

## کنترل فازی بهینه مبتنی بر یادگیری تقویتی SAC برای سیستم های غیرخطی و آشوبناک مرتبه کسری

سپیده نیک فهم<sup>۱</sup>، سعید میرزاجانی<sup>۲\*</sup> و عقیده حیدری<sup>۱</sup>

<sup>۱</sup> گروه ریاضی، دانشگاه پیام نور، تهران، ایران

<sup>۲</sup> گروه علوم پایه، دانشگاه ملی مهارت، تهران، ایران

تاریخ پذیرش: ۱۴۰۵/۰۱/۲۴

تاریخ دریافت: ۱۴۰۴/۱۰/۰۵

نوع مقاله: علمی-پژوهشی

**چکیده.** کنترل سیستم های غیرخطی مرتبه کسری با رفتار آشوبناک به دلیل حساسیت بالا و دینامیک پیچیده، از چالش های مهم در کنترل مدرن محسوب می شود. در این پژوهش، یک روش کنترلی با نام کنترل ترکیبی فازی با هزینه تضمین شده برای پایدارسازی این سیستم ها ارائه شده است. طراحی کنترلر بر اساس نظریه لیاپانوف مرتبه کسری و شرایط نابرابری ماتریسی خطی صورت گرفته است که امکان مدیریت دینامیک پیچیده و مقاوم در برابر عدم قطعیت و محدودیت های ورودی را فراهم می کند. نتایج شبیه سازی ها نشان می دهند که روش پیشنهادی همگرایی سیستم را تضمین می کند، پایداری حلقه بسته را حفظ می نماید و توانایی تنظیم تطبیقی پارامترهای کنترلر از طریق یادگیری تقویتی Soft-Actor-Critic (SAC)، عملکرد بهینه و مقاوم در برابر نوسانات و آشوب سیستم را فراهم می آورد. این مطالعه کنترل ترکیبی فازی با تضمین هزینه را با چارچوب یادگیری تقویتی SAC ترکیب می کند تا یک روش پایدار، مقاوم و مستقل از دینامیک خاص سیستم ارائه (ادامه دارد)

2010 Mathematics Subject Classification. 93C42; 26A33 37N35; 93C42 \* Corresponding author

E-mails: nikhfahm@student.pnu.ac.ir, Smirzajani@tvu.ac.ir and a\_heidari@pnu.ac.ir.

عبارات و کلمات کلیدی. سیستم های مرتبه کسری، مدل فازی Takagi-sugeno، کنترل فازی ترکیبی با تضمین هزینه، نظریه لیاپانوف.

دهد. این رویکرد، یک سیاست کنترلی بهینه استخراج می‌کند که همگرایی در زمان محدود و دسترسی به نقطه تعادل را تضمین می‌نماید که یک پیشرفت قابل توجه نسبت به روش‌های سنتی کنترل فازی و مرتبه کسری محسوب می‌شود.

### ۱. مقدمه

سیستم‌های غیرخطی<sup>۱</sup> و پیچیده نقش بنیادی در پیشرفت فناوری‌های نوین ایفا می‌کنند و در زمینه‌هایی مانند تصویربرداری دقیق، ارتباطات پیچیده، ابزارهای پزشکی و کاربردهای پیشرفته مبتنی بر نور و سیگنال به کار گرفته می‌شوند. بسیاری از این سیستم‌ها دارای دینامیک پیچیده<sup>۲</sup> و غیرخطی هستند و هنگامی که در حوزه‌های مرتبه کسری مدل‌سازی می‌شوند یا آشوب در آن‌ها حضور دارد، رفتارهایی چندبعدی و پراشوب از خود نشان می‌دهند [۱]. کنترل دقیق چنین سیستم‌هایی برای حفظ پایداری، بهبود عملکرد و دستیابی به اهداف عملیاتی مورد نظر ضروری است و روش‌های سنتی کنترل اغلب نمی‌توانند غیرخطی‌های شدید، رفتارهای چندبعدی و عدم قطعیت‌های موجود در مدل ذاتی این پلتفرم‌های پیشرفته را به طور کامل مدیریت کنند. به همین دلیل، توسعه روش‌های کنترلی نوین که بتوانند این رفتارهای پیچیده را به دقت پایش و تعدیل کنند، به یک نیاز اساسی در تحقیقات سیستم‌های غیرخطی و پیچیده تبدیل شده است [۲].

سیستم‌های مرتبه کسری، که با معادلات دیفرانسیل با مشتق‌های غیر صحیح مشخص می‌شوند، طی دهه‌های اخیر توجه زیادی را به خود جلب کرده‌اند، زیرا این سیستم‌ها توانایی بالایی در مدل‌سازی دینامیک پیچیده با وابستگی به تاریخچه و اثرات گذشته دارند [۳]. بر خلاف سیستم‌های با مرتبه صحیح، سیستم‌های مرتبه کسری انعطاف‌پذیری و دقت بیشتری در توصیف پدیده‌های فیزیکی مانند ویسکوالاستیسیته، انتشار غیر عادی و رفتارهای الکترومغناطیسی ارائه می‌دهند [۴]. مدل‌سازی مرتبه کسری به‌ویژه در تحلیل رفتار سیستم‌های غیرخطی و پیچیده ارزشمند است، زیرا امکان ثبت دینامیک‌های ذاتی و پیچیده این سیستم‌ها و تعاملات درون آن‌ها را فراهم می‌کند [۵].

شبکه‌های عصبی مصنوعی به دلیل توانایی بالا در تقریب توابع غیرخطی پیچیده و یادگیری روابط ورودی-خروجی، به‌طور گسترده‌ای در کنترل سیستم‌های غیرخطی و مرتبه کسری مورد استفاده قرار گرفته‌اند [۶]. تحقیقات پیشین نشان داده‌اند که ترکیب شبکه‌های عصبی با کنترل فازی و روش‌های یادگیری تقویتی، امکان طراحی کنترل‌کننده‌هایی با عملکرد تطبیقی بالا، مقاوم در برابر اختلالات و عدم قطعیت‌های سیستم، و با قابلیت همگرایی در زمان محدود را فراهم

<sup>1</sup>Nonlinear systems

<sup>2</sup>Complex dynamic

می‌کند [۱۱]. این پیشینه، انگیزه‌ای قوی برای استفاده از الگوریتم یادگیری تقویتی عمیق SAC در طراحی کنترل‌کننده T-S فازی فراهم می‌آورد، چرا که این الگوریتم می‌تواند پارامترهای کنترل را به صورت تطبیقی تنظیم کرده و با حفظ پایداری و عملکرد بهینه سیستم، عملکرد حلقه بسته را بهبود دهد.

سیستم‌های مرتبه کسری<sup>۱</sup>، با گسترش رویکرد مدل‌سازی کلاسیک و استفاده از مشتق‌های غیرصحیح، امکان توصیف دقیق‌تر رفتارهای وابسته به تاریخچه، تعاملات بلندمدت و انتشار غیرعادی را در سیستم‌های پیچیده و غیرخطی فراهم می‌کنند. این ویژگی‌ها باعث می‌شوند که مدل‌های مرتبه کسری برای تحلیل رفتارهای ترکیبی و دینامیک‌های آشوبناک سیستم‌های غیرخطی به ویژه در کاربردهای پرآشوب و چندبعدی مناسب باشند. با این حال، افزایش دقت مدل به همراه پیچیدگی‌های ریاضی و محاسباتی بیشتری همراه است. چنین سیستم‌هایی اغلب به شرایط اولیه، عدم قطعیت‌های پارامتری و رفتارهای نوسانی پیچیده حساس هستند که می‌تواند منجر به ناپایداری و کاهش عملکرد شود. بنابراین، توسعه استراتژی‌های کنترلی مقاوم و کارآمد برای پایداری سیستم‌های مرتبه کسری و پیچیده، هم از لحاظ نظری و هم عملی ضروری است، به ویژه در سناریوهایی که دقت، سرعت و مقاومت در برابر اختلال اهمیت بالایی دارند [۷].

راهکارهای کنترلی متنوعی برای مقابله با رفتار پیچیده سیستم‌های غیرخطی و مرتبه کسری توسعه یافته‌اند، از جمله کنترل PID<sup>۲</sup> [۸، ۹]، کنترل لغزشی<sup>۳</sup> [۱۰، ۱۱]، کنترل تطبیقی<sup>۴</sup> [۱۲]، تکنیک‌های بازپله‌ای<sup>۵</sup> [۱۳] و روش‌های هوشمند مانند کنترل منطقی فازی<sup>۶</sup> [۱۴] و شبکه‌های عصبی مصنوعی<sup>۷</sup> [۱۵، ۱۶]، و غیره. این روش‌ها در پایداری سیستم‌های پیچیده و پرآشوب، به ویژه در شرایط عدم قطعیت مدل‌سازی و وجود اختلالات خارجی، اثرات متفاوتی نشان داده‌اند. با این حال، اثرگذاری آن‌ها در مواجهه با سیستم‌های غیرخطی یا چندبعدی، به ویژه سیستم‌هایی که دارای دینامیک مرتبه کسری هستند، محدود می‌شود.

در این زمینه، چارچوب مدل‌سازی فازی تاکاگی-ساژنو<sup>۸</sup> (T-S) به عنوان یک راهکار مؤثر برای مدیریت غیرخطی بودن سیستم‌ها و تبدیل آنها به سیستم خطی مطرح است. با تجزیه یک

<sup>1</sup>Fractional-order systems

<sup>2</sup>proportional-integral-derivative control

<sup>3</sup>Sliding mode control

<sup>4</sup>Adaptive control

<sup>5</sup>Backstepping control

<sup>6</sup>Fuzzy logic control

<sup>7</sup>Artificial Neural networks

<sup>8</sup>Takagi-sugeno

سیستم غیرخطی به ترکیب محدب از زیرسیستم‌های خطی با استفاده از توابع عضویت فازی، روش T-S امکان طراحی منظم و علمی کنترل‌کننده‌ها از طریق نامعادلات ماتریسی خطی<sup>۱</sup> (LMI) را فراهم می‌کند [۱۷]. این ساختار، به کارگیری ابزارهای ریاضی دقیق برای تحلیل پایداری و طراحی کنترل‌کننده‌ها را آسان می‌سازد و برای سیستم‌های غیرخطی و پیچیده با رفتار پیراشوب و نامطمئن کاربردی و مؤثر است.

برای مثال، نویسندگان مرجع [۱۸] از تابع لایاپانوف<sup>۲</sup> فازی وابسته به توابع عضویت و یک قاعده مشتق کسری جدید برای تحلیل پایداری و طراحی کنترل‌کننده‌ها در سیستم‌های مرتبه کسری T-S فازی استفاده کرده‌اند. در [۱۹]، یک کنترل تطبیقی مقاوم مبتنی بر ناظر برای سیستم‌های مرتبه کسری T-S فازی با عدم قطعیت در ورودی و اختلالات خروجی پیشنهاد شده است، که از مدل فازی افزوده و تحلیل پایداری مبتنی بر نامعادلات ماتریسی بهره می‌برد. در [۲۰]، یک رویکرد<sup>۳</sup> فازی مرتبه کسری برای برآورد ورودی ناشناخته در سیستم‌های غیرخطی مرتبه کسری با استفاده از مدل T-S فازی طراحی شده است؛ این روش ورودی‌های ناشناخته را جدا کرده و با استفاده از نامعادلات ماتریسی و توابع لایاپانوف فازی، پایداری ناظر را تضمین می‌کند. نویسندگان مرجع [۲۱] یک روش کنترل تطبیقی برای سیستم‌های مرتبه کسری T-S فازی با تاخیر زمانی، پارامترهای ناشناخته و اشباع ورودی ارائه داده‌اند که با بهره‌گیری از یک سیستم کمکی و تبدیل نرْم، پایداری و محدودیت سیستم را تضمین می‌کند.

