

یک مدل عصبی پویای کارا برای حل مسایل بهینه سازی ناهموار مقید با محدودیت‌های آفین و کران‌دار

محمدجواد عبادی*، حامد فراهانی و حسین جعفری

گروه ریاضی، دانشگاه دریانوردی و علوم دریایی چابهار، چابهار، ایران

تاریخ پذیرش: ۱۴۰۰/۱۲/۱۲

تاریخ دریافت: ۱۴۰۰/۹/۱

چکیده

در این مقاله یک مدل غیرجریمه‌ای مبتنی بر شمول دیفرانسیلی برای حل مسایل بهینه‌سازی مقید با قيود کران‌دار و تساوی خطی پیشنهاد گردیده است. همگرایی خط سیرها به ناحیه‌ی شدنی مساوی در زمان متناهی را اثبات نموده‌ایم. هم‌چنین معادل بودن نقطه تعادلی شبکه عصبی پیشنهادی با جواب بهینه‌ی مسأله بهینه‌سازی اصلی را نشان داده‌ایم. به‌علاوه پایداری شبکه‌ی پیشنهادی به مفهوم لیاپانوف و همگرایی سراسری آن به جواب بهینه‌ی دقیق مسأله بهینه‌سازی اصلی اثبات گردیده است. مدل پیشنهادی در مقایسه با مدل‌های موجود برای حل مسایل بهینه‌سازی محدب ناهموار فاقد پارامتر جریمه یا تابع جریمه بوده و پیاده‌سازی آن آسان‌تر می‌باشد. به‌عنوان کاربرد، شبکه عصبی پیشنهادی به یک مدل برای حل مسایل بهینه‌سازی محدب ناهموار مقید با قيود مساوی خطی و $x \geq 0$ تبدیل شده است. در انتها برای نشان دادن کارایی مدل پیشنهادی تعدادی مثال ارایه گردیده است.

عبارات و کلمات کلیدی: بهینه‌سازی محدب ناهموار، خطی مساوی، شبکه عصبی، شمول دیفرانسیلی، پایداری لیاپانوف.

Email(s): .

۱۴۰۰ انجمن سیستم‌های فازی ایران

Mathematics Subject Classification: 90C30, 65K05

۱ سرآغاز:

مسایل بهینه‌سازی مقید کاربردهای زیادی در علوم و مهندسی از جمله در کنترل ربات، پردازش سیگنال و تصویر، طراحی سیستم‌های صنعتی، تشخیص الگو و مانند آن دارند [۶، ۴، ۱۴، ۱۵، ۲۴، ۲۵، ۲۹، ۱۶، ۱۷]. برای حل مسایل بهینه‌سازی، شبکه‌های عصبی مختلف از دهه ۱۹۶۰ میلادی پیشنهاد گردیده است. تانک و هاپفیلد [۵۲]، اولین مدل شبکه عصبی را پیشنهاد دادند که برای حل مسایل برنامه‌ریزی خطی معرفی شده بود. مدل‌های شبکه عصبی مختلف با الهام از مدل پیشنهادی تانک و هاپفیلد برای حل مسایل بهینه‌سازی خطی و غیرخطی طراحی شده‌اند. به‌عنوان نمونه یک شبکه عصبی برای حل مسایل برنامه‌ریزی غیرخطی مبتنی بر روش کاهش نیوتن و پارامتر جریمه متناهی به‌وسیله‌ی کندی و چوا [۳۳]، پیشنهاد شد. در صورت انتخاب پارامتر جریمه‌ای خیلی بزرگ، این مدل در اجرا با مشکلاتی مواجه خواهد شد و به‌دلیل وجود پارامتر جریمه‌ای متناهی در ساختار مدل، به جوابی تقریبی همگرا می‌شود. شبکه‌های لاگرانژی نوع دیگری از شبکه‌های عصبی اند که برای حل مسایل برنامه‌ریزی غیرخطی طراحی شده‌اند. برای حل برخی از مسایل بهینه‌سازی اکیداً محدب با قیود مساوی، ژانگ و کنستانتینیدز [۶۴] و عفتی و بایمانی [۱۸]، یک مدل شبکه لاگرانژی طراحی نمودند به‌گونه‌ای که به یک شرط قوی برای همگرایی نیاز بود. وانگ [۵۳]، یک شبکه قطعی برای مسایل برنامه‌ریزی محدب ارایه نمود. هم‌چنین وانگ و همکاران [۵۴]، شبکه عصبی لاگرانژی دیگری پیشنهاد دادند که قابلیت حل مسایل برنامه‌ریزی غیرخطی با قیود مساوی داشت. یک مدل شبکه عصبی از نوع تصویری برای حل مسایل برنامه‌ریزی محدب غیرخطی با قیود خطی توسط ژیا و وانگ [۶۰] پیشنهاد گردید. برخی شبکه‌های عصبی از نوع تصویری که توسط ژیا و وانگ [۵۷] و ژیا و همکاران [۵۸] برای حل مسایل برنامه‌ریزی غیرخطی و محدب سراسری پیشنهاد شده‌اند به یک جواب بهینه‌ی دقیق همگرای سراسری می‌باشند. بیشتر شبکه‌های عصبی موجود برای حل مسایل بهینه‌سازی محدب دارای توابع هدف مشتق‌پذیر طراحی شده‌اند از جمله [۵۳، ۶۰، ۶۱، ۵۶، ۳۸، ۲۲، ۶۲، ۳۶، ۲۸، ۵۹، ۹، ۴۹، ۱۹، ۲۰] تا جایی‌که می‌دانیم حل مسایل بهینه‌سازی محدب ناهموار مشکل‌تر از مسایل مشتق‌پذیر حتی در حالت نامقید می‌باشد. به این نکته باید توجه نمود که مسایل کمینه‌سازی ناهموار اغلب در بسیاری از

