilde{z}_{ij})_{t \times u}$  است. این ماتریس دارای ساختار سطری-ستونی است که ستونها به عنوان معیارهای ارزیابی و سطرها به عنوان گزینه‌ها در نظر گرفته می‌شوند. علاوه بر این  $\tilde{z}_{ij} = \langle (m_{ij}, n_{ij}, p_{ij}, q_{ij}); w_{ij}, \vartheta_{ij}, \theta_{ij} \rangle$  به عنوان یک عدد نوتروسوفیک دوزنقه‌ای نامنفی نشانه مقدار ارزیابی گزینه  $i$ ام در معیار  $j$ ام است.

گام ۲. ماتریس تصمیم نرمالیزه در این مرحله ماتریس اولیه  $\tilde{Z} = (\tilde{z}_{ij})_{t \times u}$  به ماتریس نرمالیزه  $\tilde{Z}^n = (\tilde{z}_{ij}^n)$  تبدیل می‌گردد. نرمال سازی براساس معیارهای مثبت و منفی به صورت زیر انجام می‌شود.

$$\tilde{z}_{ij}^n = \begin{cases} \left\langle \frac{m_{ij}}{k_j^+}, \frac{n_{ij}}{k_j^+}, \frac{p_{ij}}{k_j^+}, \frac{q_{ij}}{k_j^+}; w_{ij}, \vartheta_{ij}, \theta_{ij} \right\rangle, & j \in b, k_j^+ = \max\{q_{ij} \mid i = 1, 2, \dots, t\}, \\ \left\langle \frac{k_j^-}{q_{ij}}, \frac{k_j^-}{p_{ij}}, \frac{k_j^-}{n_{ij}}, \frac{k_j^-}{m_{ij}}; w_{ij}, \vartheta_{ij}, \theta_{ij} \right\rangle, & j \in c, k_j^- = \min\{m_{ij} \mid i = 1, 2, \dots, t\}. \end{cases} \quad (4.3)$$

گام ۳. محاسبه ماتریس تصمیم قطعی نرمال طبق رویکرد  $\mathfrak{R}_{\alpha, \beta', \delta'}$  این تبدیل براساس رابطه (۲۲.۲) و با تعیین مقادیر  $\alpha, \beta', \delta'$  از جانب تصمیم‌گیرنده به صورت زیر نتیجه می‌شود.

$$Z = R_{(\alpha, \beta', \delta')}(\tilde{Z}^n) = R_{(\alpha, \beta', \delta')}(\tilde{z}_{ij}^n)_{t \times u} = (z_{ij}^n)_{t \times u}. \quad (5.3)$$

گام ۴. به دست آوردن وزن‌های اولیه براساس دو معیار درونی و برونی

الف) معیار درونی؛ ابتدا آنتروپی متناظر با هر معیار از رابطه (۶.۳) محاسبه می‌شود:

$$(۶.۳) \quad e_j = -\frac{1}{\ln(t)} \sum_{i=1}^t (z_{ij}^n \ln(z_{ij}^n)), \quad \forall j$$

در ادامه درجه انحراف و نرمالسازی آن به صورت زیر انجام می‌شود.

$$(۷.۳) \quad \pi_j = 1 - e_j \implies \bar{\pi}_j = \frac{\pi_j}{\sum_{j=1}^u \pi_j}, \quad \forall j$$

به جای  $\bar{\sigma}_j$  در ساختار کلاسیک سکا از مقیاس وزنی  $\bar{\pi}_j$  استفاده می‌کنیم.

ب) معیار برونی: از روابط (۱.۳) و (۳.۳) در مدل کلاسیک سکا به دست می‌آید.

گام ۵. طراحی مدل بهینه‌سازی

با استفاده از ماتریس تصمیم قطعی نرمال؛  $(z_{ij}^n)_{t \times u}$  در گام ۳ و بردارهای وزنی نرمال معیارهای درونی؛  $\bar{\pi}_j$  و برونی  $\bar{\rho}_j$  در گام ۴ اطلاعات اولیه مورد نیاز برای جایگذاری در ساختار ۱ و ۲ مهیا است. پس از تشکیل ساختار ۲ بهینه‌سازی وزن‌ها به‌گونه‌ای دنبال می‌شود که کمترین انحراف را از بردارهای وزنی منطبق بر معیارهای درونی و برونی داشته باشند و علاوه بر این، امتیاز گزینه‌ها را نیز بیشینه سازند. با توجه به بسته و کراندار بودن (فشردگی) ناحیه شدنی وزن‌ها و همین‌طور خطی و محدب بودن توابع هدف مسئله (که پیوسته نیز هستند) به جواب بهینه همگرا است.

گام ۶. حل مدل و استخراج نتایج

۱. ساختار ۲ از مرحله ۵ را برای مقادیر مختلف  $\zeta$  تا همگرایی دنبال می‌کنیم.

$$(\zeta \leq 0.02)$$

۲. پیاده‌سازی و حل مدل به کمک نرم‌افزار متلب (۲۰۱۸b) انجام می‌شود.

۳. مقادیر نهایی وزن معیارها و امتیاز گزینه‌ها به دست می‌آید و براین اساس رتبه‌بندی

گزینه‌ها انجام می‌شود.

در این فرآیند یکپارچه، امکان ارزیابی دقیق و جامع تأمین‌کنندگان با ترکیب رویکردهای نوتروسوفیک و قطعی، تصمیم‌گیری برای انتخاب بهینه‌ترین گزینه و تعیین وزن‌ها به صورت همزمان مهیا شده است. علاوه بر این، جایگزینی آنتروپی شانون به جای انحراف معیار (مرحله ۴-۱)، دقت وزن‌دهی را بالا می‌برد.

گزاره ۷.۳. نشان دهید ماتریس تصمیم قطعی نرمال در روش سکای توسعه یافته که طبق رویکرد  $\mathfrak{R}_{\alpha, \beta', \delta'}$  در گام ۳ به دست آمده، کراندار است.

