سیستم‌های فازی و کاربردها
شاپای چاپی: ۴۴۰۹-۲۷۱۷
سال چهارم، شماره دوم (پائیز و زمستان ۱۴۰۰)
شاپای الکترونیکی: ۳۹۸۴-۲۷۱۷
صص. ۱۱۳ تا ۱۳۲
DOI:10.22034/JFSA.2022.315340.1100

ارتباط بین اتوماتای درختی فازی قطعی و نگاشت‌های مرحله‌ای تشخیص‌پذیر نرمال

مریم قرآنی

دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود، ایران

تاریخ دریافت: ۱۴۰۰/۸/۲۴ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۰/۱۲/۱۲

چکیده

در این مقاله، به بررسی اتوماتای درختی فازی می‌پردازیم. یک زبان درخت فازی مرحله‌ای تشخیص‌پذیر را تعریف کرده و نشان می‌دهیم هر زبان درخت فازی تشخیص‌پذیر یک زبان درخت فازی مرحله‌ای تشخیص‌پذیر است. در ادامه، یک اتوماتون درختی فازی قطعی را معرفی کرده و نشان می‌دهیم تکیه‌گاه یک زبان درخت فازی قابل تشخیص توسط یک اتوماتون درختی فازی، تشخیص‌پذیر است. این مفاهیم را روی برخی اتوماتای درختی فازی نمایش می‌دهیم. همچنین، ثابت می‌کنیم که کلاس زبان‌های درخت فازی قابل تشخیص توسط اتوماتای درختی فازی قطعی، با کلاس نگاشت‌های مرحله‌ای تشخیص‌پذیر برابر است. در نهایت، نشان می‌دهیم که یک زبان درخت فازی توسط یک اتوماتون درختی فازی قطعی قابل تشخیص است اگر و فقط اگر آن زبان، یک نگاشت مرحله‌ای تشخیص‌پذیر نرمال باشد.

۱ مقدمه

نظریه مجموعه‌های فازی توسط زاده [۲۵] معرفی شد، که توسیعی از مجموعه‌های کلاسیک می‌باشد. این نظریه در زمینه‌های مختلف علمی مورد استفاده قرار گرفته

عبارات و کلمات کلیدی: اتوماتای درختی فازی، زبان درخت فازی، تشخیص‌پذیری، تکیه‌گاه، قطعی‌سازی

Email(s): .

Mathematics Subject Classification: 68Q45; 03D05

است. یکی از این زمینه‌ها علوم کامپیوتر و علی‌الخصوص نظریه اتوماتای فازی است که اولین بار توسط وی [۲۴] مطرح و در ادامه توسط محققان مختلفی توسعه یافت [۱، ۲، ۱۷، ۲۲]. یک اتوماتون فازی، ابزاری است که یک مجموعه فازی از کلمات (رشته ها)، که به آن‌ها زبان‌های فازی گویند، را می‌پذیرد.

در نظریه علوم کامپیوتر، درخت‌ها اغلب به عنوان تعمیمی از رشته‌ها در نظر گرفته میFشوند. نظریه اتوماتای درختی و زبان‌های درختی، تعمیمی از اتوماتای متناهی هستند که در اواسط دهه ۱۹۶۰ توسط دونر [1] [۴] و تاچر و رایت[2] [۲۳] معرفی شد. یک اتوماتون درختی متناهی، یک مجموعه از درخت‌ها، که به آن‌ها زبان‌های درختی تشخیص‌پذیر گویند، را می‌پذیرد.

یک مجموعه فازی از درخت‌ها را زبان درخت فازی تشخیص‌پذیر[3] (قابل تشخیص) گویند، اگر به وسیله یک اتوماتون درختی فازی[4] پذیرفته شود. اتوماتای درختی فازی توسط محققان زیادی مورد بررسی قرار گرفته است. ایناجکی و فوکامورا[5] [۱۵] اتوماتای درختی فازی را به عنوان حالت خاصی از اتوماتای درختی وزن‌دار در نظر گرفتند، که سری‌های درختی را روی یک حلقه متناهی می‌پذیرند. اسیک و لیو[6] [۶] یک قضیه کلین برای زبان‌های درخت فازی ارایه دادند و اتوماتای درختی فازی با درجه عضویت روی مشبکه‌های توزیع‌پذیر را بررسی کردند. مغاری و زاهدی [۱۹] یک الگوریتم مینیمم سازی برای اتوماتای درختی فازی ارایه کردند. خواص جبری اتوماتای درختی فازی در مراجع [۲۰، ۱۶] بررسی شده است. کاربرد اتوماتای درختی (فازی) در بسیاری از زمینه‌های علوم کامپیوتر مانند طراحی کامپایلر، چک کردن مدلها، تشخیص الگوها و بازیابی اطلاعات را می‌توان در مراجع [۳، ۱۸، ۲۱] مشاهده کرد. اتوماتای درختی فازی با درجه عضویت در $[0,1]$، تعمیمی از اتوماتای درختی کلاسیک هستند. قرآنی و همکاران [۷، ۸، ۹، ۱۰، ۱۱، ۱۲، ۱۳، ۱۴] اتوماتای درختی بر اساس منطق مشبکه-مقدار کامل را مورد بررسی قرار دادند و نتایجی از جمله قضیه کلین، لم تزریق و مینیمم سازی را برای

[1] Doner
[2] Tatcher and Wright
[3] Recognizable fuzzy tree language
[4] Fuzzy tree automaton
[5] Inagaki and Fukumura
[6] Esik and Liu

اتوماتای درختی مشبکه-مقدار به‌دست آوردند.