کاربردها از جمله در داده کاوی، حالت لغزشی، پالایش تصویر، کنترل بهینه، پردازش سیگنال، آموزش شبکه عصبی، اقتصاد، شیمی محاسباتی و فیزیک محاسباتی (به [۵۱، ۴۷، ۴۸، ۵] و مراجع داخل آن‌ها مراجعه کنید) ظاهر می‌شوند. بنابراین تلاش‌هایی در راستای طراحی مدل‌هایی برای حل مسایل بهینه‌سازی محدب ناهموار از جمله [۵۵، ۱، ۳۱، ۳۴، ۳۰، ۳۷، ۸، ۶۳، ۱۳، ۳۵، ۳۹، ۴۱، ۴۰، ۲۶، ۲۷، ۱۴] صورت گرفت. لی و همکاران [۳۵]، شبکه عصبی تصویری را برای حل مسایل بهینه‌سازی محدب ناهموار با محدودیت‌های کران‌دار توسعه دادند. در [۳۹]، یک شبکه عصبی بازگشتی دو لایه برای حل مسایل بهینه‌سازی محدب ناهموار با قیود مساوی خطی و کران‌دار معرفی شده است. لیو و وانگ [۴۱]، مدلی برای حل مسایل بهینه‌سازی محدب ناهموار با قیود مساوی خطی بدون هیچ‌گونه محدودیتی بر مقادیر پیشنهاد دادند. به‌علاوه لیو و وانگ [۴۰]، یک شبکه عصبی بازگشتی برای حل مسایل درجه دوم با قیود مساوی خطی و کران‌دار که دارای پارامتر جریمه‌ای است، ارائه نمودند. اخیراً حسینی و همکاران [۲۶] و عبادی و همکاران [۱۴] مدل‌های غیرجریمه‌ای برای حل مسایل بهینه‌سازی محدب ناهموار با قیود به ترتیب نامساوی و مساوی خطی و غیرخطی پیشنهاد داده‌اند. مسأله بهینه‌سازی غیرخطی مقید زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) \\ \text{subject to} \quad & Ax = b, \quad u \leq x \leq v, \end{aligned} \quad (1)$$

