

شاخص مرکزیت فازی و کاربرد آن در تحلیل شبکه‌های اجتماعی

حسین عبدالهی‌پور، سید محمود طاهری*

دانشکده علوم مهندسی، دانشکدگان فنی، دانشگاه تهران، تهران، ایران

تاریخ دریافت: ۱۴۰۴/۰۶/۱۱

تاریخ پذیرش: ۱۴۰۴/۱۱/۲۹

نوع مقاله: علمی-پژوهشی

چکیده. در این مقاله به موضوع استفاده از گراف‌های فازی در نمایش و سنجش روابط اجتماعی می‌پردازیم. ابتدا مفاهیم پایه‌ای اعداد فازی و گراف‌های فازی تشریح و سپس شاخص‌های مرکزیت کلاسیک (شامل مرکزیت درجه، مرکزیت بینابینی، و مرکزیت نزدیکی) در چارچوب گراف‌های فازی بازتعریف می‌شوند. برپایه شبکه همکاری استادان یک دانشکده فرضی، جزئیات این روش تشریح می‌شود. با این روش، نایقینی موجود در شبکه همکاری حفظ می‌شود و تحلیلی از روابط میان استادان و اهمیت آنان در ارتباطات بر اساس معیارهای مختلف اندازه‌گیری و سنجیده می‌شود. سپس بر اساس نتایج یک پرسش‌نامه از استادان دانشکده علوم مهندسی دانشگاه تهران، گراف (شبکه) همکاری علمی و گراف تعامل اجتماعی-فرهنگی این استادان استخراج می‌شود و دو شبکه فازی حاصل، بر پایه سه شاخص مرکزیت فازی، بررسی و تحلیل می‌شوند.

۱. درآمد و انگیزه

شبکه اجتماعی، شبکه‌ای است شامل گروهی از افراد، سازمان‌ها یا موجودیت‌ها که از طریق تعاملات اجتماعی، به اشتراک اطلاعات می‌پردازند [۱۹]. تحلیل شبکه‌های اجتماعی^۱

2010 Mathematics Subject Classification. 08A72 ; 05C72 ; 91D30

* Corresponding author

E-mails: h.abdollahipour@ut.ac.ir, sm_taheri@ut.ac.ir.

عبارات و کلمات کلیدی. شبکه همکاری علمی استادان، شاخص مرکزیت بینابینی، شاخص مرکزیت درجه، گراف فازی، شاخص مرکزیت درجه فازی.

^۱SNA (Social Network Analysis)

به موضوع بررسی روابط میان این افراد، گروه‌ها یا سازمان‌ها می‌پردازد. در روش‌های سنتی، روابط به صورت دودویی (وجود یا عدم وجود ارتباط) یا وزن‌دار (با مقادیر مشخص) نمایش داده می‌شوند. اما در واقعیت، روابط اجتماعی اغلب مبهم و دارای نایقینی هستند [۳]. برای درک بهتر این نایقینی، به دو مثال زیر توجه کنید.

مثال ۱.۱. در بسیاری از شبکه‌های اجتماعی و سکوها‌های پخش فیلم (مانند فیلمو)، علاقه‌ی کاربران نسبت به یک فیلم به صورت دودویی (بله/خیر) اندازه‌گیری می‌شود. برای تحلیل داده‌ها یک گراف ساده به این شکل می‌سازند: اگر کاربری فیلمی را دوست داشته باشد، یالی بین او و آن فیلم رسم می‌شود و در غیر این صورت، هیچ ارتباطی ثبت نمی‌شود. اما در واقع، علاقه انسان به یک فیلم هرگز دودویی یا حتی عددی دقیق نیست و حتی با یک عدد مشخص نیز بیان نمی‌شود. بلکه علاقه غالباً با عبارات‌های مبهم بیان می‌شود (مثلاً « کمی جالب بود»، « دوستش داشتم»، یا «بی نظیر بود!») و حتی تحت تأثیر عوامل مبهمی مانند حال و هوای لحظه‌ای شخصی قرار می‌گیرد. بنابراین، زمانی که سیستم‌های تحلیل داده، علاقه را در قالب چند گزینه محدود (مثلاً امتیاز ۱ تا ۵) اندازه می‌گیرند، نوعی نایقینی ذاتی را نادیده می‌گیرند؛ این نایقینی نه تنها ناشی از خطای اندازه‌گیری، بلکه ریشه در ذات پیچیده‌ی ترجیحات انسانی دارد.

مثال ۲.۱. شبکه‌ی همکاری استادان یک دانشکده، نمونه‌ای از یک شبکه‌ی اجتماعی-علمی است. در روش‌های سنتی معمولاً روابط بین استادان را بر اساس معیارهای ساده‌ای مانند تعداد مقاله‌های مشترک اندازه‌گیری می‌کنند. برای مثال، اگر نام دو استاد به عنوان نویسنده در یک مقاله باشد، میان این دو استاد یک ارتباط ساده (در شبکه: یک یال) یا وزن‌دار (بر اساس تعداد مقالات مشترک) بین آن‌ها تعریف می‌شود. اما این روش‌ها معایبی دارند که منجر به تحلیل ناقص از ساختار واقعی همکاری‌ها می‌شود:

(۱) کاهش پیچیدگی روابط. همکاری علمی تنها به انتشار مقاله محدود نمی‌شود.

ممکن است دو استاد در طرح‌های پژوهشی، مشاوره‌های علمی، تبادل ایده‌ها یا حتی فعالیت‌های آموزشی مشارکت داشته باشند، بدون این‌که لزوماً مقاله‌ای منتشر کنند.

(۲) عدم توجه به کیفیت ارتباط. یک همکاری ضعیف (مثلاً مشارکت کوچک در یک

مقاله) و یک همکاری قوی (مثلاً همکاری طولانی مدت در یک پروژه و ارائه گزارش آن در قالب یک مقاله) با یک عدد یکسان نمایش داده می‌شوند.

(۳) ابهام در تعریف همکاری. درک افراد از «همکاری» متفاوت است. ممکن است یک استاد همکاری با استاد دیگر را بسیار مهم بداند، در حالی که طرف مقابل این رابطه را کم‌اهمیت تلقی کند.

طرح مسئله. به منظور بررسی مسائلی مانند سکوه‌های پخش فیلم و شبکه همکاری استادان، می‌توان با استفاده از روش‌های ریاضیات فازی، نایقینی و پیچیدگی روابط را به صورت کمی مدل‌سازی کرد. در این مقاله، با بهره‌گیری از گراف‌های فازی، روشی جدید برای بررسی این نوع ارتباطها بررسی می‌کنیم که امکان تحلیل واقع‌بینانه‌تری از شبکه‌های اجتماعی را فراهم می‌سازد. در این روش، به جای تعریف شبکه به صورت گراف معمولی، از گراف فازی بهره می‌بریم، یعنی برای مثال، هر یال بین دو استاد در شبکه همکاری استادان (این یال نمایانگر درجه همکاری دو استاد با یکدیگر است) با یک عدد فازی مثلثی تعریف می‌شود (همچون کاری که در [۱۹] انجام شده است با این تفاوت که در مقاله‌ی حاضر به جای در نظر گرفتن درجه همکاری به صورت عدد دقیق، از عدد فازی استفاده می‌کنیم) که در بخش‌های ۲ و ۳ توضیح خواهیم داد. اما برای ایجاد یک گراف فازی، باید داده‌های مورد نیاز نیز به صورت فازی گردآوری شوند. از آن‌جا که شبکه ساخته شده، یک شبکه فازی است، نیاز داریم تا تحلیل‌ها نیز به صورت فازی بررسی شوند؛ یعنی باید شاخص‌های تحلیل مرکزیت کلاسیک را به چارچوب فازی تعمیم دهیم که جزئیات بیش‌تر در بخش‌های ۴ و ۵ آمده‌اند. این رویکرد جدید را در بخش ۶ با یک مثال تشریحی بررسی خواهیم کرد. در بخش ۷ شیوه پیشنهادی را درباره شبکه اعضای هیئت علمی دانشکده علوم مهندسی دانشگاه تهران پیاده و نتایج را بر پایه شاخص‌های مختلف و نیز با تحلیل اکتشافی داده‌ها بررسی خواهیم کرد. در بخش ۸ روش پیشنهادی با روش‌های کلاسیک مقایسه می‌کنیم. بخش ۹ و پایانی، به جمع‌بندی و نتیجه‌گیری اختصاص دارد.

۲. مفاهیم و تعاریف مقدماتی

در این بخش، برخی مفاهیم اساسی را که در ادامه به آن‌ها نیاز داریم، بررسی می‌کنیم. این مطالب برگرفته از مراجع [۱]، [۵]، [۶]، [۷] و [۱۶] هستند.

تعریف ۱.۲ (مجموعه فازی). یک زیرمجموعه فازی A از مجموعه مرجع X یا به اختصار، مجموعه فازی از X مجموعه‌ای است که درجه عضویت اعضای آن می‌تواند به طور پیوسته از بازه $[0, 1]$ اختیار شود. این مجموعه به وسیله یک تابع عضویت $\mu_A(x)$ مشخص می‌شود (به

کوتاهی: $A(x)$ که به هر عنصر از x از X ، عددی از بازه $[0, 1]$ به عنوان درجه عضویت آن عنصر در مجموعه فازی A نسبت می‌دهد.

تعریف ۲.۲ (عدد فازی). مجموعه فازی N از R (اعداد حقیقی) را یک عدد فازی حقیقی، به کوتاهی عدد فازی، گوئیم اگر:

$$(1) \quad N(x) = 1 \text{ دقیقاً یک } x \in R \text{ وجود داشته باشد که}$$

(۲) α -برش‌های N ، N_α ، به ازای هر $\alpha \in (0, 1]$ ، به صورت بازه‌های بسته باشند که

$$N_\alpha = \{x \in \mathbb{R}; N(x) \geq \alpha\}$$

در حالتی که به ازای هر $x \leq 0$ ، $N(x) = 0$ ، عدد فازی N را مثبت نامیم.

اعداد فازی بسته به نحوه تعریف تابع عضویت آن‌ها، انواع مختلفی دارند که یکی از رایج‌ترین آن‌ها، اعداد فازی مثلثی است. این اعداد به دلیل سادگی در تعریف تابع عضویت و سهولت در محاسبات جبری، بسیار مورد توجه هستند.

تعریف ۳.۲ (عدد فازی مثلثی). اگر عدد فازی N ، دارای تابع عضویت به صورت زیر باشد، آن را عدد فازی مثلثی گوئیم و با نماد $N = (m, m - a, b - m)_T$ نشان می‌دهیم.

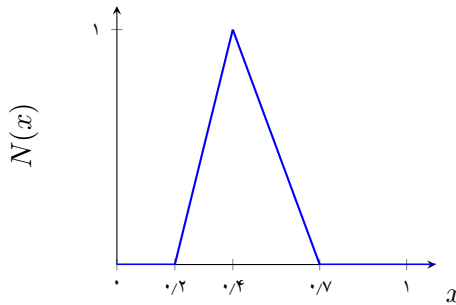
$$(1.2) \quad N(x) = \begin{cases} \frac{x-a}{m-a} & a \leq x \leq m \\ \frac{b-x}{b-m} & m < x \leq b \\ 0 & \text{جاهای دیگر} \end{cases}$$

که در آن، m مرکز، و $m - a$ و $b - m$ ، به ترتیب پهنای چپ و پهنای راست N نامیده می‌شوند.

مثال ۴.۲. می‌خواهیم رابطه دوستی میان دو نفر (شخص «آ» و شخص «ب») را با یک عدد فازی بیان کنیم. اگر این مقدار صفر باشد یعنی هیچ ارتباطی میان آن دو نیست و در صورتی که این مقدار یک باشد، یعنی رابطه دوستی به صورت ۱۰۰ درصد و کامل برقرار است. مجموعه فازی $N = (0/4, 0/2, 0/3)_T$ با تابع عضویت زیر یک عدد فازی مثلثی است که تعبیری معادل با «تقریباً ۰/۴» دارد و نشان می‌دهد میزان دوستی میان آن دو نفر تقریباً ۴۰ درصد است.

(شکل ۱)

$$\mu_N(x) = \begin{cases} \frac{x-0.2}{0.2} & 0.2 \leq x \leq 0.4 \\ \frac{0.7-x}{0.3} & 0.4 < x \leq 0.7 \\ 0 & \text{جاهای دیگر} \end{cases}$$



شکل ۱: نمودار تابع عضویت عدد فازی N در مثال ۴.۲

ترتیب اعداد فازی. برای مشخص کردن ترتیب دو عدد فازی که در این پژوهش نیاز داریم، روش‌های متعددی وجود دارد. این‌جا، از روش مرکز ثقل به‌منظور مقایسه دو عدد فازی استفاده کرده‌ایم.