دروست[7] و همکاران [۵] ثابت کردند که زبان‌های اتوماتای وزن‌دار قابل تشخیص توسط اتوماتای قطعی وزن‌دار روی بیمونوئیدهای قوی، با نگاشت‌های مرحله‌ای تشخیص‌پذیر یکسان است. اکنون در این مقاله، این نتایج را به اتوماتای درختی فازی تعمیم می‌دهیم. برای این منظور، بعد از تعریف زبان درخت فازی مرحله‌ای تشخیص‌پذیر[8]، نشان می‌دهیم هر زبان درخت فازی تشخیص‌پذیر یک زبان درخت فازی مرحله‌ای تشخیص‌پذیر است. همچنین، یک اتوماتون درختی فازی قطعی[9] را تعریف کرده و نشان می‌دهیم تکیه‌گاه[10] یک زبان درخت فازی تشخیص‌پذیر یک زبان درخت فازی قابل تشخیص توسط یک اتوماتون درختی فازی قطعی است. در ادامه، ثابت می‌کنیم که کلاس زبان‌های درخت فازی قابل تشخیص توسط اتوماتای درختی فازی قطعی با کلاس نگاشت‌های مرحله‌ای تشخیص‌پذیر نرمال برابر است. قضایای ارایه شده، نتایج موجود در اتوماتای وزن‌دار [۵] را تعمیم می‌دهند.

این مقاله در پنج بخش تنظیم شده است. در بخش ۲، تعاریف اولیه در مورد اتوماتای درختی فازی را ارایه داده و مثال‌هایی برای واضح‌تر شدن موضوع آورده شده است. در بخش ۳، مفهوم زبان درخت مرحله‌ای تشخیص‌پذیر مورد بررسی قرار می‌گیرد. در بخش ۴، قطعی‌سازی اتوماتای درختی فازی بیان می‌شود و ارتباط بین زبان درخت مرحله‌ای تشخیص‌پذیر و اتوماتای فازی قطعی بررسی می‌گردد. در نهایت، نتایج و پیشنهادات برای کارهای آتی در بخش ۵ آورده شده است.

۲ تعاریف و قضایای اولیه

فرض کنیم $f : A \to B$ یک نگاشت باشد. مجموعه $\{b \in B \mid (\exists a \in A) : f(a) = b\}$ را با $im(f)$ نشان می‌دهیم. همچنین، فرض می‌کنیم $\mathbb{N}$ مجموعه اعداد صحیح نامنفی باشد. یک الفبای رتبه‌دار[11] یک جفت $(\mathcal{F}, Arity)$ است، که در آن $\mathcal{F}$ یک مجموعه

[7] Droste

[8] Recognizable step fuzzy tree language

[9] Deterministic

[10] Support

[11] Ranked alphabet

متناهی و ناتهی است و $Arity : \mathcal{F} \to \mathbb{N}$ تابع مرتبه است که در آن $Arity^{-1}(0) \neq \emptyset$. برای هر $k \in \mathbb{N}$، مجموعه $\{f \in \mathcal{F} \mid Arity(f) = k\}$ را با $\mathcal{F}_k$ نشان می‌دهیم. در ادامه مقاله، برای تعریف علامت‌ها و مرتبه آن‌ها، به اختصار، از پرانتز و کاما استفاده می‌کنیم. به عنوان مثال، $f(,)$ علامت دوتایی f می‌باشد. معمولاً، برای اختصار از $\mathcal{F}$ به جای $(\mathcal{F}, Arity)$ استفاده می‌کنیم.

تعریف ۱.۲. مجموعه درخت‌های روی $\mathcal{F}$ که با $T_{\mathcal{F}}$ نشان داده می‌شود، کوچکترین مجموعه روی $\mathcal{F}$ است، که در آن

الف) $\mathcal{F}_0 \subseteq T_{\mathcal{F}}$،

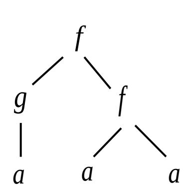
ب) اگر $k \in \mathbb{N}$، $f \in \mathcal{F}_k$ و $t_1, \ldots, t_k \in T_{\mathcal{F}}$، آن‌گاه $f(t_1, \ldots, t_k) \in T_{\mathcal{F}}$.

مثال ۲.۲. فرض کنید $\mathcal{F} = \{a, g(), f(,)\}$، که در آن $f \in \mathcal{F}_2$، $g \in \mathcal{F}_1$ و $a \in \mathcal{F}_0$. آن‌گاه داریم:

$$T_{\mathcal{F}} = \{a, g(a), f(a,a), f(a, g(a)), f(g(a), a), f(g(a), g(a)), f(g(a)$$

$$, f(g(a), a)), f(a, f(a,a)), \cdots\}.$$

توجه شود که درخت را می‌توان به‌صورت گرافیکی نیز ترسیم کرد. به عنوان مثال، درخت $f(g(a), f(a,a))$ به‌صورت زیر ترسیم می‌شود.



تعریف ۳.۲. یک اتوماتون درختی یک چندتایی $(Q, \mathcal{F}, \delta, Q_f) =$ است، که در آن

Q یک مجموعه ناتهی متناهی است که به آن مجموعه حالت‌ها گویند،

$\delta = (\delta_k \mid k \in \mathbb{N})$ یک خانواده از نگاشت‌های $\delta_k : Q^k \times \mathcal{F}_k \to Q$ (نگاشت‌های انتقال) است، و

$Q_f \subseteq Q$ یک مجموعه از حالت‌های نهایی است.

یک زبان درخت $L \subseteq_{\mathcal{F}}$ را تشخیص‌پذیر گویند، اگر یک اتوماتون درختی وجود داشته باشد به‌طوری‌که $= L$.