که در آن $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ، ماتریس ضرایب $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ، $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$ از رتبه کامل بوده (یعنی $rank(A) = m \leq n$) و $b \in \mathbb{R}^m$ است. تابع هدف f محدب است و ممکن است در ناحیه شدنی $\Omega = \Omega_1 \cap \Omega_2 = \{x \in \mathbb{R}^n | Ax = b, u \leq x \leq v\}$ ناهموار باشد که $\Omega_1 = \{x \in \mathbb{R}^n | u \leq x \leq v\}$ و $\Omega_2 = \{x \in \mathbb{R}^n | Ax = b\}$ می‌باشند. در این مقاله با فرض این‌که مسأله بهینه‌سازی غیرخطی (۱) حداقل یک جواب بهینه دارد، یک شبکه عصبی بازگشتی غیر جریمه‌ای مبتنی بر شمول دیفرانسیلی برای حل (۱) پیشنهاد می‌کنیم. حوزه بهینه‌سازی عصبی پویا می‌تواند از مسایل بهینه‌سازی محدب هموار به ناهموار تعمیم یابد. همگرایی مدل پیشنهادی سراسری است بدین معنا که نیازی به انتخاب مقدار اولیه از درون ناحیه‌ی شدنی نمی‌باشد. همگرایی سراسری و هم‌چنین

پایداری مدل پیشنهادی به مفهوم لیاپانوف برای مسایل بهینه‌سازی محدب ناهموار را اثبات می‌نماییم. بخش دوم شامل تعاریف و مفاهیم مقدماتی می‌باشد. در بخش سوم، یک مدل شبکه عصبی بازگشتی معرفی و همگرایی آن به ناحیه‌ی شدنی تساوی خطی اثبات گردیده است. هم‌چنین معادل بودن جواب‌های بهینه‌ی مسأله بهینه‌سازی (۱) و نقاط تعادلی مدل پیشنهادی نشان داده می‌شود. پایداری لیاپانوف و همگرایی سراسری شبکه عصبی پیشنهادی در بخش چهارم اثبات می‌شود. در بخش پنجم، یک مدل شبکه عصبی برای حل مسایل بهینه‌سازی محدب ناهموار با قیود تساوی خطی و $x \geq 0$ پیشنهاد گردیده و مثال‌هایی برای نشان دادن کارایی شبکه‌های عصبی پیشنهادی ارائه می‌شوند. و در پایان، بخش ششم به ارائه نتایج و تحقیقات آتی می‌پردازد.

۲ مقدمات

برای درک راحت‌تر مباحث بعدی در این بخش تعدادی تعریف و لم ارائه شده است. در ادامه $\|\cdot\|_1$ و $\|\cdot\|_2$ نشان‌دهنده‌ی نرم‌های به‌ترتیب l_1 و l_2 یک بردار در \mathbb{R}^n می‌باشند. **تعریف ۱.۰۲** [۳] نگاشت $F : X \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ یک نگاشت مجموعه مقدار نامیده می‌شود، هرگاه به هر نقطه‌ی $x \in X$ ، یک مجموعه $F(x) \subseteq \mathbb{R}^n$ متناظر کند.

تعریف ۲.۰۲ [۳] یک نگاشت مجموعه مقدار $F : X \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ با مقادیر ناتهی نیم‌پیوسته‌ی بالایی در $x^\circ \in X$ نامیده می‌شود هرگاه برای هر همسایگی N باز شامل $F(x^\circ)$ یک همسایگی M از هر نقطه‌ی $x \in X$ به‌گونه‌ای وجود داشته باشد که $F(M) \subseteq N$ باشد. هم‌چنین اگر X بسته باشد، F دارای مقادیر بسته‌ی ناتهی و در همسایگی از هر نقطه‌ی $x \in X$ کران‌دار باشد، آن‌گاه F نیم‌پیوسته‌ی بالایی بر X است اگر و تنها اگر $Gr(F)$ بسته باشد، که در آن $Gr(F)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$Gr(F) = \{(x, y) \in X \times \mathbb{R}^n : y \in F(x)\}.$$

تعریف ۳.۰۲ [۳] یک شمول دیفرانسیلی رابطه‌ی ای به فرم $\dot{x} \in F(x)$ است که در آن F یک نگاشت مجموعه مقدار است که هر نقطه‌ی $x \in \mathbb{R}^n$ را با یک مجموعه $F(x) \subseteq \mathbb{R}^n$ متناظر می‌کند.