تعریف ۵.۲ (مرکز ثقل یک مجموعه فازی). اگر M یک مجموعه فازی از R با تابع عضویت $M(x)$ باشد، آنگاه مرکز ثقل این مجموعه به‌صورت زیر محاسبه می‌شود (با فرض وجود انتگرال‌ها):

$$\text{CoG}(M) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} x.M(x)dx}{\int_{-\infty}^{\infty} M(x)dx}$$

در حالت خاص، مرکز ثقل عدد فازی مثلثی $A = (a, a_l, a_r)_T$ عبارت است از:

$$\text{CoG}(A) = a + \frac{a_r - a_l}{3}$$

تعریف ۶.۲ (ترتیب اعداد فازی). ترتیب دو عدد فازی A و B به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$A < B \Leftrightarrow \text{CoG}(A) < \text{CoG}(B)$$

$$A > B \Leftrightarrow \text{CoG}(A) > \text{CoG}(B)$$

$$A = B \Leftrightarrow CoG(A) = CoG(B)$$

اعمال جبری بر اعداد فازی. از آنجا که در این مقاله با اعداد فازی مثلثی سروکار داریم، سه عملگر جبری را که بر پایه اصل گسترش تعریف شده‌اند، برای این نوع اعداد معرفی می‌کنیم. فرض کنید $M = (a, a_l, a_r)_T$ و $N = (b, b_l, b_r)_T$ دو عدد فازی مثلثی مثبت هستند:

(۱) جمع دو عدد فازی (\oplus) . حاصل جمع دو عدد فازی M و N به صورت زیر است

$$M \oplus N = (a + b, a_l + b_l, a_r + b_r)_T$$

(۲) ضرب اسکالر (\odot) . حاصل ضرب عدد حقیقی w در عدد فازی M به صورت زیر است:

$$w \odot M = (wa, |w|a_l, |w|a_r)_T$$

(۳) ضرب دو عدد فازی (\otimes) . درباره ضرب دو عدد فازی، رابطه دقیق وجود ندارد ولی برای ضرب دو عدد فازی مثلثی، روابط تقریبی ذکر شده‌اند. در این مقاله، از تقریبی که در مرجع [۱۶] آورده شده است استفاده می‌کنیم

$$M \otimes N \simeq (ab, (a - a_l)(b - b_l), (a + a_r)(b + b_r))_T$$

مثال ۷.۲. فرض کنید $M = (۰/۲, ۰/۱, ۰/۲)_T$ و $N = (۰/۵, ۰/۳, ۰/۱)_T$ و $w = ۷$. در این صورت

$$M \oplus N = (۰/۲, ۰/۱, ۰/۲) \oplus (۰/۵, ۰/۳, ۰/۱) = (۰/۷, ۰/۴, ۰/۳)$$

$$w \odot M = ۷ \odot (۰/۲, ۰/۱, ۰/۲) = (۱/۴, ۰/۷, ۱/۴)$$

$$M \otimes N \simeq (۰/۲, ۰/۱, ۰/۲) \otimes (۰/۵, ۰/۳, ۰/۱) = (۰/۱, ۰/۰۲, ۰/۲۴)$$

تجمیع اعداد فازی. یکی دیگر از عملگرهایی که در این پژوهش از آن استفاده می‌کنیم، عملگر تجمیع است. عملگرهای تجمیع فازی، توابع ریاضی هستند که چند مقدار فازی را به یک مقدار واحد تجمیع می‌کنند، در حالی که سعی دارند بیش‌ترین ویژگی‌های ورودی را حفظ کنند. از کاربرد این عملگرها می‌توان به تصمیم‌گیری‌های چندمتغیره، تشخیص الگو و ارزیابی‌هایی که با نایقینی سروکار دارند، اشاره کرد [۹]، [۱۳] و [۱۷].

تعریف ۸.۲ (عملگر تجمیع). یک عملگر تجمیع، تابعی است به شکل

$$f : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$$

که دو شرط زیر را برآورده می‌کند:

$$(۱) \text{ یکنواختی: اگر به ازای هر } x, y \in [0, 1]^n \text{ داشته باشیم } x \leq y, \text{ آنگاه: } f(x) \leq f(y)$$

$$(۲) \text{ شرایط مرزی: } f(0, 0, \dots, 0) = 0 \text{ و } f(1, 1, \dots, 1) = 1$$

عملگرهای متعددی برای تجمیع فازی معرفی شده است اما در این مقاله از عملگر $FTOWA$ ^۱ استفاده می‌کنیم که برپایه اعداد فازی مثلثی چنین تعریف می‌شود.

تعریف ۹.۲ (عملگر $FTOWA$). اگر A_i ها اعداد فازی مثلثی باشند و به ترتیب از A_1 که کوچک‌ترین عدد است تا A_n که بزرگ‌ترین عدد است آن‌ها را مرتب کنیم، آنگاه بر اساس بردار وزن $w = (w_1, \dots, w_n)$

$$FTOWA(A_1, A_2, \dots, A_n) = \bigoplus_{i=1}^n w_i \odot A_i$$

که در آن، w_i وزن عدد فازی A_i است.

مثال ۱۰.۲. فرض کنید در دانشکده علوم مهندسی دانشگاه تهران، می‌خواهیم استادان را از دید دانشجویان این دانشکده ارزیابی کنیم. برای این منظور، سه شاخص «کیفیت تدریس»، «پویایی کلاس» و «دانش استاد» را تعیین کرده‌ایم و از دانشجویان خواسته‌ایم تا به پرسش‌نامه (در این پرسش‌نامه گزینه‌ها به صورت کیفی از ضعیف تا قوی چیده شده‌اند) پاسخ دهند. اما برای رسیدن به یک مقایسه معتبر میان استادان، نیاز داریم این سه پرسش را (که پاسخ‌هایی فازی دارند) به یک پاسخ فازی با شاخص «کیفیت استاد» تبدیل کنیم. حال فرض کنید که دانشجویی به نام «علی»، پاسخ‌هایی درباره استادی با نام خانوادگی بهروزی داده است که به صورت فازی به ترتیب $A_1 = (17, 1, 2)_T$ ، $A_2 = (10, 2, 3)_T$ و $A_3 = (15, 4, 1)_T$ هستند. بر اساس اولویت‌هایی که دانشکده برای رتبه‌بندی استادان دارد بردار وزن پرسش‌ها نیز به صورت $w^T = (3, 1, 2)$ است. اکنون برای محاسبه یک عدد فازی تجمیع‌شده که نمایانگر هر سه عدد فازی و وزن آن‌ها (درباره استاد بهروزی) باشد، داریم.

گام اول) نرمال‌سازی بردار وزن: باتوجه به این‌که مجموع درایه‌های بردار برابر $3 + 1 + 2 = 6$

^۱Fuzzy Triangular Ordered Weighted Arithmetic

است، به منظور نرمال سازی بردار، کافی است هر درایه را به ۶ تقسیم کنیم. بردار نرمال شده زیر به دست می آید

$$u_w = \left(\frac{3}{6}, \frac{1}{6}, \frac{2}{6} \right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{3} \right)$$

گام دوم) با توجه به تعریف ۹.۲، عدد فازی تجمیع شده به صورت زیر است

$$\begin{aligned} A &= FTOWA(A_1, A_2, A_3) = \left[\frac{1}{4} \odot (17, 1, 2)_T \right] \oplus \left[\frac{1}{6} \odot (10, 2, 3)_T \right] \\ &\oplus \left[\frac{1}{3} \odot (15, 4, 1)_T \right] = \left(\frac{17}{2}, \frac{1}{2}, 1 \right)_T \oplus \left(\frac{5}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2} \right)_T \oplus \left(5, \frac{4}{3}, \frac{1}{3} \right)_T \\ &\simeq (10/2, 2/2, 1/8)_T \end{aligned}$$

این مقدار یعنی کیفیت استاد شماره ۳ برابر با عدد فازی $(10/2, 2/2, 1/8)_T$ است.

۳. گراف های فازی

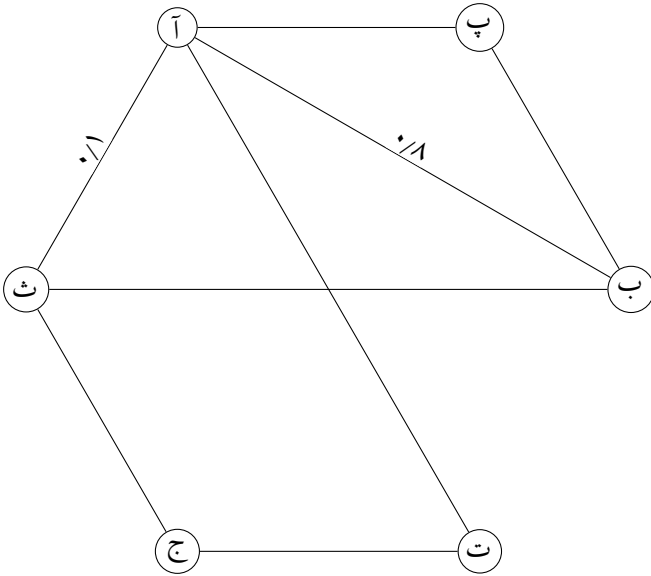
به دلیل استفاده از گراف های فازی در این مقاله، به کوتاهی این گراف ها را بررسی می کنیم. مطالب این بخش برگرفته از مرجع [۴] است.

تعریف ۱.۳ (گراف). یک گراف $G = (V(G), E(G))$ مجموعه ای از گره ها، $V(G)$ ، و مجموعه ای متناهی از یال ها، $E(G)$ ، است که این گره ها را به هم وصل می کنند. هر یال در $E(G)$ دو سر در $V(G)$ دارد. یالی که دو سرش یکی باشد را طوقه گویند. دو یال را که دو سرشان یکی باشد یال های موازی گویند.

ملاحظه ۲.۳. گراف ساده، گرافی است که طوقه و یال موازی ندارد.

تعریف ۳.۳ (گراف فازی نوع اول). گراف فازی نوع اول، تعمیمی از گراف است که تفاوت آن در درجه عضویت یال ها است و به جای مقادیر مشخص صفر یا یک، به صورت مقادیری در بازه $[0, 1]$ تعیین می شود. این مقادیر نشان دهنده درجه عضویت یال ها یا به عبارتی، قدرت ارتباط میان گره ها است.

مثال ۴.۳ (گراف فازی نوع اول). در یک شبکه اجتماعی، می توان افراد را گره های گراف و میزان دوستی بین آن ها را به عنوان یال های فازی در نظر گرفت (شکل ۲). فرض کنیم شخص های «آ» و «ب» دوست خوبی هستند و شخص های «آ» و «ج» یکدیگر را به صورت سطحی می شناسند. بنابراین یال بین «آ» و «ب»، برای مثال، مقدار $0/8$ دارد؛ اما این مقدار برای یال میان «آ» و «ث» ممکن است $0/1$ باشد.



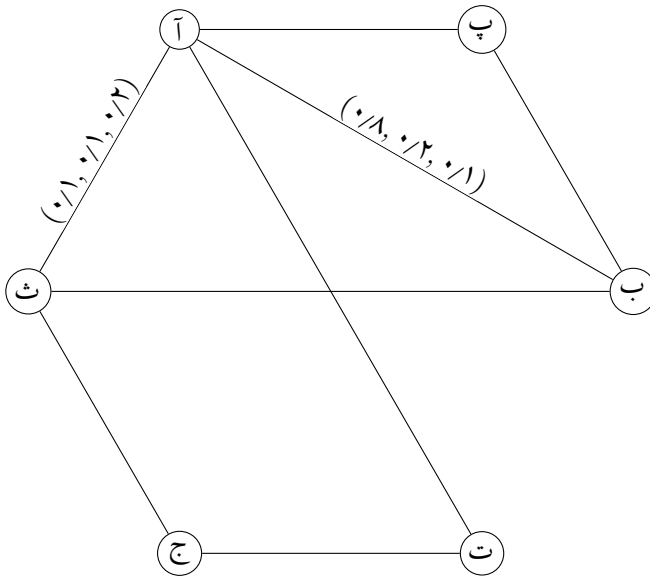
شکل ۲: گراف فازی نوع اول در مثال ۴.۳

تعریف ۵.۳ (گراف فازی نوع دوم). این نوع گراف فازی، تعمیمی از گراف فازی نوع اول است با این تفاوت که درجه عضویت هر یال (بیانگر قدرت ارتباط بین هر دو گره)، به جای آنکه عددی دقیق بین ۰ و ۱ باشد، با یک عدد فازی از بازه $[0, 1]$ مشخص می‌شود.

مثال ۶.۳ (گراف فازی نوع دوم). مثال ۴.۳ را در نظر بگیرید. به منظور واقعی‌تر کردن و منعطف‌تر کردن گراف، درجه عضویت مربوط به هر یال را با یک عدد فازی بیان می‌کنیم: یال میان «آ» و «ب» تقریباً $0/8$ است؛ برای مثال، $N = (0/8, 0/2, 0/1)_T$ و یال میان «آ» و «ث» تقریباً $0/1$ است؛ مثلاً $N = (0/1, 0/1, 0/2)_T$ (شکل ۳).

ملاحظه ۷.۳. از این به بعد در متن مقاله، منظور از «گراف»، گرافی است که در تعریف ۱.۳ است و منظور از «گراف فازی»، گراف فازی نوع دوم است که در تعریف ۵.۳ ارائه شد.