فرض کنید $L \subseteq_{\mathcal{F}}$. تابع مشخصه L در $[۰,۱]$، نگاشت $\chi_{([۰,۱],L)} :_{\mathcal{F}} \to \{۰,۱\}$ است که برای هر $t \in_{\mathcal{F}}$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\chi_{([۰,۱],L)}(t) = \begin{cases} ۱, & t \in L \text{ اگر} \\ ۰, & t \notin L \text{ اگر} \end{cases}$$

تعریف ۴.۲. یک اتوماتون درختی فازی یک چندتایی $= (Q, \mathcal{F}, \delta, Q_f)$ است، که در آن

Q یک مجموعه ناتهی متناهی است که به آن مجموعه حالت‌ها گویند،

$\delta = (\delta_k \mid k \in \mathbb{N})$ یک خانواده از نگاشت‌های $\delta_k : Q^k \times \mathcal{F}_k \times Q \to [۰,۱]$ (نگاشت‌های انتقال) است، و

$Q_f : Q \to [۰,۱]$ یک مجموعه از حالت‌های نهایی فازی است.

فرض کنید $t \in_{\mathcal{F}}$. آن‌گاه، درجه عضویت t در که با $\mu_(t)$ نمایش داده می‌شود، عنصری از $[۰,۱]$ است که به وسیله فرمول زیر تعریف می‌شود:

- $\mu_(t) = \delta(t,q)$، اگر $t \in \mathcal{F}_۰$،
- $\mu_(t) = \bigvee_{(q_۱,\ldots,q_k)} \Big(\big(\bigwedge_{i=۱}^{k} \mu_(t_i) \big) \wedge \delta\big((q_۱,\ldots,q_k), f, q\big) \Big)$، اگر $t = f(t_۱,\ldots,t_k)$.

زبان درخت فازی که با (t) نشان داده می‌شود، به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$(t) = \bigvee_{q \in Q} \mu_(t) \wedge Q_f(q). \qquad (۱)$$

یک زبان درخت فازی $L :_{\mathcal{F}} \to [۰,۱]$ تشخیص‌پذیر (قابل تشخیص) است، اگر یک اتوماتون درختی فازی وجود داشته باشد به‌طوری‌که $= L$. برای هر زبان درخت فازی

$L :_{\mathcal{F}} \to [\circ, ۱]$، تکیه‌گاه L که با (L) نمایش داده می‌شود، مجموعه‌ای به فرم

$$(L) = \{t \in_{\mathcal{F}} |\ L(t) > \circ\},$$

می‌باشد.

مثال ۵.۲. فرض کنید $(Q, \mathcal{F}, Q_f, \delta) =$ یک اتوماتون درختی فازی باشد، که در آن

$$Q = \{q_\circ, q_۱\},\ \mathcal{F} = \{b, g(), f(,)\},\ Q_{f_۱}(q_\circ) = \circ,\ Q_{f_۱}(q_۱) = \circ/۲,$$

و δ به‌صورت زیر است:

$$\delta(q_\circ, b) = \circ/۶, \qquad ,\delta(q_\circ, q_\circ, g) = \circ/۴, \qquad \delta\big((q_\circ, q_\circ), q_۱, f\big) = ۱.$$

اگر $t = f(b, b)$، آن‌گاه

$$\mu(t) = \delta(q_\circ, b) \wedge \delta\big((q_\circ, q_\circ), q_۱, f\big) = \circ/۶,$$

و

$$(t) = \mu(t) \wedge Q_f(q_۱) = \circ/۲.$$

اگر $t = f(g(b), g(b))$، آن‌گاه

$$\mu(t) = \delta(q_\circ, b) \wedge \delta(q_\circ, q_\circ, g) \wedge \delta\big((q_\circ, q_\circ), q_۱, f\big) = \circ/۴,$$

و

$$(t) = \mu(t) \wedge Q_f(q_۱) = \circ/۲.$$

همچنین، اگر $t = f(g^۲(b), g^۳(b))$، آن‌گاه

$$\mu(t) = \delta(q_\circ, b) \wedge \delta(q_\circ, q_\circ, g) \wedge \delta\big((q_\circ, q_\circ), q_۱, f\big) = \circ/۴,$$

و

$$(t) = \mu(t) \wedge Q_f(q_۱) = ۰/۲.$$

بنابراین، درخت‌های قابل تشخیص توسط این اتوماتون درختی فازی به‌صورت زیر می‌باشند:

$$t = f(g^n(b), g^m(b)),\ \forall n, m \geq ۰,$$

که در آن

$$\mu(t) = \begin{cases} ۰/۶, & t = f(b,b) \text{ اگر } \\ ۰/۴, & t = f(g^n(b), g^m(b))\ \ \forall n \geq ۰, m \geq ۱ \text{ یا } m \geq ۰, n \geq ۱ \text{ اگر } \\ ۰, & \text{در غیر اینصورت} \end{cases}$$

و

$$(t) = \mu(t) \wedge Q_f(q_۱) = ۰/۲.$$

همچنین، تکیه‌گاه به‌صورت زیر است:

$$() = \{f(g^n(b), g^m(b)) \mid n, m \geq ۰\}.$$

۳ نگاشت‌های مرحله‌ای تشخیص‌پذیر

تعریف ۱.۳. یک زبان درخت فازی $L :_{\mathcal{F}} \to [۰, ۱]$ را یک نگاشت مرحله‌ای تشخیص‌پذیر گویند، اگر زبان‌های درخت فازی تشخیص‌پذیر $L_۱, \ldots, L_n \subseteq_{\mathcal{F}}$ و $b_۱, \ldots, b_n \in [۰, ۱]$، $n \in \mathbb{N}$ وجود داشته باشند، به طوری که

$$L(t) = \bigvee_{i=۱}^{n} b_i \wedge \chi_{\left([۰,۱], L_i\right)}(t),\ \forall t \in_{\mathcal{F}} .$$

زبان‌های درخت $L_i, i = ۱, ..., n$، را زبان‌های مرحله‌ای گویند.