بنابراین، نمادگذاری شمول دیفرانسیلی تعمیمی از نمادگذاری یک معادله دیفرانسیل معمولی به فرم $\dot{x} = f(x)$ است. از این رو تمام ویژگی‌های مورد مطالعه در معادلات دیفرانسیل معمولی (مانند وجود و پیوستگی جواب‌ها، وابستگی به شرایط اولیه و پارامترها و غیره) را می‌توان برای شمول‌های دیفرانسیلی نیز مورد مطالعه قرار داد. شمول‌های دیفرانسیلی نقش مهمی در مطالعه انواع فرآیندهای دینامیکی که در معادلات با سمت راست ناپیوسته و چند مقداره که به ویژه در مطالعه دینامیک‌های اقتصادی، اجتماعی و میکروسبستم‌های بیولوژیکی رخ می‌دهند، ایفا می‌کنند. آنها هم چنین ابزار مفیدی در اثبات قضایای وجودی در نظریه کنترل به شمار می‌روند.

تعریف ۴.۰۲ [۳] تابع $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ لیپ‌شیتس نزدیک $x \in \mathbb{R}^n$ گفته می‌شود اگر و تنها اگر $\epsilon, \delta > 0$ چنان موجود باشند که $\forall x', x'' \in \mathbb{R}^n$ که $\|x' - x\|_2 < \delta$ و $\|x'' - x\|_2 < \delta$ را برآورده می‌کنند، $|f(x') - f(x'')| \leq \epsilon$ داشته باشیم. گوئیم f در \mathbb{R}^n موضعاً لیپ‌شیتس است اگر f در مجاورت هر نقطه‌ی $x \in \mathbb{R}^n$ لیپ‌شیتس باشد.

تعریف ۵.۰۲ [۳] زیردیفرانسیل یک تابع محدب $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ در $x \in \mathbb{R}^n$ مجموعه‌ی $\partial f(x)$ از بردارهای $\xi \in \mathbb{R}^n$ به گونه‌ای است که

$$\partial f(x) = \{\xi \in \mathbb{R}^n : f(y) \geq f(x) + \xi^T(y - x), \quad \forall y \in \mathbb{R}^n\}$$

هر بردار $\xi \in \partial f(x)$ یک زیرگردیان از f در x نامیده می‌شود.

تعریف ۶.۰۲ [۱۲] فرض کنید f در مجاورت $x_0 \in \mathbb{R}^n$ لیپ‌شیتس باشد. مشتق جهتی تعمیم‌یافته‌ی f در x_0 در جهت هر بردار $v \in \mathbb{R}^n$ با $f^\circ(x_0; v) = \limsup_{y \rightarrow x_0, t \downarrow 0} \frac{f(y+tv) - f(y)}{t}$ تعریف می‌شود، از این رو زیردیفرانسیل کلارک تابع f در x_0 به صورت مجموعه زیر می‌باشد:

$$\partial f(x_0) = \{\xi \in \mathbb{R}^n : f^\circ(x_0; v) \geq \xi^T v, \forall v \in \mathbb{R}^n\}.$$

تعریف ۷.۰۲ [۱۲] فرض کنید f در مجاورت $x \in \mathbb{R}^n$ موضعاً لیپ‌شیتس باشد. در این صورت f در x منظم نامیده می‌شود هرگاه مشتق جهتی یک‌طرفه‌ی معمولی $f'(x; v)$

که به صورت زیر ارایه می شود، وجود داشته باشد:

$$f'(x; v) = \lim_{\xi \rightarrow 0^+} \frac{f(y + \xi v) - f(y)}{\xi}, \quad \forall v \in \mathbb{R}^n$$

و به ازای هر $v \in \mathbb{R}^n$ ، $f'(x; v) = f^\circ(x; v)$ باشد. اگر تابع f در هر نقطه‌ی $x \in \mathbb{R}^n$ منظم باشد، گوئیم f در \mathbb{R}^n منظم است.