ملاحظه ۸.۳. در گراف‌های فازی، با گرافی کامل (گرافی که تمام یال‌های آن رسم شده است) روبه‌رو هستیم، اما برای خلوت‌تر شدن تصویر، در رسم شکل‌های ۲ و ۳ از گراف‌های تنک (گراف‌هایی با تعداد یال کم) استفاده کرده‌ایم.



شکل ۳: گراف فازی نوع دوم

۴. شاخص‌های مرکزیت

هر شبکه اجتماعی را می‌توان یک گراف در نظر گرفت. برای مثال، شبکه اجتماعی افراد در نرم‌افزار «روبوکا» گرافی است که صفحات شخصی افراد، گره‌های این گراف هستند و یال‌ها، ارتباط میان صفحات شخصی افراد است که با دنبال کردن یکدیگر به وجود می‌آیند. در تحلیل شبکه‌های اجتماعی یافتن گره‌های مرکزی از اهمیت بالایی برخوردار است زیرا با شناسایی گره‌های مرکزی می‌توانیم افراد مؤثر شبکه را بیابیم. اما چالش اصلی این است که تعریف ما از مرکزیت گره (گره‌ها) چیست؟ محققان در این رابطه تعاریف گوناگونی ارائه کرده‌اند. ولی با صرف تعریف مرکزیت برای یک شبکه، امکان تحلیل شبکه به صورت کمی وجود ندارد، به همین دلیل نیاز است متناسب با تعاریف متفاوتی که ارائه می‌شود، شاخص‌های کمی آن‌ها نیز تعریف شوند [۱۸]. در ادامه سه مورد از این شاخص‌ها را بررسی می‌کنیم.

شاخص مرکزیت درجه. در اجتماعات واقعی افرادی که تعداد ارتباط‌های زیاد دارند، معمولاً افراد مهم آن جامعه در نظر گرفته می‌شوند. شاخص مرکزیت درجه، این ایده را به معیاری قابل اندازه‌گیری تبدیل می‌کند و گره‌هایی با بیشترین تعداد ارتباطات، در رده‌بندی مرکزیت، بالاتر قرار می‌گیرند.

تعریف ۱.۴. شاخص مرکزیت درجه یک گره (برای مثال گره v_i) برای شبکه‌ای با n گره به صورت زیر محاسبه می‌شود

$$C_D(v_i) = \frac{\sum_{k=1}^n a(v_i, v_k)}{n-1}$$

در این رابطه، $a(v_i, v_k)$ در صورتی که یالی بین v_i و v_k باشد مقدار یک و در غیر این صورت مقدار صفر می‌گیرد. به عبارت دیگر، $\sum_{k=1}^n a(v_i, v_k)$ همان درجه گره v_i است [۱۱].

در شبکه‌هایی که جهت‌دار هستند می‌توانیم این شاخص را برای درجه‌های ورودی یا خروجی نیز به صورت جداگانه بررسی کنیم

$$C_D^{in}(v_i) = \frac{\sum_{k=1}^n a^{in}(v_i, v_k)}{n-1}$$

$$C_D^{out}(v_i) = \frac{\sum_{k=1}^n a^{out}(v_i, v_k)}{n-1}$$

که در آن‌ها، $a^{in}(v_i, v_k)$ زمانی برابر یک می‌شود که جهت یال بین دو گره به سمت v_i باشد و برای $a^{out}(v_i, v_k)$ برعکس. از آن‌جا که داریم

$$\sum_{k=1}^n a(v_i, v_k) = \sum_{k=1}^n a^{in}(v_i, v_k) + \sum_{k=1}^n a^{out}(v_i, v_k)$$

بنابراین

$$C_D = C_D^{in} + C_D^{out}$$

شاخص مرکزیت بینابینی. یکی دیگر از روش‌های بررسی مرکزیت یک شبکه این است که بینیم چقدر یک گره در مسیر ارتباطی بین سایر گره‌ها قرار دارد.

تعریف ۲.۴. شاخص مرکزیت بینابینی برای گره v_i ، محاسبه می‌کند که چندتا از کوتاه‌ترین مسیرهای ممکن بین دو گره دیگر از طریق این گره عبور می‌کنند و به صورت زیر محاسبه می‌شود

$$C_B(v_i) = \sum_{j < k}^n \sum_{j < k}^n \frac{g_{jk}(v_i)}{g_{jk}}$$

که در این رابطه، g_{jk} تعداد کل کوتاه‌ترین مسیر بین v_j و v_k است و $g_{jk}(i)$ تعدادی از g_{jk} هاست که گره v_i در آن‌ها قرار دارد [۱۱].

شاخص مرکزیت نزدیکی. ایده سوم برای مرکزیت، می‌گوید هر گره که بتواند سریع‌تر به سایر گره‌ها دسترسی پیدا کند، مرکزی‌تر است. به عبارت دیگر، گره‌هایی که متوسط فاصله‌شان تا سایر گره‌ها کمتر است، دارای مرکزیت بالاتری هستند.

تعریف ۳.۴. شاخص مرکزیت نزدیکی برای گره v_i به صورت زیر تعریف می‌شود

$$C_C(v_i) = \frac{n-1}{\sum_{j=1}^n d(v_i, v_j)}$$

که در این رابطه، $d(v_i, v_j)$ اندازه فاصله میان دو گره v_i و v_j است [۱۱].

پس از معرفی سه شاخص مرکزیت، لازم است که تفاوت‌ها و ویژگی‌های متمایز هر یک از آن‌ها را بررسی کنیم تا درک عمیق‌تری از نحوه عملکرد آن‌ها در تحلیل شبکه به دست آوریم. جدول ۱ نمای کلی از این مقایسه را نشان می‌دهد.

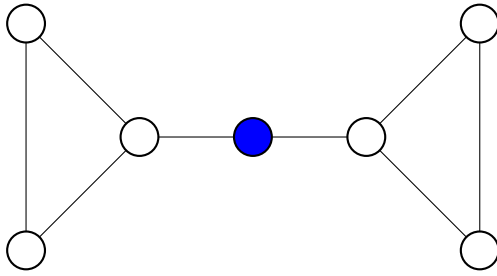
جدول ۱: مقایسه شاخص‌های مرکزیت

محدودیت	مزیت	شاخص مرکزیت
نادیده گرفتن ساختار کلی شبکه نادیده گرفتن مسیرهای غیرمستقیم	محاسبات ساده و سریع	درجه
	مناسب تحلیل‌های محلی ^۱	
	مناسب شبکه‌ها با یال‌های زیاد	
هزینه محاسباتی بالا برای شبکه‌ها با گره‌های زیاد	درک موقعیت گره در ساختار شبکه	نزدیکی
	مناسب تحلیل سرعت انتشار اطلاعات	
حساس به تغییرات کوچک در ساختار شبکه	مناسب شبکه‌هایی با خوشه‌های متراکم	بینابینی

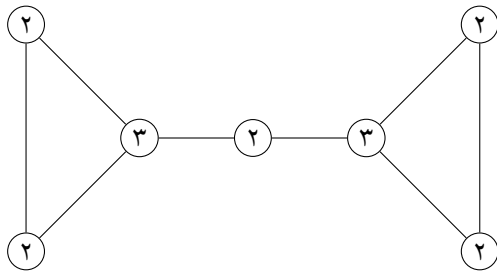
با دو مثال، تفاوت عملکرد شاخص مرکزیت درجه را با دو شاخص دیگر بررسی می‌کنیم.

مثال ۴.۴. گراف ارائه شده در شکل ۴ را مشاهده کنید. همان‌طور که با چشم می‌توان دید، گره رنگ شده مرکزی‌ترین گره در این گراف و تأثیرگذارترین عضو شبکه است. حال می‌خواهیم

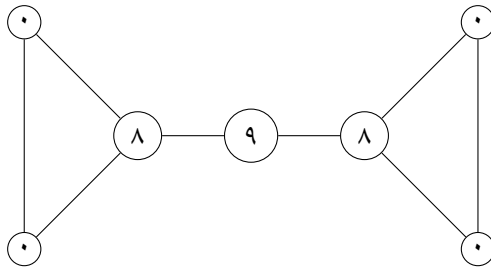
شاخص مرکزیت درجه را بر روی گره‌های این گراف محاسبه کنیم. در شکل ۵ شاخص مرکزیت درجه برای هر گره محاسبه و مقدار آن بر روی گره‌ها درج شده است (مقدار بزرگ‌تر نشانه اهمیت بیش‌تر آن گره است). گره مرکزی گراف، دارای شاخص مرکزیت کمتری نسبت به گره‌های دیگر است. این موضوع نشان می‌دهد که شاخص مرکزیت درجه در این شبکه قادر به بازتاب دقیق اهمیت واقعی گره‌ها نیست و برای تحلیل چنین ساختارهایی نیاز به استفاده از شاخص‌های دیگری داریم. همان گراف شکل ۴ را با شاخص‌های مرکزیت بینابینی و نزدیکی نیز بررسی می‌کنیم. نتایج در شکل‌های ۶ و ۷ درج شده‌اند. به وضوح، با استفاده از این دو شاخص، توانستیم اهمیت مرکزیت گره در گراف اولیه را مطابق با آنچه که با چشم مشاهده کرده بودیم، تعبیر کنیم (مشابه قبل، هرچه مقدار یک گره بزرگ‌تر باشد نشان از اهمیت بیش‌تر آن گره دارد).



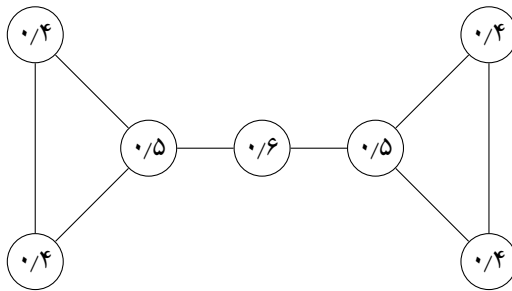
شکل ۴: گراف مربوط به مثال ۴.۴



شکل ۵: یافتن مرکزیت گره‌ها در گراف شکل ۴، با شاخص مرکزیت درجه



شکل ۶: یافتن مرکزیت گره‌ها در گراف شکل ۴، با شاخص مرکزیت بینابینی



شکل ۷: یافتن مرکزیت گره‌ها در گراف شکل ۴، با شاخص مرکزیت نزدیکی

ملاحظه ۵.۴. هرچند هدف شاخص‌های مرکزیت، شناسایی گره یا گره‌های مرکزی در یک شبکه است ولی گاه این شاخص‌ها ما را به این هدف نمی‌رسانند. باید توجه داشت که هر شاخص، تفسیر خاص خود را دارد. برای نمونه، در مثال ۴.۴، هرچند شاخص مرکزیت درجه نتوانست «مرکزی‌ترین» گره را به خوبی تشخیص دهد، گره‌هایی با بیش‌ترین تعداد یال را به درستی شناسایی کرد. به همین دلیل، گاهی برای رسیدن به گره‌های مؤثر لازم است دو یا سه شاخص محاسبه و بررسی شوند.

۵. شاخص‌های مرکزیت فازی

در این بخش قصد داریم شاخص‌های مرکزیت را که در بخش قبل معرفی کردیم به چارچوب گراف‌های فازی تعمیم دهیم. از این شاخص‌ها در تحلیل فازی شبکه‌های اجتماعی بهره خواهیم گرفت.

شاخص مرکزیت درجه فازی. در گراف‌های فازی (که مقدار هر یال به صورت یک عدد فازی از بازه $[0, 1]$ تعریف می‌شود)، به منظور محاسبه شاخص مرکزیت فازی، به جای استفاده از روش سنتی که درجه هر گره با جمع مقادیر صفر یا یک تعیین می‌شود (عدد ۱ زمانی که بین دو گره یال وجود دارد و عدد ۰ زمانی که هیچ یالی بین آن‌ها نیست)، درجه هر گره با میانگین اعداد فازی تمام یال‌های متصل به آن گره محاسبه می‌شود.

تعریف ۱.۵ (شاخص مرکزیت درجه فازی). در هر گراف فازی، شاخص مرکزیت درجه فازی برای هر گره مانند v_i چنین تعریف می‌شود

$$FC_D(v_i) = FTOWA(a_1, a_2, \dots, a_{n-1})$$

که در آن، a_i ها درجه فازی یال‌های متصل به گره v_i است [۱۶].

شاخص مرکزیت بینابینی فازی. برای بازخوانی فازی شاخص مرکزیت بینابینی، این بار به جای محاسبه کوتاه‌ترین مسیر، بهترین مسیر را انتخاب می‌کنیم. بهترین مسیر میان دو گره لزوماً کوتاه‌ترین مسیر میان آن دو گره نیست و از میان مسیرهای ممکن بین دو گره، بهترین آن‌ها را با معیاری محاسبه می‌کنیم که در تعریف ۲.۵ می‌آید.