در [۲۲]، یک کنترل‌کننده لغزشی انتگرالی مبتنی بر رویداد برای سیستم‌های مرتبه کسری T-S فازی طراحی شده است که از تابع خطای فازی و آستانه‌ای ترکیبی (ثابت و متغیر با زمان) استفاده می‌کند تا پایداری سیستم تضمین شود و تعداد به‌روزرسانی‌های کنترل کاهش یابد. در [۲۳]، روشی برای کنترل ردیابی<sup>۴</sup> خروجی و حذف اختلال در سیستم‌های غیرخطی مرتبه کسری ارائه شده است که از مدل T-S فازی و کنترل‌کننده تکراری مرتبه کسری اصلاح‌شده بهره می‌برد و پایداری آن با استفاده از تابع لایاپانوف فازی و نامعادلات ماتریسی تضمین شده است. در [۲۴]، یک روش کنترل ردیابی مبتنی بر برآوردگر عدم قطعیت و اختلال برای سیستم‌های مرتبه کسری T-S فازی نوع دوم<sup>۵</sup> با تاخیرهای زمانی متغیر توسعه یافته است که پایداری و دقت برآورد بدون نیاز به دانش قبلی از عدم قطعیت‌ها تضمین می‌شود. در [۲۵]، یک رویکرد

<sup>1</sup>Linear Matrix Inequalities

<sup>2</sup>Lyapunov function

<sup>3</sup>Observer

<sup>4</sup>Tracking control

<sup>5</sup>Fuzzy type II

با محدوده محدود برای سیستم‌های فازی طراحی شده است که با استفاده از تابع لایاپانوف-کراسوفسکی<sup>۱</sup> وابسته به عضویت و شرایط مبتنی بر LMI به مسائل اختلال و نویز می‌پردازد. در [۲۶]، یک روش کنترل تطبیقی فازی T-S برای همگام‌سازی سیستم‌های پراشوب مرتبه کسری با ورودی اشباع و اختلال ارائه شده است که از قوانین تطبیقی مرتبه کسری بهره می‌برد و از محاسبات LMI اجتناب می‌کند. در [۲۷]، یک کنترل‌کننده مبتنی بر رویداد برای پایداری سیستم‌های T-S فازی در زمان محدود با تاخیرهای زمانی طراحی شده است که معیارهای مبتنی بر LMI را بدون استفاده از بازخورد حالت با تأخیر رعایت می‌کند. در [۲۸]، یک روش کنترل تطبیقی فازی مبتنی بر الگوریتم Q-learning برای سیستم‌های غیرخودگردان<sup>۲</sup> مرتبه کسری با تأخیر ورودی و خطا ارائه شده است که از رویکرد فازی و تحلیل پایداری مبتنی بر لایاپانوف در چارچوب یادگیری عمیق<sup>۳</sup> بهره می‌برد. همچنین، در [۲۹]، یک کنترل‌کننده لغزشی بهینه مرتبه کسری با استفاده از مدل T-S فازی و یادگیری تقویتی SAC<sup>۴</sup> طراحی شده است تا پایداری سیستم‌های مرتبه کسری تضمین شود و اثر نوسان کنترل کاهش یابد.

با وجود پیشرفت‌های قابل توجه در مطالعات ذکر شده، همچنان محدودیت‌هایی وجود دارد که کاربرد عملی و مقاومت این روش‌ها را، به‌ویژه در سیستم‌های پیچیده مرتبه کسری مانند سیستم‌های پراشوب یا دارای دینامیک پیچیده، محدود می‌کند. این محدودیت‌ها عبارت‌اند از:

- (۱) بسیاری از مقالات بر پایداری یا همگام‌سازی تمرکز دارند، اما چارچوب تضمین هزینه<sup>۵</sup> ارائه نمی‌دهند؛ به این معنی که کنترل رسمی بر عملکرد بدترین حالت (مانند انرژی مصرفی، خطای ردیابی و غیره) وجود ندارد.
- (۲) برخی روش‌ها به طور گسترده‌ای بر حل مجموعه روش‌های پیچیده نامعادلات تکیه دارند، به‌ویژه روش‌هایی که از توابع لایاپانوف یا کراسوفسکی فازی استفاده می‌کنند؛ این موضوع می‌تواند از نظر محاسباتی سنگین و برای سیستم‌های مرتبه بالا کمتر مقیاس‌پذیر باشد.
- (۳) محدودیت‌های ورودی و قيود سیستم تنها در تعداد کمی از مطالعات بررسی شده است و اغلب با تقریب‌ها یا فرضیات غیرواقعی ارائه می‌شود که ممکن است کاربرد عملی آن‌ها را محدود کند.

<sup>1</sup> Lyapunov-Krasovskii

<sup>2</sup> Non-autonomous systems

<sup>3</sup> Deep learning

<sup>4</sup> Soft-Actor-Critic

<sup>5</sup> Guaranteed cost

(۴) اکثر کنترل‌کننده‌ها از پارامترهای طراحی ثابت یا قوانین تطبیقی تحلیلی استفاده می‌کنند و از روش‌های داده‌محور یا مبتنی بر یادگیری، مانند یادگیری تقویتی عمیق، برای بهینه‌سازی ضرایب و بهبود عملکرد بهره نمی‌برند.

(۵) در حالی که برخی مطالعات بر سیستم‌های مرتبه کسری یا پراشوب تمرکز دارند، تعداد اندکی به طور ویژه به سیستم‌های غیرخطی پیچیده یا آشوب هیبرید<sup>۱</sup> مرتبه کسری می‌پردازند که چالش‌های منحصر به فردی از نظر ابعاد و حساسیت ایجاد می‌کنند.

(۶) برخی مقالات بر طراحی رویتگر تأکید دارند (مانند رویتگرهای با محدوده محدود)، اما طراحی جامع کنترل‌کننده برای پایدارسازی یا همگام‌سازی تحت عدم قطعیت‌ها ارائه نمی‌کنند.

با وجود پیشرفت‌های قابل توجه در کنترل سیستم‌های غیرخطی و مرتبه کسری، هنوز هیچ چارچوب یکپارچه‌ای ارائه نشده است که به‌طور همزمان کنترل تضمین هزینه، طراحی فازی مرکب و سازوکار یادگیری تطبیقی را برای مدیریت دینامیک پیچیده و پراشوب این سیستم‌ها ادغام کند. این تحقیق با هدف پر کردن این خلا، توسعه یک کنترل‌کننده فازی مرکب با تضمین هزینه و یادگیری تقویتی را دنبال می‌کند تا پایداری، عملکرد و مقاومت سیستم در برابر اختلالات به‌طور همزمان تضمین شود. علاوه بر این، بهره‌گیری از مکانیزم‌های یادگیری تطبیقی، مانند الگوریتم SAC، در چارچوب T-S فازی هنوز تا حد زیادی بررسی نشده است. به‌ویژه برای سیستم‌های پیچیده‌ای که دارای دینامیک غیرخطی مرتبه کسری و حساسیت بالا نسبت به شرایط اولیه هستند.

دستاوردهای اصلی این مقاله را می‌توان به شرح زیر برشمرد:

(۱) چارچوبی از کنترل فازی مرکب با تضمین هزینه<sup>۲</sup> برای سیستم‌های غیرخطی مرتبه کسری توسعه یافته است که پایداری مقاوم و عملکرد محدود تحت عدم قطعیت‌های پارامتری و محدودیت‌های ورودی را تضمین می‌کند.

(۲) روش پیشنهادی به‌طور صریح کنترل تضمین هزینه را با مدل‌سازی T-S فازی ترکیب می‌کند، که امکان طراحی سیستماتیک کنترل‌کننده را فراهم کرده و تضمین‌های عملکردی رسمی ارائه می‌دهد؛ جنبه‌ای که در مطالعات پیشین کنترل فازی مورد توجه قرار نگرفته است.

<sup>1</sup>Hybrid Chaos

<sup>2</sup>Guaranteed-Cost

- (۳) کنترل‌کننده از طریق طراحی مرکب با بهره، محدودیت‌های عملگر و ورودی را به‌طور مؤثر مدیریت می‌کند و بدین ترتیب کاربرد عملی و مقاومت سیستم را افزایش می‌دهد.
- (۴) مکانیزم یادگیری تقویتی عمیق SAC برای تنظیم تطبیقی پارامترهای بهره فازی به‌کار گرفته شده است، که سرعت همگرایی و قابلیت سازگاری در محیط‌های پویا را افزایش می‌دهد و در عین حال عملکرد تضمین هزینه را حفظ می‌کند.
- (۵) چارچوب به‌طور خاص برای سیستم‌های پراشوب و پیچیده مرتبه کسری طراحی شده است که تا کنون در مطالعات پیشین کنترل فازی یا تضمین هزینه به ندرت بررسی شده‌اند.
- (۶) شبیه‌سازی‌های کاربردی صحت روش پیشنهادی را تأیید می‌کنند و پایداری، سرعت همگرایی و مقاومت در برابر اختلال آن را نسبت به کنترل‌کننده‌های فازی و تضمین هزینه متداول نشان می‌دهند.

این مقاله در ادامه به شرح زیر سازمان‌دهی شده است. در بخش ۲، تعاریف لازم از حساب مرتبه کسری و مقدمات مدل‌سازی T-S فازی برای سیستم‌های غیرخطی ارائه شده است. تشریح سیستم مرتبه کسری مورد نظر و همچنین طراحی کنترل‌کننده فازی مرکب با تضمین هزینه GC-FGC<sup>۱</sup> در بخش ۳ طراحی می‌شود. در بخش ۴، مکانیزم یادگیری تقویتی عمیق SAC برای تنظیم تطبیقی پارامترهای بهره فازی به کار گرفته شده است که باعث افزایش سرعت همگرایی و سازگاری سیستم می‌شود و جزئیات آن ارائه شده است. شبیه‌سازی‌های عددی در بخش ۵ ارائه شده و در نهایت، مقاله با جمع‌بندی و نتیجه‌گیری در بخش ۶ خاتمه می‌یابد.

## ۲. پیش‌نیازها و تشریح سیستم

در این بخش، تعاریف پایه‌ای مرتبط با سیستم‌های مرتبه کسری ارائه شده و معیارهای اساسی مورد استفاده در تحلیل پایداری آن‌ها بررسی می‌گردد. علاوه بر این، مفاهیم کلیدی مدل‌سازی T-S فازی مرور شده‌اند تا امکان نمایش و کنترل سیستم‌های غیرخطی مرتبه کسری از طریق تقریب‌های خطی مبتنی بر قواعد فراهم شود.

۱.۲. مفاهیم پایه و الزامات پایداری سیستم‌های مرتبه کسری. در این بخش، تعاریف اساسی مرتبط با سیستم‌های مرتبه کسری ارائه شده و معیارهای بنیادی مورد استفاده در تحلیل پایداری آن‌ها مورد بررسی قرار می‌گیرد.

<sup>۱</sup>Gain-Composite Fuzzy Guaranteed-Cost

تعریف ۱.۲. انتگرال ریمان-لیوویل مرتبه کسری<sup>۱</sup> از مرتبه  $\alpha$  برای یک تابع  $\Upsilon(t)$  به صورت زیر تعریف می‌شود [۳۰]:

$$(۱.۲) \quad {}_t I_t^\alpha \Upsilon(t) = {}_t D_t^{-\alpha} \Upsilon(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^t \frac{\Upsilon(\theta)}{(t-\theta)^{1-\alpha}} d\theta$$

که در آن،  $t$  لحظه اولیه،  $\alpha$  یک عدد حقیقی مثبت نشان‌دهنده مرتبه انتگرال‌گیری و  $\Gamma(\cdot)$  تابع گاما است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$(۲.۲) \quad \Gamma(\psi) = \int_0^\infty e^{-\theta} \theta^{\psi-1} d\theta.$$

تعریف ۲.۲. مشتق کسری کاپوتو<sup>۲</sup> از مرتبه  $\alpha \in \mathbb{R}^+$  برای یک تابع  $g(t)$  به صورت زیر تعریف می‌شود [۳۰]:

$$(۳.۲) \quad D^\alpha g(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t \frac{g^{(n)}(\theta)}{(t-\theta)^{\alpha-n+1}} d\theta,$$

که در آن  $n = \min\{k \in \mathbb{N} \mid k > \alpha\}$  می‌باشد.

با استفاده از این تعریف، یک سیستم مرتبه کسری با عدم قطعیت و ورودی کنترل را می‌توان به صورت زیر مدل‌سازی کرد:

$$(۴.۲) \quad D^\alpha x(t) = g(x, t, \Delta, u),$$

که در آن  $\alpha \in (0, 1)$  بردار حالات سیستم،  $t$  متغیر زمان،  $\Delta$  عدم قطعیت‌های سیستم و  $u$  ورودی کنترل را نشان می‌دهد.

گزاره ۳.۲. [۳۱] برای  $r - 1 < \alpha < r \in \mathbb{Z}^+$  و  $y(t) \in C^m[0, T]$  داریم:

$$(۵.۲) \quad D^{-\beta} (D^\beta y(t)) = y(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{k!} y^{(k)}(0).$$

با توجه به رابطه فوق، اگر  $\alpha \in (0, 1)$  و  $g(t) \in C^m[0, T]$  باشد، داریم:

$$(۶.۲) \quad D^{-\alpha} (D^\alpha g(t)) = g(t) - g(0).$$

<sup>۱</sup>Riemann-Liouville fractional integral

<sup>۲</sup>Caputo fractional-order derivative

لم ۴.۲. [۳۲] فرض کنید ماتریس‌های حقیقی  $X$ ،  $Y$  و  $\Xi(t)$  با ابعاد مناسب وجود دارند، به طوری که ماتریس  $\Xi(t)$  شرط زیر را برقرار می‌سازد:

$$(۷.۲) \quad \Xi^T(t)\Xi(t) \leq I.$$

با این فرض، نامساوی زیر برقرار است:

$$(۸.۲) \quad \pm X\Xi(t)Y \pm X^T\Xi^T(t)Y^T \leq \varepsilon XX^T + \varepsilon^{-1}Y^TY,$$

که برای هر عدد مثبت  $\varepsilon > 0$  صحیح است.

ملاحظه ۵.۲. فرض کنید  $X$  و  $Y$  ماتریس‌های حقیقی با ابعاد سازگار باشند. در این صورت، نامساوی زیر برقرار است:

$$(۹.۲) \quad X^TY + Y^TX \leq \frac{X^T\Pi X}{\varepsilon} + \varepsilon Y^T\Pi^{-1}Y \leq \frac{X^T\Pi X}{\varepsilon} + \varepsilon \frac{Y^TY}{\lambda_{\min}(\Pi)},$$

که در آن  $\varepsilon > 0$  یک عدد اسکالر مثبت و  $\lambda_{\min}(\cdot)$  کوچک‌ترین مقدار ویژه ماتریس مورد نظر را نشان می‌دهد.