لم ۸.۲. [۱۲] اگر $W(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ منظم و $x(t) : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ بر هر بازه‌ی فشرده $[0, +\infty)$ به طور مطلق پیوسته باشد، آن گاه $W(x(t)) : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ و $x(t)$ به ازای تقریباً هر $t \in [0, +\infty)$ مشتق پذیر و در مجاورت t لیپ شیتس است، بنابراین

$$\dot{W}(x(t)) = \langle \xi, \dot{x}(t) \rangle, \quad \forall \xi \in \partial W(x(t)) \text{ for a.e. } t \in [0, +\infty)$$

که در آن $\langle \cdot, \cdot \rangle$ نشان دهنده‌ی ضرب داخلی است.

در این جا به معرفی شرایط کروش-کان-تاکر (KKT) برای مسأله بهینه سازی غیرخطی ناهموار (۱) به صورت زیر می پردازیم:

$$\left\{ \begin{array}{l} \circ \in \partial f(x) - \omega_1 + \omega_2 + A^T \lambda \\ (x - u)^T \omega_1 + (v - x)^T \omega_2 = \circ \\ Ax = b \\ \omega_1, \omega_2 \geq \circ, \omega_1, \omega_2 \in \mathbb{R}^n, u \leq x \leq v, \end{array} \right. \quad (2)$$

x^* جوابی از مسأله (۱) است اگر و تنها اگر $(\omega_1^*, \omega_2^*)^T \in \mathbb{R}^{n+n}$ و $\lambda^* \in \mathbb{R}^m$ به گونه‌ای وجود داشته باشند که $(x^*, \omega_1^*, \omega_2^*, \lambda^*)^T$ شرایط (۲) را برآورده نماید. با الهام از [۶۱] و قضیه ۱ در [۱۰]، شرایط KKT را در لم بعدی اصلاح می کنیم.

لم ۹.۲. فرض کنید تابع f محدب باشد، در این صورت x^* یک نقطه‌ی بهینه از مسأله غیرخطی (۱) است اگر و تنها اگر $(\omega_1^*, \omega_2^*) \in \mathbb{R}^{n+n}$ و $\lambda^* \in \mathbb{R}^m$ به گونه‌ای وجود داشته

باشند که

$$\left\{ \begin{array}{l} \circ \in \partial f(x^*) - \omega_1^* + \omega_p^* + A^T \lambda^* \\ \circ = -\omega_1^* + (\omega_1^* - x^* + u)^+ \\ \circ = -\omega_p^* + (\omega_p^* + x^* - v)^+ \\ \circ = Ax^* - b, \end{array} \right. \quad (3)$$

$$(\omega_1^* - x^* + u)^+ = ([\omega_1^{*(1)} - x_1^* + u_1]^+, [\omega_1^{*(2)} - x_1^* + u_2]^+, \dots, [\omega_1^{*(n)} - x_1^* + u_n]^+)^T$$

$$(\omega_p^* + x^* - v)^+ = ([\omega_p^{*(1)} + x_1^* - v_1]^+, [\omega_p^{*(2)} + x_1^* - v_2]^+, \dots, [\omega_p^{*(n)} + x_1^* - v_n]^+)^T$$

می باشند.

۳ مدل شبکه عصبی

یانگ و گائو در [۶۱]، یک شبکه عصبی بازگشتی برای حل مسایل بهینه‌سازی محدب با قیود مساوی خطی و $x \geq \circ$ به صورت زیر پیشنهاد دادند:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = -(I - P)(\nabla f(x) - (\mu - x)^+) - A^T(AA^T)^{-1}(Ax - b) \\ \frac{d\mu}{dt} = -\mu + (\mu - x)^+, \end{array} \right. \quad (4)$$

که در آن $[\mu]^+ = \max\{\circ, \mu\}$ ، I یک ماتریس همانی و $P = A^T(AA^T)^{-1}A$ است. همگرایی سراسری مدل مذکور فقط برای مسایل بهینه‌سازی محدب با تابع هدف مشتق‌پذیر اثبات گردید و خط سیر جواب‌های آن به‌طور نظری وقتی که زمان به بی‌نهایت میل می‌کند به ناحیه‌ی شدنی می‌رسند. به‌علاوه نویسندگان معادل بودن نقاط تعادلی و جواب‌های بهینه را اثبات نکردند. برای نیل به همگرایی در زمان متناهی به ناحیه‌ی شدنی مساوی و همگرایی سراسری به جواب‌های بهینه‌ی مسایل بهینه‌سازی محدب ناهموار با قیود مساوی خطی و کران‌دار، مدل مبتنی بر شمول دیفرانسیلی را پیشنهاد می‌کنیم که گستره‌ی وسیعی از کاربردها را در برمی‌گیرد. برای طراحی مدل پیشنهادی زیر