در قضیه زیر، رابطه بین زبان‌های فازی تشخیص‌پذیر و زبان‌های مرحله‌ای

تشخیص‌پذیر را بررسی می‌کنیم.

قضیه ۲.۳. *فرض کنید یک اتوماتون درختی فازی باشد. آن‌گاه، یک نگاشت مرحله‌ای تشخیص‌پذیر است.*

اثبات. [اثبات] فرض کنید $(Q, \mathcal{F}, \delta, Q_f) =$ یک اتوماتون درختی فازی باشد. مجموعه M را به فرم $M = (\delta) \cup (Q_f)$ تعریف می‌کنیم، که در آن $(\delta) = \bigcup_{k\in\mathbb{N}}(\delta_k)$. چون M مجموعه‌ای متناهی است، می‌توان فرض کرد $M = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$. مجموعه X را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$X = \bigcup_{I} \{\, \wedge_{i\in I}\, a_i \mid I \subseteq \{1, \ldots, m\}\}.$$

واضح است که X مجموعه‌ای متناهی است. همچنین، فرض کنید $t \in_{\mathcal{F}}$. لذا، داریم:

$$(t) = \bigvee_{q\in Q} \mu_(t) \wedge Q_f(q) = \bigvee_{a\in X} \bigvee_{\substack{q\in Q:\\ \mu_(t)\wedge Q_f(q)=a}} a \;=\; \bigvee_{a\in X} a \wedge \chi_{([0,1],L_a)}(t),$$

که در آن، $L_a = \{t \in_{\mathcal{F}} \mid \exists q \in Q : \mu_(t) \wedge Q_f(q) = a\}$ و آخرین تساوی از این حقیقت نتیجه می‌شود که $\vee$ خودتوان است. بنابراین، کافیست ثابت کنیم L_a، برای هر $a \in X$، یک زبان درخت فازی تشخیص‌پذیر است. برای هر $a \in X$، اتوماتون درختی فازی $'_a = (Q', \mathcal{F}', \delta', Q'_{f_a})$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$Q' = \{(q, x) \mid q \in Q, x \in X\}$،

برای هر $k \in \mathbb{N}$، $\sigma \in \mathcal{F}_k$ و $(q_1, x_1), \ldots, (q_k, x_k), (q, x) \in Q'$، تعریف می‌کنیم:

$$\delta'\big(\sigma, (q, x)\big) = \begin{cases} 1, & x = \delta(\sigma, q) \text{ اگر} \\ 0, & \text{در غیر اینصورت} \end{cases}$$

و

$$\delta'\Big(\big((q_1, x_1), \cdots, (q_k, x_k)\big), \sigma, (q, x)\Big) = \begin{cases} 1, & x = \big(\bigwedge_{i=1}^{k} x_i\big) \wedge \delta\big((q_1, \cdots, q_k), \sigma, q\big) \text{ اگر} \\ 0, & \text{در غیر اینصورت} \end{cases}$$

برای هر $(q,x) \in Q'$، تعریف می‌کنیم:

$$Q'_{f_a}(q,x) = \begin{cases} ۱, & x \wedge Q_f(q) = a \text{ اگر} \\ ۰, & \text{در غیر اینصورت} \end{cases}$$

فرض کنید $t \in T_{\mathcal{F}}$ و $a \in X$. رابطه هم‌ارزی زیر واضح است:

$$\exists q \in Q_f \ s.t. \ \mu_{(}t) \wedge Q_f(q) = a$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\exists (q,x) \in Q'_{f_a} \ s.t. \ \mu_{'_a}(t) \wedge Q'_{f_a}(q,x) = ۱.$$

بنابراین، داریم:

$$t \in (_{a}') \ \Leftrightarrow {}'_{a}(t) = ۱$$

$$\Leftrightarrow \tag{۲}$$

$$\Big(\bigvee\nolimits_{(q,x)\in Q'} \mu_{'_a}(t) \wedge Q'_{f_a}(q,x)\Big) = ۱$$

$$\Leftrightarrow \tag{۳}$$

$$\exists (q,x) \in Q' \ s.t. \ \mu_{'_a}(t) \wedge Q'_{f_a}(q,x) = ۱$$

$$\Leftrightarrow \tag{۴}$$

$$\exists q \in Q \ s.t. \ \mu_{(}t) \wedge Q_f(q) = a$$

$$\Leftrightarrow \tag{۵}$$

$$t \in L_a. \tag{۶}$$

لذا، L_a یک زبان درخت فازی تشخیص‌پذیر است. بنابراین، یک نگاشت مرحله‌ای تشخیص‌پذیر است. □

قضیه ۳.۳. *فرض کنید $L : T_{\mathcal{F}} \to [۰, ۱]$ یک زبان درخت فازی باشد. آن‌گاه، L یک نگاشت مرحله‌ای تشخیص‌پذیر است اگر و فقط اگر $im(L)$ متناهی باشد و به ازای هر $a \in im(L)$، زبان L_a تشخیص‌پذیر باشد، که در آن*

$$L_a = \{t \in T_{\mathcal{F}} \,|L(t) = a\}.$$

اثبات. فرض کنید $L_۱, \ldots, L_n \subseteq T_{\mathcal{F}}$ تشخیص‌پذیر باشند و $a_۱, \ldots, a_n \in [۰, ۱]$، به‌طوری‌که

$$L = \bigvee_{i=۱}^{n} a_i \wedge \chi_{([۰,۱], L_i)}.$$

واضح است که $im(L)$ متناهی است. برای هر $I \subseteq \{۱, ۲, \ldots, n\}$، فرض کنید

$$L'_I = \bigcap_{i \in I} L_i \cap \bigcap_{i \in \{۱,۲,\ldots,n\} \setminus I} T_{\mathcal{F}} \setminus L_i, \qquad a_I = \vee_{i \in I} a_i,$$