اثبات ملاحظه ۵.۲. برای اثبات، از لم ۴.۲ با یک تبدیل متغیر مناسب استفاده می‌کنیم. بدین منظور تعریف می‌کنیم:

$$(۱۰.۲) \quad \tilde{X} = \pi^{1/2}X, \quad \tilde{Y} = \pi^{-1/2}Y.$$

در این صورت جمله متقارن به شکل زیر بازنویسی می‌شود:

$$(۱۱.۲) \quad X^TY + Y^TX = \tilde{X}^T\tilde{Y} + \tilde{Y}^T\tilde{X}.$$

با اعمال لم ۴.۲ برای هر  $\varepsilon > 0$  داریم:

$$(۱۲.۲) \quad \tilde{X}^T\tilde{Y} + \tilde{Y}^T\tilde{X} \leq \frac{1}{\varepsilon}\tilde{X}^T\tilde{X} + \varepsilon\tilde{Y}^T\tilde{Y}.$$

با جایگذاری  $\tilde{X}$  و  $\tilde{Y}$  نتیجه می‌شود:

$$(۱۳.۲) \quad X^TY + Y^TX \leq \frac{1}{\varepsilon}X^T\pi X + \varepsilon Y^T\pi^{-1}Y,$$

که نامساوی اول را اثبات می‌کند.

از آنجا که  $\pi > 0$  است، معکوس آن دارای کران زیر می‌باشد:

$$(۱۴.۲) \quad \pi^{-1} \leq \frac{1}{\lambda_{\min}(\pi)} I.$$

بنابراین:

$$(۱۵.۲) \quad Y^T \pi^{-1} Y \leq \frac{1}{\lambda_{\min}(\pi)} Y^T Y.$$

با جایگذاری این رابطه در نامساوی قبل، نتیجه نهایی حاصل می‌شود و اثبات کامل می‌گردد. □

**قضیه ۶.۲.** سیستم غیرخودگردان مرتبه کسری زیر را در نظر بگیرید [۳۳]:

$$(۱۶.۲) \quad D^\alpha x(t) = g(x, t),$$

که در آن  $x = 0$  نقطه تعادل است، تابع  $g(x, t)$  شرط لیبشیتس با ثابت  $l > 0$  را برقرار می‌کند و مرتبه  $\alpha \in [0, 1]$  است. فرض کنید یک تابع لایپانوف  $V(t, x(t))$  همراه با توابع کلاس  $\Upsilon_i, K$  برای  $i = 1, 2, 3$  وجود دارد به طوری که:

$$(۱۷.۲) \quad \Upsilon_1(\|x\|) \leq V(x(t), t) \leq \Upsilon_2(\|x\|),$$

$$(۱۸.۲) \quad D^\alpha V(x(t), t) \leq -\Upsilon_3(\|x\|).$$

در این صورت، نقطه تعادل  $x = 0$  سیستم (۱۶.۲) به صورت نامتناهی پایدار است.

## ۲.۲. مدل T-S فازی تعمیم یافته سیستم‌های مرتبه کسری. در این بخش، مسئله کنترل

برای سیستم‌های مرتبه کسری نامطمئن که با مدل‌های T-S فازی نمایش داده شده‌اند، فرمول‌بندی می‌شود. فرض کنید سیستم غیرخطی و غیرخودگردان توصیف شده در معادله (۴.۲)، که شامل عدم قطعیت‌ها و ورودی‌های کنترلی است، را بتوان با استفاده از یک مدل T-S فازی مرتبه کسری تقریب زد. این مدل به صورت زیر بیان می‌شود:

قاعده مدل  $i$  ام: اگر  $z_1(t)$  در  $M_{i1}$ ، و  $z_2(t)$  در  $M_{i2}$ ، ...، و  $z_p(t)$  در  $M_{ip}$  باشد، آنگاه

$$(۱۹.۲) \quad D^\alpha x_i(t) = (A_i + \Delta A_i)x(t) + B_i u(t), \quad i = 1, \dots, r,$$

که در آن  $M_{ij}$  برای  $j = 1, \dots, p$ ، مجموعه‌های فازی مربوط به متغیرهای پیش شرط را نشان می‌دهد،  $r$  تعداد کل قواعد فازی اگر-آنگاه<sup>۱</sup> را مشخص می‌کند و  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  بردار

<sup>۱</sup>IF-THEN

حالات سیستم است. ماتریس‌های  $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$  دینامیک محلی سیستم را تعریف می‌کنند و  $z_1(t), \dots, z_p(t)$  متغیرهای پیش شرط مدل هستند. پارامتر  $\alpha \in (0, 1)$  نشان‌دهنده مرتبه کسری سیستم می‌باشد.

خروجی کلی مدل T-S فازی تعمیم‌یافته از طریق مکانیزم استنتاج فازی به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$(20.2) \quad D^\alpha x(t) = \frac{\sum_{i=1}^r w_i(z(t)) \cdot \{(A_i + \Delta A_i)x(t) + B_i u(t)\}}{\sum_{i=1}^r w_i(z(t))}.$$

در این رابطه، بردار  $z(t) = (z_1(t), \dots, z_p(t))$  شامل متغیرهای مربوطه است و تابع وزن‌دهی برای قاعده  $i$ ام به صورت

$$(21.2) \quad w_i(z(t)) = \prod_{j=1}^p M_{ij}(z_j(t))$$

تعریف شده است، که در آن  $M_{ij}(z_j(t))$  درجه عضویت  $z_j(t)$  در مجموعه فازی  $M_{ij}$  را نشان می‌دهد. این توابع عضویت باید شرایط زیر را برآورده کنند:

$$(22.2) \quad \sum_{i=1}^r w_i(z(t)) > 0, \quad w_i(z(t)) \geq 0.$$

وزن‌های نرمال شده به صورت

$$(23.2) \quad h_i(z(t)) = \frac{w_i(z(t))}{\sum_{i=1}^r w_i(z(t))}$$

تعریف می‌شوند، که در نتیجه خروجی سیستم را می‌توان به شکل زیر بازنویسی کرد:

$$(24.2) \quad D^\alpha x(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) \cdot \{(A_i + \Delta A_i)x(t) + B_i u(t)\}.$$

در اینجا، اگر وزن‌های نرمال شده  $h_i(z(t))$  تعریف شوند، آنگاه شرایط زیر برقرار است:

$$(25.2) \quad \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) = 1, \quad h_i(z(t)) \geq 0.$$

عبارت‌های  $h_i(z(t))$  نشان‌دهنده عوامل وزن‌دهی نرمال شده مرتبط با هر قاعده «اگر ... آنگاه ...» هستند.

### ۳. تشریح سیستم و بیان مسأله

این بخش به طراحی یک چارچوب کنترل مقاوم مبتنی بر تکنیک T-S فازی برای سیستم‌های غیرخطی مرتبه کسری با عدم قطعیت می‌پردازد.

۱.۳. تشریح سیستم. سیستم غیرخطی بعدی- $n$  مرتبه کسری زیر را در نظر بگیرید که تحت تأثیر عدم قطعیت‌های مدل و اغتشاشات خارجی قرار دارد:

$$(۱.۳) \quad D^\alpha x_i(t) = (A_i + \Delta A_i)x(t) + B_i u(t),$$

که در آن  $\alpha \in (0, 1)$  مرتبه کسری سیستم را نشان می‌دهد،  $x(t) = [x_1(t), \dots, x_n(t)]^T \in \mathbb{R}^n$  بردار حالات سیستم است،  $\Delta A_i$  عدم قطعیت‌های ناشناخته سیستم را مدل می‌کند،  $B_i$  تابع بهره ورودی سیستم است و  $u(t) = [u_1(t), \dots, u_n(t)]^T \in \mathbb{R}^n$  ورودی کنترل سیستم است.

با فرض اینکه سیستم غیرخطی غیر گردان (۱.۳) را بتوان توسط یک مدل T-S فازی مرتبه کسری نمایش داد، قاعده مدل  $i$ ام به صورت زیر بیان می‌شود:

اگر  $z_1(t)$  در مجموعه فازی  $M_{i1}$ ، ...، و  $z_p(t)$  در مجموعه فازی  $M_{ip}$  باشد، آنگاه خروجی سیستم برابر است با:

$$(۲.۳) \quad D^\alpha x_i(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) \cdot \{(A_i + \Delta A_i)x(t) + B_i u(t)\}.$$

در اینجا،  $h_i(z(t))$  وزن نرمال شده مرتبط با هر قاعده «اگر ... آنگاه ...» است و همانند بخش قبل، شرایط نرمال‌سازی و غیر منفی بودن آن برقرار است. در اینجا  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  بردار حالات سیستم غیرخطی است،  $z(t) = [z_1(t), \dots, z_p(t)]^T$  متغیرهای پیش‌شرطی را نشان می‌دهد،  $M_{ij}$  (برای  $i = 1, \dots, r$  و  $j = 1, \dots, p$ ) مجموعه‌های فازی هستند و  $r$  تعداد کل قواعد فازی «اگر ... آنگاه ...» را مشخص می‌کند. ماتریس‌های  $A_i$  و  $B_i$  ابعاد سازگار دارند و  $\Delta A_i$  بیانگر عدم قطعیت‌های ناشناخته پارامترهای سیستم است.

برای دستیابی به نتایج اصلی، ابتدا تابع هزینه متناظر با سیستم (۲.۳) را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$(۳.۳) \quad J = D^{-\alpha} [x^T(s) Q x(s) + u^T(s) R u(s)] ds,$$

که در آن  $Q$  و  $R$  ماتریس‌های متقارن و مثبت معین داده شده هستند.

**تعریف ۱.۳.** برای سیستم T-S فازی توصیف شده در معادله (۳.۳)، اگر ورودی کنترل  $u(t)$  و اسکالر مثبت  $J^*$  وجود داشته باشد به طوری که سیستم حلقه بسته پایدار بوده و تابع هزینه  $J \leq J^*$  را ارضا کند، در این صورت  $J^*$  هزینه تضمین شده نامیده شده و  $u(t)$  به عنوان قانون کنترل با هزینه تضمین شده برای سیستم T-S فازی (۲.۳) شناخته می شود.

بر اساس تابع هزینه (۳.۳)، کنترل فازی با هزینه تضمین شده به شکل زیر تعریف می شود: برای دستیابی به پایدارسازی مجانبی سراسری مبدأ سیستم توصیف شده در معادله (۲.۳)، یک راهبرد کنترل فازی با هزینه تضمین شده مبتنی بر بازخورد حالت به شرح زیر پیشنهاد می شود: قانون کنترل  $j$ : اگر  $z_1(t)$  متعلق به  $M_{j1}$  باشد و ... و  $z_r(t)$  متعلق به  $M_{j,r}$  باشد، آنگاه

$$(۴.۳) \quad u(t) = -K_j L_j x(t)$$

که در آن  $K_j \in \mathbb{R}^{r \times n}$  ماتریس های بهره ترکیبی حالت با ابعاد مناسب هستند. به منظور امکان وزن دهی دینامیکی در ساختار کنترل، ماتریس  $L_j = \text{diag}(L_1^j, \dots, L_r^j)$  تعریف می شود، که در آن  $L_i^j \in \{0, 1\}$  به عنوان عامل مقیاس دهی باینری یا فعال کننده عمل می کند. زمانی که  $L_i^j = 1$ ، مؤلفه مربوطه فعال است و زمانی که  $L_i^j = 0$ ، غیرفعال می شود. بنابراین، قانون کنترل فازی با هزینه تضمین شده و بهره ترکیبی به صورت زیر بیان می شود:

$$(۵.۳) \quad u(t) = - \sum_{j=1}^m h_j(z(t)) L_j K_j x(t), \quad t \geq 0$$

که در آن  $h_j(z(t))$  توابع عضویت نرمال شده متناظر با قواعد فازی هستند. پیش از ارائه قضیه اصلی جهت تعیین بهره های کنترلی  $L_j K_j$ ، یک لم کمکی معرفی می شود.

**لم ۲.۳.** [۳۴]. فرض کنید

$$S = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix}$$

یک ماتریس متقارن باشد، به طوری که  $s_{11} = s_{11}^T$  و  $s_{22} = s_{22}^T$ . در این صورت، دو شرط زیر معادل هستند:

$$(۱) \quad S < 0, \text{ یعنی ماتریس } S \text{ منفی معین است؛}$$

$$(۲) \quad s_{22} < 0 \text{ و}$$

$$s_{11} - s_{12} s_{22}^{-1} s_{12}^T < 0.$$

در ادامه، شرط پایداری مجانبی برای سیستم‌های غیرخطی مدل‌شده با چارچوب T-S فازی ارائه می‌شود.

**قضیه ۳.۳.** سیستم کسری مرتبه تعریف‌شده در رابطه (۲.۳) را در نظر بگیرید. اگر ماتریس متقارن مثبت معین  $\hat{P}$  و ماتریس‌های بهره کنترلی  $\hat{K}_j$  و  $\hat{L}_j$  برای تمام  $j \in \{1, \dots, m\}$  وجود داشته باشند، به طوری که نابرابری ماتریسی خطی زیر برای تمام  $i, j \in \{1, \dots, m\}$  برقرار باشد:

$$(۶.۳) \quad \tilde{\psi}_{ij} = \begin{pmatrix} \hat{W} & \hat{P} & \hat{K}_j^T \hat{L}_j^T \\ * & -Q^{-1} & 0 \\ * & * & -R^{-1} \end{pmatrix} < 0,$$

که در آن  $\hat{W} = A_i \hat{P} + \hat{P} A_i^T + \Delta A_i \hat{P} + \hat{P} \Delta A_i^T - B_i \hat{K}_j \hat{L}_j - \hat{K}_j^T \hat{L}_j^T B_i^T$  است. آنگاه سیستم (۲.۳) در اثر کنترل‌کننده فازی معرفی‌شده در رابطه (۵.۳) به صورت مجانبی پایدار می‌شود. همچنین بهره کنترلی متناظر از رابطه

$$K_j = \hat{K}_j \hat{P}^{-1}$$

به دست می‌آید.