از مدل‌ها و اثبات‌های پیشنهادی در [۶۱] و [۵۰] به همراه لم ۹.۲ استفاده می‌کنیم:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} \in -(I - P)(\partial f(x) - \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2) - A^T g(Ax - b) \\ \dot{\omega}_1 = -\omega_1 + \bar{\omega}_1 \\ \dot{\omega}_2 = -\omega_2 + \bar{\omega}_2, \end{cases} \quad (5)$$

که در آن $\bar{\omega}_1 = (\omega_1^* - x^* + u)^+$ ، I یک ماتریس همانی، $\bar{\omega}_2 = (\omega_2^* + x^* - v)^+$ ، $P = A^T(AA^T)^{-1}A$ ، $\partial f(x)$ ، گرادیان تعمیم یافته‌ی $f(x)$ و $g(x) = (\tilde{g}(x_1), \tilde{g}(x_2), \dots, \tilde{g}(x_m))^T$ یک تابع ناپیوسته فعال‌ساز با مؤلفه‌های به صورت زیر می‌باشند:

$$\tilde{g}(x_i) = \begin{cases} 1, & \text{if } x_i > 0, \\]1, 1[- & \text{if } x_i = 0, \\ -1 & \text{if } x_i < 0. \end{cases} \quad (6)$$

توجه کنید که در این مقاله در بسیاری از روابط برای اختصار نویسی از $\bar{\omega}_1$ و $\bar{\omega}_2$ به جای $(\omega_1 - x + u)^+$ و $(\omega_2 + x - v)^+$ استفاده می‌کنیم. شبکه عصبی (۵) که یک سیستم دینامیکی ناهموار است می‌تواند توسط یک مدار تعمیم‌یافته پیاده‌سازی شود. برای مطالعه‌ی جزئیات بیشتر می‌توان به [۷، ۲۱، ۴۰] مراجعه نمود. اکنون پیاده‌سازی شبکه عصبی (۵) برای مسأله بهینه‌سازی ساده

$$\begin{aligned} & \text{minimize } f(x_1, x_2) = |x_1| + |x_2|, \\ & \text{subject to } a_1 x_1 + a_2 x_2 = 1, \quad l \leq x_1, x_2 \leq h. \end{aligned} \quad (P)$$

توسط مدار تعمیم‌یافته انجام می‌شود. پیاده‌سازی $G = \partial f(x) - \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2$ به صورت دیاگرام بلوکی در شکل ۱ شبیه‌سازی شده‌است. معماری شبکه عصبی (۵) برای مسأله بهینه‌سازی (P) در شکل ۲ نشان داده شده است، که در آن $[e_{ij}]_{2 \times 2} = I - P$ و $A^T = (a_1, a_2)^T$ است. در جدول ۱ شبکه عصبی (۵) را با تعدادی از شبکه‌های عصبی موجود برای حل مسأله (۱) مقایسه می‌کنیم. به راحتی در می‌یابیم که اگرچه شبکه عصبی

(۵) در مقایسه با شبکه‌های عصبی پیشنهادی در [۳۵] و [۳۹] دارای تعداد مشابهی نورون و لایه می‌باشد، هیچ پارامتر جریمه در ساختار آن وجود ندارد که باعث پیاده‌سازی راحت‌تر آن می‌شود. مدل پیشنهادی در [۳۵] فقط برای حل مسایل بهینه‌سازی با قید کران‌دار طراحی شده است. علی‌رغم عدم وجود پارامتر جریمه و پیچیدگی کمتر مدل پیشنهادی در [۴۰]، فرضیات اضافی قوی‌تری برای اطمینان از پایداری آن مورد نیاز است. مدل ارائه شده در [۴۱] فقط برای حل مسایل دارای قیود مساوی خطی است و دارای کاربرد کمی می‌باشد. با این وجود دارای پارامتر جریمه نبوده و از پیچیدگی کمتری برخوردار است. مدل پیشنهادی در [۲۲] در مقایسه با مدل (۵) دارای پیچیدگی کمتر نبوده و در ساختارش پارامتر جریمه وجود ندارد ولی آن فقط برای مسایل بهینه‌سازی هموار طراحی شده است. شبکه‌های عصبی پیشنهادی در [۶۴، ۶۱، ۵۶] برای مسایل بهینه‌سازی هموار بدون قید کران‌دار به کار می‌روند. در [۵۸]، تابع هدف مسأله اکیداً محدب بوده و برای مسایل با قیود مساوی خطی کاربرد ندارد. شبکه‌های پیشنهادی در [۶۰] و [۳۸] قابلیت اعمال در حل مسایل با توابع هدف به‌طور پیوسته مشتق‌پذیر با محدودیت‌های مساوی خطی و کران‌دار را دارند ولی دارای پارامتر جریمه نیز می‌باشند.