**اثبات.** ارزیابی اولیه در ماتریس تصمیم  $\tilde{Z} = (\tilde{z}_{ij})_{t \times u}$  که ورودی مسئله تصمیم‌گیری چندمعیاره است را در نظر بگیرید. هر درایه در این ماتریس با  $\langle (m_{ij}, n_{ij}, p_{ij}, q_{ij}); w_{ij}, \vartheta_{ij}, \theta_{ij} \rangle$  که یک عدد نوتروسوفیک دوزنقه‌ای نامنفی و متناهی است نشان داده می‌شود. پس از نرمال‌سازی برای معیارهای مثبت و منفی درایه‌های قسمت دوزنقه‌ای در بازه  $[0, 1]$  به دست می‌آیند. بدون کاستن از کلیت مسئله فرض کنید معیارها مثبت و درایه‌های حاصل به صورت  $\langle (m_{ij}, n_{ij}, p_{ij}, q_{ij}); w_{ij}, \vartheta_{ij}, \theta_{ij} \rangle$  باشند. در این صورت:

$$R_{(\alpha, \beta', \delta')}(\tilde{z}_{ij}^n) = \left( \frac{m_{ij}}{k_j^+} + \frac{q_{ij}}{k_j^+} \right) (w_{ij} - \alpha) + \left( \frac{n_{ij}}{k_j^+} + \frac{p_{ij}}{k_j^+} - \frac{m_{ij}}{k_j^+} - \frac{q_{ij}}{k_j^+} \right) \frac{w_{ij}^\alpha - \alpha^\alpha}{2w_{ij}} \\ + \left( \frac{m_{ij}}{k_j^+} + \frac{q_{ij}}{k_j^+} \right) (1 - \vartheta_{ij} - \beta') + \left( \frac{n_{ij}}{k_j^+} + \frac{p_{ij}}{k_j^+} - \frac{m_{ij}}{k_j^+} - \frac{q_{ij}}{k_j^+} \right) \frac{(1 - \vartheta_{ij})^\alpha - (\beta')^\alpha}{2(1 - \vartheta_{ij})} \\ + \left( \frac{m_{ij}}{k_j^+} + \frac{q_{ij}}{k_j^+} \right) (1 - \theta_{ij} - \delta') + \left( \frac{n_{ij}}{k_j^+} + \frac{p_{ij}}{k_j^+} - \frac{m_{ij}}{k_j^+} - \frac{q_{ij}}{k_j^+} \right) \frac{(1 - \theta_{ij})^\alpha - (\delta')^\alpha}{2(1 - \theta_{ij})}.$$

با توجه به فرضیه‌های رابطه (۱۷.۲)

$(0 \leq \alpha \leq w_{\bar{A}}, 0 \leq \beta' \leq 1 - \vartheta_{\bar{A}}, 0 \leq \delta' \leq 1 - \theta_{\bar{A}})$  و نرمال بودن مقادیر قسمت دوزنقه‌ای، نامنفی بودن  $\mathfrak{R}_{\alpha, \beta', \delta'}(\tilde{z}_{ij}^n)$  نتیجه می‌شود. اکنون برای بزرگترین عدد نوتروسوفیک نرمال ممکن مقدار رتبه را به ازای بیشترین مجموعه برش محاسبه می‌کنیم:

$$\mathfrak{R}_{.,.,.}(\langle (1, 1, 1, 1); 1, 0, 0 \rangle) = (1 + 1)(1 - 0) + (1 + 1 - 1 - 1) \left( \frac{1 - 0}{2} \right) \\ + (1 + 1)(1 - 0 - 0) + (1 + 1 - 1 - 1) \left( \frac{(1 - 0)^\alpha - 0^\alpha}{2(1 - 0)} \right) \\ + (1 + 1)(1 - 0 - 0) + (1 + 1 - 1 - 1) \left( \frac{(1 - 0)^\alpha - 0^\alpha}{2(1 - 0)} \right) = 6.$$

در نتیجه:

$$0 \leq R_{(\alpha, \beta', \delta')}(\tilde{z}_{ij}^n) \leq 6.$$

□

با توجه به گزاره ۱.۳، معیارهای درونی و برونی وزن‌ها که براساس اطلاعات ماتریس تصمیم قطعی نرمال حاصل می‌شوند، مقادیری کراندار خواهند داشت.

#### ۴. مثال عددی

یک شرکت تولیدی با هدف جذب سرمایه‌گذار خارجی، براساس پنج معیار زیر ارزیابی را برای رتبه‌بندی چهار سرمایه‌گذار انجام می‌دهد (شکل ۴).

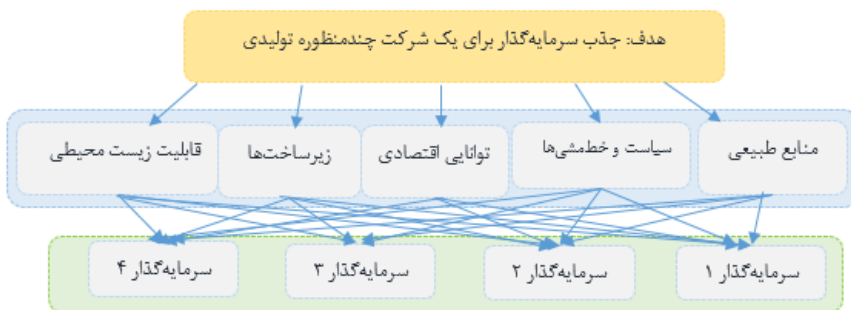
$\tilde{C}_1$ : منابع طبیعی؛

$\tilde{C}_2$ : سیاست و خط‌مشی‌ها؛

$\tilde{C}_3$ : توانایی اقتصادی؛

$\tilde{C}_4$ : زیرساختها؛

$\tilde{C}_5$ : قابلیت زیست محیطی؛



شکل ۴. ساختار کلی مثال عددی

در اینجا معیارها همگی به‌صورتی مثبت هستند (بر اساس [۳۱]). در زیربخش بعدی به‌منظور رتبه‌بندی سرمایه‌گذاران بررسی تکنیک توسعه‌یافته سکا مورد توجه قرار گرفته است.

#### ۱.۴. ارزیابی همزمان گزینه‌ها و معیارها؛ Neu-SECA.

به منظور حل گام‌های ارائه شده در روش Neu-SECA را دنبال می‌کنیم.

