

کاربرد کیفیت فازی دوزنقه‌ای در صنعت خودروسازی

حمیده ایرانمنش، عباس پرچی و مهدی جباری نوقابی*

گروه آمار، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد، ایران
گروه آمار، دانشکده ریاضی و رایانه، دانشگاه شهید باهنر کرمان، کرمان، ایران
گروه آمار، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد، ایران
تقدیم به روح استاد گران‌قدر جناب آقای دکتر بهرام صادق‌پور گیلده

تاریخ دریافت: ۱۴۰۰/۷/۲۵

تاریخ پذیرش: ۱۴۰۰/۱۲/۱۲

چکیده

آزمون فرضیه آماری یک روش موثر برای تصمیم‌گیری در مورد کارایی یک فرایند تولیدی می‌باشد. با در نظر گرفتن کیفیت فازی به جای حدود مشخصات فنی دقیق، می‌توانیم تصمیمات مطمئن‌تری برای بررسی توانایی کارایی فرایندهای تولیدی بگیریم. در این مقاله یک مطالعه کاربردی بر اساس کیفیت فازی با استفاده از شاخص یانگتینگ ارائه شده است. رویکرد پیشنهادی به کار برده شده در این مطالعه کاربردی، یک تکنیک برای آزمون توانایی یک فرایند نرمال در تولید محصولات در حدود مشخصات فازی از پیش تعیین شده می‌باشد. با توجه به پیچیدگی فرمول‌های شاخص‌های کارایی حتی تحت شرایط نرمال بودن داده‌ها، ممکن است با چالش عدم توانایی پیدا کردن توزیع آماری برآوردگر کارایی فرایند روبرو شویم. همچنین این چالش نیز برای آزمون کارایی فرایند بر اساس کیفیت فازی دیده می‌شود.

عبارات و کلمات کلیدی: آزمون فرضیه‌ها، کیفیت فازی، کارایی فرایند، شبیه‌سازی مونت‌کارلو.

Email(s): .

۱۴۰۰ انجمن سیستم‌های فازی ایران

Mathematics Subject Classification: 62A86

۱ مقدمه‌ای بر کیفیت فازی

در کنترل کیفیت، مانند سایر مسائل آماری ممکن است با مفاهیم نادقیق و مبهم روبرو شویم. یک مورد کاربردی در تجزیه و تحلیل کیفیت وضعیتی است که در آن حدود مشخصات فنی یک مجموعه فازی باشد. در روش‌های متداول کنترل کیفیت، یک کالا را "باکیفیت" و یا "بی‌کیفیت" می‌نامند، اما به کمک مفهوم فازی، به هر کالا درجه‌ای (بین صفر و یک) به عنوان میزان کیفیت کالا داده می‌شود. با این دیدگاه می‌توان قضاوت و تصمیم‌گیری منصفانه‌تری در خصوص فرایند تولید کالا اتخاذ نمود. برای نخستین بار یانگتینگ [۱۴] در سال ۱۹۹۶ مفهوم "کیفیت فازی" را در شرایطی که حدود مشخصات فنی LSL و USL می‌باشند، به کمک جایگزین کردن تابع نشانگر $I_{\{x:x \in [LSL, USL]\}}$ با تابع عضویت مجموعه فازی \bar{Q} ارائه داد. انگیزه و مزایای استفاده از این رویکرد کیفیت فازی به جای استفاده از رویکرد کیفیت کلاسیک در [۱۲] مورد بحث قرار گرفت. بر پایه مفهوم کیفیت فازی کران‌های فازی و فاصله بین آنها در [۱] معرفی شد. صادق‌پور گیلده [۱۳] شاخص‌های کارایی C_p ، C_{pk} و شاخص یانگتینگ^۱ را با لحاظ وقوع خطای اندازه‌گیری مقایسه کرد. نسل دیگری از شاخص‌های کارایی فرایند توسط پرچمی و ماشین‌چی [۱۰] برای اندازه‌گیری کارایی کیفیت فازی توسعه داده شد.

مدل‌های فازی بسیاری از مسائل ارزیابی ریسک فرایندهای صنعتی را حل می‌کنند [۷]. چن و هانگ [۴] یک مدل ارزیابی کیفیت فازی بر اساس مشخصه کیفیت از نوع کوچکتر بهتر را با استفاده از شاخص ارائه‌شده چانگ و همکاران [۲] ارائه و مدل را به عنوان مبنای تصمیم‌گیری پذیرفتند.

یکی از مسائل اساسی در استنباط آماری، آزمون فرضیه‌های آماری می‌باشد و آزمون کارایی یک روش رایج برای بررسی عملکرد فرایندهای تولیدی صنعتی می‌باشد. ممکن است در آزمون فرضیه‌ها با مواردی روبرو شویم که داده‌ها به صورت مبهم/فازی ثبت شده باشند. در چنین شرایطی، روش‌های کلاسیک آزمون فرضیه‌ها قادر به حل این مسئله جدید نیستند و نیاز به تعمیم دارند. زاده [۱۶] مفهوم فازی نوع دوم را معرفی کرد و پرچمی و همکاران [۱۱] مفهوم فازی نوع دوم را برای شاخص‌های کارایی C_p ، C_{pk} و C_{pm} بر اساس داده‌های معمولی به کار بردند. چن و هانگ [۳] شاخص ناکارایی فرایند

^۱Yongting's index

\widetilde{C}_{pp}'' را با در نظر گرفتن حدود مشخصات فازی نوع دوم معرفی کردند. چن و چانگ [۵] یک روش آزمون فرضیه آماری فازی برای داده‌های فازی با در نظر گرفتن حدود مشخصات فنی یک طرفه توسعه دادند. در حل مسئله آزمون فرضیه‌ها بر اساس داده‌های فازی، ابهام موجود در داده‌ها منجر به ایجاد ابهام در p -مقدار می‌شود. پرچمی [۸] به محاسبه p -مقدار فازی بر اساس داده‌های فازی مبتنی بر اصل گسترش پرداخت. همچنین، با توجه به اینکه روش p -مقدار متداول‌ترین روش آزمون فرضیه‌ها در بین کاربران علوم مختلف است، دو مطالعه موردی مبتنی بر p -مقدار فازی نیز ارائه داد.

فرض کنید انجام آزمون فرضیه صفر $c_0 : C_{\bar{Q}} \leq c_0$ (معادل با "فرایند ناکارا^۲ است") در مقابل فرضیه یک $c_1 : C_{\bar{Q}} > c_0$ (معادل با "فرایند کارا^۳ است") مورد نظر باشد. با توجه به پیچیدگی فرمول‌های شاخص‌های کارایی حتی تحت شرایط نرمال بودن داده‌ها ممکن است با چالش عدم توانایی پیدا کردن توزیع آماری برآوردگر کارایی فرایند روبرو شویم. همچنین این چالش نیز برای آزمون کارایی فرایند بر اساس کیفیت فازی دیده می‌شود. پرچمی و همکاران [۹] برای حل این مشکل یک الگوریتم ساده و کاربردی برای انجام آزمون فرض آماری پیشنهاد دادند. در الگوریتم پیشنهادی آنها از روش شبیه‌سازی مونت‌کارلو برای آزمون شاخص کارایی یانگتینگ استفاده کردند.