چون زبان‌های تشخیص‌پذیر تحت اعمال اشتراک و متمم بسته هستند [۳]، هر L'_I تشخیص‌پذیر است. همچنین، زبان‌های L'_I افرازی از $T_{\mathcal{F}}$ هستند. بنابراین،

$$L = \bigvee_{I \subseteq \{۱,۲,\ldots,n\}} a_I \wedge \chi_{L'_I}.$$

در نتیجه،

$$L_a = \bigcup \{L'_I | I \subseteq \{۱, ۲, \ldots, n\}, a_I = a\},$$

تشخیص‌پذیر است.
برای اثبات عکس قضیه، داریم:

$$L = \bigvee_{a \in im(L)} a \wedge \chi_{L_a},$$

که در آن L_a تشخیص‌پذیر است. در نتیجه، L یک نگاشت مرحله‌ای

تشخیص‌پذیر است. □

۴ قطعی‌سازی

تعریف ۱.۴. یک اتوماتون درختی فازی را قطعی[۱۲] گویند، هرگاه برای هر $k \in \mathbb{N}$، $\sigma \in \mathcal{F}_k$ و $q_1, \ldots, q_k \in Q$، حداکثر یک $q \in Q$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که:

$\delta\big((q_1, \ldots, q_k), \sigma, q\big) = 1$ و

$\delta\big((q_1, \ldots, q_k), \sigma, q'\big) = 0, \ \forall q' \in Q \setminus \{q\}$.

مثال ۲.۴. اتوماتون درختی فازی $= (Q, \mathcal{F}, Q_f, \delta)$ را به‌صورت زیر در نظر بگیرید:

$$Q = \{q_0, q_1, q_2\}, \ \mathcal{F} = \{a, g(), f(,)\}, \ Q_{f_1}(q_0) = 0/6, \ Q_{f_1}(q_1) = 0/8,$$

و δ به‌صورت زیر است:

$$\delta(q_0, a) = 1, \qquad \delta(q_0, q_1, g) = 1, \qquad \delta\big((q_0, q_1), q_2, f\big) = 1.$$

واضح است که اتوماتون قطعی است.

در قضیه زیر، نشان می‌دهیم تکیه‌گاه یک زبان درخت فازی، یک زبان درخت فازی تشخیص‌پذیر است.

قضیه ۳.۴. *فرض کنید $(Q, \mathcal{F}, \delta, Q_f) =$ یک اتوماتون درختی فازی باشد. آن‌گاه، () یک زبان درخت فازی تشخیص‌پذیر است.*

اثبات. فرض کنید $(Q, \mathcal{F}, \delta, Q_f) =$ یک اتوماتون درختی فازی باشد. یک اتوماتون درختی قطعی $(Q', \mathcal{F}, \delta', Q'_f) = '$ به‌صورت زیر می‌سازیم:

$Q' = 2^Q$،

[۱۲] Deterministic

$\delta'\big((s_1, \cdots, s_n), \sigma, s\big) = 1$ اگر و فقط اگر

$s = \{q \in Q \mid \exists q_1 \in s_1, \cdots, q_n \in s_n, \delta\big((q_1, \cdots, q_n), \sigma, q\big) \neq 0\}$،

$Q'_f(s) = 1$ اگر و فقط اگر $q \in s$ وجود داشته باشد، به‌طوری‌که $Q(q) \neq 0$.

اکنون، نشان می‌دهیم $() = '$. برای این منظور، با استقرا روی طول درخت‌ها ثابت می‌کنیم:

$$\exists\ q' \in Q'_f\ s.t.\ \mu_{'}(t) \wedge Q'_f(q') = 1$$

$$\Leftrightarrow \tag{7}$$

$$\exists\ q \in Q_f\ s.t.\ \mu_(t) \wedge Q_f(q) = a. \tag{8}$$

آغاز استقرا:

ابتدا $t = a \in \mathcal{F}_0$ را بررسی می‌کنیم. فرض کنید $\delta'(a, s) \wedge Q'_f(s) = 1$. بنابراین، $\delta'(a, s) = 1$، که در آن $s = \{q \in Q \mid \delta(a, q) \neq 0\}$ و $Q'_f(s) = 1$. از آنجایی که $Q'_f(s) = 1$، نتیجه می‌گیریم $q \in s$ وجود دارد به‌طوری‌که $Q_f(q) \neq 0$. در نتیجه، داریم $\delta(a, q) \wedge Q_f(q) \neq 0$. اکنون، فرض کنید $\delta(a, q) \wedge Q_f(q) \neq 0$. لذا، $\delta(a, q) \neq 0$ و $Q_f(q) \neq 0$. بنابراین، $\delta'(a, s) = 1$ و $Q'_f(s) = 1$ که در آن $q \in s$. در نتیجه، داریم $\delta'(a, s) \wedge Q'_f(s) = 1$. لذا، نشان دادیم $\forall a \in \mathcal{F}_0$، $\delta'(a, s) \wedge Q'_f(s) = 1$ اگر و فقط اگر $\delta(a, q) \wedge Q_f(q) \neq 0$.