تعریف ۲.۵ (بهترین مسیر). از دو مسیر متفاوت $P_{v_i \rightarrow v_j}^{(1)}$ و $P_{v_i \rightarrow v_j}^{(2)}$ به ترتیب با طول‌های متمایز $K, 1, 2, \dots$ و $T, 1, 2, \dots$ که مسیری از گره v_i تا گره v_j هستند، $P_{v_i \rightarrow v_j}^{(1)}$ مسیری بهتر از مسیر $P_{v_i \rightarrow v_j}^{(2)}$ است و می‌نویسیم $P_{v_i \rightarrow v_j}^{(1)} \succ P_{v_i \rightarrow v_j}^{(2)}$ ، اگر و تنها اگر

$$FTOWA(N_1^{(1)}, N_2^{(1)}, \dots, N_k^{(1)}) > FTOWA(N_1^{(2)}, N_2^{(2)}, \dots, N_t^{(2)})$$

که در آن، $N_a^{(b)}$ عدد فازی یال a از مسیر b است [۱۶].

ملاحظه ۳.۵. در تعریف ۲.۵ مسیر بهتر به مسیری گفته می‌شود که میانگین وزن یال‌های آن، بیش‌تر باشد.

شاخص مرکزیت نزدیکی فازی. اگر شاخص مرکزیت نزدیکی تعریف ۳.۴ را به شکل زیر

بازنویسی کنیم

$$(۱.۵) \quad C_c(v_i) = \frac{1}{I_c(v_i)}$$

داریم

$$I_c(v_i) = \frac{\sum_{j=1}^n d(v_i, v_j)}{n-1}$$

به سخن دیگر، $I_c(v_i)$ میانگین فاصله گره v_i نسبت به دیگر گره‌های شبکه است. تعبیر دیگر فاصله، اندازه کوتاه‌ترین مسیر میان دو گره است. حال برای فازی‌سازی شاخص، باز هم مشابه با نگاهی که در شاخص بینابینی فازی داشتیم، به جای استفاده از کوتاه‌ترین مسیر، از مفهوم بهترین مسیر استفاده می‌کنیم (با همان تعریف ۲.۵). به تعبیر دیگر، می‌توانیم به جای میانگین فاصله از میانگین بهترین مسیر استفاده کنیم. یعنی

$$(۲.۵) \quad M_{v_i, s} = FTOWA(A_1, A_2, \dots, A_{n-1})$$

که در آن، s حداکثر تعداد گامی است که برای بررسی بهترین مسیر طی می‌کنیم و A_i نیز عدد فازی مرتبط با بهترین مسیر از گره v_i تا تمامی گره‌های دیگر است.

از طرفی می‌دانیم در یک گراف، هرچقدر میانگین فاصله یک گره بیش‌تر باشد، نشان از کمتر بودن میزان مرکزیت آن گره در شبکه دارد. به همین دلیل است که از معکوس میانگین فاصله گره برای شاخص مرکزیت نزدیکی کلاسیک استفاده می‌کردیم (رابطه ۱.۵). اما میانگین بهترین مسیر برای هر گره، معیاری است که با مرکزیت رابطه مستقیم دارد و هرچقدر مقدار آن بیش‌تر باشد نشان از مرکزیت بالاتر گره خواهد داشت. بنابراین به تعریف ۴.۵ می‌رسیم.

تعریف ۴.۵ (شاخص مرکزیت نزدیکی فازی). شاخص مرکزیت نزدیکی فازی برای هر گره مانند v_i چنین تعریف می‌شود

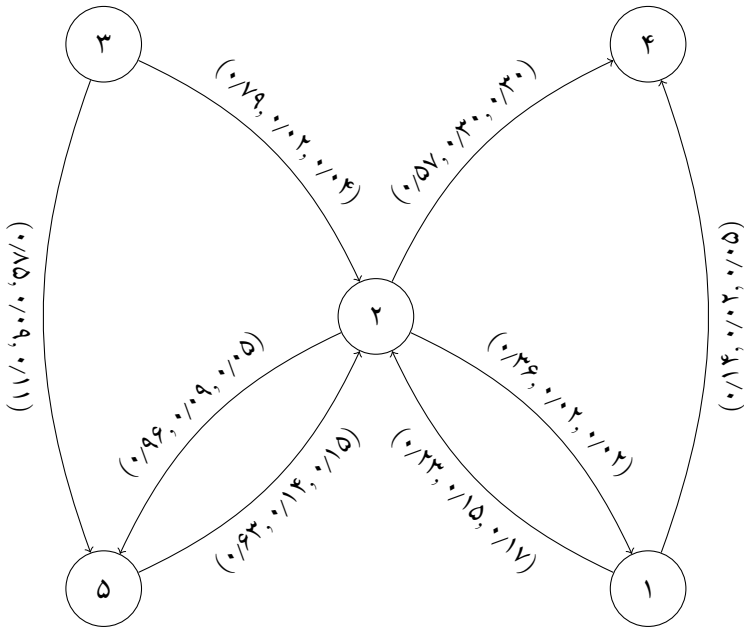
$$FC_C(v_i) = M_{v_i, s} = FTOWA(A_1, A_2, \dots, A_{n-1})$$

ملاحظه ۵.۵. در این پژوهش، هر جا نیاز به بردار وزنی یال‌ها داشته‌ایم، چون وزن همه یال‌ها را برابر در نظر گرفته‌ایم، از بردار $w = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n})$ استفاده کرده‌ایم.

۶. مثال تشریحی

در این بخش، با الهام از مرجع [۱۶]، یک شبکه فرضی را در نظر می‌گیریم و برپایه شاخص‌هایی که در بخش قبل معرفی کردیم، بررسی و تحلیل می‌کنیم. در مثال واقعی حجم داده‌ها بسیار بیش‌تر از این مثال است و این مثال ساده را که محاسبات اندکی دارد به منظور تشریح عددی روند محاسبات آورده‌ایم.

مثال ۱.۶. فرض کنید شبکه‌ی همکاری علمی میان ۵ استاد فرضی در یک دانشکده به صورت شکل ۸ است (در گراف فازی، باید تمامی یال‌ها رسم شوند ولی این‌جا برای جلوگیری از پیچیدگی تصویر، یال‌هایی که درجه عضویت آن‌ها $(0, 0, 0)$ است، رسم نشده‌اند)



شکل ۸: گراف شبکه همکاری بین پنج استاد در یک دانشکده فرضی

به منظور تحلیل شبکه، سه شاخص معرفی شده در بخش قبل را محاسبه می‌کنیم
 (۱) مرکزیت درجه فازی ورودی: میزان محبوبیت یا پذیرش هر استاد را در دانشکده اندازه‌گیری می‌کند. برای نمونه، این شاخص را برای استاد ۲ محاسبه می‌کنیم

$$\begin{aligned}
 FC_D^{in}(v_2) &= FTOWA(e_{12}, e_{32}, e_{42}, e_{52}) \\
 &= \frac{1}{4} \odot (0.23, 0.15, 0.17) \oplus \frac{1}{4} \odot (0.79, 0.2, 0.4) \\
 &\oplus \frac{1}{4} \odot (0, 0, 0) \oplus \frac{1}{4} \odot (0.63, 0.14, 0.15) \\
 (1.6) \quad &\simeq (0.41, 0.08, 0.09)
 \end{aligned}$$

بنابراین محبوبیت استاد ۲ از دید دیگر استادان دانشکده، تقریباً 0.41 است.

(۲) مرکزیت درجه فازی خروجی: میزان فعالیت و گستردگی ارتباطهای هر استاد را

نشان می‌دهد. برای نمونه این شاخص را برای استاد ۲ محاسبه می‌کنیم

$$\begin{aligned} FC_D^{out}(v_2) &= FTOWA(e_{21}, e_{23}, e_{24}, e_{25}) \\ &= \frac{1}{4} \odot (0/36, 0/02, 0/02)_T \oplus \frac{1}{4} \odot (0, 0, 0)_T \\ &\oplus \frac{1}{4} \odot (0/57, 0/30, 0/30)_T \oplus \frac{1}{4} \odot (0/96, 0/09, 0/05)_T \\ &\simeq (0/47, 0/10, 0/09)_T \end{aligned}$$

پس، میزان گستردگی ارتباطهای استاد ۲ با دیگر استادان حدود ۰/۴۷ است.

(۳) مرکزیت بینابینی فازی: این شاخص اهمیت هر استاد را به عنوان واسطه در ارتباط

بین سایر استادان ارزیابی می‌کند. این شاخص را برای استاد ۲ بررسی می‌کنیم

و توجه داشته باشید که برای کاهش حجم محاسبات فرض کرده‌ایم یال‌هایی که

درجه عضویت آن‌ها $(0, 0, 0)$ است اصلاً وجود ندارند.

ابتدا باید مسیرهایی را که از استاد i شروع و با استاد j تمام می‌شوند شناسایی کنیم

(استاد ۲ نباید شروع و پایان مسیرها باشد). در این شاخص، یال‌ها بدون جهت

فرض می‌شوند، پس مثلاً اگر مسیر v_i به v_j را بررسی کنیم نیازی به بررسی مسیر

بازگشت (v_j به v_i) نیست. بنابراین نخست مسیره‌های مختلف با شروع و پایان زیر

را می‌یابیم و سپس بهترین مسیر را برای هر شروع و پایان انتخاب می‌کنیم:

$$P_{v_1 \rightarrow v_2}, P_{v_1 \rightarrow v_4}, P_{v_1 \rightarrow v_5}, P_{v_2 \rightarrow v_4}, P_{v_2 \rightarrow v_5}, P_{v_4 \rightarrow v_5}$$

از مسیره‌های مختلف برای $P_{v_1 \rightarrow v_2}$ شروع می‌کنیم:

$$P_{v_1 \rightarrow v_2}^{(1)} = v_1 \rightarrow e_{12} \rightarrow v_2 \rightarrow e_{23} \rightarrow v_3$$

$$P_{v_1 \rightarrow v_2}^{(2)} = v_1 \rightarrow e_{21} \rightarrow v_2 \rightarrow e_{32} \rightarrow v_3$$

$$P_{v_1 \rightarrow v_2}^{(3)} = v_1 \rightarrow e_{12} \rightarrow v_2 \rightarrow e_{25} \rightarrow v_5 \rightarrow e_{35} \rightarrow v_3$$

$$P_{v_1 \rightarrow v_2}^{(4)} = v_1 \rightarrow e_{21} \rightarrow v_2 \rightarrow e_{25} \rightarrow v_5 \rightarrow e_{35} \rightarrow v_3$$

$$P_{v_1 \rightarrow v_2}^{(5)} = v_1 \rightarrow e_{12} \rightarrow v_2 \rightarrow e_{52} \rightarrow v_5 \rightarrow e_{35} \rightarrow v_3$$

$$P_{v_1 \rightarrow v_2}^{(6)} = v_1 \rightarrow e_{21} \rightarrow v_2 \rightarrow e_{25} \rightarrow v_5 \rightarrow e_{35} \rightarrow v_3$$

$$P_{v_1 \rightarrow v_2}^{(7)} = v_1 \rightarrow e_{14} \rightarrow v_4 \rightarrow e_{24} \rightarrow v_2 \rightarrow e_{32} \rightarrow v_3$$

$$P_{v_1 \rightarrow v_3}^{(\lambda)} = v_1 \rightarrow e_{14} \rightarrow v_4 \rightarrow e_{24} \rightarrow v_2 \rightarrow e_{25} \rightarrow v_3 \rightarrow e_{35} \rightarrow v_3$$

$$P_{v_1 \rightarrow v_3}^{(9)} = v_1 \rightarrow e_{14} \rightarrow v_4 \rightarrow e_{24} \rightarrow v_2 \rightarrow e_{52} \rightarrow v_5 \rightarrow e_{35} \rightarrow v_3$$