انگیزه اصلی از نوشتن این مقاله، معرفی یک مسئله کاربردی در صنعت مبتنی بر کیفیت فازی است که به روش شبیه‌سازی مونت کارلو مورد بحث قرار می‌گیرد. شایان ذکر است که شبیه‌سازی مونت کارلو در مرجع [۹] برای داده‌های نرمال مطرح شده است و ما در این مقاله نیز به ارائه نکاتی برای تعمیم این آزمون کیفیت فازی برای توزیع‌های غیرنرمال می‌پردازیم.

ادامه مقاله به شرح ذیل سازمان داده شده است. در بخش دوم از این مقاله به ذکر مقدمه‌ای بر آزمون کیفیت فازی و شاخص کارایی یانگتینگ برای اندازه‌گیری کیفیت فازی می‌پردازیم.

در بخش سوم به بحث پیرامون آزمون کیفیت فازی مونت‌کارلو پرداخته و نکات جدیدی برای فرایندهای غیرنرمال ارائه می‌شود. در بخش چهارم یک مطالعه کاربردی جدید بر اساس کیفیت فازی ذوزنقه‌ای ارائه و مقایسه‌ای برای تایید نتایج به‌دست آمده در

²incapable

³capable

حالت کیفیت فازی و کلاسیک انجام می‌شود. در انتها مقاله با نتیجه‌گیری پایان می‌یابد.

۲ اندازه‌گیری کیفیت فازی

۱.۲ شاخص کارایی یانگتینگ

فرض کنید f تابع چگالی احتمال یک مشخصه کیفی یک بعدی X باشد. یانگتینگ (۱۹۹۶) شاخص کارایی زیر را برای اندازه‌گیری کیفیت فازی بر اساس داده‌های دقیق ارائه داد:

$$C_{\tilde{Q}} = \begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{Q}(x) f(x) dx, & \text{برای مشخصه کیفیت فازی پیوسته} \\ \sum_{i=1}^n \tilde{Q}(x_i) f(x_i), & \text{برای مشخصه کیفیت فازی گسسته} \end{cases} \quad (1)$$

که در آن \tilde{Q} تابع عضویت کیفیت فازی برای نمایش درجه انطباق^۴ با کیفیت استاندارد فازی است. توجه داشته باشید که با در نظر گرفتن x به عنوان مشخصه کیفیت اندازه‌گیری شده یک محصول، $\tilde{Q}(x)$ نشان‌دهنده میزان مطابقت با کیفیت استاندارد است [۱۲]. لازم به ذکر است که شاخص کارایی فرایند معرفی شده در رابطه (۱) برابر با احتمال رخداد مشخصه کیفی X در کیفیت فازی با توجه به تعریف احتمالاتی زاده [۱۵] است، به بیان دیگر $C_{\tilde{Q}} = P(X \in \tilde{Q})$.

معمولاً میانگین (μ) و انحراف استاندارد (σ) فرایند نامعلوم هستند که بر اساس نمونه تصادفی جمع‌آوری شده از فرایند تحت کنترل، می‌توان آنها را با میانگین نمونه ($\hat{\mu} = \sum_{i=1}^n X_i/n$) و انحراف استاندارد نمونه ($\hat{\sigma} = \sqrt{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2/n - 1}$) برآورد کرد. سرانجام تحت شرایط نرمال بودن مشخصه کیفیت یک بعدی X ، برآوردگر طبیعی^۵ شاخص یانگتینگ $C_{\tilde{Q}}$ با لحاظ کیفیت فازی \tilde{Q} و بر اساس جایگزین کردن برآوردگرهای $\hat{\mu}$ و $\hat{\sigma}$ به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\widehat{C}_{\tilde{Q}} = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{Q}(x) \widehat{f}_{\hat{\mu}, \hat{\sigma}}(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{Q}(x) f_{\hat{\mu}, \hat{\sigma}}(x) dx \quad (2)$$

⁴degree of conformity

⁵natural estimator

که در آن $f_{\mu,\sigma}(x)$ تابع چگالی احتمال توزیع نرمال با پارامترهای μ و σ^2 است.

۲.۲ آزمون کیفیت فازی بر اساس شاخص یانگتینگ

هدف اصلی برای تجزیه و تحلیل کیفیت فازی تحت شرایط نرمال بودن مشخصه کیفیت یک بعدی X ، تعیین کردن مقدار بحرانی مناسب بر اساس شاخص یانگتینگ $C_{\bar{Q}}$ برای تصمیم‌گیری در مورد توانا بودن فرایند تولیدی به تولید محصولات در حدود مشخصات فنی فازی از پیش تعیین شده می‌باشد. بنابراین برای ارائه رویکرد آماری برای یک تصمیم‌گیری مطمئن، آزمون فرضیه‌های زیر را بر اساس نمونه تصادفی X_1, \dots, X_n در نظر می‌گیریم [۹]:

$$\begin{cases} H_0 : C_{\bar{Q}} \leq c_0 & \text{(فرایند ناکاراست)}, \\ H_1 : C_{\bar{Q}} > c_0 & \text{(فرایند کاراست)}, \end{cases} \quad (۳)$$

که در آن $c_0 \in (0, 1)$ حداقل معیار استاندارد برای شاخص یانگتینگ $C_{\bar{Q}}$ می‌باشد. اگر $\widehat{C}_{\bar{Q}}$ آماره آزمون و مقادیر بزرگ آن موجب رد فرضیه صفر باشند و تعریف کنیم:

$$\phi(X) = \begin{cases} 1 & \widehat{C}_{\bar{Q}} > c, \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \quad (۴)$$

که در آن c مقدار بحرانی آزمون کیفیت فازی است، بنابراین آزمون $\phi(X)$ فرضیه صفر را در صورتی رد می‌کند که نامساوی $\widehat{C}_{\bar{Q}} > c$ برقرار باشد، لذا احتمال خطای نوع اول به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\alpha = \sup P\left(\widehat{C}_{\bar{Q}} > c | H_0\right) = P\left(\widehat{C}_{\bar{Q}} > c | C_{\bar{Q}} = c_0\right). \quad (۵)$$

در نتیجه

$$P\left(\widehat{C}_{\bar{Q}} \leq c | C_{\bar{Q}} = c_0\right) = 1 - \alpha. \quad (۶)$$

به بیانی دیگر مقدار بحرانی c برابر با چنک $(1 - \alpha)$ ام توزیع $\widehat{C}_{\bar{Q}}$ تحت شرط $C_{\bar{Q}} = c_0$ است. هدف کلی بخش سوم، نحوه تعیین مقدار بحرانی c با استفاده از روش شبیه‌سازی مونت‌کارلو می‌باشد.