مرحله استقرا:

یک درخت $t = f(t_1, \cdots, t_n)$ را در نظر بگیرید. داریم

$$\begin{aligned}
&\mu_{'}(t) \wedge Q'_f(s) = 1, \quad s \in Q' \\
&\Rightarrow \big(\wedge_{i=1}^{n} \mu_{'}(t_i)\big) \wedge \delta'\big((s_1, \cdots, s_n), f, s\big) \wedge \big(\wedge_{i=1}^{n} Q'_f(s_i)\big) \wedge Q'_f(s) = 1, \\
&\qquad s_i \in Q',\ 1 \leq i \leq n \\
&\Rightarrow\ \wedge_{i=1}^{n} \big(\mu_{'}(t_i) \wedge Q'_f(s_i)\big) = 1,\ \delta'\big((s_1, \cdots, s_n), f, s\big) = 1 \text{ و } Q'_f(s) = 1 \\
&\Rightarrow \mu_{'}(t_i) \wedge Q'_f(s_i) = 1,\ \forall i, i \in \{1, \cdots, n\},\ \delta'\big((s_1, \cdots, s_n), f, s\big) = 1 \text{ و } Q'_f(s) = 1 \\
&\Rightarrow\ \exists q_1 \in s_1, \cdots, q_n \in s_n, q \in s, \quad \mu_(t_i) \wedge Q_f(q_i) \neq 0,\ \forall i, i \in \{1, \cdots, n\},
\end{aligned}$$

$$\delta\big((q_1,\cdots,q_n),f,q\big)\neq 0 \text{ و } Q_f(q)\neq 0 \quad (\text{ با استفاده از فرض استقرا})$$
$$\Rightarrow \big(\wedge_{i=1}^{n}\mu(t_i)\big)\wedge\delta\big((q_1,\cdots,q_n),f,q\big)\wedge\big(\wedge_{i=1}^{n}Q_f(q_i)\big)\wedge Q_f(q)\neq 0$$
$$\Rightarrow \mu(t)\wedge Q_f(q)\neq 0.$$

لذا، نشان دادیم اگر $s\in Q'$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $\mu_{'}(t)\wedge Q'_f(s)=1$، آن‌گاه $q\in Q$ وجود دارد به‌گونه‌ای که $\mu(t)\wedge Q_f(q)\neq 0$. با روشی مشابه، عکس این مطلب را می‌توان نشان داد. □

از قضیه بالا، نتیجه زیر حاصل می‌شود:

نتیجه ۴.۴. *اگر یک اتوماتون درختی فازی باشد، آن‌گاه یک اتوماتون درختی فازی قطعی $'$ وجود دارد به‌طوری‌که $()='$.*

در ادامه، مثالی ارایه می‌دهیم که یک اتوماتون درختی فازی را به یک اتوماتون درختی فازی قطعی $'$ تبدیل می‌کند، به‌طوری‌که $()='$.

مثال ۵.۴. فرض کنید $(Q,\mathcal{F},Q_f,\delta)=$ یک اتوماتون درختی فازی باشد، که در آن

$$Q=\{q_0,q_1,q_2\},\ \mathcal{F}=\{a,g(),f(,)\},\ Q_f(q_0)=0,\ Q_f(q_1)=0.5,\ Q_f(q_2)=0.7,$$

و δ به‌صورت زیر است:

$$\delta(q_0,a)=0.6,\qquad \delta(q_0,q_0,g)=0.4,\qquad \delta(q_0,q_1,g)=0.6,$$
$$\delta(q_1,q_2,g)=0.3,\qquad \delta\big((q_0,q_0),q_0,f\big)=1.$$

واضح است که، زبان درخت فازی قابل تشخیص توسط به‌صورت زیر است:

$$(t)=\begin{cases}0.5, & t=g(a)\ \text{اگر}\\ 0.4, & t=g^n(a),\ \forall n\geq 2\ \text{اگر}\\ 0, & \text{در غیر اینصورت}\end{cases}$$

همچنین، تکیه‌گاه به‌صورت زیر است:

$$() = \{g^n(a) \mid n \geq ۱\}.$$

حال، اتوماتون درختی فازی قطعی $' = (Q', \mathcal{F}', Q'_f, \delta')$ را با استفاده از اثبات قضیه ۳.۴ به‌صورت زیر می‌سازیم:

- $Q' = \{\{q_۰\}, \{q_۰, q_۱\}, \{q_۰, q_۱, q_۲\}\}$،
- $Q'_f(\{q_۰, q_۱, q_۲\}) = ۱, \quad Q'_f(\{q_۰, q_۱\}) = ۱$،
-

$$\begin{aligned} &\delta(\{q_۰\}, a) = ۱, && \delta(\{q_۰, q_۱\}, \{q_۰, q_۱, q_۲\}, g) = ۱, \\ &\delta(\{q_۰\}, \{q_۰, q_۱\}, g) = ۱, && \delta(\{q_۰, q_۱, q_۲\}, \{q_۰, q_۱, q_۲\}, g) = ۱, \\ &\delta\big((s_۱, s_۲), \{q_۰\}, f\big) = ۱, \ \forall s_۱, s_۲ \in Q'. \end{aligned}$$

مشاهده می‌شود که زبان قابل تشخیص توسط $'$ به‌صورت زیر است:

$$'(t) = \begin{cases} ۱, & t = g^n(a), \ \forall n \geq ۱ \text{ اگر} \\ ۰, & \text{در غیر اینصورت} \end{cases}$$

بنابراین، داریم $() = '$.

در ادامه، ثابت می‌کنیم که کلاس زبان‌های درخت فازی قابل تشخیص توسط اتوماتای درختی فازی قطعی با کلاس نگاشت‌های مرحله‌ای تشخیص‌پذیر برابر است. برای این منظور، قضیه زیر را داریم.