اکنون درجه فازی مسیرها را محاسبه می‌کنیم. داریم

$$\begin{aligned} P_{v_1 \rightarrow v_3}^{(1)} &= FTOWA(e_{12}, e_{32}) \\ &= \frac{1}{2} \odot [(0/23, 0/15, 0/17)_T \oplus (0/79, 0/02, 0/04)_T] \\ &\simeq (0/51, 0/08, 0/10)_T \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_{v_1 \rightarrow v_3}^{(2)} &= FTOWA(e_{21}, e_{32}) \\ &= \frac{1}{2} \odot [(0/36, 0/02, 0/02)_T \oplus (0/79, 0/02, 0/04)_T] \\ &\simeq (0/57, 0/02, 0/03)_T \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_{v_1 \rightarrow v_3}^{(3)} &= FTOWA(e_{12}, e_{25}, e_{35}) \\ &= \frac{1}{3} \odot [(0/23, 0/15, 0/17)_T \oplus (0/96, 0/09, 0/05)_T \\ &\quad \oplus (0/85, 0/09, 0/11)_T] \simeq (0/68, 0/11, 0/11)_T \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_{v_1 \rightarrow v_3}^{(4)} &= FTOWA(e_{21}, e_{25}, e_{35}) \\ &= \frac{1}{3} \odot [(0/36, 0/02, 0/02)_T \oplus (0/96, 0/09, 0/05)_T \\ &\quad \oplus (0/85, 0/09, 0/11)_T] \simeq (0/72, 0/07, 0/06)_T \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_{v_1 \rightarrow v_3}^{(5)} &= FTOWA(e_{12}, e_{52}, e_{35}) \\ &= \frac{1}{3} \odot [(0/23, 0/15, 0/17)_T \oplus (0/63, 0/14, 0/15)_T \\ &\quad \oplus (0/85, 0/09, 0/11)_T] \simeq (0/57, 0/13, 0/14)_T \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P_{v_1 \rightarrow v_3}^{(\delta)} &= FTOWA(e_{21}, e_{52}, e_{35}) \\
 &= \frac{1}{3} \odot [(0/36, 0/02, 0/02)_T \oplus (0/96, 0/09, 0/05)_T \\
 &\quad \oplus (0/63, 0/14, 0/15)_T] \simeq (0/65, 0/08, 0/06)_T
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P_{v_1 \rightarrow v_3}^{(\gamma)} &= FTOWA(e_{14}, e_{24}, e_{32}) \\
 &= \frac{1}{3} \odot [(0/14, 0/02, 0/05)_T \oplus (0/57, 0/30, 0/30)_T \\
 &\quad \oplus (0/85, 0/09, 0/11)_T] \simeq (0/79, 0/02, 0/04)_T
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P_{v_1 \rightarrow v_3}^{(\lambda)} &= FTOWA(e_{14}, e_{24}, e_{25}, e_{35}) \\
 &= \frac{1}{4} \odot [(0/14, 0/02, 0/05)_T \oplus (0/57, 0/30, 0/30)_T \\
 &\quad \oplus (0/96, 0/09, 0/05)_T \oplus (0/85, 0/09, 0/11)_T] \\
 &\simeq (0/63, 0/12, 0/13)_T
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P_{v_1 \rightarrow v_3}^{(\alpha)} &= FTOWA(e_{14}, e_{24}, e_{52}, e_{35}) \\
 &= \frac{1}{4} \odot [(0/14, 0/02, 0/05)_T \oplus (0/57, 0/30, 0/30)_T \\
 &\quad \oplus (0/63, 0/14, 0/15)_T \oplus (0/85, 0/09, 0/11)_T] \\
 &\simeq (0/55, 0/14, 0/15)_T
 \end{aligned}$$

حال باید از بین مسیرهای بالا (که شروع و پایان یکسان دارند) یکی را به عنوان بهترین مسیر انتخاب کنیم. برای این کار، ابتدا مرکز ثقل هر مسیر را، طبق رابطه تعریف ۵.۲ محاسبه می‌کنیم:

$$P_{v_1 \rightarrow v_3}^{(1)} = 0/51 + \frac{0/10 - 0/08}{3} \simeq 0/52$$

$$P_{v_1 \rightarrow v_3}^{(2)} = 0/57 + \frac{0/03 - 0/02}{3} \simeq 0/57$$

$$P_{v_1 \rightarrow v_3}^{(3)} = 0/68 + \frac{0/11 - 0/11}{3} = 0/68$$

$$P_{v_1 \rightarrow v_3}^{(4)} = 0/72 + \frac{0/06 - 0/07}{3} \simeq 0/72$$

$$P_{v_1 \rightarrow v_2}^{(5)} = 0.57 + \frac{0.14 - 0.13}{3} \approx 0.57$$

$$P_{v_1 \rightarrow v_2}^{(6)} = 0.65 + \frac{0.06 - 0.08}{3} \approx 0.64$$

$$P_{v_1 \rightarrow v_2}^{(7)} = 0.79 + \frac{0.04 - 0.02}{3} \approx 0.80$$

$$P_{v_1 \rightarrow v_2}^{(8)} = 0.63 + \frac{0.13 - 0.12}{3} \approx 0.63$$

$$P_{v_1 \rightarrow v_2}^{(9)} = 0.55 + \frac{0.15 - 0.14}{3} \approx 0.55$$

از آن جا که بالاترین مقدار مربوط به مسیر چهارم است، مسیر چهارم به عنوان بهترین مسیر انتخاب می شود. پس بهترین مسیر میان دو گره v_1 و v_3 عبارت است از

$$P_{v_1 \rightarrow v_3}^{(*)} = v_1 \rightarrow e_{21} \rightarrow v_2 \rightarrow e_{25} \rightarrow v_5 \rightarrow e_{35} \rightarrow v_3$$

اگر به صورت مشابه، بهترین مسیر را برای دو گره های دیگر محاسبه کنیم، داریم

$$P_{v_1 \rightarrow v_4}^{(*)} = v_1 \rightarrow e_{21} \rightarrow v_2 \rightarrow e_{24} \rightarrow v_4$$

$$P_{v_1 \rightarrow v_5}^{(*)} = v_1 \rightarrow e_{12} \rightarrow v_2 \rightarrow e_{23} \rightarrow v_3 \rightarrow e_{35} \rightarrow v_5$$

$$P_{v_3 \rightarrow v_4}^{(*)} = v_3 \rightarrow e_{35} \rightarrow v_5 \rightarrow e_{52} \rightarrow v_2 \rightarrow e_{24} \rightarrow v_4$$

$$P_{v_3 \rightarrow v_5}^{(*)} = v_3 \rightarrow e_{32} \rightarrow v_2 \rightarrow e_{25} \rightarrow v_5$$

$$P_{v_4 \rightarrow v_5}^{(*)} = v_4 \rightarrow e_{24} \rightarrow v_2 \rightarrow e_{25} \rightarrow v_5$$

همان طور که از نتایج برمی آید، استاد ۲ در میان همه بهترین مسیرها وجود دارد.

بنابراین

$$FC_B(v_2) = \sum_{j < k}^5 \sum_{j < k}^5 \frac{g_{jk}(v_2)}{g_{jk}} = \frac{6}{6} = 1$$

به سخن دیگر، استاد ۲ به اندازه ۱ (۱۰۰ درصد) واسطه ارتباطی میان استادان بوده است.

(۴) مرکزیت نزدیکی فازی ورودی: این شاخص میزان دسترسی دیگران به هر استاد را می‌سنجد. این شاخص را برای استاد ۲ محاسبه می‌کنیم. ابتدا باید تعداد گام‌هایی را که از استاد ۲ فاصله می‌گیریم تعیین کنیم. این جا به جهت سادگی محاسبات، تعداد گام‌ها را برابر ۱ در نظر می‌گیریم ($s = 1$). البته باید دقت کرد که اگر گام را برابر با یک در نظر بگیریم، در این حالت خاص، شاخص مرکزیت نزدیکی با شاخص مرکزیت درجه برابر می‌شوند.

$$\begin{aligned} C_{C,1}^{in}(v_2) &= FTOWA(e_{12}, e_{22}, e_{42}, e_{52}) = \\ &= \frac{1}{4} \odot [(0/23, 0/15, 0/17)_T \oplus (0/79, 0/02, 0/04)_T \\ &\oplus (0, 0, 0)_T \oplus (0/63, 0/14, 0/15)_T] \\ &\simeq (0/41, 0/08, 0/09)_T \end{aligned}$$

یعنی، میزان دسترسی دیگران به استاد ۲ حدود ۴۱ درصد است. (۵) مرکزیت نزدیکی فازی خروجی: این شاخص میزان دسترسی استاد به دیگران را می‌سنجد. دوباره استاد ۲ را بررسی می‌کنیم: ابتدا باید تعداد گام‌هایی را که از استاد ۲ فاصله می‌گیریم تعیین کنیم. مشابه حالت قبل، $s = 1$ در نظر می‌گیریم، و داریم:

$$\begin{aligned} C_{C,1}^{out}(v_2) &= FTOWA(e_{21}, e_{23}, e_{24}, e_{25}) \\ &= \frac{1}{4} \odot (0/36, 0/02, 0/02)_T \oplus \frac{1}{4} \odot (0, 0, 0)_T \\ &\oplus \frac{1}{4} \odot (0/57, 0/30, 0/30)_T \oplus \frac{1}{4} \odot (0/96, 0/09, 0/05)_T \\ &\simeq (0/47, 0/10, 0/09)_T \end{aligned}$$

یعنی، میزان دسترسی استاد ۲ به دیگر استادان دانشکده حدود ۴۷ درصد است. در این مثال، شبکه‌ی همکاری استادان یک دانشکده فرضی، با استفاده از گراف فازی و شاخص‌های مرکزیت فازی بررسی شد. نتایج این بررسی از چند جنبه دارای اهمیت است:

- شناسایی استادان مهم دانشکده

استاد شماره ۲: این استاد در شاخص‌های مرکزیت درجه خروجی و بینابینی فازی امتیاز بالایی کسب کرد. این نشان می‌دهد که او نه تنها در تعاملات علمی

فعال است، بلکه به عنوان یک واسطه کلیدی در ارتباط‌های بین استادان عمل می‌کند. از دیدگاه مدیریتی، چنین افرادی می‌توانند برای تسهیل همکاری‌های بین‌رشته‌ای یا پروژه‌های گروهی استفاده شوند.

استاد شماره ۵: با وجود مرکزیت ورودی بالا، مرکزیت خروجی متوسطی دارد. این نشان می‌دهد که او بیش‌تر دریافت‌کننده ارتباطات است تا آغازگر آن. چنین افرادی ممکن است در نقش‌های مشاوره‌ای یا به عنوان مرجعی برای دانشجویان مفید باشند.

- بهینه‌سازی توزیع منابع

نتایج نشان می‌دهد که برخی استادان (مانند استاد شماره ۲) نقشی محوری در شبکه دارند. این یافته می‌تواند به مدیران دانشکده کمک کند تا منابعی مانند بودجه پژوهشی، فرصت‌های همکاری یا حتی فضای کاری را به صورت هدفمند توزیع کنند. برای مثال، سرمایه‌گذاری بر استادانی که مرکزیت بینابینی بالایی دارند، می‌تواند اثربخشی شبکه ارتباط‌ها را افزایش دهد.

- مدیریت ارتباطات غیررسمی

بررسی گراف فازی در شکل ۸ نشان داد که برخی روابط (مانند ارتباط بین استاد شماره ۲ و ۴) دارای نایقینی زیادی هستند. این موضوع اهمیت مدیریت ارتباطات غیررسمی را برجسته می‌سازد و به مسئولین این امکان را می‌دهد تا برای روابط غیررسمی در دانشکده نیز طراحی‌هایی انجام دهند. برای مثال، برگزاری رویدادهای غیررسمی مانند کارگاه‌ها یا جلسات بحث می‌تواند به تقویت روابط با نایقینی بالاتر کمک و روابط را پایدارتر کند.

۷. مطالعه‌ی موردی: تحلیل شبکه‌ی همکاری علمی و معاشرت اجتماعی و فرهنگی

استادان دانشکده علوم مهندسی دانشگاه تهران

در این بخش، روش ارائه‌شده در بخش‌های پیشین را بر روی یک مجموعه داده‌ی واقعی مربوط به استادان دانشکده علوم مهندسی دانشگاه تهران به کار می‌بریم. برای این منظور، یک پرسش‌نامه طراحی کردیم که هر استاد، به دو پرسش درباره‌ی دیگر استادان دانشکده پاسخ داد. شکل ۹، شمای کلی از این پرسش‌نامه را نمایش می‌دهد. همان‌طور که در این شکل نیز مشخص است، پرسش‌نامه شامل دو بخش است. (۱) ارتباط علمی (همکاری پژوهشی، راهنمایی

مشترک دانشجویان، طرح‌های تحقیقاتی، مقالات مشترک و ... و (۲) معاشرت اجتماعی و فرهنگی (تعاملات فرهنگی، روابط دوستانه و غیررسمی).

شکل ۹: تصویری نمونه از پرسش‌نامه استادان

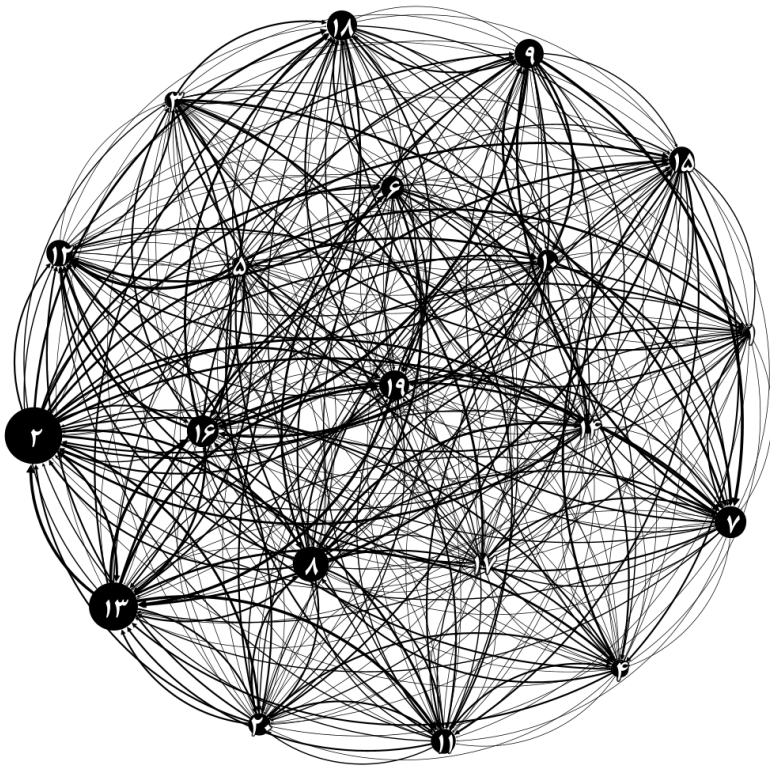
این پرسش‌نامه در بستر وب طراحی گردید و به همهٔ استادان دانشکده شامل ۲۷ نفر ارسال شد که از این میان، ۲۰ استاد به آن پاسخ دادند. ۷ استادی که پاسخ ندادند از داده‌ها حذف شدند و گراف نهایی را شامل ۲۰ گره و ۳۸۰ یال (گراف کامل جهت‌دار) تشکیل دادیم. گره‌ها را با شماره‌های ۱ تا ۲۰ (هر عدد متناظر با یک استاد) مشخص کردیم.