از طرف دیگر، p -مقدار آزمون کیفیت به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} p - value &= P\left(\widehat{C}_{\bar{Q}} > \widehat{c}_{\bar{Q}} \mid C_{\bar{Q}} = c_0\right) \\ &= E\left[I\left(\widehat{C}_{\bar{Q}} > \widehat{c}_{\bar{Q}} \mid C_{\bar{Q}} = c_0\right)\right], \end{aligned} \quad (7)$$

که در آن $\widehat{c}_{\bar{Q}}$ مقدار مشاهده‌شده شاخص کارایی یا نگتینگ بر اساس نمونه تصادفی x_1, \dots, x_n با استفاده از رابطه (۲) است و $I(A)$ تابع نشانگر پیشامد/مجموعه A می‌باشد. همچنین تابع توان آزمون کیفیت فازی با استفاده از شاخص یا نگتینگ طبق فرمول زیر تعریف می‌شود:

$$\Pi(C_{\bar{Q}}) = P\left(\widehat{C}_{\bar{Q}} > c \mid C_{\bar{Q}}\right), \quad (8)$$

که در آن c مقدار بحرانی آزمون است. بنابراین، برای هر مقدار $c_0^* > c_0$ احتمال خطای نوع دوم در نقطه c_0^* برابر است با

$$\begin{aligned} \beta(c_0^*) &= 1 - \Pi(c_0^*) \\ &= P\left(\widehat{C}_{\bar{Q}} \leq c \mid C_{\bar{Q}} = c_0^*\right) \\ &= E\left[I\left(\widehat{C}_{\bar{Q}} \leq c \mid C_{\bar{Q}} = c_0^*\right)\right]. \end{aligned} \quad (9)$$

۳ آزمون کیفیت فازی مونت‌کارلو

در این بخش، به ارائه جزئیات الگوریتم پیشنهادی بر اساس رویکرد شبیه‌سازی مونت‌کارلو برای تعیین مقدار بحرانی c ، p -مقدار و احتمال خطای نوع دوم در سطح معنی داری α پرداخته می‌شود [۹].

الگوریتم پیشنهادی.

گام ۱: برآورد شاخص کارایی یانگتینگ را بر اساس نمونه تصادفی x_1, \dots, x_n با استفاده از رابطه (۲) محاسبه کنید.

گام ۲: دنباله $\mu_1 < \mu_2 < \dots < \mu_k$ را برای پوشش دامنه $[Q_1, Q_3]$ با استفاده از فرمول زیر به دست آورید:

$$\mu_j = Q_1 + \frac{j-1}{k-1} (Q_3 - Q_1), \quad j = 1, 2, \dots, k, \quad (10)$$

که در آن Q_1 و Q_3 به ترتیب بیست و پنجمین و هفتاد و پنجمین صدک مشاهدات x_1, \dots, x_n هستند.

گام ۳: برای همه $\mu_j \in \{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k\}$ ، قسمت‌های (آ) تا (ج) را اجرا کنید:

(آ) ریشه نامعلوم σ_j را از معادله $C_{\tilde{Q}} = c_0$ محاسبه نمایید، که معادله را به صورت زیر داریم:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{Q}(x) f_{\mu_j, \sigma_j}(x) dx = c_0, \quad (11)$$

(ب) $m = 10^3$ نمونه تصادفی به حجم n از توزیع نرمال $N(\mu_j, \sigma_j^2)$ شبیه‌سازی کنید،

(پ) شاخص‌های کارایی $\widehat{c}_{\tilde{Q}}^{[1]}, \widehat{c}_{\tilde{Q}}^{[2]}, \dots, \widehat{c}_{\tilde{Q}}^{[m]}$ را با استفاده از رابطه (۲) بر اساس کیفیت فازی \tilde{Q} برای هر نمونه شبیه‌سازی شده در قسمت ب برآورد کنید،

(ت) با استفاده از رابطه (۶) مقدار بحرانی آزمون برای نمونه‌های شبیه‌سازی شده در قسمت ب را به صورت چندک $(1 - \alpha)$ ام توزیع $\widehat{C}_{\bar{Q}}$ در نظر می‌گیریم:

$$c_j = \widehat{c}_{\bar{Q}}^{(m(1-\alpha))}, \quad j = 1, \dots, k, \quad (12)$$

که در آن $\widehat{c}_{\bar{Q}}^{(1)}$ ، $\widehat{c}_{\bar{Q}}^{(2)}$ ، ...، $\widehat{c}_{\bar{Q}}^{(m)}$ آماره‌های ترتیبی برآورده شده در قسمت پ هستند،

(ث) p -مقدار را با استفاده از فرمول زیر شبیه‌سازی کنید:

$$\begin{aligned} p - value_j &= I\left(\widehat{C}_{\bar{Q}} > \widehat{c}_{\bar{Q}} \mid C_{\bar{Q}} = c_o\right) \\ &= \frac{1}{m} \sum_{r=1}^m I\left(\widehat{c}_{\bar{Q}}^{[r]} > \widehat{c}_{\bar{Q}} \mid \mu = \mu_j, \sigma = \sigma_j\right), \quad j = 1, \dots, k, \end{aligned} \quad (13)$$

که در آن شاخص‌های کارایی شبیه‌سازی شده را با $\widehat{c}_{\bar{Q}}^{[1]}$ ، ...، $\widehat{c}_{\bar{Q}}^{[m]}$ نام‌گذاری کرده و σ_j ریشه قابل محاسبه از معادله $C_{\bar{Q}} = c_o$ از قسمت آ می‌باشد، که با استفاده از روش نیوتن رافسون به دست می‌آید. لازم به ذکر است که با توجه به قانون قوی اعداد بزرگ، برای هر تکرار شبیه‌سازی زمانی که m به بینهایت میل می‌کند ($m \rightarrow \infty$)، تقریباً برای برآوردگر مونت‌کارلو $p - value_j$ همگرایی قریب به یقین به رابطه (۷) حاصل می‌شود،

(ج) برای هر نقطه دلخواه $c_o^* > c_o$ ، احتمال خطای نوع دوم شبیه‌سازی شده در نقطه c_o^* به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\begin{aligned} \beta(c_o^*)_j &= P\left(\widehat{C}_{\bar{Q}} \leq c_j \mid C_{\bar{Q}} = c_o^*\right) \\ &= I\left(\widehat{C}_{\bar{Q}} \leq c_j \mid C_{\bar{Q}} = c_o^*\right) \\ &= \frac{1}{m} \sum_{r=1}^m I\left(\widehat{c}_{\bar{Q}}^{[r]} \leq c_j \mid \mu = \mu_j, \sigma = \sigma_j^*\right), \quad j = 1, \dots, k, \end{aligned} \quad (14)$$

که در آن σ_j^* ریشه قابل محاسبه از معادله $C_{\bar{Q}} = c_{\bar{Q}}^*$ می‌باشد، که با استفاده از روش نیوتن رافسون به دست می‌آید. همچنین شاخص‌های کارایی شبیه‌سازی شده بر اساس μ_j و σ_j^* را با $\widehat{c}_{\bar{Q}}^{[1]}, \dots, \widehat{c}_{\bar{Q}}^{[m]}$ نام‌گذاری کرده و با توجه به قانون قوی اعداد بزرگ، برای هر تکرار شبیه‌سازی زمانی که m به بینهایت میل می‌کند ($m \rightarrow \infty$)، تقریباً برای برآوردگر مونت‌کارلو $\beta(c_{\bar{Q}}^*)_j$ همگرایی قریب به یقین به رابطه (۹) حاصل می‌شود،

گام ۴: مقدار بحرانی مونت‌کارلو برابر با میانگین k مقدار بحرانی محاسبه شده در گام سوم می‌باشد و در نتیجه

$$c = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k c_j. \quad (15)$$

گام ۵: (نحوه تصمیم‌گیری) در صورتی که فرضیه صفر تحت سطح معنی‌داری α رد شود ($\widehat{c}_{\bar{Q}} > c$)، فرایند کارا قلمداد می‌شود؛ در غیر این صورت فرایند ناکارا است.