علاوه بر این، تابع هزینه تعریف‌شده در رابطه (۳.۳) دارای کران بالای زیر است:

$$J \leq J^* = x^T(\cdot) P x(\cdot), \quad P = \hat{P}^{-1}.$$

در نتیجه، پایداری سیستم همراه با کران عملکرد تضمین‌شده حاصل شده و یک راهبرد کنترلی مقاوم برای سیستم‌های کسری مرتبه به دست می‌آید.

**اثبات قضیه ۳.۳.** تابع لیاپانوف زیر را در نظر بگیرید:

$$(۷.۳) \quad V(x(t)) = x^T(t) P x(t), \quad P = \hat{P}^{-1} > 0.$$

با استفاده از مشتق کاپوتو و برای  $0 < \alpha < 1$ ، مشتق تابع لیاپانوف در طول مسیره‌های سیستم به صورت زیر است:

$$(۸.۳) \quad D^\alpha V(x(t)) = D^\alpha (x^T P x) \leq 2 x^T(t) P D^\alpha x(t).$$

با جایگذاری دینامیک حلقه بسته سیستم کسری مرتبه T-S فازی (۲.۳) تحت کنترل کننده (۵.۳)، نتیجه می‌گیریم:

$$D^\alpha V(x(t)) \leq \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^m h_i(z(t))h_j(z(t))x^T(t)P(A_i + \Delta A_i - B_i L_j K_j)x(t). \quad (9.3)$$

با تعریف ماتریس متقارن

$$\Phi_{ij} = P(A_i + \Delta A_i - B_i L_j K_j) + (A_i + \Delta A_i - B_i L_j K_j)^T P, \quad (10.3)$$

عامل ۲ ساده می‌شود و مشتق لیاپانوف می‌تواند با  $\Phi_{ij}$  بازنویسی شود:

$$D^\alpha V(x(t)) \leq \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^m h_i h_j x^T(t) \Phi_{ij} x(t). \quad (11.3)$$

اکنون، با در نظر گرفتن تابع هزینه:

$$J = D^{-\alpha} [x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t)], \quad (12.3)$$

و جایگذاری ورودی کنترلی، داریم:

$$u(t) = -L_j K_j x(t) \implies u^T(t)Ru(t) = x^T(t)K_j^T L_j^T R L_j K_j x(t).$$

بنابراین، نامساوی برآورد هزینه به شکل زیر ساخته می‌شود:

$$D^\alpha V(x(t)) + x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t) \leq \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^m h_i h_j x^T(t) (\Phi_{ij} + Q + K_j^T L_j^T R L_j K_j) x(t). \quad (13.3)$$

برای مدیریت عبارت نامطمئن  $\Delta A_i$ ، از ملاحظه ۵.۲ استفاده می‌کنیم:

$$P \Delta A_i + \Delta A_i^T P \leq \frac{1}{\epsilon} P \Pi P + \epsilon \Delta A_i^T \Pi^{-1} \Delta A_i,$$

که با  $\epsilon > 0$  و ماتریس مثبت معین  $\Pi$ ، امکان محدودسازی مربعی عدم قطعیت‌ها را فراهم می‌کند.

با ترکیب این رابطه با نابرابری ماتریسی و به‌کارگیری لم ۵.۲، نتیجه می‌گیریم که شرایط

$$(۱۴.۳) \quad \tilde{\psi}_{ij} = \begin{pmatrix} \hat{W} & \hat{P} & \hat{K}_j^T \hat{L}_j^T \\ * & -Q^{-1} & \cdot \\ * & * & -R^{-1} \end{pmatrix} < \cdot$$

برقرار شده و تضمین می‌کنند که

$$(۱۵.۳) \quad D^\alpha V(x(t)) + x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t) < \cdot.$$

از نامساوی فوق نتیجه می‌شود که  $D^\alpha V(x(t)) < \cdot$  و سیستم حلقه بسته با کنترل‌کننده (۵.۳) به صورت مجانبی پایدار است.

با انتگرال‌گیری کسری از (۱۵.۳) از  $\cdot$  تا  $\infty$ ، داریم:

$$(۱۶.۳) \quad D^{-\alpha} (D^\alpha V(x(t)) + x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t)) < \cdot.$$

با استفاده از رابطه (۶.۲)، نتیجه می‌گیریم:

$$(۱۷.۳) \quad V(x(t)) - V(x(\cdot)) + D^{-\alpha} (x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t)) < \cdot,$$

که به شکل زیر بازنویسی می‌شود:

$$(۱۸.۳) \quad V(x(t)) + D^{-\alpha} (x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t)) < V(x(\cdot)).$$

در نتیجه:

$$(۱۹.۳) \quad D^{-\alpha} (x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t)) < V(x(\cdot)) = x^T(\cdot)Px(\cdot),$$

که نشان می‌دهد سیستم به صورت مجانبی پایدار است و شاخص عملکرد دارای کران بالای

$$J \leq J^* = x^T(\cdot)Px(\cdot)$$

می‌باشد.

در نهایت، بهره کنترلی با

$$K_j = \hat{K}_j \hat{P}^{-1}$$

بازسازی می‌شود، که تضمین می‌کند کنترل‌کننده فازی (۵.۳) سیستم را پایدار کرده و عملکرد

□

تضمین شده را با وجود عدم قطعیت‌ها حفظ می‌کند. □

#### ۴. تنظیم تطبیقی کنترل‌کننده T-S فازی با استفاده از یادگیری عمیق SAC

تاریخچه استفاده از شبکه‌های عصبی نشان می‌دهد که این ابزارها به دلیل توانایی بالا در تقریب توابع پیچیده و یادگیری نگاشت‌های ورودی-خروجی، نقش مهمی در تطبیق کنترل‌کننده ها و سیستم‌های غیرخطی و مرتبه کسری دارند. به‌ویژه، ترکیب شبکه‌های عصبی با مدل‌های T-S فازی اثبات شده که می‌تواند دینامیک غیرخطی و نامطمئن سیستم‌های مرتبه کسری را به‌طور مؤثر مدیریت کند [۱۱]. در این پژوهش، از الگوریتم یادگیری تقویتی عمیق SAC برای بهینه‌سازی پارامترهای کنترل‌کننده T-S فازی استفاده شده است، چرا که این الگوریتم امکان به‌روزرسانی پایدار قانون کنترلی، اکتشاف مؤثر و مدیریت پارامترهای کنترل با ابعاد بالا را فراهم می‌کند.

علاوه بر این، تابع پاداش به‌گونه‌ای طراحی شده است که با معیارهای پایدارسازی مبتنی بر لیاپانوف هم‌راستا باشد؛ با حداکثر کردن پاداش، عامل کنترل به‌طور طبیعی خطاهای حالت سیستم را کاهش داده و پایداری حلقه بسته را تضمین می‌کند و در عین حال عملکرد بهینه سیستم حفظ می‌شود.

۱.۴. مفاهیم پایه فرآیند تصمیم‌گیری مارکوف و الگوریتم‌های یادگیری تقویتی. در بسیاری از سناریوهای عملی، عامل کنترلی به تمامی حالت‌های سیستم دسترسی کامل ندارد. این موضوع استفاده از مدل‌سازی مبتنی بر فرآیند تصمیم‌گیری مارکوف را ضروری می‌سازد. فرآیندهای تصمیم‌گیری مارکوف چارچوبی نظام‌مند برای نمایش دینامیک سیستم فراهم می‌کنند و این امکان را به وجود می‌آورند که سیاست کنترلی عامل بر اساس رفتار ذاتی سیستم طراحی و تنظیم شود. بر اساس تعریف، در یک فرآیند تصمیم‌گیری مارکوف فرض می‌شود که حالت آینده محیط تنها به حالت فعلی وابسته است و این وابستگی از خاصیت مارکوف پیروی می‌کند [۳۵]. به‌طور متعارف، یک فرآیند تصمیم‌گیری مارکوف با پنج‌تایی  $(\mathcal{L}, \mathcal{B}, P, \gamma, \mathcal{I})$  مشخص می‌شود که اجزای آن به شرح زیر تعریف می‌گردند:

- $\mathcal{L} \in \mathcal{L}$  نمایانگر مجموعه حالت‌های سیستم یا مشاهدات قابل دسترس عامل است.
- $w \in \mathcal{B}$  مجموعه اعمال یا کنش‌های کنترلی در دسترس عامل را نشان می‌دهد.
- تابع انتقال  $(0, 1)$   $P : \mathcal{L} \times \mathcal{B} \times \mathcal{L} \rightarrow [0, 1]$  احتمال انتقال سیستم از مشاهده فعلی  $\mathcal{L}_t$  به مشاهده بعدی  $\mathcal{L}_{t+1}$  را، در صورت اعمال کنش  $w_t$ ، تعیین می‌کند.

- تابع پاداش  $\mathcal{J} \in \mathcal{L} \times \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}$  بازخورد عددی محیط را در پاسخ به کنش  $b_t$  اتخاذشده توسط عامل تولید می‌نماید.
- تاریخچه  $h_t = (\varphi_0, b_1, \dots, b_{t-1}, \varphi_t)$  شامل توالی کامل مشاهدات و اعمال کنترلی انجام‌شده تا زمان  $t$  بوده و اطلاعات انباشته تعامل عامل با محیط را حفظ می‌کند.

در هر گام زمانی، عامل یادگیری تقویتی بر اساس مشاهده فعلی  $\varphi_t$  با محیط تعامل می‌کند و پاداش  $\mathcal{J}_t$  را دریافت می‌نماید. برای تعیین کنش بعدی، از یک سیاست  $\phi(w|\varphi)$  استفاده می‌شود که رفتار تصمیم‌گیری عامل را هدایت می‌کند. در مسائل یادگیری تقویتی، هدف عامل حداکثر کردن مجموع پاداش‌های تخفیف‌یافته انباشته است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$(۱.۴) \quad G_t = \mathcal{J}_{t+1} + \gamma \mathcal{J}_{t+2} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma^k \mathcal{J}_{t+k+1}$$

برای تحقق این هدف، دو تابع کلیدی معرفی می‌شوند: تابع ارزش حالت  $V_\phi(\varphi)$  و تابع ارزش حالت-کنش  $Q_\phi(\varphi, b)$  که به ترتیب در روابط زیر تعریف می‌گردند:

$$(۲.۴) \quad V_\phi(\varphi) = \mathbb{E}_\phi [G_t | \mathcal{L}_t = \varphi]$$

$$(۳.۴) \quad Q_\phi(\varphi, w) = \mathbb{E}_\phi [G_t | \mathcal{L}_t = \varphi, \mathcal{B}_t = w]$$

**ملاحظه ۱.۴.** در این مطالعه، چارچوب مارکوف در قالب فرآیند تصمیم‌گیری مارکوف<sup>۱</sup> مربوط به الگوریتم یادگیری تقویتی عمیق SAC مورد استفاده قرار گرفته است. به طور مشخص، فرض مارکوف بیان می‌کند که مشاهده بعدی سیستم تنها به وضعیت فعلی بستگی دارد، که این یک ویژگی استاندارد و اساسی در یادگیری تقویتی است. این چارچوب به الگوریتم SAC امکان می‌دهد تا پارامترهای کنترل‌کننده T-S فازی را به صورت تطبیقی بر اساس وضعیت‌های مشاهده‌شده و پاداش‌های انباشته‌شده بهینه کند. لازم به ذکر است که هدف این مطالعه، استخراج شرایط لازم و کافی پایداری مارکوفی به معنای کلاسیک کنترل نیست؛ بلکه مدل‌سازی مارکوف صرفاً برای ساختاردهی مسئله یادگیری تقویتی به کار رفته است تا کنترل‌کننده تطبیقی مبتنی بر SAC بتواند همگرا شود و عملکرد حلقه بسته سیستم را بهبود بخشد. این موضوع، در بخش ۱.۴ مقاله بیان گشته و هدف و دامنه استفاده از مدل‌سازی مارکوف به طور صریح توضیح داده شده است.