پیش‌پردازش داده‌ها و فازی‌سازی پاسخ‌ها. پاسخ‌های گردآوری‌شده در دو مجموعه داده ثبت شدند:

- ماتریس ۲۰×۲۰ میزان همکاری علمی (آموزشی-پژوهشی)
- ماتریس ۲۰×۲۰ میزان معاشرت اجتماعی و فرهنگی

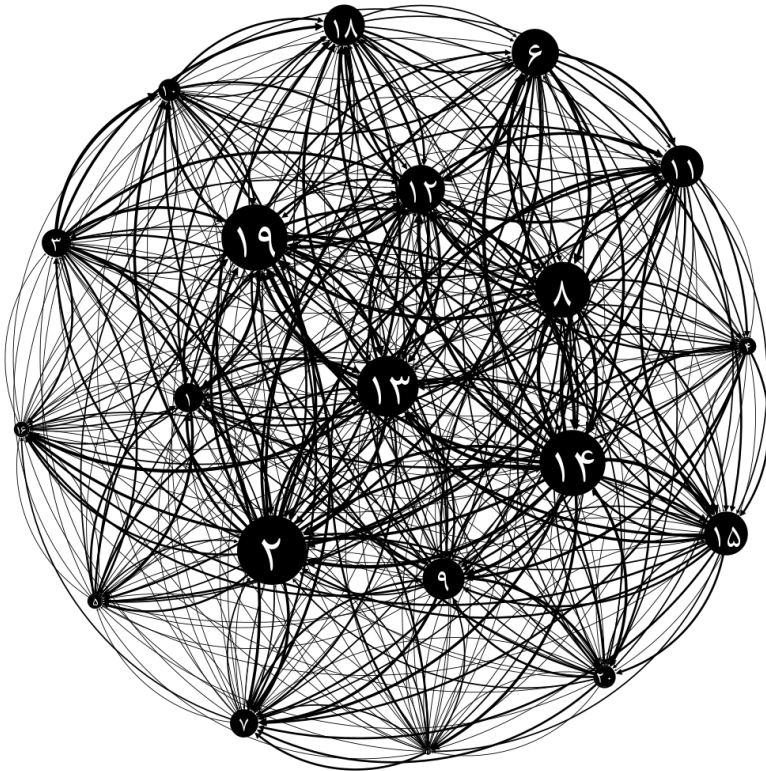
در شکل ۱۰ گراف میزان همکاری علمی استادان و در شکل ۱۱ گراف میزان معاشرت اجتماعی و فرهنگی استادان تصویر شده است.

لازم به توضیح است که در ترسیم گراف‌های شکل‌های ۱۰ و ۱۱، اندازه هر گره بر اساس درجه غیرفازی آن تعیین شده است. به منظور محاسبه درجه غیرفازی، مقادیر پاسخ‌های پرسش‌نامه که در بازه ۱ تا ۵ (از «بسیار کم» تا «بسیار زیاد») قرار دارند، به صورت مستقیم به عنوان وزن یال‌ها در نظر گرفته شدند؛ به این معنا که هر یال مقداری بین ۱ تا ۵ به خود اختصاص داده است. سپس، درجه هر گره به صورت مجموع وزن یال‌های ورودی و خروجی آن محاسبه شد. در نهایت، در فرآیند بصری‌سازی گراف‌ها با استفاده از نرم‌افزار Gephi، اندازه هر گره متناسب با مقدار درجه غیرفازی متناظر با آن رسم شده است.



شکل ۱۰: گراف میزان همکاری علمی استادان (اندازه بزرگ‌تر هر گره در این گراف، نشانه بیشتر بودن اندازه درجه آن گره است)

مقادیر درایه‌های هر دو ماتریس اعداد ۱ تا ۵ هستند. بر اساس پیشنهاد پژوهش‌های اخیر در فازی‌سازی پاسخ‌های با طیف لیکرت، هر مقدار به یک عدد فازی مثلثی متناظر شد طوری



شکل ۱۱: گراف میزان معاشرت اجتماعی و فرهنگی استادان (اندازه بزرگتر هر گره در این گراف، نشانه بیش‌تر بودن اندازه درجه آن گره است)

که این فازی‌سازی، به واقعیت دیدگاه انسانی در این نوع پرسش‌نامه‌ها نزدیک‌تر است [۱۴].
نگاشتی که برای تبدیل مقادیر پرسش‌نامه به اعداد فازی مثلثی استفاده شد، برگرفته از مرجع [۸] است و در جدول ۲ آمده است.

پس از نگاشت، دو گراف فازی اولیه $G_s = (V, E_s)$ و $G_u = (V, E_u)$ ساخته شد که G_s گراف فازی همکاری علمی و G_u گراف فازی معاشرت اجتماعی و فرهنگی است.

محاسبه‌ی شاخص‌های مرکزیت فازی. سه شاخص مرکزیت فازی مطرح شده در بخش ۵ شامل (۱) درجه فازی (FC_D)، (۲) بینابینی فازی (FC_B) و (۳) نزدیکی فازی (FC_C)

جدول ۲: نگاهت مقادیر پرسش نامه به اعداد فازی مثلثی

مقدار	تعبیر	عدد فازی مثلثی
۱	بسیار کم	$(0, 0, 0/25)$
۲	کم	$(0/25, 0/25, 0/25)$
۳	متوسط	$(0/25, 0/5, 0/25)$
۴	زیاد	$(0/25, 0/75, 0/25)$
۵	بسیار زیاد	$(0/25, 1/0, 0)$

برای هر دو گراف به کمک کتابخانه networkx در زبان برنامه نویسی پایتون محاسبه شدند^۱. عملگر مورد استفاده برای تجمیع، عملگر FTOWA بود. در این محاسبات، بردار وزن یکنواخت $(w_i = 1/19)$ برای تمام روابط در نظر گرفته شد و بدین ترتیب برای همه ارتباطها یکسان در نظر گرفته شد. برای هر استاد، دو مجموعه از شاخصها استخراج گردید:

• شاخص های مبتنی بر گراف همکاری علمی با پیشوند S ، شامل SFC_B ، SFC_D و SFC_C ؛

• شاخص های مبتنی بر گراف معاشرت اجتماعی و فرهنگی با پیشوند U ، شامل UFC_C و UFC_B ، UFC_D .

نتایج محاسبات در جدول ۳ ارائه شده اند^۲. برای هر استاد، شاخص درجه فازی (FC_D) و شاخص نزدیکی فازی (FC_C) به صورت یک عدد فازی مثلثی $(a, a_l, a_r)_T$ گزارش شده اند، در حالی که شاخص بینابینی فازی (FC_B) به صورت یک عدد دقیق (حاصل از محاسبه نسبت مسیرهای بهتری که از گره مورد نظر عبور می کنند) بیان شده است. نکته دیگر این که شاخص نزدیکی فازی را با گام ۱ در نظر گرفتیم که پیش تر دیدیم در این حالت با شاخص مرکزیت فازی برابر می شود.

بررسی و تحلیل نتایج. بر اساس نتایج مندرج در جدول ۳، استاد شماره ۲ بیشترین

مقدار شاخص های درجه فازی و نزدیکی فازی علمی را داراست $(SFC_D = 0/61)$ که

^۱ نحوه محاسبه دقیقاً مشابه با الگوریتم های معرفی شده است مگر در محاسبه شاخص مرکزیت بینابینی فازی که به دلیل حجم بالای محاسبات، به جای در نظر گرفتن تمام مسیرها برای هر جفت گره، ده مسیر نخست را بررسی کرده ایم.

^۲ جهت حفظ محرمانگی، به جای استفاده از نام استادان، برای هر استاد از یک شماره استفاده کرده ایم. ترتیب شماره گذاری استادان نیز به صورت تصادفی است.

جدول ۳: شاخص‌های مرکزیت فازی برای اعضای هیئت علمی

استاد	SFC_D, SFC_C	SFC_B	UFC_D, UFC_C	UFC_B
۱	(۰/۰۸, ۰/۰۵, ۰/۲۵)	۰/۵۵	(۰/۲۵, ۰/۱۳, ۰/۲۴)	۰/۳۴
۲	(۰/۶۱, ۰/۲۵, ۰/۲۵)	۰	(۰/۵۴, ۰/۲۲, ۰/۲۴)	۰
۳	(۰/۲۲, ۰/۱۱, ۰/۲۵)	۰/۶۳	(۰/۲۵, ۰/۱۲, ۰/۲۴)	۰/۲۴
۴	(۰/۱۴, ۰/۰۸, ۰/۲۵)	۰/۹۱	(۰/۱۷, ۰/۱۰, ۰/۲۵)	۰/۷۳
۵	(۰/۱۸, ۰/۰۹, ۰/۲۴)	۰/۴۹	(۰/۱۵, ۰/۰۹, ۰/۲۵)	۰/۷۶
۶	(۰/۳۳, ۰/۲۰, ۰/۲۵)	۰/۰۶	(۰/۳۸, ۰/۱۹, ۰/۲۳)	۰
۷	(۰/۲۲, ۰/۱۴, ۰/۲۵)	۰/۱۱	(۰/۲۴, ۰/۱۳, ۰/۲۵)	۰/۲۰
۸	(۰/۴۲, ۰/۲۱, ۰/۲۵)	۰/۰۵	(۰/۴۴, ۰/۱۸, ۰/۲۱)	۰
۹	(۰/۲۶, ۰/۱۲, ۰/۲۲)	۰/۱۱	(۰/۳۴, ۰/۱۹, ۰/۲۴)	۰/۱۹
۱۰	(۰/۲۲, ۰/۱۱, ۰/۲۵)	۰/۲۳	(۰/۲۰, ۰/۱۱, ۰/۲۴)	۰/۵۷
۱۱	(۰/۲۱, ۰/۱۶, ۰/۲۵)	۰/۱۰	(۰/۳۵, ۰/۱۷, ۰/۲۴)	۰/۱۶
۱۲	(۰/۰۵, ۰/۰۳, ۰/۲۵)	۰	(۰/۳۸, ۰/۱۵, ۰/۲۲)	۰/۱۳
۱۳	(۰/۳۹, ۰/۱۶, ۰/۲۰)	۰	(۰/۴۸, ۰/۲۰, ۰/۲۱)	۰
۱۴	(۰/۰۷, ۰/۰۳, ۰/۲۵)	۰/۱۶	(۰/۵۱, ۰/۱۶, ۰/۱۸)	۰/۳۰
۱۵	(۰/۲۵, ۰/۱۷, ۰/۲۵)	۰	(۰/۳۶, ۰/۱۸, ۰/۲۴)	۰
۱۶	(۰/۲۸, ۰/۱۲, ۰/۲۵)	۰/۰۴	(۰/۱۵, ۰/۰۹, ۰/۲۴)	۰/۲۴
۱۷	(۰/۰۵, ۰/۰۳, ۰/۲۵)	۰/۲۳	(۰/۰۹, ۰/۰۶, ۰/۲۵)	۰/۴۶
۱۸	(۰/۲۰, ۰/۱۷, ۰/۲۵)	۰	(۰/۳۴, ۰/۱۸, ۰/۲۵)	۰/۱۰
۱۹	(۰/۲۶, ۰/۱۷, ۰/۲۴)	۰	(۰/۵۲, ۰/۲۰, ۰/۲۱)	۰
۲۰	(۰/۲۲, ۰/۱۳, ۰/۲۵)	۰/۰۶	(۰/۲۰, ۰/۱۳, ۰/۲۵)	۰/۱۱

نشان‌دهنده نقش فعال وی در همکاری‌های علمی است. از سوی دیگر، استاد شماره ۴ بالاترین مقدار شاخص بینابینی علمی ($SFC_B = ۰/۹۱$) را به خود اختصاص داده و به‌عنوان «دریچه اصلی» در جریان اطلاعات علمی عمل می‌کند. در بخش معاشرت اجتماعی و فرهنگی، باز هم استاد شماره ۲ برجسته ظاهر می‌شود ($UFC_D = ۰/۵۴$)، در حالی که استاد شماره ۶

بیشترین شاخص بینابینی معاشرت اجتماعی و فرهنگی ($UF_{CB} = 0.76$) را دارد و نقش واسطه‌ای قوی در روابط غیررسمی ایفا می‌کند.