گام ۱. ابتدا اطلاعات سرمایه‌گذاران در پنج معیار را طبق داده‌های نوتروسوفیک ذوزنقه‌ای تک مقداری دریافت و در جدول ۵ تنظیم می‌کنیم.

c

جدول ۵. اطلاعات سرمایه‌گذاران در پنج معیار طبق داده‌های نورتوسوفیک دوزنقهای تک‌مقداری

	$\bar{C}_1$	$\bar{C}_2$	$\bar{C}_3$	$\bar{C}_4$	$\bar{C}_5$
$\bar{E}_1$	((۰/۱۵, ۰/۳۲, ۰/۳۵, ۰/۴۲); ۰/۵, ۰/۶, ۰/۶۳)	((۰/۵۳, ۰/۶۱, ۰/۷۳, ۰/۷۵); ۰/۷, ۰/۸, ۰/۸۲)	((۰/۳۲, ۰/۴۴, ۰/۵۲, ۰/۶۳); ۰/۷, ۰/۸, ۰/۸۲)	((۰/۴۵, ۰/۵۲, ۰/۶۱, ۰/۷۱, ۰/۸۲); ۰/۶, ۰/۶, ۰/۶, ۰/۶, ۰/۶)	((۰/۴۲, ۰/۵۸, ۰/۶۱, ۰/۷۴); ۰/۸, ۰/۸, ۰/۸, ۰/۸, ۰/۸)
$\bar{E}_2$	((۰/۳۲, ۰/۳۳, ۰/۵۵, ۰/۶۳); ۰/۶, ۰/۸, ۰/۸۲)	((۰/۶۲, ۰/۶۴, ۰/۷۷, ۰/۸۲); ۰/۸, ۰/۸, ۰/۸۲)	((۰/۴۴, ۰/۵۱, ۰/۶۳, ۰/۷۰); ۰/۶, ۰/۶, ۰/۶, ۰/۶, ۰/۶)	((۰/۳۳, ۰/۴۲, ۰/۵۳, ۰/۶۴); ۰/۷, ۰/۸, ۰/۸, ۰/۸, ۰/۸)	((۰/۶۲, ۰/۷۳, ۰/۸۴, ۰/۹۱); ۰/۶, ۰/۶, ۰/۶, ۰/۶, ۰/۶)
$\bar{E}_3$	((۰/۳۲, ۰/۴۱, ۰/۵۲, ۰/۵۴); ۰/۶, ۰/۶, ۰/۶, ۰/۶)	((۰/۴۱, ۰/۶۳, ۰/۷۴, ۰/۸۲); ۰/۶, ۰/۶, ۰/۶, ۰/۶)	((۰/۳۲, ۰/۴۱, ۰/۵۲, ۰/۶۳); ۰/۵, ۰/۸, ۰/۸, ۰/۸, ۰/۸)	((۰/۴۲, ۰/۵۳, ۰/۶۲, ۰/۷۱); ۰/۸, ۰/۸, ۰/۸, ۰/۸, ۰/۸)	((۰/۵۳, ۰/۶۲, ۰/۷۴, ۰/۸۳); ۰/۸, ۰/۸, ۰/۸, ۰/۸, ۰/۸)
$\bar{E}_4$	((۰/۲۲, ۰/۳۴, ۰/۴۴, ۰/۵۰); ۰/۶, ۰/۶, ۰/۶, ۰/۶)	((۰/۵۴, ۰/۶۱, ۰/۷۴, ۰/۸۱); ۰/۸, ۰/۸, ۰/۸, ۰/۸)	((۰/۲۵, ۰/۳۲, ۰/۵۵, ۰/۶۴); ۰/۶, ۰/۶, ۰/۶, ۰/۶)	((۰/۳۷, ۰/۴۴, ۰/۵۱, ۰/۶۲); ۰/۶, ۰/۶, ۰/۶, ۰/۶, ۰/۶)	((۰/۶۵, ۰/۶۴, ۰/۷۱, ۰/۸۷); ۰/۶, ۰/۶, ۰/۶, ۰/۶, ۰/۶)

1

جدول ۶. ماتریس تصمیم نرمالیزه طبق داده‌های نورتوسوفیک دوزنقهای تک‌مقداری

	$\bar{C}_1$	$\bar{C}_2$	$\bar{C}_3$	$\bar{C}_4$	$\bar{C}_5$
$\bar{E}_1$	((۰/۲۴, ۰/۵۱, ۰/۵۶, ۰/۶۷); ۰/۵, ۰/۶, ۰/۶۳)	((۰/۶۵, ۰/۷۴, ۰/۹۰, ۰/۹۱); ۰/۷, ۰/۸, ۰/۸۲)	((۰/۴۶, ۰/۶۳, ۰/۷۴, ۰/۸۴, ۰/۹۰); ۰/۷, ۰/۸, ۰/۸۲)	((۰/۵۵, ۰/۶۳, ۰/۷۷, ۰/۸۰); ۰/۶, ۰/۶, ۰/۶, ۰/۶, ۰/۶)	((۰/۴۶, ۰/۶۴, ۰/۷۴, ۰/۸۱); ۰/۸, ۰/۸, ۰/۸, ۰/۸, ۰/۸)
$\bar{E}_2$	((۰/۴۰, ۰/۵۲, ۰/۸۷, ۰/۱۰۰); ۰/۶, ۰/۸, ۰/۸۲)	((۰/۷۶, ۰/۸۸, ۰/۹۴, ۰/۹۹); ۰/۸, ۰/۸, ۰/۸۲)	((۰/۶۳, ۰/۷۳, ۰/۹۰, ۰/۱۰۰); ۰/۶, ۰/۶, ۰/۶, ۰/۶, ۰/۶)	((۰/۴۰, ۰/۵۱, ۰/۶۵, ۰/۷۸); ۰/۷, ۰/۸, ۰/۸, ۰/۸, ۰/۸)	((۰/۶۹, ۰/۸۰, ۰/۹۲, ۰/۱۰۰); ۰/۶, ۰/۶, ۰/۶, ۰/۶, ۰/۶)
$\bar{E}_3$	((۰/۵۱, ۰/۶۵, ۰/۸۳, ۰/۸۶); ۰/۶, ۰/۶, ۰/۶, ۰/۶)	((۰/۵۰, ۰/۷۷, ۰/۹۰, ۰/۱۰۰); ۰/۶, ۰/۶, ۰/۶, ۰/۶)	((۰/۴۶, ۰/۵۹, ۰/۷۴, ۰/۸۴, ۰/۹۰); ۰/۵, ۰/۸, ۰/۸, ۰/۸)	((۰/۵۱, ۰/۶۵, ۰/۷۶, ۰/۸۷); ۰/۸, ۰/۸, ۰/۸, ۰/۸)	((۰/۵۸, ۰/۶۸, ۰/۸۱, ۰/۹۱); ۰/۸, ۰/۸, ۰/۸, ۰/۸)
$\bar{E}_4$	((۰/۳۵, ۰/۵۴, ۰/۷۰, ۰/۸۰); ۰/۶, ۰/۶, ۰/۶, ۰/۶)	((۰/۶۶, ۰/۷۴, ۰/۹۰, ۰/۹۹); ۰/۸, ۰/۸, ۰/۸۲)	((۰/۳۶, ۰/۴۶, ۰/۷۹, ۰/۹۱); ۰/۶, ۰/۶, ۰/۶, ۰/۶)	((۰/۴۵, ۰/۵۴, ۰/۶۲, ۰/۷۸); ۰/۶, ۰/۶, ۰/۶, ۰/۶)	((۰/۴۹, ۰/۶۰, ۰/۷۸, ۰/۹۶); ۰/۶, ۰/۶, ۰/۶, ۰/۶, ۰/۶)