قضیه ۶.۴. *فرض کنید $L : T_{\mathcal{F}} \to [۰, ۱]$ یک زبان درخت فازی باشد. آن‌گاه،*

- *(۱) اگر L یک نگاشت مرحله‌ای تشخیص‌پذیر باشد، آن‌گاه یک اتوماتون درختی فازی قطعی وجود دارد به‌طوری‌که $L = $.*

- (۲) *اگر یک اتوماتون درختی فازی قطعی وجود داشته باشد به‌طوری‌که $L =$ ، آن‌گاه L یک نگاشت مرحله‌ای تشخیص‌پذیر است.*

اثبات. (۱): ابتدا، فرض کنید $L(t) = \bigvee_{i=1}^{n} b_i \wedge \chi_{\left([0,1],L_i\right)}(t)$ یک نگاشت مرحله‌ای تشخیص‌پذیر باشد. برای هر $i \in \{1,2,\ldots,n\}$، فرض کنید $_i = (Q_i, \mathcal{F}, \delta_i, Q_{f_i})$ یک اتوماتون فازی قطعی باشد، به‌طوری‌که $L_i = (_i)$.
حال، اتوماتون درختی فازی $= (Q, \mathcal{F}, \delta, Q_f)$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$Q = Q_1 \times Q_2 \times \ldots \times Q_n$،

برای هر $k \in \mathbb{N}$، $f \in \mathcal{F}_k$ و $P_1, P_2, \ldots, P_k, P \in Q$:

$$\delta\big((P_1,\ldots,P_k),f,P\big) = \begin{cases} 1, & \delta_i\big((p_{i1},p_{i2},\ldots,p_{ik}),f,p_i\big) = 1,\ \forall i, 1 \leq i \leq n \text{ اگر} \\ 0, & \text{در غیر اینصورت} \end{cases}$$

که در آن، $P_j = (p_{1j}, p_{2j}, \ldots, p_{nj}),\ \forall j \in \{1,2,\ldots,k\}$.

برای هر $P \in Q$:

$$Q_f(P) = \bigvee_{i=1,\ Q_{f_i}(p_i)=1}^{n} b_i.$$

واضح است که قطعی است. فرض کنید $t \in T_{\mathcal{F}}$ و $P \in Q$، جائیکه $\mu(t)(P) = 1$.
آن‌گاه، $t \in L_i$ اگر و فقط اگر $Q_{f_i}(p_i) = 1,\ \forall i \in \{1,2,\ldots,k\}$. لذا، داریم

$$L(t) = \bigvee_{i=1}^{n} b_i = Q_f(P) = (t).$$

(۲): از قضیه ۲.۳ نتیجه می‌شود. □

ازقضیه ۶.۴، نتیجه زیر حاصل می‌شود:

نتیجه ۷.۴. *فرض کنید $L : T_{\mathcal{F}} \to [0,1]$ یک زبان درخت فازی باشد. آن‌گاه، L یک نگاشت مرحله‌ای تشخیص‌پذیر است اگر و فقط اگر یک اتوماتون درختی فازی قطعی وجود داشته باشد به‌طوری‌که $L =$.*

با استفاده از قضایای ۳.۳ و ۶.۴، نتیجه زیر به‌دست می‌آید:

نتیجه ۸.۴. *فرض کنید $L : T_{\mathcal{F}} \to [۰,۱]$ یک زبان درخت فازی باشد. آن‌گاه، L یک زبان درخت قابل تشخیص توسط یک اتوماتون درختی فازی قطعی است اگر و فقط اگر $im(L)$ متناهی باشد و به ازای هر $a \in im(L)$، عبارت L_a تشخیص‌پذیر باشد.*

تعریف ۹.۴. یک نگاشت مرحله‌ای تشخیص‌پذیر را نرمال گویند، اگر خانواده زبان‌های مرحله‌ای آن افرازی از $T_{\mathcal{F}}$ باشند.

قضیه ۱۰.۴. *فرض کنید L یک زبان درخت فازی قابل تشخیص توسط اتوماتون درختی فازی قطعی باشد، به‌طوری‌که $L =$. آن‌گاه، L یک نگاشت مرحله‌ای تشخیص‌پذیر نرمال است.*

اثبات. فرض کنید $= (Q, F, Q_f, \delta)$ یک اتوماتون درختی فازی قطعی باشد. برای هر $q \in Q$، اتوماتون درختی فازی قطعی $^q = (Q, F, Q_f^q, \delta)$ را به‌صورت زیر می‌سازیم:

$$Q_f^q(p) = \begin{cases} ۱, & \text{اگر } q = p \\ ۰, & \text{در غیر اینصورت} \end{cases}$$

واضح است که، $^q(t) = ۱$ اگر و فقط اگر $\chi_{\left([۰,۱],supp(^q)\right)}(t) = ۱$. بنا به قضیه ۳.۴، $supp(^q)$ تشخیص‌پذیر است. همچنین، $(supp(^q | q \in Q)$ افرازی از $T_{\mathcal{F}}$ می باشد. بنابراین، برای هر $t \in T_{\mathcal{F}}$ داریم:

$$(t) = \bigvee_{q \in Q} Q_f(q) \wedge \chi_{([۰,۱],supp(^q))}(t).$$

بنابراین، یک نگاشت مرحله‌ای تشخیص‌پذیر نرمال است. $\square$

نتیجه ۱۱.۴. *فرض کنید $L : T_{\mathcal{F}} \to [۰,۱]$ یک زبان درخت فازی باشد. آن‌گاه، جملات زیر هم‌ارز هستند:*