این یافته‌ها نشان می‌دهند که برخی از اعضای هیئت علمی (مانند استاد شماره ۲) هم در حوزه علمی و هم در حوزه اجتماعی شبکه، جایگاه محوری دارند، در حالی که برخی دیگر (مانند استاد شماره ۴) عمدتاً در جریان‌های اطلاعاتی رسمی، و برخی مانند استاد شماره ۶ در شبکه‌های غیررسمی، نقش کلیدی ایفا می‌کنند. این تفکیک نقش‌ها می‌تواند در طراحی سیاست‌های توسعه همکاری‌های درون‌دانشگاهی، تسهیل انتقال دانش، و تشکیل تیم‌های چندرشته‌ای بسیار مؤثر باشد.

بررسی آماری. در این قسمت و به منظور ارزیابی بیشتر شاخص‌های مرکزیت و شبکه ارتباطات، به بررسی آماری نتایج حاصل می‌پردازیم. ابتدا اعداد فازی جدول ۳ را بر اساس رابطه معرفی شده در تعریف ۵.۲ به اعداد دقیق تبدیل کرده‌ایم که خروجی آن در جدول ۴ ارائه شده است.

به منظور مقایسه انواع شاخص‌ها، نمودار جعبه‌ای داده‌های جدول ۴ را رسم کرده‌ایم (شکل ۱۲). گفتنی است که نمودار جعبه‌ای و بررسی آن، روشی از روش‌های تحلیل اکتشافی داده‌هاست.

با توجه به داده‌های جدول ۴ و شکل ۱۲، تحلیل آماری زیر برای ۴ ستون (شاخص) ارائه می‌شود. نمودار جعبه‌ای برپایه ۵ شاخص تشکیل می‌شود: کمینه، چارک اول، میانه، چارک سوم و بیشینه داده‌ها.

• تحلیل ستون اول ($SFC_{D,C}$) - مرکزیت درجه/نزدیکی همکاری علمی:

- توزیع فشرده: این نمودار جعبه‌ای نسبتاً فشرده است. اکثر استادان (بدنه اصلی جعبه) دارای شاخص مرکزیت درجه/نزدیکی بین حدود ۰/۲۰ تا ۰/۳۰ هستند.
- میانه: خط میانه تقریباً روی عدد ۰/۲۷ قرار دارد که نشان می‌دهد نیمی از اعضای هیئت علمی دارای شاخص مرکزیت درجه/نزدیکی کمتر از این مقدار و نیمی بیش‌تر هستند.
- داده پرت: استاد شماره ۲ با شاخص ۰/۶۱ یک داده پرت (دور افتاده) یا بسیار متمایز نسبت به بقیه است. یعنی او در شاخص مرکزیت درجه/نزدیکی فازی (SFC) فاصله معناداری با میانگین گروه دارد.

• تحلیل ستون دوم (SFC_B) - مرکزیت بینابینی همکاری علمی:

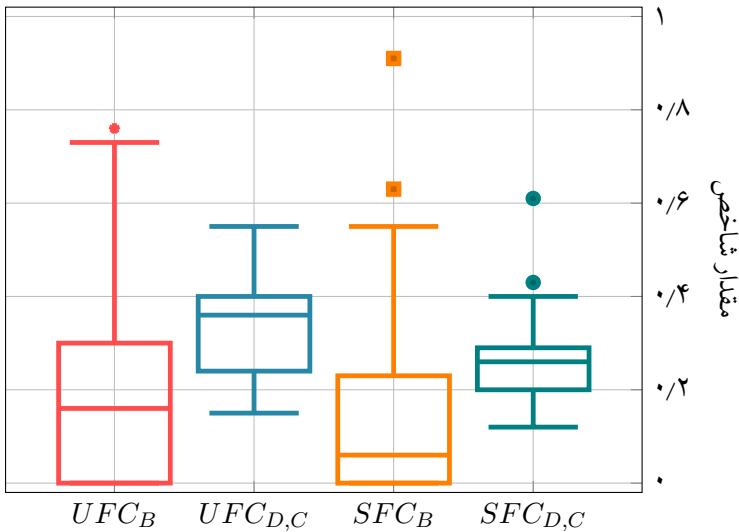
جدول ۴: شاخص‌های مرکزیت غیرفازی شده برای اعضای هیئت علمی

استاد	SFC_D, SFC_C	SFC_B	UFC_D, UFC_C	UFC_B
۱	۰/۱۵	۰/۵۵	۰/۲۹	۰/۳۴
۲	۰/۶۱	۰	۰/۵۵	۰
۳	۰/۲۷	۰/۶۳	۰/۲۹	۰/۲۴
۴	۰/۲۰	۰/۹۱	۰/۲۲	۰/۷۳
۵	۰/۲۳	۰/۴۹	۰/۲۰	۰/۷۶
۶	۰/۳۵	۰/۰۶	۰/۳۹	۰
۷	۰/۲۶	۰/۱۱	۰/۲۸	۰/۲۰
۸	۰/۴۳	۰/۰۵	۰/۴۵	۰
۹	۰/۲۹	۰/۱۱	۰/۳۶	۰/۱۹
۱۰	۰/۲۷	۰/۲۳	۰/۲۴	۰/۵۷
۱۱	۰/۲۴	۰/۱۰	۰/۳۷	۰/۱۶
۱۲	۰/۱۲	۰	۰/۴۰	۰/۱۳
۱۳	۰/۴۰	۰	۰/۴۸	۰
۱۴	۰/۱۴	۰/۱۶	۰/۵۲	۰/۳۰
۱۵	۰/۲۸	۰	۰/۳۸	۰
۱۶	۰/۳۲	۰/۰۴	۰/۲۰	۰/۲۴
۱۷	۰/۱۲	۰/۲۳	۰/۱۵	۰/۴۶
۱۸	۰/۲۳	۰	۰/۳۶	۰/۱۰
۱۹	۰/۲۸	۰	۰/۵۲	۰
۲۰	۰/۲۶	۰/۰۶	۰/۲۴	۰/۱۱

– پراکندگی زیاد: جعبه در این نمودار کشیده‌تر است که نشان‌دهنده پراکندگی زیاد داده‌هاست.

– تجمع در صفر: خط پایین جعبه به صفر می‌رسد و چارک اول (Q_1) نیز بسیار پایین است که به دلیل وجود تعداد زیادی صفر در داده‌هاست (استادان ۲،

توزیع شاخص‌های مرکزیت فازی



شکل ۱۲: نمودار جعبه‌ای مقایسه شاخص‌های مرکزیت

۱۲، ۱۳، ۱۵، ۱۸، ۱۹). به نظر می‌رسد که طبیعی است، زیرا معمولاً تعداد کمی از افراد نقش پل ارتباطی را بازی می‌کنند.

– **دامنه تغییرات:** دامنه تغییرات از ۰ تا ۰/۹۱ است. استاد شماره ۴ با مرکزیت ۰/۹۱ بالاترین رتبه را دارد و به عنوان «پل ارتباطی اصلی» دانشکده شناخته می‌شود (ایشان هم‌اکنون مدیرگروه یکی از گروه‌های اصلی و میان‌رشته‌ای دانشکده است).

• **تحلیل ستون سوم ($UFC_{D,C}$) – مرکزیت درجه/نزدیکی اجتماعی و فرهنگی:**

– **توزیع نرمال‌تر:** این شاخص شبیه به ستون اول است اما مقادیر آن به طور کلی کمی بالاتر هستند (شیفت به سمت بالا).

– **میان به بالاتر:** میان این گروه حدود ۰/۳۳ است که از ستون اول بیش‌تر است.

– **پراکندگی متوازن:** فاصله چارک‌ها از میان به هم از کمینه و بیشینه نسبتاً متقارن است، به این معنی که توزیع در این شاخص بین اعضای هیئت علمی متعادل‌تر از دیگر شاخص‌ها است.

• **تحلیل ستون چهارم (UFC_B) – مرکزیت بینابینی اجتماعی و فرهنگی:**

— شبیه به ستون دوم: این نمودار نیز مانند SFC_B دارای مقادیر صفر متعدد است، اما پراکندگی آن کمی کمتر از SFC_B است.

— بیشینه پایین‌تر: بیش‌ترین مقدار در این شاخص ۰/۷۶ (استاد ۵) است، در حالی که در ستون دوم ۰/۹۱ بود. یعنی در روابط اجتماعی و فرهنگی، شدت مرکزیت بینابینی استادان ضعیف‌تر است.

نتیجه‌گیری کلی: نمودارهای ستون ۲ و ۴ (شاخص‌های بینابینی فازی) نشان می‌دهند که شبکه دارای ساختاری شبیه به ساختار «ستاره‌ای» است، یعنی تعداد کمی از استادان (مانند استاد ۴ و ۵) پل ارتباطی بسیار زیادی دارند و بقیه نقش کم‌رنگ‌تری ایفا می‌کنند. در حالی که ستون‌های ۱ و ۳ توزیع یکنواخت‌تری را نشان می‌دهند.

۸. مقایسه روش پیشنهادی با شاخص‌های مرکزیت کلاسیک (غیرفازی)

در بخش پیشین، شاخص‌های مرکزیت فازی پیشنهادی این پژوهش بر روی یک شبکه واقعی، پیاده‌سازی و محاسبه شد. نتایج به‌دست‌آمده نشان داد که استفاده از روابط فازی مبتنی بر اعداد فازی مثلثی و تجمیع آن‌ها به کمک عملگر FTOWA منجر به الگوهای مرکزیت متفاوتی نسبت به تحلیل‌های کلاسیک مبتنی بر گراف‌های غیرفازی می‌شود. به‌ویژه، مشاهده شد که برخی گره‌ها که در چارچوب کلاسیک دارای مرکزیت صفر یا ناچیز بودند، در چارچوب فازی دارای نقش ساختاری معنادار شدند. از این‌رو، به‌منظور تبیین این تفاوت‌ها و تشریح مزیت‌های رویکرد پیشنهادی، در این بخش یک تحلیل مقایسه‌ای میان شاخص‌های مرکزیت فازی و شاخص‌های کلاسیک و غیرفازی ارائه می‌شود.

محدودیت شاخص‌های مرکزیت کلاسیک در چارچوب گراف غیرفازی. شاخص‌های مرکزیت کلاسیک نظیر مرکزیت درجه، نزدیکی و بینابینی، در چارچوب گراف‌های غیرفازی تعریف می‌شود و روابط میان گره‌ها را یا به‌صورت دودویی $\{0, 1\}$ و یا به‌شکل وزن‌های عددی قطعی در نظر می‌گیرند. در این رویکردها، پیش از انجام تحلیل شبکه، روابط موجود میان بازیگران اجتماعی به مقادیر دقیق و غیرمبهم تقلیل داده می‌شوند.

در مطالعه موردی این پژوهش، روابط همکاری علمی میان اعضای هیئت علمی بر اساس پرسش‌نامه‌هایی با پاسخ‌های زبانی و ذهنی استخراج شده‌اند. تبدیل این داده‌ها به مقادیر عددی قطعی، بخشی از اطلاعات مربوط به ابهام، نایقینی و تفاوت برداشت افراد از مفهوم «همکاری علمی» را حذف می‌کند. پیامد این ساده‌سازی آن است که در تحلیل کلاسیک، برخی گره‌ها

دارای مرکزیتی برابر یا حتی صفر تشخیص داده می‌شوند، در حالی که از منظر کیفی، این گره‌ها نقش یکسانی در شبکه ایفا نمی‌کنند.

مقایسه با رویکردهای وزنی غیر فازی. در برخی مطالعات، به دلیل محدودیت مدل دودویی، از گراف‌های وزنی استفاده شده است که وزن یال‌ها مقادیری در بازه [۰, ۱] می‌پذیرند. اگرچه این رویکرد شدت روابط را لحاظ می‌کند، اما همچنان با یک محدودیت اساسی مواجه است: وزن یال‌ها مقادیر عددی قطعی هستند و نایقینی داده‌های انسانی را به صورت صریح مدل‌سازی نمی‌کنند.

در رویکرد وزنی، هر رابطه حتی در صورت تردید یا ابهام در ارزیابی آن، به صورت یک مقدار دقیق در نظر گرفته می‌شود. ولی روابط انسانی، از جمله همکاری علمی، اغلب دارای دامنه‌ای از تفسیر و برداشت هستند.

مزیت رویکرد فازی. روش پیشنهادی این مقاله با مدل‌سازی روابط شبکه به صورت اعداد فازی مثلثی امکان تعمیم شاخص‌های مرکزیت کلاسیک به چارچوب گراف فازی را فراهم می‌سازد. نتایج مطالعه موردی بخش قبل نشان داد که این چارچوب دارای چند مزیت اساسی نسبت به رویکردهای غیر فازی است.

نخست، نایقینی موجود در داده‌های ورودی در تمام مراحل محاسبه شاخص‌های مرکزیت حفظ می‌شود و به یک مقدار قطعی تقلیل نمی‌شود. این ویژگی باعث می‌شود اطلاعات کیفی نهفته در ارزیابی‌های زبانی اعضای شبکه از بین نرود.

دوم، شاخص‌های مرکزیت فازی از قدرت تفکیک بیش‌تری برخوردارند. همان‌گونه که نتایج نشان داد، این شاخص‌ها قادرند میان گره‌هایی که در تحلیل کلاسیک دارای مرکزیت برابر یا صفر هستند، تمایز ایجاد کنند و نقش‌های پنهان آن‌ها را آشکار سازند.