گام ۲: ماتریس نرمالیزه را براساس اطلاعات جدول (۵) و رابطه (۴.۳) محاسبه و خلاصه نتایج در جدول ۶ ثبت می‌کنیم.

گام ۳. با استفاده از تابع رتبه معرفی شده در رابطه (۲۲.۲) و تعیین پارامترها توسط تصمیم‌گیرنده ماتریس تصمیم قطعی نرمالیزه با استفاده از جدول ۶ به دست می‌آید. خلاصه نتایج در گام ۳ را در جدول ۷ آورده‌ایم.

جدول ۷. ماتریس تصمیم قطعی نرمالیزه  $\tilde{A}_{i,j,0.4,0.4,0.4}$

	$\tilde{C}_1$	$\tilde{C}_2$	$\tilde{C}_3$	$\tilde{C}_4$	$\tilde{C}_5$
$\tilde{E}_1$	۰/۸۲۳۱	۱/۲۹۹۵	۱/۰۹۴۸	۱/۳۵۹۶	۱/۰۴۰۴
$\tilde{E}_2$	۱/۱۱۷۵	۱/۹۰۱۱	۱/۶۲۸۶	۰/۹۳۰۸	۱/۵۴۴۱
$\tilde{E}_3$	۱/۱۶۲۴	۱/۳۰۸۱	۰/۹۳۴۰	۱/۲۵۷۴	۱/۶۴۴۰
$\tilde{E}_4$	۱/۳۳۶۰	۱/۸۱۱۰	۰/۹۹۹۰	۱/۰۷۶۴	۱/۳۲۸۶

گام ۴. وزن‌های درون و برون معیاری طبق روابط (۷.۳) و (۳.۳) به‌صورت زیر محاسبه شده‌اند:

$$\bar{\pi} = \{0.1376, 0.3145, 0.1594, 0.1515, 0.2370\}$$

$$\bar{\rho} = \{0.1666, 0.1636, 0.1891, 0.3179, 0.1627\}$$

گام ۵. ساختار ۱ که همان مدل چندهدفه است به‌صورت زیر تنظیم شده است.

$$\max S_1 = 0.8231 \omega_1 + 1.2995 \omega_2 + 1.0948 \omega_3 + 1.3596 \omega_4 + 1.0404 \omega_5$$

$$\max S_2 = 1.1175 \omega_1 + 1.9011 \omega_2 + 1.6286 \omega_3 + 0.9308 \omega_4 + 1.5441 \omega_5$$

$$\max S_3 = 1.1624 \omega_1 + 1.3081 \omega_2 + 0.9340 \omega_3 + 1.2574 \omega_4 + 1.6440 \omega_5$$

$$\max S_4 = 1.3360 \omega_1 + 1.8110 \omega_2 + 0.9990 \omega_3 + 1.0764 \omega_4 + 1.3286 \omega_5$$

$$\min l_{\bar{\pi}} = (\omega_1 - 0.1376)^2 + (\omega_2 - 0.3145)^2 + (\omega_3 - 0.1594)^2 + (\omega_4 - 0.1515)^2 + (\omega_5 - 0.2370)^2$$

$$\min l_{\bar{\rho}} = (\omega_1 - 0.1666)^2 + (\omega_2 - 0.1636)^2 + (\omega_3 - 0.1891)^2 + (\omega_4 - 0.3179)^2 + (\omega_5 - 0.1627)^2$$

$$\text{s.t. } \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \omega_4 + \omega_5 = 1,$$

$$\varepsilon \leq \omega_j, \forall j \in \{1, 2, 3, 4, 5\}.$$

در ادامه به منظور حل ساختار فوق تبدیل به مسئله‌ای تک‌هدفه (مطابق ساختار ۲) شده است:

$$\text{Max } Z = l_S - \zeta(l_{\bar{\pi}} + l_{\bar{\rho}})$$

$$\text{s.t. } l_S \leq S_i, \quad \forall i \in \{1, 2, 3, 4\}$$

$$S_1 = 0.8231 \omega_1 + 1.2955 \omega_2 + 1.0948 \omega_3 + 1.3596 \omega_4 + 1.0404 \omega_5$$

$$S_2 = 1.1175 \omega_1 + 1.9011 \omega_2 + 1.6286 \omega_3 + 0.9308 \omega_4 + 1.5441 \omega_5$$