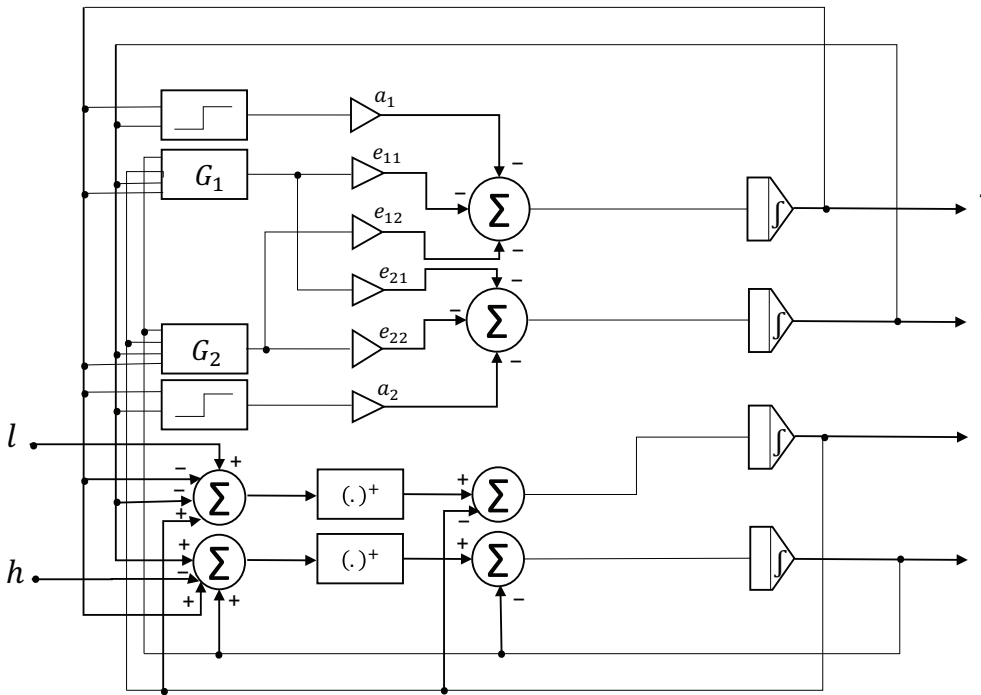
ملاحظه ۱.۳. مدل قبلی مان [۱۴] نیاز به طراحی و پیاده‌سازی پیچیده داشت. در مقایسه با آن، مدل پیشنهادی (۵) $(Ax - b)$ را به صورت $A^T g(Ax - b)$ اصلاح نموده که پیاده‌سازی آنرا ساده‌تر می‌کند.

تعریف ۲.۳. $(x^*, \omega_1^*, \omega_2^*)^T$ یک نقطه تعادلی از شبکه عصبی (۵) نامیده می‌شود هرگاه

$$\begin{cases} \circ \in (I - P)(\partial f(x^*) - \omega_1^* + \omega_2^*) + A^T g(Ax^* - b) \\ \circ = -\omega_1^* + \bar{\omega}_1^* \\ \circ = -\omega_2^* + \bar{\omega}_2^*. \end{cases} \quad (7)$$

به بیانی دیگر، $\eta^* \in \partial f(x^*)$ و $\zeta^* \in g(Ax^* - b)$ به گونه‌ای وجود داشته باشند که

$$\begin{cases} \circ = (I - P)(\eta^* - \omega_1^* + \omega_2^*) + A^T \zeta^* \\ \circ = -\omega_1^* + \bar{\omega}_1^* \\ \circ = -\omega_2^* + \bar{\omega}_2^*. \end{cases} \quad (8)$$



شکل ۲: دیاگرام شماتیک بلوکی شبکه عصبی (۵) برای مسأله بهینه‌سازی (P). تابع فعال‌ساز در (۶) تعریف شده است.