<sup>۱</sup>Markov Decision Process, MDP

۲.۴. روش **Soft-Actor-Critic** الگوریتم (SAC) یک تکنیک یادگیری تقویتی است که به منظور کنترل محیط‌های پیچیده و با ابعاد بالا با بهره‌گیری از قدرت نمایش شبکه‌های عصبی عمیق (DNN) طراحی شده است. ویژگی کلیدی، SAC گنجاندن منظم‌سازی انتروپی است که سیاست عامل را ترغیب می‌کند تا بین حداکثر کردن پاداش انباشته و حفظ تصادفیت کافی در انتخاب کنش‌ها تعادل برقرار کند. این چارچوب مبتنی بر انتروپی از همگرایی زود هنگام به راه‌حل‌های فرعی جلوگیری کرده و رفتار اکتشافی عامل را بهبود می‌بخشد. فرآیند یادگیری در SAC شامل بهینه‌سازی همزمان سیگنال پاداش و مؤلفه انتروپی است [۳۳، ۳۴].

$$(۴.۴) \quad J(\phi) = \sum_{t=0}^T \mathbb{E}_{(\phi_t, w_t) \sim \rho_\pi} \left[ \mathfrak{J}_t(\phi_t, w_t) + \beta H(\phi(\cdot | \phi_t)) \right]$$

در رابطه فوق،  $\beta$  یک ابرپارامتر قابل تنظیم است که میزان تأثیر انتروپی در هدف یادگیری را کنترل می‌کند. چارچوب SAC شامل سه شبکه عصبی عمیق اصلی است: شبکه  $Q$ ، شبکه ارزش‌گذاری و شبکه سیاست‌گذاری. همچنین، یک حافظه بازپخش برای نگهداری انتقال‌های گذشته حالت‌ها استفاده می‌شود که در طول آموزش نمونه‌برداری شده و ثبات یادگیری را افزایش می‌دهد.

شبکه  $Q$  با پارامترهای  $\theta$  با کمیته‌سازی نسخه نرم معادله زیر به‌روزرسانی می‌شود:

$$(۵.۴) \quad J_Q(\theta) = \mathbb{E}_{(\phi_t, w_t) \sim D} \left[ \frac{1}{\gamma} (Q_\theta(\phi_t, w_t) - \hat{Q}(\phi_t, w_t))^2 \right]$$

که در آن داریم:

$$(۶.۴) \quad \hat{Q}(\phi_t, w_t) = \mathfrak{J}(\phi_t, w_t) + \gamma \mathbb{E}_{\phi_{t+1} \sim \rho_\pi} [\bar{V}_\emptyset(\phi_{t+1})]$$

در این رابطه،  $\bar{V}_\emptyset$  خروجی شبکه ارزش با پارامتر  $\emptyset$  است که برای محاسبه گرادینان‌ها در طول آموزش استفاده می‌شود.

تابع ارزش  $V$  به صورت زیر تعریف می‌شود:

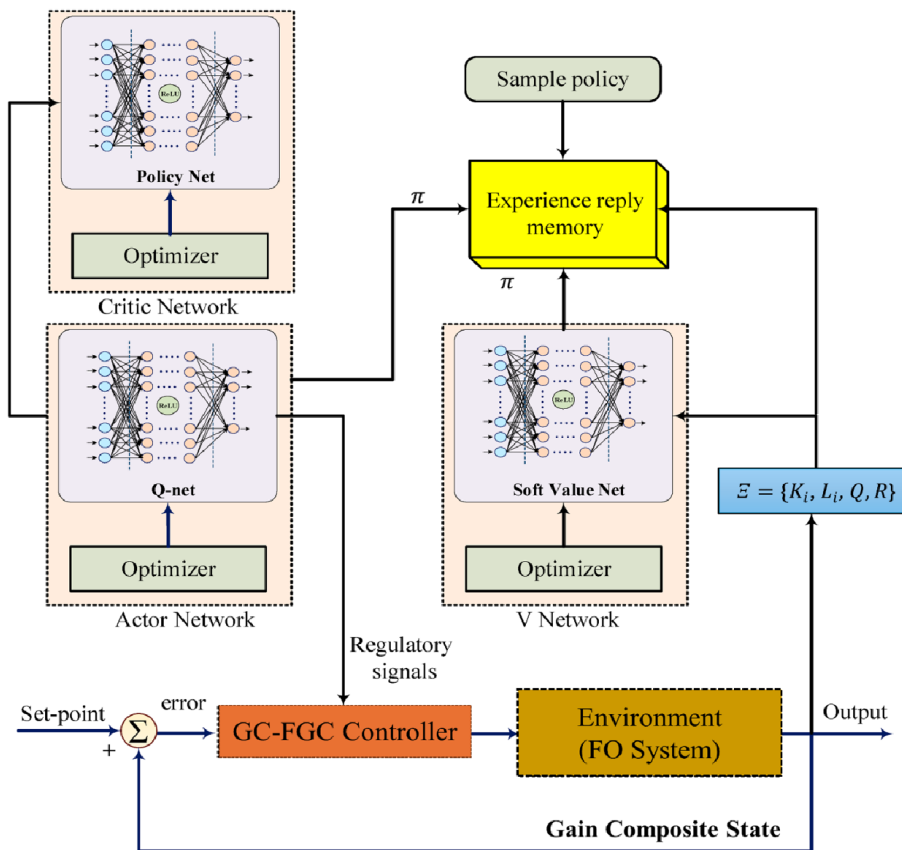
$$(۷.۴) \quad J_V(\emptyset) = \mathbb{E}_{\phi_t \sim D} \left[ \frac{1}{\gamma} (V_\emptyset(\phi_t) - \mathbb{E}_{\phi_t \sim \pi} [Q_\theta(w_t, \phi_t)] - \log \phi(w_t | \phi_t))^2 \right]$$

در این رابطه،  $D$  توزیع داده استخراج شده از حافظه بازپخش تجربه است.

شبکه سیاست با پارامترهای  $\pi$  با هدف زیر بهینه‌سازی می‌شود:

$$(۸.۴) \quad J_{\phi}(\varpi) = \mathbb{E}_{\varphi_t \sim D} \left[ D_{KL}(\phi(\cdot | \varphi_t) \parallel \frac{\exp(Q_{\theta}(\varphi_t, \cdot))}{Z_{\theta}(\varphi_t)}) \right]$$

علاوه بر این، الگوریتم SAC از دو شبکه کمکی استفاده می‌کند: یک شبکه هدف  $Q$  و یک شبکه هدف سیاست. این شبکه‌ها با استفاده از روش‌های به‌روزرسانی نرم به تدریج از شبکه‌های اصلی متناظر خود به‌روزرسانی می‌شوند.



شکل ۱: ساختار کلی کنترل کننده فازی (۵.۳) که با الگوریتم یادگیری عمیق SAC ترکیب شده است.

۳.۴. طراحی پارامترهای کنترل‌کننده فازی با استفاده از SAC عملکرد کنترل‌کننده Fuzzy T-S به شدت به انتخاب پارامترهای داخلی آن وابسته است. به منظور بهبود این وضعیت، روش پیشنهادی از الگوریتم SAC برای تنظیم پویا ضرایب درون قانون کنترل فازی استفاده می‌کند. در این چارچوب، شبکه Actor سیگنال‌های تنظیمی تطبیقی تولید می‌کند که به صورت مداوم پارامترهای کنترل را اصلاح کرده و بدین ترتیب عملکرد سیستم را بهبود می‌بخشد.

مجموعه پارامترهای بهره ترکیبی که باید بهینه شوند به صورت  $\Xi = \{K_i, L_i, Q, R\}$  تعریف می‌شود، که توسط مکانیزم یادگیری تقویتی عمیق SAC به صورت تطبیقی تنظیم می‌شوند. ساختار کلی سیستم کنترل T-S فازی تقویت‌شده با SAC در شکل ۱ نشان داده شده است.

با بهره‌گیری از توانمندی‌های آموزش شبکه‌های عصبی عمیق، هر دو شبکه Actor و Critic برای حداکثرسازی پاداش تجمعی بهینه‌سازی می‌شوند. تابع پاداش به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$(۹.۴) \quad r = \frac{1}{|x|}$$

تابع پاداش در رابطه فوق به گونه‌ای انتخاب شده است که به طور مستقیم کاهش انحراف حالت‌های سیستم را تشویق می‌کند. با تخصیص پاداش بالاتر به مقادیر کوچک‌تر  $|x|$ ، الگوریتم SAC عامل کنترل را ترغیب می‌کند تا خطای ردیابی را کاهش داده و سیستم را به‌طور مؤثر تثبیت نماید. این طراحی تضمین می‌کند که فرآیند یادگیری بر دستیابی به تنظیم دقیق حالت‌ها متمرکز شده و در عین حال عملکرد تضمین‌شده حفظ شود.

شبکه‌های عصبی عمیق مورد استفاده در چارچوب SAC — شامل شبکه  $Q$ ، شبکه ارزش‌گذاری، شبکه سیاست‌گذاری و شبکه‌های هدف متناظر آن‌ها — دارای دو لایه مخفی با ۲۰۰ و ۳۰۰ نورون هستند. توابع فعال‌سازی ReLU در این لایه‌ها استفاده شده است. تمامی شبکه‌ها با استفاده از الگوریتم بهینه‌سازی ADAM آموزش داده می‌شوند. تنظیمات دقیق ابرپارامترها برای مدل SAC Deep در جدول ۱ خلاصه شده است.

ملاحظه ۲.۴. در این پژوهش، تابع پاداش مبتنی بر SAC در چارچوب یادگیری تقویتی به‌گونه‌ای طراحی شده است که هم‌راستا با معیار پایدارسازی مبتنی بر تابع لیاپانوف باشد. به بیان دیگر، با حداکثر کردن پاداش، عامل کنترل به طور طبیعی تلاش می‌کند تا خطاهای حالت سیستم را کاهش دهد و پایداری حلقه بسته را تضمین کند. این طراحی باعث می‌شود

جدول ۱: تنظیمات پارامترهای کنترل‌کننده مبتنی بر SAC

مقدار	پارامتر	مقدار	پارامتر
۹۸/۰	عامل تنزیل (۶)	۱۰ <sup>-۳</sup>	نرخ یادگیری شبکه بازیگر
ReLU	تابع فعال‌سازی	۱۰ <sup>-۴</sup>	نرخ یادگیری شبکه منتقد
۲ <sup>۸</sup>	اندازه بسته (Batch-Size)	۵ × ۱۰ <sup>-۳</sup>	ضریب به‌روزرسانی نرم (هدف)
۲ <sup>۶</sup>	اندازه مینی‌بسته (Mini-batch)	۲	تعداد لایه‌های پنهان در هر شبکه
Adam	بهینه‌ساز	۲۰۰ × ۳۰۰	تعداد نوروها در لایه پنهان اول

که بهینه‌سازی عملکرد سیستم و تضمین پایداری همزمان برقرار شود، بدون اینکه نیازی به دانش مستقیم از پارامترهای سیستم باشد.

**ملاحظه ۳.۴** (تحلیل پیچیدگی محاسباتی). کنترل‌کننده فازی مرکب با تضمین هزینه پیشنهادی، همراه با به‌روزرسانی پارامترهای تطبیقی مبتنی بر الگوریتم یادگیری تقویتی، SAC شامل مراحل محاسباتی اضافی است. با این حال، بار محاسباتی به دقت مدیریت شده است: تعداد نامعادلات ماتریسی خطی که باید حل شود، محدود به تعداد قواعد فازی بوده و با افزایش ابعاد سیستم به شکل قابل توجهی افزایش نمی‌یابد. همچنین، به‌روزرسانی‌های پارامترهای کنترل‌کننده توسط الگوریتم SAC به صورت آنلاین و با نرخ مناسب انجام می‌شود که محاسبات کلی را در مقایسه با بازمحاسبه کامل پارامترها در هر گام زمانی کاهش می‌دهد. بنابراین، چارچوب پیشنهادی از نظر عملیاتی قابل اجرا و از نظر محاسباتی مناسب می‌باشد.

## ۵. شبیه‌سازی و تحلیل عملکرد کنترل TñS فازی پیشنهادی

در اینجا، به‌منظور ارزیابی کارایی و امکان‌پذیری پیاده‌سازی عملی روش کنترلی T-S فازی پیشنهادی، دو مطالعه‌ی موردی بر روی سیستم‌های آشوبی با مرتبه‌ی کسری ارائه می‌شود. در سناریوی اول، مسئله‌ی کنترل یک سیستم مرتبه‌ی کسری گنسویو-تسی (FOGT)<sup>۱</sup> با رفتار آشوبناک مورد بررسی قرار می‌گیرد. در سناریوی دوم، به‌منظور اعتبارسنجی بیشتر عملکرد کنترل‌کننده‌ی پیشنهادی، تنظیم و پایدارسازی یک سیستم مرتبه کسری موتور سنکرون مغناطیس دائم اصلاح‌شده (FOPMSM)<sup>۲</sup> مطالعه می‌شود. شبیه‌سازی‌های عددی با استفاده

<sup>۱</sup>Fractional-order Genesio-Tesi

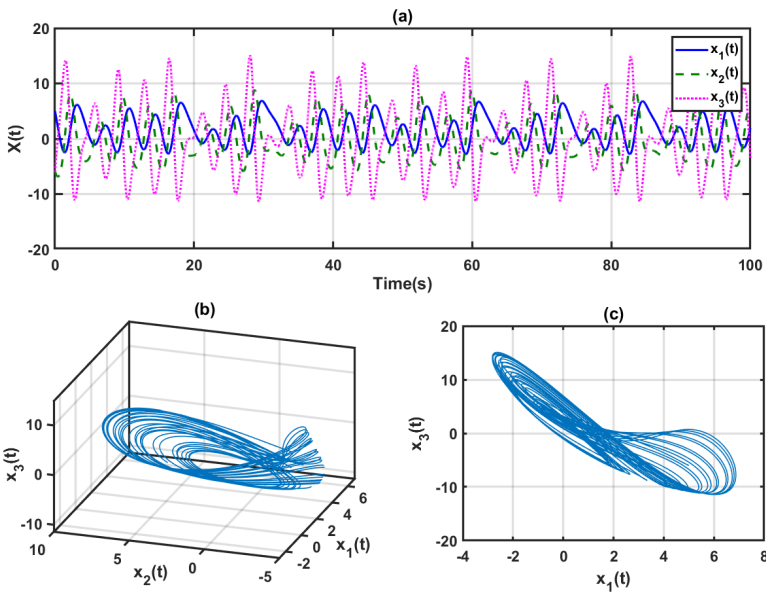
<sup>۲</sup>Fractional-Order Permanent Magnet Synchronous Motor

از الگوریتمی نوین که اخیراً در مراجع [۳۶، ۳۷] معرفی شده است انجام شده و گام زمانی ثابت  $h = 0.001$  برای تمامی شبیه‌سازی‌ها در نظر گرفته شده است.