گام ۶: p -مقدار مونت‌کارلو برابر با میانگین p -مقدارهای شبیه‌سازی شده در تکرارهای قسمت ۳ می‌باشد؛ یعنی

$$\hat{p} - value = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k p - value_j. \quad (16)$$

گام ۷: سرانجام برای هر مقدار دلخواه $c_{\bar{Q}}^* > c$ ، خطای نوع دوم مونت‌کارلو در نقطه $c_{\bar{Q}}^*$ برابر با میانگین k مقدار شبیه‌سازی شده در تکرارهای قسمت ۳ است؛ یعنی

$$\hat{\beta}(c_{\bar{Q}}^*) = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \beta(c_{\bar{Q}}^*)_j. \quad (17)$$

ملاحظه ۱۰۳. توجه داشته باشید که الگوریتم مطرح شده در بخش ۳ برگرفته از مرجع [۹] است که برای داده‌های نرمال طراحی شده است. با توجه به این که شاخص یانگتینگ قابلیت سنجش کارایی برای هر توزیع (و نه لزوماً توزیع نرمال) را مبتنی بر کیفیت فازی

دارد، لذا ایده بکار رفته در الگوریتم پیشنهادی را می‌توان با لحاظ کردن نکات زیر برای داده‌های غیرنرمال نیز تا حدودی تعمیم داد:

(۱) تعمیم ما برای حالتی است که توزیع داده‌ها از خانواده توزیع‌های دو پارامتری - مانند توزیع‌های وایبل، گاما، نمایی تعمیم‌یافته و غیره - به فرم زیر باشد:

$$\{f_{\theta_1, \theta_2}(x) : (\theta_1, \theta_2) \in \Theta \subseteq \mathbf{R}^2\}$$

(۲) دنباله مطرح‌شده در گام ۲ باید بر روی فضای پارامتر θ_1 تعریف شود و برای این مهم می‌توان از فاصله اطمینان $(1 - \alpha) \cdot 100$ درصدی θ_1 نیز استفاده کرد.

(۳) اساس بند آ در گام ۳، همان معادله $C_{\tilde{Q}} = c$ است که در حالت کلی می‌توان آن را به صورت زیر برای توزیع‌های دو پارامتری $f_{\theta_1, \theta_2}(x)$ بازنویسی کرد:

$$C_{\tilde{Q}} = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{Q}(x) f_{\theta_1, \theta_2}(x) dx = c. \quad (18)$$

(۴) بدیهی است که شبیه‌سازی نمونه تصادفی در بند ب از گام ۳ باید از توزیع دو پارامتری $f_{\theta_1, \theta_2}(x)$ باشد.

(۵) با فرض اینکه $\hat{\theta}_1$ و $\hat{\theta}_2$ برآوردگرهای گشتاوری پارامترها باشند، می‌توان شاخص‌های کارایی در بند پ از گام ۳ را به صورت زیر برآورد کرد:

$$\begin{aligned} \widehat{c}_{\tilde{Q}}^{[r]} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{Q}(x) \widehat{f}_{\theta_1, \theta_2}(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{Q}(x) f_{\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2}(x) dx, \quad r = 1, \dots, m. \end{aligned} \quad (19)$$

یک مطالعه کاربردی جدید مبتنی بر کیفیت فازی دوزنقه‌ای در بخش بعدی برای نشان دادن عملکرد الگوریتم پیشنهادی ارائه شده است.

۴ آزمون کارایی فرایند پولیش کاری بدنه اتومبیل

ضخامت رنگ خودرو در تولیدات قدیمی عموماً بیشتر از خودروهای امروزی است. همچنین شرکت‌های مختلف از ضخامت‌های مختلف استفاده می‌کنند. برای مثال محصولات ژاپنی در بسیاری از مواقع ضخامت رنگ کمتری در مقایسه با خودروهای اروپایی یا آمریکایی دارند. امروزه محافظت و احیای رنگ خودرو جزء مشاغل مهم در جامعه هستند. چرا که در بسیاری از موارد با این عمل می‌توان رنگ خودرو را که به دلایل مختلف آسیب دیده است تا حدود زیادی احیا کرد و کیفیت سابق را به آن برگرداند. در این مطالعه موردی به بررسی یک نمونه تصادفی به حجم $n = 222$ از ضخامت رنگ خودرو در فرایند رنگ و پولیش کاری پرداخته می‌شود. نمودار بافت‌نگار^۶ به همراه نمودار برازش مربوط به این داده‌ها در شکل ۱ نشان داده شده است. همچنین نمودار چندک-چندک نرمال^۷ داده‌ها را در شکل ۲ ملاحظه نمایید.

در ادامه، قصد داریم کارایی فرایند رنگ خودرو (بر حسب میلی‌متر) را بر اساس شاخص یانگتینگ در سطح معنی‌داری $\alpha = 0.01$ با در نظر گرفتن کیفیت فازی دوزنقه‌ای زیر آزمون کنیم:

$$\tilde{Q}(x) = \begin{cases} \frac{x-0.08}{0.04} & \text{اگر } 0.08 \leq x < 0.12, \\ 1 & \text{اگر } 0.12 \leq x < 0.16, \\ \frac{0.22-x}{0.06} & \text{اگر } 0.16 \leq x < 0.22, \\ 0 & \text{سایر نقاط.} \end{cases}$$

تابع عضویت فوق با کیفیت فازی دوزنقه‌ای غیرمتمقارن^۸ در شکل ۳ ترسیم شده است، و همچنین درجه انطباق و عدم انطباق^۹ برای هر مشاهده به ترتیب در سمت چپ و راست شکل ۳ نشان داده شده است.