$$S_3 = 1.1624 \omega_1 + 1.3081 \omega_2 + 0.9340 \omega_3 + 1.2574 \omega_4 + 1.6440 \omega_5$$

$$S_4 = 1.3360 \omega_1 + 1.8110 \omega_2 + 0.9990 \omega_3 + 1.0764 \omega_4 + 1.3286 \omega_5$$

$$l_{\bar{\pi}} = (\omega_1 - 0.1376)^2 + (\omega_2 - 0.3145)^2 + (\omega_3 - 0.1594)^2$$

$$+ (\omega_4 - 0.2124)^2 + (\omega_5 - 0.2370)^2$$

$$l_{\bar{\rho}} = (\omega_1 - 0.1666)^2 + (\omega_2 - 0.1636)^2 + (\omega_3 - 0.1891)^2$$

$$+ (\omega_4 - 0.3179)^2 + (\omega_5 - 0.1627)^2$$

$$\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \omega_4 + \omega_5 = 1$$

$$\varepsilon \leq \omega_j, \quad \forall j \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

گام ۶. اکنون با تنظیم پارامتر  $\zeta$  حل مدل را تحلیل و بررسی می‌کنیم.

#### ۲.۴. تحلیل حساسیت پارامتر $\zeta$ و بررسی یافته‌ها.

نتایج محاسباتی برای مقادیر وزن‌ها و گزینه به ازای تغییرات  $\zeta$  جداول ۸ و ۹ و شکل‌های ۱۵ و ۱۶ آورده شده است.

همان‌گونه که مشاهده می‌شود جدول ۸ و شکل ۱۵ متناظر با آن به‌طور هماهنگ، پویایی جالب توجهی را در تخصیص وزن معیارها تحت تغییرات پارامتر همگرایی  $\zeta$  آشکار می‌سازند. با افزایش تدریجی  $\zeta$  از ۰/۰۰۰۱ به ۵، سیستم تصمیم‌گیری به‌طور فزاینده‌ای به سمت حداقل‌سازی انحراف از وزن‌های مرجع (برون‌معیاری و درون‌معیاری) گرایش پیدا می‌کند، که این امر موجب بازتوزیع چشمگیر اهمیت معیارها می‌شود. از  $\zeta = 0.5$  و بعد از آن وزن معیارها به ثبات نسبی بیشتر می‌رسند و پس از  $\zeta = 2$  تغییرات ناچیز و ثبات حاکم می‌گردد. براساس بردار نهایی وزن معیارها:

$$\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5) = (0.1371, 0.2477, 0.1729, 0.2466, 0.1957).$$

ترتیب رتبه‌ای وزن‌ها در نهایت به‌صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\omega_2 \geq \omega_4 \geq \omega_5 \geq \omega_3 \geq \omega_1$$

جدول ۸. وزن معیارها براساس مقادیر مختلف  $\zeta$

	$\zeta$	$\zeta$	$\zeta$	$\zeta$	$\zeta$	$\zeta$	$\zeta$	$\zeta$	$\zeta$	$\zeta$
	۰/۰۰۰۱	۰/۰۲	۰/۳	۰/۴	۰/۵	۱	۲	۳	۴	۵
$\omega_1$	۰/۰۰۰۱۰	۰/۰۰۰۱۰	۰/۰۰۰۱۰	۰/۰۰۰۱۰	۰/۰۰۰۴۱	۰/۰۷۷۲	۰/۱۱۴۷	۰/۱۲۷۱	۰/۱۳۳۴	۰/۱۳۷۱
$\omega_2$	۰/۳۳۱۵	۰/۳۵۰۷	۰/۳۵۸۳	۰/۳۳۸۰	۰/۳۲۵۰	۰/۲۸۲۳	۰/۲۶۰۷	۰/۲۵۳۵	۰/۲۴۹۹	۰/۲۴۷۷
$\omega_3$	۰/۰۰۰۱۰	۰/۰۰۰۱۰	۰/۱۲۶۰	۰/۱۴۷۸	۰/۱۵۹۹	۰/۱۶۷۳	۰/۱۷۰۸	۰/۱۷۱۹	۰/۱۷۲۵	۰/۱۷۲۹
$\omega_4$	۰/۵۷۶۲	۰/۵۶۰۱	۰/۴۰۷۲	۰/۳۷۳۸	۰/۳۵۲۷	۰/۲۹۳۹	۰/۲۶۴۳	۰/۲۵۴۵	۰/۲۴۹۵	۰/۲۴۶۶
$\omega_5$	۰/۰۹۰۳	۰/۰۸۷۲	۰/۱۰۷۴	۰/۱۳۹۴	۰/۱۵۸۳	۰/۱۷۹۳	۰/۱۸۹۶	۰/۱۹۳۰	۰/۱۹۴۷	۰/۱۹۵۷

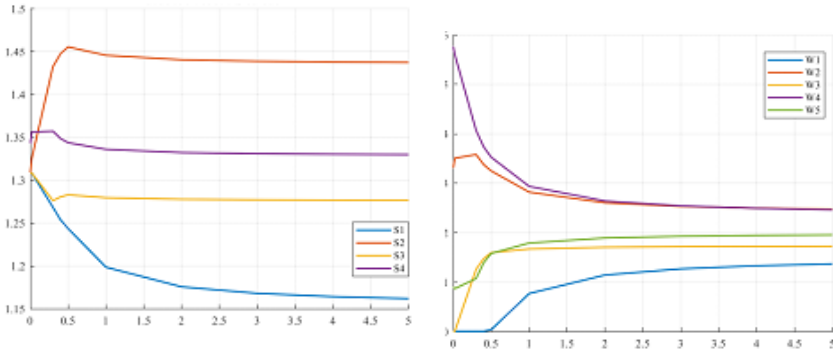
جدول ۹. امتیاز گزینه‌ها براساس مقادیر مختلف  $\zeta$