سوم، خروجی‌های فازی حاصل، به صورت بازه‌هایی با مرکز و پهنای مشخص ارائه می‌شوند که این امر امکان تفسیرپذیری بهتر و تحلیل حساسیت نتایج را فراهم می‌کند؛ قابلیت‌هایی که در خروجی‌های عددی قطعی روش‌های کلاسیک وجود ندارد.

۹. جمع‌بندی و نتیجه‌گیری

در این پژوهش، با تکیه بر مفاهیم مجموعه‌های فازی و اعداد فازی، شاخص‌های مرکزیت کلاسیک شبکه‌های اجتماعی، شامل مرکزیت درجه، بینابینی و نزدیکی، در چارچوب گراف‌های فازی مبتنی بر عدد فازی بازتعریف و بسط داده شدند. برخلاف رویکردهای کلاسیک که روابط

میان گره‌ها را صرفاً بر اساس وجود یا عدم وجود یال و یا وزن‌های عددی قطعی مدل‌سازی می‌کنند، روش پیشنهادی این مقاله امکان نمایش ساختاریافته‌ی ابهام، نایقینی و تفاوت در شدت روابط را فراهم می‌سازد. این ویژگی در شبکه‌هایی با ماهیت انسانی و زبانی بسیار اهمیت دارد زیرا در چنین داده‌هایی، کاهش روابط به مقادیر قطعی ناگزیر به از دست رفتن بخش قابل توجهی از اطلاعات منجر می‌شود.

در این مقاله، ابتدا به منظور تبیین گام‌به‌گام مفاهیم و جلوگیری از پیچیدگی محاسباتی، روش پیشنهادی بر روی یک شبکه فرضی کوچک تشریح شد. سپس، چارچوب ارائه‌شده در قالب یک مطالعه موردی واقعی شامل شبکه همکاری علمی و اجتماعی-فرهنگی اعضای هیئت علمی دانشکده علوم مهندسی دانشگاه تهران استفاده شد. داده‌های گردآوری‌شده از طریق پرسش‌نامه‌های مبتنی بر ارزیابی‌های زبانی، به صورت اعداد فازی مثلثی مدل‌سازی و با استفاده از عملگر تجمیع FTOWA برای محاسبه شاخص‌های مرکزیت فازی به‌کار رفتند.

نتایج مطالعه موردی (ارائه‌شده در بخش ۷ و جداول ۳ و ۴) نشان داد که استفاده از گراف‌های فازی و اعداد فازی منجر به تمایز دقیق‌تر میان نقش و اهمیت گره‌ها در مقایسه می‌شود. به‌طور خاص، مشاهده شد که برخی گره‌ها که در چارچوب کلاسیک دارای مرکزیتی صفر یا بسیار ناچیز هستند، در تحلیل فازی دارای مقادیر مرکزیت غیرصفر و معنادار می‌شوند. این موضوع نشان می‌دهد که روش پیشنهادی قادر است نقش‌های پنهان و غیرآشکار بازیگرانی را که از نظر ساختاری در حاشیه شبکه قرار دارند، اما از منظر کیفی دارای اهمیت هستند، شناسایی کند. نمونه را، استاد شماره ۴ که در شکل‌های ۱۰ و ۱۱ که بر اساس گراف‌های قطعی ترسیم شده‌اند چندان مهم به نظر نمی‌رسد در حالی که در جدول ۳، بالاترین شاخص مرکزیت بینابینی علمی را به خود اختصاص داده است.

تحلیل مقایسه‌ای ارائه‌شده در بخش ۸ نشان داد که این تفاوت در نتایج صرفاً ناشی از تغییر یک ابزار محاسباتی نیست، بلکه نتیجه‌ی تغییر در نظام مدل‌سازی روابط شبکه است. در رویکرد کلاسیک، ابهام موجود در داده‌های انسانی پیش از تحلیل حذف می‌شود، در حالی که در روش فازی پیشنهادی، این ابهام به‌عنوان بخشی از اطلاعات شبکه حفظ شده و به‌طور مستقیم در محاسبه شاخص‌های مرکزیت دخالت داده می‌شود.

از منظر کاربردی، نتایج این پژوهش نشان می‌دهد که استفاده از شاخص‌های مرکزیت فازی می‌تواند ابزار تحلیلی مناسبی برای مدیران دانشگاهی و سیاست‌گذاران علمی باشد. به‌عنوان مثال، شناسایی اعضای که علی‌رغم تعاملات محدود، نقش واسطه‌ای یا تسهیل‌گر در شبکه همکاری ایفا می‌کنند، می‌تواند در طراحی سیاست‌های توسعه تعاملات علمی، تشکیل تیم‌های

میان رشته‌ای، و تقویت ارتباطات غیررسمی مؤثر باشد. این یافته با نتایج عددی مطالعه موردی نیز همخوانی دارد، جایی که برخی اعضا با درجه همکاری ظاهراً پایین، در چارچوب فازی دارای اهمیت ساختاری قابل توجه‌ای تشخیص داده شدند.

با وجود مزایای روش پیشنهادی، این پژوهش محدودیت‌هایی نیز دارد. نخست، محاسبات شاخص‌های مرکزیت فازی، به‌خصوص در شبکه‌های بزرگ، از نظر محاسباتی پرهزینه‌تر از روش‌های کلاسیک هستند. دوم، نتایج به‌شدت به کیفیت داده‌های ورودی و نحوه تعریف اعداد فازی وابسته‌اند؛ از این رو، طراحی پرسش‌نامه‌ها و انتخاب مناسب تابع عضویت نقشی اساسی در اعتبار تحلیل دارد.

مسیرهای پژوهشی پیش‌رو. این پژوهش می‌تواند پایه‌ای برای پژوهشی آینده باشد. از

جمله:

- به‌کارگیری داده‌های واقعی و بزرگ مقیاس شبکه‌های اجتماعی در این پژوهش، روش پیشنهادی بر روی یک مثال محدود و کنترل شده بررسی شد. استفاده از شاخص‌های مرکزیت فازی درباره داده‌های واقعی شبکه‌های اجتماعی برخط یا شبکه‌های سازمانی بزرگ مقیاس، می‌تواند مسیر پژوهشی و کاربردی مناسبی باشد. تحلیل چنین شبکه‌هایی امکان بررسی رفتار شاخص‌های فازی را در مواجهه با نایقینی، نویز و ناهمگنی داده‌ها فراهم می‌سازد.
- تحلیل پیچیدگی محاسباتی شاخص‌های مرکزیت فازی یکی دیگر از مسیرهای مهم پژوهشی، بررسی و تحلیل پیچیدگی محاسباتی شاخص‌های مرکزیت فازی و مقایسه‌ی آن‌ها با شاخص‌های کلاسیک متناظر است. چنین تحلیلی می‌تواند در ارزیابی امکان‌پذیری استفاده از روش پیشنهادی در شبکه‌های بزرگ مقیاس و کاربردهای زمان‌مند سودمند باشد.
- تغییر روش‌های گردآوری داده‌ها در این پژوهش از پرسش‌نامه با طیف لیکرت استفاده شد حال آن که می‌توان برای ثبت نایقینی در پاسخ‌ها از روش‌های دیگری همچون ردیابی حرکات موشواره، ردیابی حرکات چشم یا حتی تحلیل لحن صدا هنگام ثبت پرسش‌نامه استفاده کرد.
- تکمیل داده‌های ناقص بر اساس اطلاعات موجود

یکی از چالش‌هایی که در روابط اجتماعی وجود دارد، ناقص ماندن اطلاعات است که برای تحلیل کامل شبکه نیاز است این داده‌های ناقص را به شکلی مناسب (مانند روشی که در [۱۹]) ارائه شده، تکمیل کنیم.

- ادغام تحلیل‌ها با یادگیری ماشین

یکی از مزایای مهم این روش، استفاده از عملگر تجمیع فازی *FTOWA* است که علاوه بر در نظر گرفتن ماهیت فازی داده‌ها، انعطاف‌پذیری لازم را برای وزن‌دهی به اهمیت نسبی روابط (مثلاً بر اساس تجربه خبرگان یا اولویت‌های زمینه‌ای) فراهم می‌آورد. این امر باعث می‌شود نتایج حاصل نه تنها از نظر ریاضی دقیق‌تر باشند، بلکه از دیدگاه کاربردی نیز هماهنگی بیشتری با واقعیت داشته باشند. به‌کارگیری روش‌های یادگیری ماشین به منظور خودکارسازی فرایند تعیین بردار وزن‌ها در عملگر *FTOWA* احتمالاً می‌تواند دقت تحلیل‌ها را افزایش دهد.

- کاربرد در بیوانفورماتیک

در شبکه‌های تعامل پروتئین-پروتئین یا ژنی، قدرت تعاملات اغلب با نایقینی همراه است [۱۰]. استفاده از این روش فازی ارائه شده ممکن است بتواند به شناسایی ژن‌ها یا پروتئین‌های اساسی با دقت بالاتری کمک کند.

سپاس‌گزاری

از استادان گرامی دانشکده علوم مهندسی که پرسشنامه مربوط را تکمیل کردند سپاس‌گزاریم. از پنج داور محترم که نظرهای سودمندی در بهبود مقاله مطرح کردند، قدردانی می‌کنیم.

مراجع

- [۱] طاهری، س.م. (۱۳۷۸). آشنایی با نظریه مجموعه‌های فازی. مشهد: انتشارات جهاد دانشگاهی فردوسی مشهد.
- [۲] طاهری، س.م. (۱۳۸۷). اندازه‌های عدم اطمینان. فرهنگ و اندیشه ریاضی، ۴۱، ۹-۲۶.
- [۳] طاهری، س.م. (۱۳۹۷). نظریه احتمال و نظریه امکان: شباهت‌ها و تفاوت‌ها. سیستم‌های فازی و کاربردها، ۱۱(۱)، ۴۳-۵۴.
- [۴] فدائی، ز. (۱۳۹۲). برخی از کاربردهای گراف فازی (پایان‌نامه کارشناسی ارشد رشته ریاضی کاربردی، گرایش گراف و ترکیبیات). دانشگاه صنعتی شاهرود.
- [۵] موسوی، س.ع. و ماشین‌چی، م. (۱۴۰۰). نخستین درس در نظریه مجموعه‌های فازی. کرمان: انتشارات دانشگاه شهید باهنر کرمان و انتشارات همراه علم.

- [6] Baccour, L. (2018). A novel aggregation operator based on triangular fuzzy numbers for group decision making. *Journal of Applied Mathematics*, 2018, Article 9209524.
- [7] Beliakov, G., Pradera, A., & Calvo, T. (2007). *Aggregation functions: A guide for practitioners*. Springer.
- [8] Farahanitajar, M., Naderinasab, M., & Kalhor, H. (2024). Designing a human resource productivity model for the deaf sports federation: A combined Delphi-Fuzzy and interpretive structural modeling approach. *International Journal of Sport Studies for Health*, 7(1), Article e142502.
- [9] Klir, G. J., & Yuan, B. (2015). *Fuzzy Sets and Fuzzy Logic: Theory and Applications*. Pearson.
- [10] Krogan, N. J., Cagney, G., Yu, H., Zhong, G., Guo, X., Ignatchenko, A., ... & Greenblatt, J. F. (2006). Global landscape of Protein complexes in the yeast *Saccharomyces cerevisiae*. *Nature*, 440(7084), 637-643.
- [11] Landherr, A., Friedl, B., & Heidemann, J. (2010). A critical review of centrality measures in social networks. *Business and Information Systems Engineering*, 2(6), 371-385.
- [12] Lochab, R., & Batra, L. (2025). A comprehensive review of Fuzzy logic applications in ESG investment decision-making with a novel hybrid model application. *Journal of Industrial and Management Optimization*, 21(2), 487-523.
- [13] Merigó, J. M., & Casanovas, M. (2010). The Fuzzy generalized OWA operator and its application in strategic decision making. *Cybernetics and Systems*, 41(5), 359-370.
- [14] Memmedova, K., & Ertuna, B. (2024). Development of a fuzzy likert scales to measure variables in social sciences. *Information Sciences*, 654, Article 119792.
- [15] Meyer, T., Kim, A. D., Spivey, M. J., & Yoshimi, J. (2024). Mouse tracking performance: A new approach to analyzing continuous mouse tracking data. *Behavior Research Methods*, 56(5), 4682-4694.
- [16] Porreca, A., Maturo, F., & Ventre, V. (2025). Fuzzy centrality measures in social network analysis: Theory and application in a university department collaboration network. *International Journal of Approximate Reasoning*, 176, Article 109319.
- [17] Simo, U. F., & Gwét, H. (2018). Fuzzy triangular aggregation operators. *Journal of Mathematics*, 2018, Article 2038034.
- [18] Tsvetovat, M., & Kouznetsov, A. (2011). *Social Network Analysis for Startups: Finding Connections on the Social Web*. O'Reilly Media.
- [19] Xu, Y. (2025). A social network large-scale group decision-making method considering overconfidence behavior under incomplete hesitant fuzzy preference environment. *Journal of Industrial and Management Optimization*, 21(2), 645-677.