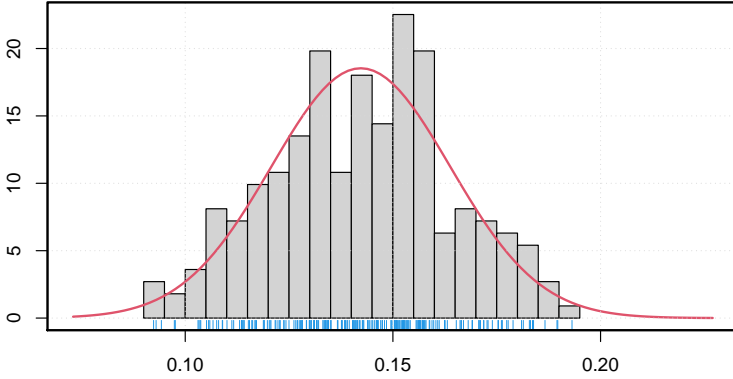
روش شبیه‌سازی مونت‌کارلو در این مطالعه برای آزمون فرضیه $H_0: C_{\tilde{Q}} \leq 0.90$ ،

⁶ histogram

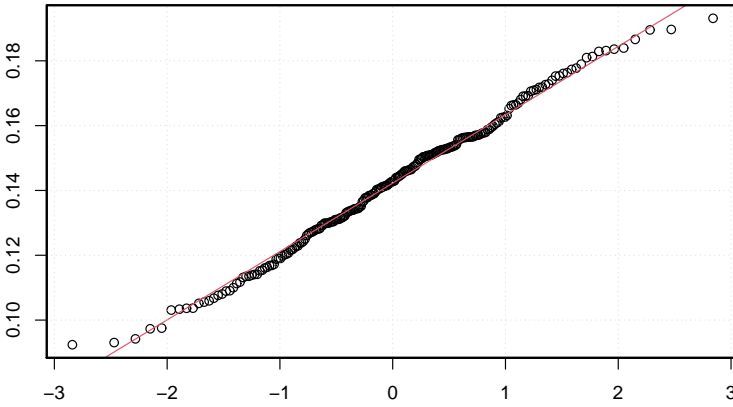
⁷ normal Q-Q plot

⁸ non-symmetric

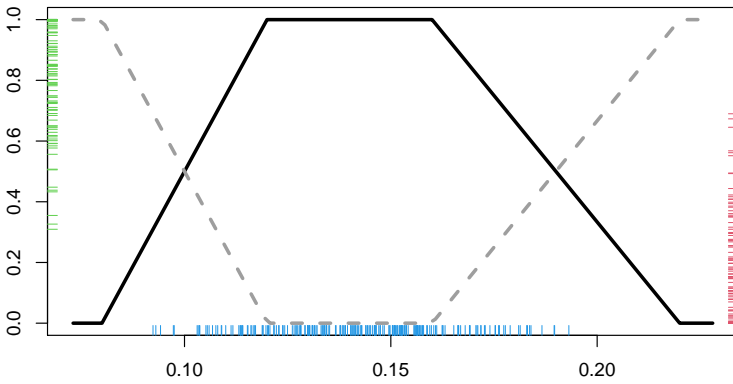
⁹ nonconformity



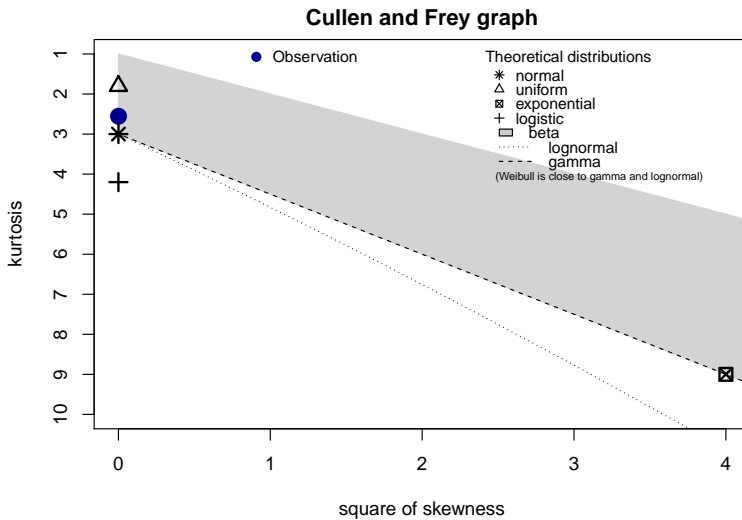
شکل ۱: نمودار بافت‌نگار و نمودار برازش داده‌های ضخامت رنگ خودرو



شکل ۲: نمودار چندک-چندک نرمال داده‌های ضخامت رنگ خودرو



شکل ۳: تابع عضویت دوزنقه‌های کیفیت فازی \tilde{Q} و درجه انطباق و عدم انطباق مشاهدات



شکل ۴: نمودار کالمن و فری مشاهدات رنگ خورو

در مقابل $C_{\hat{Q}} > 0.90 : H_1$ ، بر اساس نمونه تصادفی مشاهده شده x_1, \dots, x_{222} در نظر گرفته شده است. با استفاده از نمودار بافت‌نگار و نمودار چندک-چندک نرمال مربوط به داده‌ها، مشاهده می‌شود که تقریباً داده‌ها از توزیع نرمال پیروی می‌کنند. همچنین آماره‌های $D = 0.042$ و $W = 0.993$ به همراه p -مقدارهای p -value = 0.425 و p -value = 0.342 که به ترتیب مربوط به آزمون نرمال بودن لی لی فورس (کلموگروف-اسمیرنوف) و شاپیرو-ویلک می‌شوند، گواهی بر تایید نرمال بودن داده‌ها هستند. علاوه بر این روش‌ها، برای تعیین توزیع داده‌ها از روش رایجی به نام نمودار کالمن و فری [۶] استفاده می‌کنیم. این نمودار بهترین برازش مدل را با استفاده از معیارهای کشیدگی و چولگی انتخاب می‌کند. همچنین توزیع‌های رایجی مانند توزیع نرمال، یونیفرم، نمایی و غیره برای کمک به انتخاب مناسب‌ترین مدل برای داده‌ها در این نمودار نشان داده شده‌اند. با توجه به شکل ۴ توزیع مشاهدات دارای چولگی صفر است. اگرچه توزیع‌های نرمال، یونیفرم و لجستیک دارای چولگی صفر می‌باشند، اما کشیدگی مشاهدات مدل به توزیع نرمال نزدیک‌تر است. بنابراین با استفاده از اطلاعات این نمودار، توزیع نرمال به عنوان مدل مناسب برای برازش داده‌ها انتخاب می‌شود. بنابراین برآورد شاخص کارایی

یانگتینگ بر اساس نمونه تصادفی x_1, \dots, x_{22} با استفاده از رابطه (۲) برابر است با:

$$\widehat{c}_{\widehat{Q}} = \int_{0.08}^{0.22} \widehat{Q}(x) f_{\widehat{\mu}, \widehat{\sigma}}(x) dx = 0.917,$$

که در آن $f_{\widehat{\mu}, \widehat{\sigma}}$ براورد تابع چگالی احتمال توزیع نرمال می‌باشد، که میانگین (μ) و انحراف استاندارد فرایند (σ) بر اساس نمونه تصادفی جمع‌آوری شده، با میانگین نمونه ($\widehat{\mu} = 0.1423$) و انحراف استاندارد نمونه ($\widehat{\sigma} = 0.0215$) براورد می‌شوند. در نتیجه مقدار $\widehat{c}_{\widehat{Q}}$ بزرگتر از مقدار بحرانی مونت‌کارلو c در سطح معنی‌داری $\alpha = 0.01$ نمی‌باشد ($c < 0.917$). لازم به ذکر است که مقدار بحرانی مونت‌کارلو $c = 0.926$ با استفاده از الگوریتم پیشنهادی قابل محاسبه است و نحوه به کارگیری این الگوریتم در ادامه توضیح داده می‌شود.