	$\zeta$	$\zeta$	$\zeta$	$\zeta$	$\zeta$	$\zeta$	$\zeta$	$\zeta$	$\zeta$	$\zeta$	رتبه نهایی
	۰/۰۰۰۱	۰/۰۲	۰/۳	۰/۴	۰/۵	۱	۲	۳	۴	۵	
$\tilde{E}_1$	۱/۳۰۸۷	۱/۳۰۸۵	۱/۲۶۸۴	۱/۲۵۳۸	۱/۲۴۳۷	۱/۱۹۸۶	۱/۱۷۵۶	۱/۱۶۸۰	۱/۱۶۴۲	۱/۱۶۱۹	۴
$\tilde{E}_2$	۱/۳۰۸۷	۱/۳۲۵۵	۱/۴۳۲۵	۱/۴۴۷۶	۱/۴۵۵۶	۱/۴۴۵۸	۱/۴۴۰۶	۱/۴۳۸۸	۱/۴۳۷۹	۱/۴۳۷۴	۱
$\tilde{E}_3$	۱/۳۰۸۷	۱/۳۰۸۵	۱/۲۷۶۳	۱/۲۸۰۵	۱/۲۸۳۰	۱/۲۷۹۶	۱/۲۷۷۸	۱/۲۷۷۲	۱/۲۷۶۹	۱/۲۷۶۷	۳
$\tilde{E}_4$	۱/۳۴۲۹	۱/۳۵۶۲	۱/۳۵۷۲	۱/۳۴۸۷	۱/۳۴۳۸	۱/۳۳۶۱	۱/۳۳۲۲	۱/۳۳۱۰	۱/۳۳۰۳	۱/۳۲۹۹	۲

جدول ۹ و شکل ۵ ب همزمان تصویر ظریفی از رقابت پویای سرمایه‌گذاران در پاسخ به تغییرات پارامتر همگرایی  $\zeta$  ارائه می‌دهند. در اینجا با افزایش تدریجی  $\zeta$  از ۰/۰۰۰۱ به ۵، سیستم تصمیم‌گیری به تدریج از حداکثرسازی صرف امتیاز کلی گزینه‌ها فاصله گرفته و تعهد خود به توازن وزنی را افزایش می‌دهد، که این تحول، بازآرایی چشمگیری در رتبه‌بندی نهایی ایجاد می‌کند. در اینجا نیز اگر چه بعد از  $\zeta = ۲$  ثبات مقداری در امتیاز گزینه‌ها آشکار است، اما ثبات رتبه سرمایه‌گذاران به ازای  $\zeta = ۰/۳$  حاصل شده است. براساس امتیاز نهایی گزینه‌ها؛  $\tilde{E}_1 = ۱/۱۶۱۹$ ،  $\tilde{E}_2 = ۱/۴۳۷۴$ ،  $\tilde{E}_3 = ۱/۲۷۶۷$ ،  $\tilde{E}_4 = ۱/۳۲۹۹$  گزینه‌ها در نهایت به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\tilde{E}_2 \geq \tilde{E}_4 \geq \tilde{E}_3 \geq \tilde{E}_1$$

از این رو، سرمایه‌گذار دوم با کسب بیشترین امتیاز به عنوان گزینه برتر انتخاب می‌شود. شرایط ذکر شده در گام‌های روش، تضمین‌کننده همگرایی نتیجه نهایی است.



(آ) تغییرات وزن معیارها براساس مقادیر  $\zeta$ . (ب) تغییرات امتیاز گزینه‌ها براساس مقادیر  $\zeta$ .

### شکل ۵. بررسی تغییرات وزن معیارها و امتیاز گزینه‌ها براساس مقادیر $\zeta$

#### ۳.۴. تحلیل مقایسه‌ای.

به‌منظور اعتبارسنجی عملی و نشان دادن برتری روش پیشنهادی، در این قسمت مطالعه‌ای مقایسه‌ای بین خروجی‌های حاصل از روش پیشنهادی و روش‌های موجود از جمله مالیک و پرامانیک [۳۱] انجام شده است. علاوه بر این، با به‌کارگیری وزن‌های به دست آمده از روش پیشنهادی در ترکیب با سه روش رتبه‌بندی شناخته‌شده دیگر در ادبیات موضوع، یعنی روش‌های یه [۳۲]، لیانگ و همکاران [۷] و دلی و سوپاس<sup>۱</sup> [۳۳]، امتیاز نهایی سرمایه‌گذاران بر اساس رویکرد مجموع وزنی محاسبه گردیده است. هدف اصلی، ارزیابی عملکرد روش‌های موجود و نشان دادن کارایی روش توسعه‌یافته جدید است. خلاصه‌ای از یافته‌ها در جدول ۱۰ ارائه شده است.

نتایج جدول ۱۰ نشان می‌دهد که در تمامی روش‌های مورد بررسی، با وجود تفاوت در مقادیر عددی امتیازها، سرمایه‌گذار دوم؛  $\tilde{E}_2$  به عنوان برترین گزینه و سرمایه‌گذار اول؛  $\tilde{E}_1$  به عنوان بدترین گزینه شناسایی شده‌اند. این سازگاری در نتایج، نشان‌دهنده قابلیت اطمینان روش‌ها در تعیین گزینه‌های برتر و ضعیف است. همچنین، روش پیشنهادی از نظر ترتیب رتبه‌بندی سرمایه‌گذاران، تطابق کامل با روش‌های یه [۳۲]، لیانگ و همکاران [۷] و دلی و سوپاس [۳۳] دارد که این موضوع، اعتبار روش پیشنهادی را تأیید می‌کند.

با این حال، در روش مالیک و پرامانیک [۳۱]، تفاوت در رتبه‌بندی بین سرمایه‌گذاران سوم و چهارم ( $\tilde{E}_3, \tilde{E}_4$ ) در مقایسه با سایر روش‌ها مشاهده می‌شود. این انحراف می‌تواند ناشی از

<sup>1</sup>Subas

**جدول ۱۰.** تحلیل مقایسه‌ای رتبه‌بندی سرمایه‌گذاران براساس روش‌های موجود

روش‌ها					
$\tilde{E}_j$	مالیک و پرامانیک [۳۱]	یه [۳۲]	لیانگ و همکاران [۷]	دلی و سوباس [۳۳]	روش پیشنهادی
$\tilde{E}_1$	۰/۴۸۲۶	۰/۴۷۱۸	۰/۴۷۰۴	۰/۳۵۵۴	۱/۱۶۱۹
$\tilde{E}_2$	۰/۷۳۶۷	۰/۵۴۵۳	۰/۵۴۵۴	۰/۴۰۸۵	۱/۴۳۷۴
$\tilde{E}_3$	۰/۴۹۵۲	۰/۵۰۱۸	۰/۵۰۰۱	۰/۳۷۸۹	۱/۲۷۶۷
$\tilde{E}_4$	۰/۴۹۲۸	۰/۴۹۹۴	۰/۵۰۰۶	۰/۳۷۳۳	۱/۳۲۹۹

عدم انجام نرمال‌سازی در روش ایشان باشد که بر روی نتایج امتیازهای نزدیک به هم تأثیر گذاشته است.