۱) *یک اتوماتون درختی فازی قطعی وجود دارد به‌طوری‌که $L =$.*

۲) *L یک نگاشت مرحله‌ای تشخیص‌پذیر نرمال است.*

۳) L *یک نگاشت مرحله‌ای تشخیص‌پذیر است.*

۴) $im(L)$ *متناهی است و به ازای هر* $a \in im(L)$*، عبارت* L_a *تشخیص‌پذیر است، که در آن*

$$L_a = \{t \in T_{\mathcal{F}} | L(t) = a\}.$$

اثبات. [اثبات] با توجه به قضایای ۱۰.۴، ۳.۳ و ۸.۴، اثبات بدیهی است. □

۵ نتیجه‌گیری

در این مقاله، اتوماتای درختی فازی مورد بررسی قرار گرفت. نشان دادیم که هر زبان درخت فازی تشخیص‌پذیر یک زبان درخت مرحله‌ای تشخیص‌پذیر است. فرایند قطعی‌سازی یک اتوماتون درختی فازی را پیگیری کردیم و ثابت کردیم که زبان درخت فازی تشخیص‌پذیر، یک زبان درخت فازی تشخیص‌پذیر توسط یک اتوماتون درختی فازی قطعی است. همچنین، ثابت کردیم کلاس زبان‌های درخت فازی تشخیص‌پذیر توسط اتوماتای درختی فازی قطعی، با کلاس نگاشت‌های مرحله‌ای تشخیص‌پذیر (نرمال) برابر است. قضایای ارایه شده، نتایج موجود در اتوماتای وزن‌دار [۵] و اتوماتای درختی کلاسیک [۳] را تعمیم می‌دهد.
به هر حال، مباحثی از جمله بررسی متناظر بودن یک اتوماتون درختی فازی با اتوماتون درختی نرود، می‌تواند در ادامه کارهای تحقیقاتی پیگیری شود. همچنین، سعی می‌کنیم در تحقیقات بعدی شرایطی برای قطعی کردن یک اتوماتون درختی فازی در حالتی که اجرای لغوی آن حفظ شود، به‌دست آوریم.

مراجع

[1] K. Abolpour, M.M. Zahedi, (2021), LB-valued general fuzzy automata, Fuzzy Sets and Systems, in press, https://doi.org/10.1016/j.fss.2021.08.017

[2] K. Abolpour, M.M. Zahedi, M. Golmohamadian, (2011), Some hyper K-algebraic structures induced by max-min general fuzzy automata, Iranian Journal of Fuzzy Systems, 8(1), 113-134.

[3] H. Comon, M. Dauchet, R. Gilleron, F. Jacquemard, D. Lugiez, C. Loding, S. Tison, M. Tommasi, (2007), Tree Automata: Technigues and Applications, Available: http://tata.gforge.inria.fr.

[4] J.E. Doner, (1965), Decidability of the weak second-order theory of two successors, Not. Am. Math. Soc. 12(1), 365–368.

[5] M. Droste, T. Stuber, H. Vogler, (2010). Weighted finite automata over strong bimonoids, Information Sciences, 180(1), 156-166.

[6] Z. Esik, G. Liu, (2007), Fuzzy tree automata, Fuzzy Sets and Systems, 158, 1450-1460.

[7] M. Ghorani, (2019), On characterization of fuzzy tree pushdown automata, Soft Computing 23(4), 1123-1131.

[8] M. Ghorani, (2018), State hyperstructures of tree automata based on lattice-valued logic, RAIRO-Theoretical Informatics and Applications, 52(1), 23-42.

[9] M. Ghorani, (2018), Tree automata based on complete residuated lattice-valued logic: reduction algorithm and decision problem, Iranian Journal of Fuzzy Systems, 15(7), 103-119.

[10] M. Ghorani, S. Garhwal, (2021), A minimization algorithm for fuzzy top-down tree automata over lattices, Journal of Intelligent & Fuzzy Systems, 40(3), 4471-4480.

[11] M. Ghorani, S. Moghari, (2021), Decidability of the minimization of fuzzy tree automata with membership values in complete lattices, Journal of Applied Mathematics and Computing, in press, https://doi.org/10.1007/s12190-021-01529-6

[12] M. Ghorani, M.M. Zahedi, (2012), Characterizations of complete residuated lattice-valued finite tree automata, Fuzzy Sets and Systems, 199, 28-46.

[13] M. Ghorani, M.M. Zahedi, (2017), Coding tree languages based on lattice valued logic, Soft Computing, 21(14), 3815-3825.

[14] M. Ghorani, M.M. Zahedi, R. Ameri, (2012), Algebraic properties of complete residuated lattice valued tree automata, Soft Computing, 16(10), 1723-1732.

[15] Y. Inagaki, T. Fukumura, (1975), On the description of fuzzy meaning of context-free language, in: Fuzzy Sets and Their Applications to Cognitive and Decision Processes, Proc. Japan Seminar, University of California, Berkeley, CA, 1974, Academic Press, New York, pp. 301-328.

[16] E. Jurvanen, M. Steinby, (2019), Fuzzy deterministic top-down tree automata, arXiv:1911.11529v1.

[17] L. Li, D. Qiu, (2015), On the state minimization of fuzzy automata, IEEE Transaction on Fuzzy Systems, 23(2), 434-443.

[18] Y. Li, Z. Ma, (2015), Quantitative computational tree logic model checking based on generalized possibility measures, IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 23(6), 2034- 2047.

[19] S. Moghari, M.M. Zahedi, (2016), Similarity-based minimization of fuzzy tree automata, J. Appl. Math. Comput., 50(1), 417-436.

[20] S. Moghari, M.M. Zahedi, (2019), Multidimensional fuzzy finite tree automata, Iranian Journal of Fuzzy Systems, 16(5), 155-167.

[21] H.Y. Pan, Y. Li, Y.Z. Cao, Z. Ma, (2016), Model checking computation tree logic over finite lattices, Theoretical Computer Science, 612, 45-62.

[22] M. Shamsizadeh, M.M. Zahedi, (2019), Bisimulation of type 2 for BL-general fuzzy automata, Soft Computing 23 (20), 9843-9852.

[23] J.W. Thatcher, J.B. Wright, (1968), Generalized finite automata with an application to a decision problem of second-order logic, Math. Syst. Theory, 2(1), 57–82.

[24] W.G. Wee, (1967), On generalization of adaptive algorithm and application of the fuzzy sets concept to pattern classification. Ph.D. thesis, Purdue University, Lafayette, IN

[25] L.A. Zadeh, (1965), Fuzzy sets. Inf. Control, 8(3), 338–353.