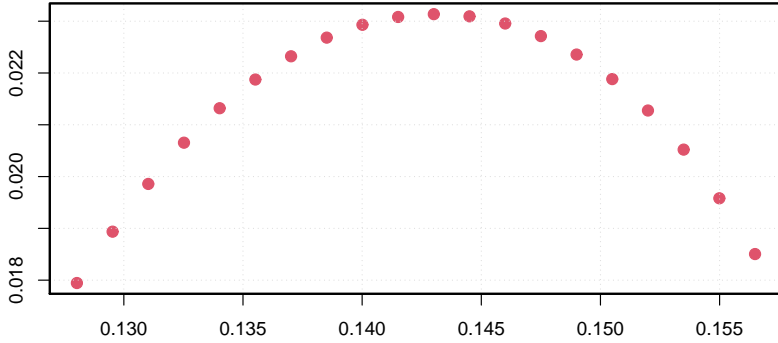
با در نظر گرفتن $k = 18$ ، برای اجرای مراحل شبیه‌سازی در الگوریتم پیشنهادی،

دنباله زیر برای پوشش مقادیر میانگین μ_j با استفاده از رابطه (۱۰) به دست می‌آید:

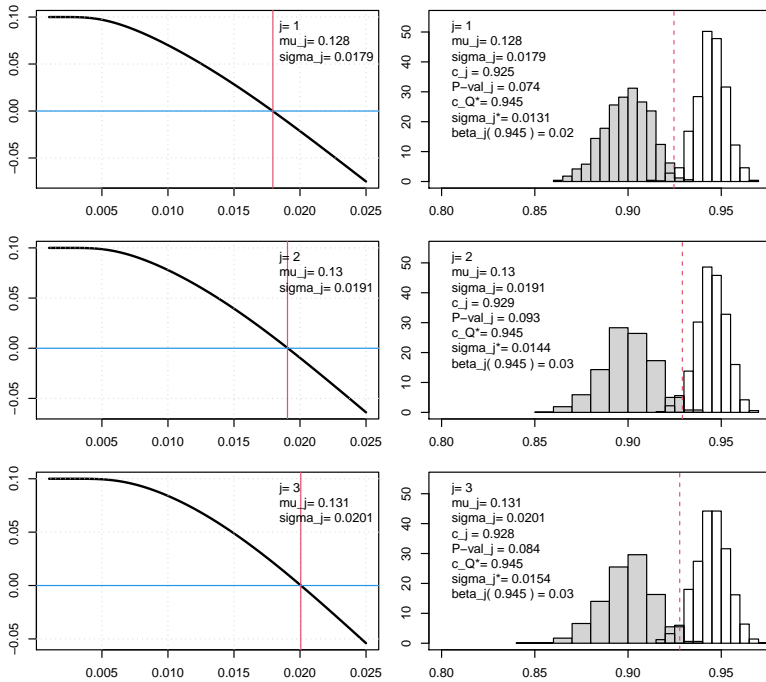
۰/۱۳۶۳۹۹۶، ۰/۱۳۴۷۲۵۶، ۰/۱۳۳۰۵۱۶، ۰/۱۳۱۳۷۷۶، ۰/۱۲۹۷۰۳۶، ۰/۱۲۸۰۲۹۵،
 ۰/۱۴۶۴۴۳۶، ۰/۱۴۴۷۶۹۶، ۰/۱۴۳۰۹۵۶، ۰/۱۴۱۴۲۱۶، ۰/۱۳۹۷۴۷۶، ۰/۱۳۸۰۷۳۶،
 ۰/۱۵۶۴۸۷۷، ۰/۱۵۴۸۱۳۷، ۰/۱۵۳۱۳۹۷، ۰/۱۵۱۴۶۵۷، ۰/۱۴۹۷۹۱۷، ۰/۱۴۸۱۱۷۶.

با توجه به تابع عضویت کیفیت فازی در این مطالعه، ریشه نامعلوم σ_j از رابطه (۱۱) در الگوریتم پیشنهادی، برای هر هجده حالت ممکن با استفاده از روش نیوتن رافسون به دست می‌آید. بعلاوه مختصات نقاط در نظر گرفته شده (μ_j, σ_j) در قسمت **ب** الگوریتم برای $j = 1, \dots, 18$ در شکل ۵ نمایش داده شده است.

سپس با تولید ۱۰۰۰ نمونه مستقل از توزیع نرمال $N(\mu_j, \sigma_j^2)$ ، براورد شاخص کارایی یانگتینگ را برای هر نمونه شبیه‌سازی شده با استفاده از رابطه (۲) به دست می‌آوریم. بعد از مرتب کردن این ۱۰۰۰ شاخص کارایی برآورده شده، ۹۹ امین شاخص کارایی (خطوط نقطه‌چین قرمز رنگ در بافت‌نگارهای شکل ۶) به عنوان مقدار بحرانی برای هر هجده حالت ممکن در نظر گرفته می‌شود. نمودارهای سمت چپ در شکل ۶ منحنی‌های $h(\sigma_j) = C_{\widehat{Q}} - c$ مربوط به اجرای سه تکرار اول قسمت **آ** از الگوریتم پیشنهادی هستند که برای محاسبه ریشه نامعلوم σ_j و برای درک شهودی بهتر نشان داده



شکل ۵: مختصات نقاط (μ_j, σ_j) برای $j = 1, \dots, 18$ با در نظر گرفتن $c_0 = 0.08$ در اجرای الگوریتم



شکل ۶: چپ: منحنی $h(\sigma_j) = C_Q - c_0$ برای محاسبه ریشه نامعلوم σ_j در سه تکرار اول قسمت آ از الگوریتم پیشنهادی. راست: بافت‌نگارهای شاخص یانگتینگ شبیه‌سازی شده با σ_j و σ_j^* به ترتیب تحت فرضیه‌های H_0 و H_1 .

جدول ۱: نتایج مربوط به مقادیر بحرانی، p -مقادیرها و احتمال‌های خطای نوع دوم شبیه‌سازی شده برای همه تکرارهای الگوریتم پیشنهادی در مطالعه مربوط به ضخامت رنگ خودرو