از نکات قابل توجه دیگر، ضعف مشترک در تمامی روش‌های مقایسه شده، عدم محاسبه همزمان وزن معیارها در فرآیند تصمیم‌گیری است. این امر، چالشی اساسی در روش‌های تصمیم‌گیری چندمعیاره تحت محیط اعداد نوتروسوفیک دوزنقه‌ای محسوب می‌شود و اهمیت توسعه روش‌های یکپارچه‌ای مانند روش پیشنهادی حاضر را پررنگ می‌سازد. در نهایت، روش ارائه شده با ارائه نتایج مشابه در رتبه‌بندی و همچنین امکان محاسبه همزمان وزن‌ها، به‌عنوان روشی کارآمد و قابل اتکا در مسائل تصمیم‌گیری چندمعیاره تحت عدم قطعیت تثبیت می‌شود.

**۵. نتیجه‌گیری و پیشنهادهای آتی**

این پژوهش با گسترش چارچوبی نوین در حوزه تصمیم‌گیری چندمعیاره، گامی بنیادین و منعطف در مواجهه با چالش‌های ذاتی داده‌های نامعین و چندلایه برداشته است. توسعه روش رتبه‌بندی پارامتریک مبتنی بر اعداد نوتروسوفیک دوزنقه‌ای با اثبات قضایای تحلیلی، نه تنها پایه‌های نظری مقایسه این اعداد را مستحکم ساخته، بلکه امکان ادغام آن با الگوریتم‌های پیچیده تصمیم‌گیری را فراهم آورده است. نوآوری محوری این تحقیق، توسعه روش سکا در محیط نوتروسوفیک دوزنقه‌ای است، که برای نخستین بار در این نوشته به کار گرفته شده است. جایگزینی راهبردی آنتروپی شانون به‌جای انحراف استاندارد، گواهی بر توانایی این چارچوب در مدل‌سازی کارآمدتر بی‌نظمی ذاتی داده‌های مسئله است. پیاده‌سازی عملی این روش در مسائل واقعی، ظرفیت آن را در تولید رتبه‌بندی‌های پایدار و شفاف‌سازی فرآیندهای تصمیم‌گیری پیچیده به‌وضوح نشان داده است. به‌طور خاص، تلفیق هوشمندانه مکانیزم‌های پویای وزندهی با تحلیل حساسیت پارامتریک، امکانی بی‌همتا برای ردیابی تأثیر معیارها بر

خروجی نهایی فراهم می‌آورد. جهت تعمیق دستاوردهای این تحقیق، مسیرهای تحقیقاتی زیر پیشنهاد می‌گردد:

- تعمیم چارچوب نظری به سیستم‌های پیچیده‌تر همچون اعداد نوتروسوفیک بازه‌ای و توسعه نسخه‌های پویا برای مدلسازی تغییرات زمانی وزن معیارها.
- ادغام با پارادایم‌های محاسباتی نوظهور مانند یادگیری ماشین تفسیرپذیر به‌منظور بهینه‌سازی انتخاب پارامترهای برش و افزایش شفافیت در تعامل با تصمیم‌گیرندگان انسانی.
- کاربرد در حوزه‌های استراتژیک همچون مدیریت زنجیره تأمین پایدار، ارزیابی ریسک‌های سیستماتیک در شبکه‌های انرژی، و طراحی سیستم‌های پشتیبان تصمیم در تشخیص پزشکی.

این پژوهش افق‌های تازه‌ای را در تلفیق ریاضیات فازی پیشرفته و سیستم‌های تصمیم‌یار هوشمند گشوده است. ادامه این مسیر نه تنها غنای نظری حوزه نوتروسوفیک را افزایش خواهد داد، بلکه زمینه‌ساز تحولی ملموس در کاربردهای صنعتی و سیاست‌گذاری‌های کلان تحت عدم قطعیت خواهد بود.

## مراجع

- [1] Smarandache, F. (2005). Neutrosophic set-a generalization of the intuitionistic fuzzy set. *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, 24(3), 287-297.
- [2] Farnam, M., Shirdel, G. H., & Darehmiraki, M. (2024). An Integrated CODAS Method and Novel Surface-based Weighted Distance Measures under Neutrosophic Environment. *Neutrosophic Sets and Systems*, 68 (68), 198-222.
- [3] Zadeh, L. A. (1965). Fuzzy sets. *Information and control*, 8(3), 338-353.
- [4] Atanassov, K. T. (1999). Intuitionistic fuzzy sets. In *Intuitionistic fuzzy sets: theory and applications*, Physica-Verlag, Heidelberg, 1-137.
- [5] Zhang, H. W. F. S. Y., & Sunderraman, R. (2010). Single Valued Neutrosophic Sets. *MULTISPACE & MULTISTRUCTURE. NEUTROSOPHIC TRANSDISCIPLINARITY*, 410.
- [6] Ye, J. (2015). Trapezoidal neutrosophic set and its application to multiple attribute decision-making. *Neural Computing and Applications*, 26(5), 1157-1166.
- [7] Liang, R. X., Wang, J. Q., & Zhang, H. Y. (2018). A multi-criteria decision-making method based on single-valued trapezoidal neutrosophic preference relations with complete weight information. *Neural Computing and Applications*, 30 (11), 3383-3398.