۱.۵. سناریو ۱. در این بخش، اثربخشی کنترل پیشنهادی T-S فازی با استفاده از پایدارسازی سیستم آشوبناک مرتبه کسری FOGT نشان داده می‌شود. این سیستم برای  $\alpha = 0.94$  رفتار آشوبناک دارد. دینامیک این سیستم به صورت زیر معرفی شده است [۳۸]:

$$(1.5) \quad \begin{cases} D^\alpha x_1(t) = x_2(t) \\ D^\alpha x_2(t) = x_3(t) \\ D^\alpha x_3(t) = -6x_1(t) - 2.92x_2(t) - x_3(t) + x_1^2(t) \end{cases}$$

شکل ۲ رفتار سیستم (۱.۵) را برای  $\alpha = 0.94$  نشان می‌دهد. با در نظر گرفتن  $x_1 \in$



شکل ۲: رفتار سیستم (۱.۵) برای  $\alpha = 0.94$

$(-d, d)$  و  $d = 20$ ، توابع عضویت مدل فازی برای FOGT مطابق با معادله (۱.۵) به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$(۲.۵) \quad M_1(x_1(t)) = ۰.۵ \left( ۱ + \frac{x_1(t)}{۲.۰} \right), \quad M_2(x_1(t)) = ۰.۵ \left( ۱ - \frac{x_1(t)}{۲.۰} \right)$$

بنابراین، دینامیک فازی سیستم به صورت زیر به دست می‌آید:

• قانون اول: اگر  $x_1(t)$  در  $M_1(x(t))$  باشد، آنگاه

$$(۳.۵) \quad D^\alpha x(t) = (A_1 + \Delta A_1)x(t) + B_1 u(t)$$

• قانون دوم: اگر  $x_1(t)$  در  $M_2(x(t))$  باشد، آنگاه

$$(۴.۵) \quad D^\alpha x(t) = (A_2 + \Delta A_2)x(t) + B_2 u(t)$$

که در آن

$$x(t) = [x_1(t), x_2(t), x_3(t)]^T, \quad u(t) = [u_1(t), u_2(t), u_3(t)]^T$$

و  $A_1$  و  $A_2$  پارامترهای ناشناخته سیستم هستند. همچنین  $\Delta A_1$  و  $\Delta A_2$  عدم قطعیت‌های سیستم را نشان می‌دهند که به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$A_1 = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \\ ۲.۰ & -۲.۹۲ & -۱ \end{bmatrix}, \quad \Delta A_1 = \begin{bmatrix} ۰.۱ \cos(۳t) & ۰ & ۰.۰۵ \sin(t) \\ ۰.۱۵ \cos(t) & ۰.۱ \cos(۳t) & ۰ \\ -۰.۱ \sin(t) & ۰ & -۰.۱۵ \sin(۲t) \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \\ -۲.۰ & -۲.۹۲ & -۱ \end{bmatrix}, \quad \Delta A_2 = \begin{bmatrix} ۰.۱ \cos(۳t) & ۰ & -۰.۰۵ \sin(t) \\ ۰.۱۵ \cos(t) & ۰.۱ \cos(۳t) & ۰ \\ ۰.۱ \sin(t) & ۰ & -۰.۱۵ \sin(۲t) \end{bmatrix}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} -۰.۰۹۶۵ & ۰.۱۵۷ & ۰.۰۱۴۲ \\ ۰.۰۹۷۱ & ۰.۰۴۸۵ & ۰.۰۴۲۲ \\ ۰.۱۱۰ & -۰.۰۸ & ۰.۰۹۱۶ \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} ۰.۱۲۶۵ & -۰.۱۵۷ & ۰.۰۱۴۲ \\ ۰.۰۹۵ & ۰.۱۵۵ & ۰.۱۴۲۲ \\ ۰.۰۸۱ & ۰.۱۸ & -۰.۰۹۱۶ \end{bmatrix}$$

همچنین

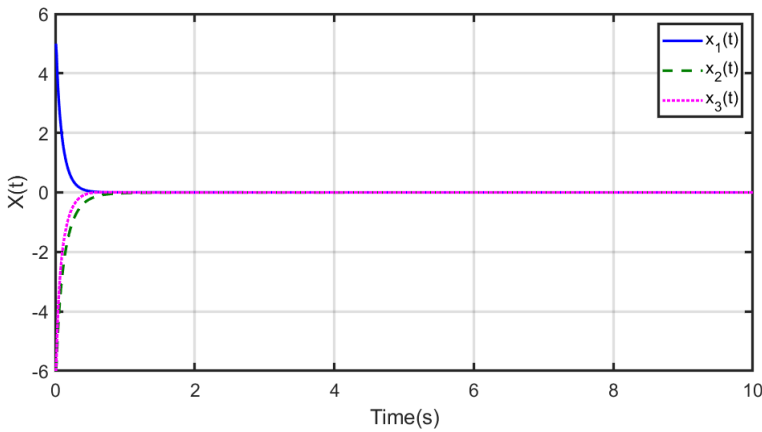
$$(۵.۵) \quad h_1(z(t)) = M_1(z(t)) \times N_1(z(t)), \quad h_2(z(t)) = M_2(z(t)) \times N_2(z(t))$$

که  $N_1(z(t)) = N_2(z(t)) = ۱$  است.

با استفاده از قضیه ۳.۳، مقادیر بهره کنترل انتخاب شدند:  $K = [۲/۵۶۸, ۳/۲۱۹, ۴/۳۴]$  و  $L = [۴/۱۱۷, ۲/۲۱۷, ۳/۵۲۴]$  همچنین، برای تابع هزینه  $J$  ماتریس‌های زیر در نظر گرفته شدند:

$$Q = \begin{bmatrix} ۰/۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰/۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰/۱ \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} ۰/۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰/۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰/۱ \end{bmatrix}.$$

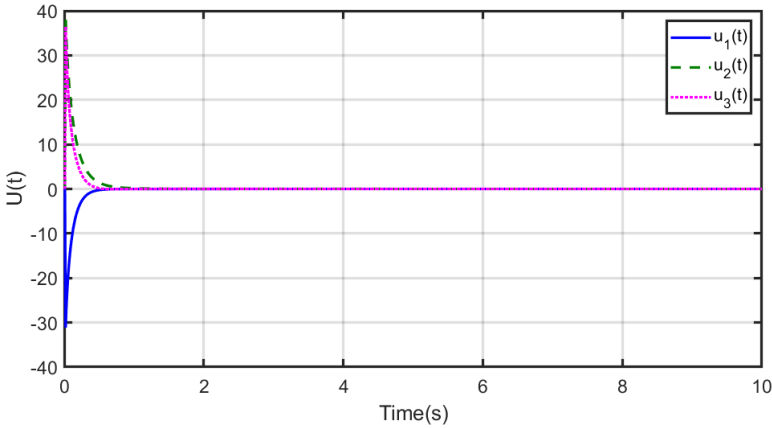
مقادیر اولیه سیستم به صورت  $x_1(0) = -۵$ ،  $x_2(0) = ۵$  و  $x_3(0) = ۲$  انتخاب شدند.



شکل ۳: مسیرهای حالت سیستم (۱.۵) پس از اعمال کنترل کننده فازی (۵.۳) برای  $\alpha = ۰/۹۴$

شکل ۳ مسیر حالت کنترل شده سیستم (۱.۵) را پس از اعمال کنترل مقاوم نشان می‌دهد. همان‌طور که مشاهده می‌شود، تمامی متغیرهای حالت به سمت مقدار تعادلی خود همگرا شده و نوسانات اولیه به سرعت کاهش می‌یابند، که این امر پایدارسازی کامل سیستم را تأیید می‌کند. این شکل نشان‌دهنده اثربخشی قانون کنترل پیشنهادی در سرکوب رفتار ناپایدار و دستیابی به حالت پایدار است.

شکل ۴ تاریخچه زمانی سیگنال کنترل  $u(t)$  را نمایش می‌دهد. همان‌طور که دیده می‌شود، مقدار سیگنال کنترل در ابتدا برای مقابله با عدم قطعیت‌ها و نوسانات سیستم افزایش می‌یابد، اما به تدریج کاهش یافته و در طول زمان به سمت صفر همگرا می‌شود. این رفتار نشان می‌دهد



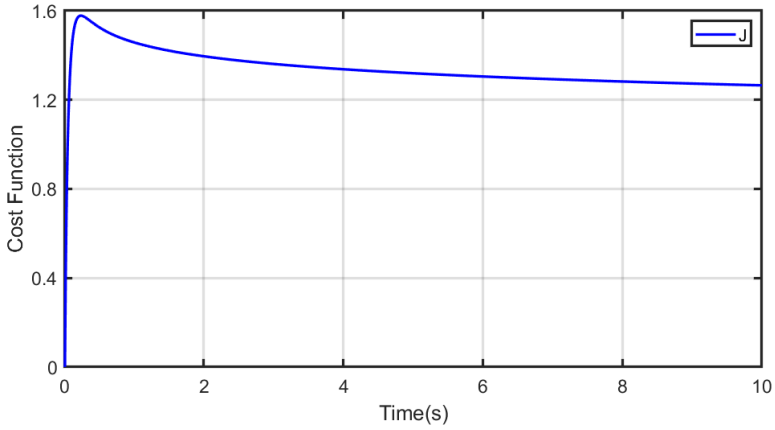
شکل ۴: مسیر های کنترل کننده فازی (۵.۳) به ازای  $\alpha = ۰/۹۴$  برای پایدارسازی سیستم (۱.۵)

که کنترل اعمال شده نه تنها سیستم را پایدار می‌کند، بلکه از اعمال نیروی اضافی و کنترل بیش از حد نیز جلوگیری می‌کند و محدودیت‌های عملیاتی را رعایت می‌کند. شکل ۵ نیز تاریخچه زمانی تابع هزینه  $J(t)$ ، کنترل‌کننده را نشان می‌دهد. کاهش پیوسته مقدار  $J$  در طول زمان مؤید این است که استراتژی کنترل انتخاب شده بهینه بوده و انرژی مصرفی یا هزینه اعمال کنترل به حداقل رسیده است. این شکل نشان می‌دهد که کنترل‌کننده قادر است با کمترین هزینه سیستم را به حالت پایدار هدایت کند و عملکرد پایدار و کارآمدی را ارائه دهد.

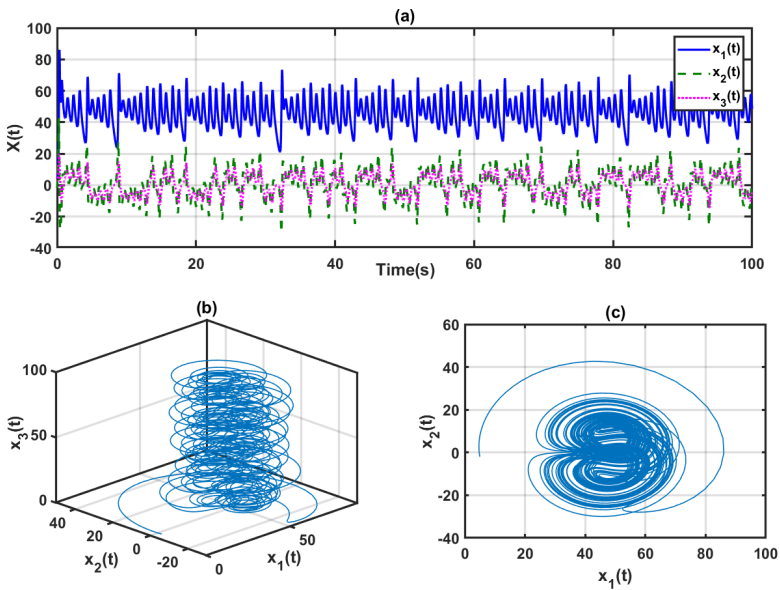
**۲.۵ سناریو ۲.** در این بخش، اثربخشی کنترل پیشنهادی T-S فازی با پایدارسازی سیستم آشوبی موتور سنکرون مغناطیس دائم مرتبه کسری FOPMSM که برای  $\alpha = ۰/۹۷$  رفتار آشوبی دارد، نشان داده می‌شود. دینامیک سیستم به صورت زیر است [۳۹]:

$$(۶.۵) \quad \begin{cases} D^{\alpha_1} x_1(t) = -x_1(t) + x_2(t)x_3(t) \\ D^{\alpha_2} x_2(t) = -x_2(t) - x_1(t)x_3(t) + ۵ \cdot x_3(t) \\ D^{\alpha_3} x_3(t) = ۴(x_2(t) - x_3(t)) \end{cases}$$