| $\beta(c_Q^*)_j$ | $p - value_j$ | c_j | σ_j | μ_j | j |
|---|---------------|-------|------------|---------|---------|
| ۰/۰۱۶ | ۰/۰۷۴ | ۰/۹۲۵ | ۰/۰۱۸ | ۰/۱۲۸ | ۱ |
| ۰/۰۳۱ | ۰/۰۹۳ | ۰/۹۲۹ | ۰/۰۱۹ | ۰/۱۳۰ | ۲ |
| ۰/۰۳۴ | ۰/۰۸۴ | ۰/۹۲۸ | ۰/۰۲۰ | ۰/۱۳۱ | ۳ |
| ۰/۰۲۴ | ۰/۰۷۰ | ۰/۹۲۶ | ۰/۰۲۱ | ۰/۱۳۳ | ۴ |
| ۰/۰۲۲ | ۰/۰۷۹ | ۰/۹۲۷ | ۰/۰۲۲ | ۰/۱۳۵ | ۵ |
| ۰/۰۲۱ | ۰/۰۷۵ | ۰/۹۲۶ | ۰/۰۲۲ | ۰/۱۳۶ | ۶ |
| ۰/۰۰۹ | ۰/۰۵۹ | ۰/۹۲۵ | ۰/۰۲۳ | ۰/۱۳۸ | ۷ |
| ۰/۰۲۶ | ۰/۰۷۰ | ۰/۹۲۸ | ۰/۰۲۳ | ۰/۱۴۰ | ۸ |
| ۰/۰۱۰ | ۰/۰۵۳ | ۰/۹۲۵ | ۰/۰۲۳ | ۰/۱۴۱ | ۹ |
| ۰/۰۲۵ | ۰/۰۷۹ | ۰/۹۲۸ | ۰/۰۲۳ | ۰/۱۴۳ | ۱۰ |
| ۰/۰۰۸ | ۰/۰۷۶ | ۰/۹۲۶ | ۰/۰۲۳ | ۰/۱۴۵ | ۱۱ |
| ۰/۰۱۴ | ۰/۰۵۳ | ۰/۹۲۶ | ۰/۰۲۳ | ۰/۱۴۶ | ۱۲ |
| ۰/۰۱۰ | ۰/۰۷۰ | ۰/۹۲۶ | ۰/۰۲۳ | ۰/۱۴۸ | ۱۳ |
| ۰/۰۱۱ | ۰/۰۷۳ | ۰/۹۲۵ | ۰/۰۲۲ | ۰/۱۵۰ | ۱۴ |
| ۰/۰۱۰ | ۰/۰۶۱ | ۰/۹۲۴ | ۰/۰۲۲ | ۰/۱۵۱ | ۱۵ |
| ۰/۰۰۵ | ۰/۰۶۸ | ۰/۹۲۴ | ۰/۰۲۱ | ۰/۱۵۳ | ۱۶ |
| ۰/۰۰۱ | ۰/۰۵۶ | ۰/۹۲۳ | ۰/۰۲۰ | ۰/۱۵۵ | ۱۷ |
| ۰/۰۰۳ | ۰/۰۴۷ | ۰/۹۲۴ | ۰/۰۱۹ | ۰/۱۵۶ | ۱۸ |
| $\hat{\beta}(۰/۰۹۴۵) = ۰/۰۱۶$ $\hat{p} - value = ۰/۰۶۹$ $c = ۰/۹۲۶$ | | | | | میانگین |

شده‌اند. بافت‌نگارهای خاکستری رنگ مربوط به شاخص یانگتینگ شبیه‌سازی شده با σ_j (تحت فرضیه H_0) و بافت‌نگارهای سفیدرنگ مربوط به شاخص یانگتینگ شبیه‌سازی شده با σ_j^* (تحت فرضیه H_1) هستند که اجراهای مربوط به سه تکرار اول الگوریتم در سمت راست شکل ۶ نشان داده شده‌اند.

نتایج رویکرد شبیه‌سازی مونت‌کارلو برای همه تکرارهای الگوریتم پیشنهادی در جدول ۱ بر اساس کیفیت فازی دوزنقه‌ای آورده شده‌اند. برای مثال، سطر چهارم جدول ۱ شامل

- $\mu_4 = ۰/۱۳۳$ ، چهارمین مقدار در نظر گرفته شده برای μ در شبیه‌سازی با استفاده از گام دوم،

- $\sigma_4 = ۰/۰۲۱$ ، مقدار محاسبه شده σ برای $j = ۴$ با استفاده از قسمت آ،

- $c_4 = ۰/۹۲۶$ ، مقدار بحرانی شبیه‌سازی شده با استفاده از قسمت ت،

• $0.070 = p - \text{value}$ مقدار شبیه‌سازی شده با استفاده از قسمت ث، و

• $0.024 = \beta(0.945)$ ، نیز خطای نوع دوم شبیه‌سازی شده در نقطه $0.945 = c_Q^*$ با استفاده از قسمت ج در الگوریتم پیشنهادی می‌باشد.

میانگین هجده مقدار بحرانی به دست آمده برابر با $c = 0.926$ است، که به عنوان مقدار بحرانی مونت‌کارلو در این مطالعه در نظر گرفته می‌شود. همچنین آخرین سطر جدول ۱، به ترتیب شامل مقدار بحرانی، p -مقدار و خطای نوع دوم مونت‌کارلو می‌باشد. در نتیجه با مقایسه $0.917 = \widehat{c}_Q$ و c ، فرضیه صفر رد نمی‌شود و بنابراین فرایند مربوط به رنگ خودرو در این مطالعه، یک فرایند ناکارا در سطح معنی‌داری $\alpha = 0.01$ قلمداد می‌شود. نتایج و تصمیم‌گیری مربوط به آزمون کیفیت فازی مشاهدات ضخامت رنگ خودرو بر اساس حداقل معیار استاندارد $0.9 = c_0$ برای سطوح مختلف 0.10 ، 0.25 ، 0.50 و 0.100 در جدول ۲ خلاصه شده‌اند.

ملاحظه ۱.۴. توجه نمایید که به کمک جایگزین کردن تابع نشانگر $Q = I_{\{X: X \in [LSL, USL]\}}$ به جای تابع عضویت کیفیت فازی \tilde{Q} ، شاخص کارایی برابر احتمال کیفیت‌دار بودن کالای مربوطه خواهد بود، به بیان دیگر:

$$C_Q = P(LSL \leq X \leq USL) = E(I_{(LSL \leq X \leq USL)}), \quad (20)$$

و مقدار مشاهده‌شده آن برابر است با:

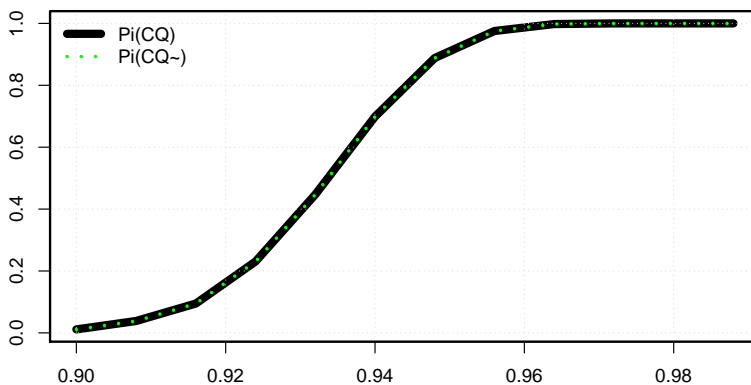
$$\widehat{c}_Q = \overline{I_{(LSL \leq x \leq USL)}}, \quad (21)$$

ملاحظه می‌شود همه اجزای تصمیم‌گیری برای آزمون کیفیت فازی - شامل مقدار بحرانی، p -مقدار و تابع توان آزمون - معادل اجزای تصمیم‌گیری مربوطه برای آزمون کیفیت کلاسیک شده‌اند که می‌توان آن را به چشم تاییدی بر صحت نتایج به دست آمده نگریست (شکل ۷ و جدول ۳ را ملاحظه نمایید).