- [8] Wu, X., Qian, J., Peng, J., & Xue, C. (2018). A multi-criteria group decision-making method with possibility degree and power aggregation operators of single trapezoidal neutrosophic numbers. *Symmetry*, 10 (11), 590.
- [9] Deli, I. (2018). Operators on single valued trapezoidal neutrosophic numbers and SVTN-group decision making. *Neutrosophic Sets and Systems*, 22, 131-151.
- [10] Chakraborty, A., Mondal, S. P., Mahata, A., & Alam, S. (2021). Different linear and non-linear form of trapezoidal neutrosophic numbers, de-neutrosophication techniques and its application in time-cost optimization technique, sequencing problem. *RAIRO-Operations Research*, 55, S97-S118.
- [11] Jana, C., Pal, M., Karaaslan, F., & Wang, J. Q. (2020). Trapezoidal neutrosophic aggregation operators and their application to the multi-attribute decision-making process. *Scientia Iranica*, 27 (3), 1655-1673.
- [12] Liang, R. X., Wang, J. Q., & Li, L. (2018). Multi-criteria group decision-making method based on interdependent inputs of single-valued trapezoidal neutrosophic information. *Neural Computing and Applications*, 30 (1), 241-260.
- [13] Deli, I., & Ozturk, E. K. (2020). A defuzzification method on single-valued trapezoidal neutrosophic numbers and multiple attribute decision making. *Cumhuriyet Science Journal*, 41 (1), 22-37.
- [14] Aal, S. I., Ellatif, M. A., & Hassan, M. M. (2018). Proposed Model for Evaluating Information Systems Quality Based on Single Valued Triangular Neutrosophic Numbers. *International Journal of Mathematical Sciences and Computing*, 4, 1-14.
- [15] Abdel-Basset, M., Mohamed, M., & Sangaiah, A. K. (2018). Neutrosophic AHP-Delphi Group decision making model based on trapezoidal neutrosophic numbers. *Journal of Ambient Intelligence and Humanized Computing*, 9 (5), 1427-1443.
- [16] Pramanik, S., & Mallick, R. (2018). VIKOR based MAGDM Strategy with Trapezoidal Neutrosophic Numbers. *Neutrosophic Sets and Systems*, 22, 118-131.
- [17] Biswas, P., Pramanik, S., & Giri, B. C. (2019). NonLinear programming approach for single-valued neutrosophic TOPSIS method. *New Mathematics and Natural Computation*, 15 (2), 307-326.
- [18] Pramanik, S., & Mallick, R. (2019). TODIM strategy for multi-attribute group decision making in trapezoidal neutrosophic number environment. *Complex & Intelligent Systems*, 5 (4), 379-389.
- [19] Bhat, S. A. (2023). An enhanced AHP group decision-making model employing neutrosophic trapezoidal numbers. *Journal of Operational and Strategic Analytics*, 1 (2), 81-89.
- [20] Keshavarz-Ghorabae, M., Amiri, M., Zavadskas, E. K., Turskis, Z., & Antucheviciene, J. (2018). Simultaneous evaluation of criteria and alternatives (SECA) for multi-criteria decision-making. *Informatica*, 29 (2), 265-280.

- [21] Keshavarz-Ghorabae, M., Govindan, K., Amiri, M., Zavadskas, E. K., & Antucheviciene, J. (2019). An integrated type-2 fuzzy decision model based on WASPAS and SECA for evaluation of sustainable manufacturing strategies. *Journal of Environmental Engineering and Landscape Management*, 27 (4), 187-200.
- [22] Azbari, K. E., Ashofteh, P. S., Golfam, P., & Singh, V. P. (2021). Optimal wastewater allocation with the development of an SECA multi-criteria decision-making method. *Journal of Cleaner Production*, 321, 129041.
- [23] Eghbali-Zarch, M., Zabihi, S. Z., & Masoud, S. (2023). A novel fuzzy SECA model based on fuzzy standard deviation and correlation coefficients for resilient-sustainable supplier selection. *Expert Systems with Applications*, 231, 120653.
- [24] Tian, H., Zhang, S., Garg, H., & Liu, X. (2024). An extended SECA-GDM method considering flexible linguistic scale optimization and its application in occupational health and safety risk assessment. *Alexandria Engineering Journal*, 88, 317-330.
- [25] Farnam, M., Darehmiraki, M., & Behdani, Z. (2024). Neutrosophic data envelopment analysis based on parametric ranking method. *Applied Soft Computing*, 153, 111297
- [26] Wang, C. N., Le, T. Q., Chang, K. H., & Dang, T. T. (2022). Measuring road transport sustainability using MCDM-based entropy objective weighting method. *Symmetry*, 14 (5), 1033.
- [27] Lotfi, F. H., & Fallahnejad, R. (2010). Imprecise Shannon's entropy and multi attribute decision making. *Entropy*, 12 (1), 53-62.
- [28] Mukhametzhanov, I. (2021). Specific character of objective methods for determining weights of criteria in MCDM problems: Entropy, CRITIC and SD. *Decision Making: Applications in Management and Engineering*, 4 (2), 76-105.
- [29] Shureshjani, R. A., & Darehmiraki, M. (2013). A new parametric method for ranking fuzzy numbers. *Indagationes Mathematicae*, 24 (3), 518-529.
- [30] Abbasi Shureshjani, R., Shirdel, G. H., Farnam, M., & Darehmiraki, M. (2024). Parametric distance measure for trapezoidal intuitionistic fuzzy numbers and application in Multi-criteria group decision-making. *Mathematics and Computational Sciences*, 5 (4), 61-84.
- [31] Mallick, R., & Pramanik, S. (2021). TrNN-EDAS strategy for MADM with entropy weight under trapezoidal neutrosophic number environment. In *Neutrosophic Operational Research: Methods and Applications*, Springer, Cham, 575-592.
- [32] Ye, J. (2017). Some weighted aggregation operators of trapezoidal neutrosophic numbers and their multiple attribute decision making method. *Informatica*, 28 (2), 387-402.

- [33] Deli, I., & Subas, Y. (2017). A ranking method of single valued neutrosophic numbers and its applications to multi-attribute decision making problems. *International Journal of Machine Learning and Cybernetics*, 8 (4), 1309-1322.