شکل ۶ رفتار سیستم (۶.۵) را برای  $\alpha = ۰/۹۷$  نشان می‌دهد. با در نظر گرفتن محدوده‌های



شکل ۵: تابع هزینه تضمین شده (۳.۳) به کار گرفته شده برای پایدارسازی سیستم (۱.۵)



شکل ۶: رفتار سیستم (۶.۵) به ازای  $\alpha = 0.97$

$x_1(t) \in [-d_1, d_1]$  و  $x_2(t) \in [-d_2, d_2]$  که  $d_1 = 20$  و  $d_2 = 25$  هستند، توابع

عضویت فازی سیستم به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$(۷.۵) \quad M_1(x_1(t)) = \frac{1}{\gamma} \left( 1 + \frac{x_1(t)}{d_1} \right), \quad M_2(x_1(t)) = \frac{1}{\gamma} \left( 1 - \frac{x_1(t)}{d_1} \right),$$

$$(۸.۵) \quad N_1(x_2(t)) = \frac{1}{\gamma} \left( 1 + \frac{x_2(t)}{d_2} \right), \quad N_2(x_2(t)) = \frac{1}{\gamma} \left( 1 - \frac{x_2(t)}{d_2} \right)$$

بنابراین، قوانین فازی سیستم به صورت زیر هستند:

- قانون اول: اگر  $x_1(t)$  در  $M_1(x(t))$  باشد، آنگاه

$$D^\alpha x(t) = (A_1 + \Delta A_1)x(t) + B_1 u(t)$$

- قانون دوم: اگر  $x_1(t)$  در  $M_2(x(t))$  باشد، آنگاه

$$D^\alpha x(t) = (A_2 + \Delta A_2)x(t) + B_2 u(t)$$

- قانون سوم: اگر  $x_2(t)$  در  $N_1(x(t))$  باشد، آنگاه

$$D^\alpha x(t) = (A_3 + \Delta A_3)x(t) + B_3 u(t)$$

- قانون چهارم: اگر  $x_2(t)$  در  $N_2(x(t))$  باشد، آنگاه

$$D^\alpha x(t) = (A_4 + \Delta A_4)x(t) + B_4 u(t)$$

که در آن  $u(t) = [u_1(t), u_2(t), u_3(t)]^T$ ،  $x(t) = [x_1(t), x_2(t), x_3(t)]^T$  و  $\Delta A_i$  به ترتیب پارامترهای ناشناخته و عدم قطعیت‌های سیستم هستند که به شرح زیر تعریف

شده‌اند:

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 70 \\ 0 & 4 & -4 \end{bmatrix}, & \Delta A_1 &= \begin{bmatrix} 0.1 \sin(t) & -0.1 \cos(3t) & 0 \\ 0 & -0.05 \cos(2t) & -0.1 \cos(3t) \\ 0.15 \sin(3t) & 0 & -0.15 \sin(2t) \end{bmatrix}, \\
 A_2 &= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 30 \\ 0 & 4 & -4 \end{bmatrix}, & \Delta A_2 &= \begin{bmatrix} 0.1 \sin(t) & -0.1 \cos(3t) & 0 \\ 0 & -0.05 \cos(2t) & -0.1 \cos(3t) \\ 0.15 \sin(3t) & 0 & -0.15 \sin(2t) \end{bmatrix}, \\
 A_3 &= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 25 \\ 0 & -1 & 50 \\ 0 & 4 & -4 \end{bmatrix}, & \Delta A_3 &= \begin{bmatrix} 0.1 \sin(t) & 0.15 \cos(4t) & 0 \\ 0 & -0.15 \cos(2t) & 0.15 \cos(3t) \\ 0.1 \cos(3t) & 0 & -0.1 \sin(2t) \end{bmatrix}, \\
 A_4 &= \begin{bmatrix} -1 & 0 & -25 \\ 0 & -1 & 50 \\ 0 & 4 & -4 \end{bmatrix}, & \Delta A_4 &= \begin{bmatrix} 0.1 \sin(t) & 0.15 \cos(4t) & 0 \\ 0 & -0.15 \cos(2t) & 0.15 \cos(3t) \\ 0.1 \cos(3t) & 0 & -0.1 \sin(2t) \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

همچنین

$$\begin{aligned}
 B_1 &= \begin{bmatrix} 0.1765 & 0.136 & 0.327 \\ 0.0971 & 0.1485 & 0.022 \\ 0.118 & -0.118 & 0.0219 \end{bmatrix}, & B_2 &= \begin{bmatrix} 0.4765 & 0.157 & 0.3240 \\ 0.1971 & 0.0485 & 0.3222 \\ 0.118 & -0.08 & 0.216 \end{bmatrix}, \\
 B_3 &= \begin{bmatrix} -0.405 & 0.057 & 0.7040 \\ 0.3911 & -0.0480 & 0.377 \\ 0.1110 & 0.022 & 0.316 \end{bmatrix}, & B_4 &= \begin{bmatrix} 0.405 & 0.057 & -0.1040 \\ -0.3911 & 0.1480 & 0.0377 \\ -0.1610 & 0.0247 & 0.416 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

توابع عضویت فازی  $h_i(z(t))$  به شکل زیر به دست می‌آیند:

$$(9.5) \quad h_1(z(t)) = M_1(z(t)) \times N_1(z(t)), \quad h_2(z(t)) = M_1(z(t)) \times N_2(z(t)),$$

$$(10.5) \quad h_3(z(t)) = M_2(z(t)) \times N_1(z(t)), \quad h_4(z(t)) = M_2(z(t)) \times N_2(z(t)).$$

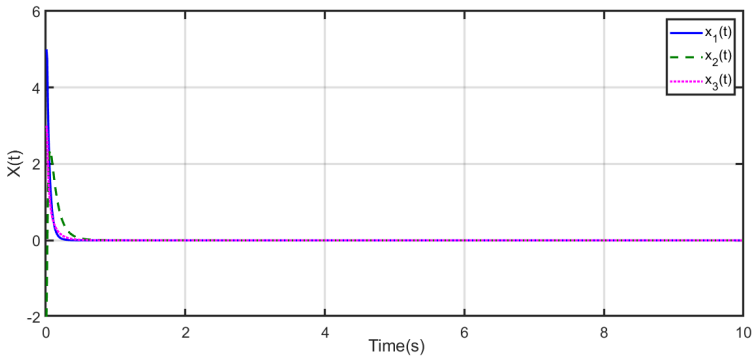
با استفاده از قضیه ۳.۳، بهره‌های کنترل به صورت  $K = [4/941, 3/29, 1/977, 3/855]$

و  $L = [2/694, 2/244, 4/141, 5/897]$  انتخاب شدند. همچنین، برای تابع هزینه  $J$

ماتریس‌های زیر در نظر گرفته شدند:

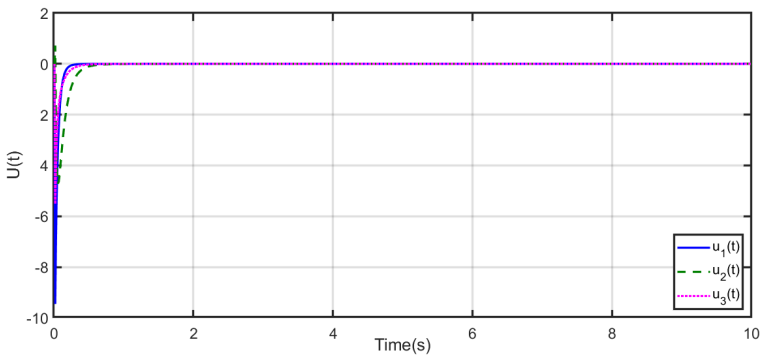
$$Q = \begin{bmatrix} 0.21 & 0 & 0 \\ 0 & 0.11 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} 0.05 & 0 & 0 \\ 0 & 0.47 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 \end{bmatrix}.$$

مقادیر اولیه سیستم به صورت  $x_1(0) = 5$ ،  $x_2(0) = -2$  و  $x_3(0) = 3$  انتخاب



شکل ۷: مسیرهای حالت سیستم (۶.۵) پس از اعمال کنترل کننده فازی (۵.۳) برای  $\alpha =$

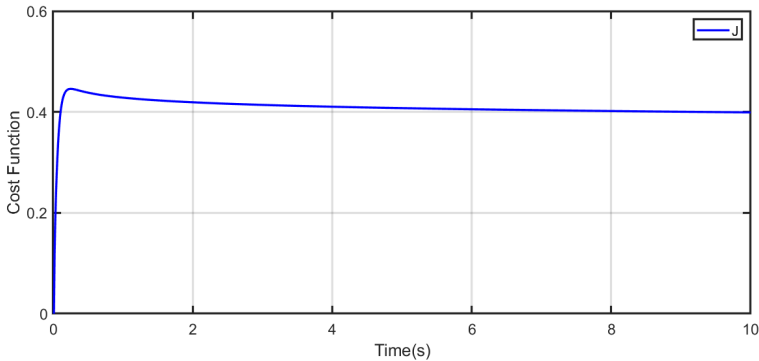
۰/۹۷



شکل ۸: مسیرهای کنترل کننده فازی (۵.۳) به ازای  $\alpha = 0.97$  برای پایدارسازی سیستم

(۶.۵)

شدند. شکل ۷ مسیر حالت کنترل شده FOPMSM را پس از اعمال کنترل مقاوم نشان



شکل ۹: تابع هزینه تضمین شده (۳.۳) به کار گرفته شده برای پایدارسازی سیستم (۶.۵)

می‌دهد. همان‌طور که دیده می‌شود، تمامی متغیرهای حالت به تدریج به سمت مقدار تعادلی خود همگرا می‌شوند و نوسانات اولیه به سرعت کاهش می‌یابند. این رفتار نشان می‌دهد که کنترل مقاوم پیشنهادی قادر است سیستم را به طور کامل پایدار کند و از رفتار ناپایدار جلوگیری نماید.

شکل ۸ تاریخچه زمانی سیگنال کنترل  $u(t)$  را نشان می‌دهد. همان‌طور که مشاهده می‌شود، سیگنال کنترل در ابتدا برای مقابله با عدم قطعیت‌ها و نوسانات سیستم افزایش می‌یابد، اما به تدریج کاهش یافته و به سمت صفر همگرا می‌شود. این امر تأیید می‌کند که کنترل اعمال شده محدود بوده و از اعمال نیروی بیش از حد جلوگیری می‌کند، ضمن اینکه نیازهای عملکردی سیستم را برآورده می‌سازد.

شکل ۹ نیز تاریخچه زمانی تابع هزینه  $J(t)$  کنترل‌کننده را نمایش می‌دهد. کاهش پیوسته مقدار تابع هزینه و همگرایی آن به یک مقدار ثابت، نشان‌دهنده عملکرد بهینه کنترل‌کننده است. این شکل تأیید می‌کند که کنترل مقاوم علاوه بر پایدارسازی سیستم، با کمترین هزینه و انرژی سیستم را به حالت مطلوب هدایت می‌کند و عملکرد کارآمد و مطمئنی ارائه می‌دهد.

اکنون برای بررسی عملکرد روش T-S فازی پیشنهادی با روشهای موجود، به بررسی پایدارسازی سیستم (۶.۵) با استفاده از روش کنترل کننده فازی تطبیقی (AFC)<sup>۱</sup> که در

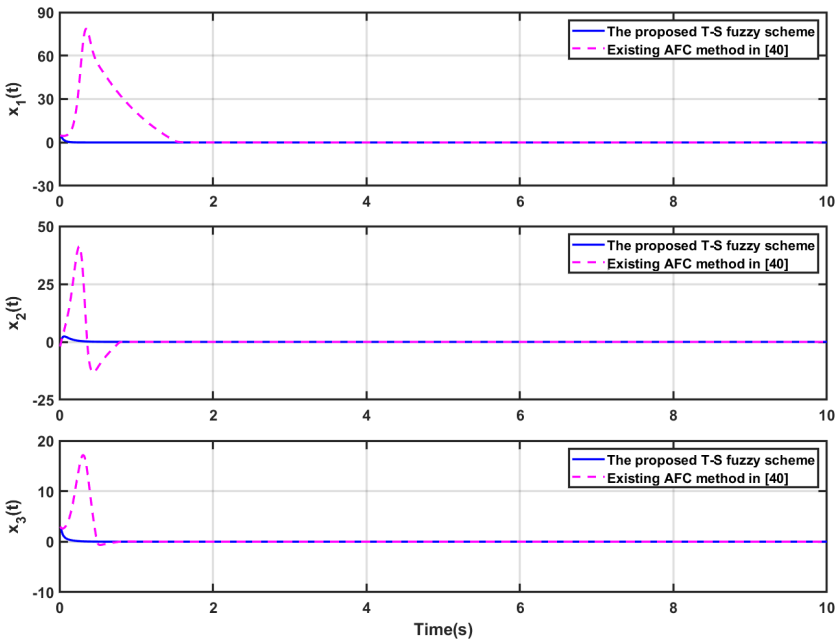
<sup>۱</sup>Adaptive Fuzzy Control

[۴۰] طراحی شده است، می پردازیم. این کنترل کننده بشکل زیر تعریف شده است:

$$(۱۱.۵) \quad u_i(t) = \begin{cases} -(\epsilon + \bar{\xi}_i^T(t)\hat{\zeta}_i(x_i(t)))\text{sgn}(x_i(t)) - \delta, & x_i(t) > 0 \\ 0, & x_i(t) = 0 \\ -(\epsilon - \bar{\xi}_i^T(t)\hat{\zeta}_i(x_i(t)))\text{sgn}(x_i(t)) + \delta, & x_i(t) < 0 \end{cases}$$

$$(۱۲.۵) \quad D^{0.97}\bar{\xi}_i(t) = \nu|x_i(t)|\hat{\zeta}_i(x_i(t)), \quad i = 1, 2, 3.$$

شکل ۱۰ مسیرهای حالت سیستم (۶.۵) را پس از اعمال کنترل کننده‌های (۵.۳) و (۱۱.۵) نشان می دهد. در حالی که هر دو روش به طور مؤثر حالت‌ها را به نقطه تعادل سیستم



شکل ۱۰: مسیرهای حالت سیستم (۶.۵) پس از اعمال کنترل کننده‌های فازی (۵.۳) و کنترل کننده تطبیقی (۱۱.۵) برای  $\alpha = 0.97$ .