جدول ۲: نتایج آزمون کیفیت فازی برای نمونه‌ای به حجم $n = ۲۲۲$ در مطالعه مربوط به ضخامت رنگ خودرو

| $\alpha = ۰,۱۰۰$ | $\alpha = ۰,۰۵۰$ | $\alpha = ۰,۰۲۵$ | $\alpha = ۰,۰۱۰$ |
|------------------------------|------------------------------|------------------------------|------------------------------|
| $۰,۹۱۵$ | $۰,۹۱۹$ | $۰,۹۲۲$ | $۰,۹۲۶$ |
| رد فرضیه صفر | عدم رد فرضیه صفر | عدم رد فرضیه صفر | عدم رد فرضیه صفر |
| کارا | ناکارا | ناکارا | ناکارا |
| $۰,۰۶۹$ | $۰,۰۶۹$ | $۰,۰۶۹$ | $۰,۰۶۹$ |
| $\hat{\beta}(۰,۹۲۷) = ۰,۱۱۲$ | $\hat{\beta}(۰,۹۳۴) = ۰,۰۵۶$ | $\hat{\beta}(۰,۹۴۰) = ۰,۰۲۶$ | $\hat{\beta}(۰,۹۴۵) = ۰,۰۱۶$ |
| $\hat{\beta}(۰,۹۲۶) = ۰,۱۳۲$ | $\hat{\beta}(۰,۹۳۳) = ۰,۰۶۹$ | $\hat{\beta}(۰,۹۳۹) = ۰,۰۳۴$ | $\hat{\beta}(۰,۹۴۴) = ۰,۰۲۲$ |
| $\hat{\beta}(۰,۹۲۵) = ۰,۱۵۶$ | $\hat{\beta}(۰,۹۳۲) = ۰,۰۸۵$ | $\hat{\beta}(۰,۹۳۸) = ۰,۰۴۳$ | $\hat{\beta}(۰,۹۴۳) = ۰,۰۲۸$ |

مقدار بحرانی مونت کارلو برای $C_{\hat{Q}}$
 قاعده تصمیم‌گیری به ازای $۰,۹۱۷ = C_{\hat{Q}}$
 وضع فرایند بر اساس کیفیت دوزنقه‌ای
 $-p$ مقدار مونت کارلو
 احتمال خطای نوع دوم مونت کارلو



شکل ۷: نمودار تابع توان دو آزمون کیفیت فازی و کلاسیک شامل $\Pi(C_Q)$ و $\Pi(C_{\bar{Q}})$ بر اساس حداقل معیار استاندارد $c_0 = 0.08$ تحت سطح معنی‌داری 0.01 .

۵ نتیجه‌گیری و کارهای آینده

در مقاله حاضر، مطالعه‌ای کاربردی بر اساس کیفیت فازی برای ارزیابی و آزمون کارایی فرایندهای تولیدی با استفاده از شاخص کارایی یانگتینگ ارائه شد. در این مطالعه با استفاده از الگوریتم پیشنهادی به برآورد مقدار بحرانی، p -مقدار و احتمال خطای نوع دوم بر اساس رویکرد آماری آزمون کیفیت فازی دوزنقه‌ای پرداخته شد. آزمایشگر می‌تواند به جای حدود مشخصات فنی دقیق این مطالعه را برای انواع کیفیت‌های فازی برای تعیین مطابقت فرایند مورد بررسی با الزامات کارایی از پیش تعیین شده به کار گیرد و در صورت در نظر گرفتن کیفیت فازی مورد نظر تحقیقات خود، تصمیمات مطمئن‌تری بگیرد.

هدف اصلی این مقاله، معرفی یک مسئله کاربردی در صنعت مبتنی بر کیفیت فازی است که به روش شبیه‌سازی مونت کارلو مورد بحث قرار می‌گیرد. شایان ذکر است که شبیه‌سازی مونت کارلو در مرجع [۹] برای داده‌های نرمال مطرح شده است و ما در این مقاله نیز به ارائه نکاتی برای تعمیم این آزمون کیفیت فازی برای توزیع‌های غیرنرمال پرداختیم. تحقیقات آتی در همین راستا، در ارتباط با آزمون شاخص‌های کارایی چندمتغیره بر اساس انواع کیفیت‌های فازی خواهد بود.

مراجع

- [۱] پرچمی، ع. و ماشین چی، م. (۱۳۸۶) کیفیت فازی و نسل جدیدی از شاخص‌های کارآیی. اندیشه آماری، شماره اول سال دوازدهم، صص. ۶۸ تا ۷۶.
- [2] T. C. Chang , K. S. Chen, C. M. Yu, (2016). Process quality assessment model of hand tools: A case study on the handle of ratchet torque wrench. *International Journal of Reliability Quality and Safety Engineering*, 23(05), 1650017.
- [3] S. M. Chen, T. M. Hung, (2021). What can fuzziness do for capability analysis based on fuzzy data. *Scientia Iranica*, 28(2), 1049–1064.
- [4] K. S. Chen, T. H. Huang, (2021). A Fuzzy Evaluation Model Aimed at Smaller-the-Better-Type Quality Characteristics. *Mathematics*, 9(19), 2513.
- [5] K. S. Chen, T. C. Chang, (2020). A fuzzy approach to determine process quality for one-sided specification with imprecise data. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part B: Journal of Engineering Manufacture*, 234(9), 1198–1206.
- [6] A. C. Cullen, H. C. Frey, C. H. Frey, (1999). *Probabilistic techniques in exposure assessment*. Springer Science & Business Media, New York, 1st edition.
- [7] Z. Lin, H. Ayed, B. Bouallegue, H. Tomaskova, S. Jafarzadeh Ghouschi, G. Haseli, (2021). An integrated mathematical attitude utilizing fully fuzzy bwm and fuzzy waspas for risk evaluation in a SOFC. *Mathematics*, 9(18), 2328.
- [8] A. Parchami, (2020). Fuzzy decision in testing hypotheses by fuzzy data: Two case studies. *Iranian Journal of Fuzzy Systems*, 17(5), 127–136.
- [9] A. Parchami, H. Iranmanesh, B. Sadeghpour Gildeh, (2021). Statistical testing quality and its Monte Carlo simulation based on fuzzy specification limits, *Iranian Journal of Fuzzy Systems*.

- [10] A. Parchami, M. Mashinchi (2010). A new generation of process capability indices, *Journal of Applied Statistics*, 37 (1), 77–89.
- [11] A. Parchami, S. Ç. Onar, B. Öztayşi, C. Kahraman, (2017). Process capability analysis using interval type-2 fuzzy sets. *International Journal of Computational Intelligence Systems*, 10(1), 721–733.
- [12] A. Parchami, B. Sadeghpour Gildeh, M. Mashinchi (2016). Why Fuzzy Quality?. *International Journal for Quality Research*, 10 (3), 457–470.
- [13] B. Sadeghpour Gildeh, (2003). Comparison of C_p , C_{pk} and $C_{p\text{-tilde}}$ process capability indices in the case of measurement error occurrence. *IFSA World Congress, Istanbul, Turkey*, 563–567.
- [14] C. Yongting (1996). Fuzzy quality and analysis on fuzzy probability. *Fuzzy Sets and Systems*, 83, 283–290.
- [15] L.A. Zadeh, (1968). Probability measures of fuzzy events. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 23 (2), 421–427.
- [16] L. A. Zadeh, (1975). The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning-III. *Information sciences*, 9(1), 43–80.