بازمی گردانند، واضح است که روش پیشنهادی T-S فازی (۵.۳) نسبت به روش فازی تطبیقی (۱۱.۵) سرعت و سطح بالاتری از همگرایی را ارائه می دهد. به طور آشکار، روش از نظر

همگرایی و پایداری، بر روش برتری دارد. علاوه بر این، روش مقایسه‌شده‌ی (۱۱.۵) برای کنترل سیستم، انرژی زیادی از سیستم مصرف می‌کند و این امر کارایی کنترل را کاهش می‌دهد.

## ۶. بحث و نتیجه‌گیری

این مقاله، یک راهبرد کنترل ترکیبی T-S فازی با تضمین هزینه برای پایدارسازی یک کلاس از سیستم‌های غیرخطی آشوبناک با مرتبه کسری ارائه می‌کند. طراحی کنترل‌کننده بر اساس چارچوب پایداری لیاپانوف مرتبه کسری و با بهره‌گیری از نامساوی‌های ماتریسی خطی (LMI) انجام شد، به طوری که همگرایی حالت‌های سیستم حتی در حضور دینامیک‌های آشوبناک، اشباع ورودی و عدم قطعیت‌های ساختاری تضمین می‌شود. قانون کنترل پیشنهادی بدون وابستگی به دینامیک صریح سیستم طراحی شده و تنها از ویژگی‌های کران‌دار بودن نرْم حالت‌ها بهره می‌گیرد. همچنین، به منظور بهبود عملکرد و تنظیم بهینه پارامترهای کنترل‌کننده، یک سازوکار یادگیری تقویتی عمیق مبتنی بر الگوریتم Soft-Actor-Critic در طراحی ادغام شده است. این روش امکان تنظیم خودکار پارامترهای داخلی کنترل‌کننده فازی را از طریق بهینه‌سازی پارامترهای کنترلی فراهم کرده و تضمین می‌کند که مسیرهای حالت سیستم شرط پایداری و دستیابی به عملکرد موردنظر در زمان محدود را برقرار نماید. در شبیه‌سازی‌های عددی، بررسی دو مطالعه موردی جامع، کارایی و استحکام کنترل‌کننده طراحی شده را تأیید می‌نماید. نتایج نشان می‌دهد که حالت‌ها با همگرایی سریع و پایداری بالا پایدار می‌شوند و پدیده نوسانات ناخواسته به‌طور مؤثر حذف شده است. همچنین، این کنترل‌کننده عملکرد بهتری در حفظ پایداری و مصرف بهینه انرژی نسبت به برخی روش‌های رایج ارائه می‌دهد. این یافته‌ها، کنترل‌کننده را به راهکاری مؤثر و قابل اعتماد برای مدیریت سیستم‌های غیرخطی آشوبناک با مرتبه کسری تبدیل می‌کند. به‌عنوان کارهای آینده، قصد داریم این چارچوب کنترل فازی مبتنی بر یادگیری تقویتی را به سیستم‌های با تاخیر و سیستم‌های تصادفی تعمیم دهیم و همچنین امکان بهبود کارایی محاسباتی و کاهش پیچیدگی شبکه‌های عصبی مورد استفاده را بررسی کنیم. این توسعه‌ها می‌تواند قابلیت کاربرد روش پیشنهادی را در محیط‌های صنعتی و سیستم‌های واقعی افزایش دهد.

## مراجع

- [1] M. Taheri, C. Zhang, Z. R. Berardehi, Y. Chen, M. Roohi (2022) No-chatter model-free sliding mode control for synchronization of chaotic fractional-order systems with application in image encryption. *Multimedia Tools and Applications*, 81, 24167-24197.

- [2] Y. Chen, C. Tang, M. Roohi (2021) Design of a model-free adaptive sliding mode control to synchronize chaotic fractional-order systems with input saturation: an application in secure communications. *Journal of the Franklin Institute*, 358, 8109-8137.
- [3] M. S. Asl, M. Javidi (2019) Numerical evaluation of order six for fractional differential equations: stability and convergency. *Bulletin of the Belgian Mathematical Society-Simon Stevin*, 26, 203-221.
- [4] A. A. Alikhanov, M. S. Asl, C. Huang (2024) Stability analysis of a second-order difference scheme for the time-fractional mixed sub-diffusion and diffusion-wave equation. *Fractional Calculus and Applied Analysis*, 27, 102-123.
- [5] M. S. Asl, M. Javidi (2017) An improved PC scheme for nonlinear fractional differential equations: Error and stability analysis. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 324, 101-117.
- [6] S. Wang, Y. Chen (2024) Neural network control of fractional-order chaotic systems with unknown control direction. *Heliyon*, 10(5), e26870.
- [7] M. Roohi, S. Mirzajani, A. R. Haghghi, A. Basse-O'Connor (2024) Robust stabilization of fractional-order hybrid optical system using a single-input TS-fuzzy sliding mode control strategy with input nonlinearities. *AIMS Mathematics*, 9, 25879-25907.
- [8] R. Shalaby, M. El-Hossainy, B. Abo-Zalam, T. A. Mahmoud (2023) Optimal fractional-order PID controller based on fractional-order actor-critic algorithm. *Neural Computing and Applications*, 35, 2347-2380.
- [9] M. Roohi, S. Mirzajani, A. Basse-O'Connor (2023) A No-Chatter Single-Input Finite-Time PID Sliding Mode Control Technique for Stabilization of a Class of 4D Chaotic Fractional-Order Laser Systems. *Mathematics*, 11, 4463.
- [10] M. T. Vu, S. H. Kim, D. H. Pham, H. L. N. N. Thanh, V. H. Pham, M. Roohi (2025) Adaptive Dynamic Programming-Based Intelligent Finite-Time Flexible SMC for Stabilizing Fractional-Order Four-Wing Chaotic Systems. *Mathematics*, 13, 2078.
- [11] M. Roohi, S. Mirzajani, A. R. Haghghi, A. Basse-O'Connor (2024) Robust Design of Two-Level Non-Integer SMC Based on Deep Soft Actor-Critic for Synchronization of Chaotic Fractional Order Memristive Neural Networks. *Fractal and Fractional*, 8, 548.
- [12] C. Chen, H. Wang, J. Li (2025) Observer-based adaptive control for fractional-order strict-feedback nonlinear systems with state quantisation and input quantisation. *International Journal of Systems Science*, 1-17.
- [13] A. Jajarmi, M. Akbarian, D. Baleanu (2025) Analysis and Backstepping Control of a Novel 4D Fractional Chaotic Oscillator. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*.

- [14] H. Zou, M. Wang (2025) Enhanced Sliding-Mode Control for Tracking Control of Uncertain Fractional-Order Nonlinear Systems Based on Fuzzy Logic Systems. *Applied Sciences*, 15, 4686.
- [15] A. Sharafian, H. Y. Naeem, I. Ullah, A. Ali, L. Qiu, X. Bai (2025) Resilience to deception attacks in consensus tracking control of incommensurate fractional-order power systems via adaptive RBF neural network. *Expert Systems with Applications*, 127763.
- [16] S. Mirzajani, S. S. Moafimadani, M. Roohi (2024) A New Encryption Algorithm Utilizing DNA Subsequence Operations for Color Images. *AppliedMath*, 4, 1382-1403.
- [17] Z. Rasooli Berardehi, C. Zhang, M. Taheri, M. Roohi, M. H. Khooban (2023) Implementation of T-S fuzzy approach for the synchronization and stabilization of non-integer-order complex systems with input saturation at a guaranteed cost. *Transactions of the Institute of Measurement and Control*, 45, 2536-2553.
- [18] X. Fan, Z. Wang (2022) A Fuzzy Lyapunov Function Method to Stability Analysis of Fractional-Order T-S Fuzzy Systems. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 30, 2769-2776.
- [19] Y. Hao, H. Liu, Z. Fang (2024) Observer-Based Adaptive Control for Uncertain Fractional-Order T-S Fuzzy Systems with Output Disturbances. *International Journal of Fuzzy Systems*, 26, 1783-1801.
- [20] Y. Mu, H. Zhang, Z. Gao, J. Zhang (2023) A Fuzzy Lyapunov Function Approach for Fault Estimation of T-S Fuzzy Fractional-Order Systems Based on Unknown Input Observer. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 53, 1246-1255.
- [21] Y. Hao, Z. Fang, H. Liu (2024) Stabilization of delayed fractional-order T-S fuzzy systems with input saturations and system uncertainties. *Asian Journal of Control*, 26, 246-264.
- [22] X. Fan, Z. Wang (2021) Event-triggered integral sliding mode control for fractional order T-S fuzzy systems via a fuzzy error function. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 31, 2491-2508.
- [23] P. Mahmoudabadi, M. Tavakoli-Kakhki (2021) Tracking control with disturbance rejection of non-linear fractional order fuzzy systems: Modified repetitive control approach. *Chaos, Solitons Fractals*, 150, 111142.
- [24] R. Kavikumar, R. Sakthivel, O.-M. Kwon, P. Selvaraj (2022) Robust tracking control design for fractional-order interval type-2 fuzzy systems. *Nonlinear Dynamics*, 107, 3611-3628.
- [25] R. Elavarasi, G. Nagamani (2025) Region bounded observer design for T-S fuzzy systems with nonlinear perturbations. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 151, 108998.
- [26] Y. Hao, Z. Fang, H. Liu (2024) Adaptive T-S fuzzy synchronization for uncertain fractional-order chaotic systems with input saturation and disturbance. *Information Sciences*, 666, 120423.

- [27] K. Liu, W. Tang, Y. Sheng, Z. Zeng, N. R. Pal (2025) Event-Triggered Finite-Time Stabilization of Delayed T–S Fuzzy Systems on Time Scales. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 1-10.
- [28] J. Sun, Y. Yan, S. Yu (2024) Adaptive Fuzzy Control for T-S Fuzzy Fractional Order Nonautonomous Systems Based on Q-learning. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 32, 388-397.
- [29] G. Narayanan, S. Lee, S. Ahn (2025) Optimal fractional fuzzy sliding-mode control for fractional-order fuzzy systems based on actor–critic reinforcement learning scheme. *Journal of the Franklin Institute*, 362, 107804.
- [30] I. Podlubny (1998) *Fractional differential equations: an introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications*. Academic Press.
- [31] C. Li, W. Deng (2007) Remarks on fractional derivatives. *Applied Mathematics and Computation*, 187, 777-784.
- [32] L. Fortuna, M. Frasca, A. Buscarino (2024) *Optimal and Robust Control: Advanced Topics with Matlab*. CRC Press.
- [33] Y. Li, Y. Chen, I. Podlubny (2009) Mittag–Leffler stability of fractional order nonlinear dynamic systems. *Automatica*, 45, 1965-1969.
- [34] S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron, V. Balakrishnan (1994) *Linear matrix inequalities in system and control theory*. SIAM.
- [35] M. Haklidir, H. Temeltaş (2021) Guided soft actor critic: A guided deep reinforcement learning approach for partially observable Markov decision processes. *IEEE Access*, 9, 159672-159683.
- [36] A. A. Alikhanov, P. Yadav, V. K. Singh, M. S. Asl (2025) A high-order compact difference scheme for the multi-term time-fractional Sobolev-type convection-diffusion equation. *Computational and Applied Mathematics*, 44, 115.
- [37] A. A. Alikhanov, M. S. Asl, D. Li (2024) A novel explicit fast numerical scheme for the Cauchy problem for integro-differential equations with a difference kernel and its application. *Computers Mathematics with Applications*, 175, 330-344.
- [38] G. Alhawael, M. A. Abdoon, K. H. Khashan, D. E. Elgezouli (2025) Chaos Analysis of the Fractional Genesio-Tesi System with Constant and Variable-Order Dynamics. *Mathematics*, 13, 3992.
- [39] S. Sui, C. L. P. Chen, S. C. Tong (2023) FTC design for switched fractional-order nonlinear systems: An application in a permanent magnet synchronous motor system. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 53, 2506-2515.
- [40] R. Liu, Y. Han, L. Xing, L. Sun (2018) Adaptive fuzzy command filtered control for uncertain fractional-order nonlinear systems with full state constraints. *Information Sciences*, 467, 452–467. <https://doi.org/10.1016/j.ins.2018.07.054>