تعریف ۳.۳. یک تابع برداری مطلقاً پیوسته $(x(\cdot), \omega_1(\cdot), \omega_2(\cdot))^T$ جوابی از شبکه عصبی (۵) بر یک بازه $[0, T]$ نامیده می‌شود، هرگاه در شرط اولیه $(x(0), \omega_1(0), \omega_2(0))$ صدق نموده و به‌ازای تقریباً هر $t \in [0, T]$

$$\begin{cases} \dot{x}(t) \in -(I - P)[\partial f(x(t)) - \bar{\omega}_1(t) + \bar{\omega}_2(t)] - A^T g(Ax(t) - b) \\ 2\dot{\omega}_1(t) = -\omega_1(t) + \bar{\omega}_1(t) \\ 2\dot{\omega}_2(t) = -\omega_2(t) + \bar{\omega}_2(t). \end{cases} \quad (9)$$

تابع هدف	شرایط تابع هدف	قیود تساوی	قیود نامساوی
ناهموار	محدب	خطی	کران دار
هم چنین	هم چنین	هم چنین	هم چنین
هم چنین	هم چنین	---	هم چنین
هم چنین	هم چنین	خطی	---
هم چنین	درجه دوم و اکیداً محدب بر Ω_2	هم چنین	کران دار
هموار	محدب بر قید کران دار	هم چنین	محدب و به طور پیوسته مشتق پذیر
هم چنین	اکیداً محدب	هم چنین	در دامنه متناهی و هموار
هم چنین	محدب	هم چنین	$x \geq 0$
هم چنین	محدب	هم چنین	---
هم چنین	اکیداً محدب	---	کران دار
هم چنین	هم چنین	خطی	کران دار
هم چنین	هم چنین	خطی	کران دار

جدول ۱: مقایسه شبکه پیشنهادی با شبکه های عصبی مختلف برای حل مسئله بهینه سازی (۱)

باشد.

به بیانی دیگر، توابع اندازه‌پذیر $\eta(t) \in \partial f(x(t))$ و $\zeta(t) \in g(Ax(t) - b)$ به گونه‌ای وجود داشته باشند که به ازای تقریباً هر $t \in [0, T]$

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -(I - P)(\eta(t) - \bar{\omega}_1(t) + \bar{\omega}_2(t)) - A^T \zeta(t) \\ 2\dot{\omega}_1(t) = -\omega_1(t) + \bar{\omega}_1(t) \\ 2\dot{\omega}_2(t) = -\omega_2(t) + \bar{\omega}_2(t). \end{cases} \quad (10)$$

قضیه ۴.۳. برای شبکه عصبی (۵)، حداقل یک جواب موضعی $(x(t), \omega_1(t), \omega_2(t))^T$ وجود دارد که بر یک بازه ماکسیمال $[0, T]$ به ازای برخی $T \in (0, +\infty]$ برای هر نقطه‌ی اولیه $(x(0), \omega_1(0), \omega_2(0))^T \in \mathbb{R}^{n+n+n}$ تعریف شده است. هم چنین $x(t)$ به ناحیه شدنی مساوی $\Omega_2 = \{x \in \mathbb{R}^n | Ax = b\}$ در زمان متناهی همگرا شده و بعد از آن در همان جا باقی خواهد ماند. علاوه بر این، اگر $\omega_1(0) \geq 0$ و $\omega_2(0) \geq 0$ باشند، در این صورت $\omega_1(t) \geq 0$ و $\omega_2(t) \geq 0$ خواهند بود.

اثبات. چون

$$K(x, \omega_1, \omega_2) = \begin{cases} -(I - P)[\partial f(x) - \omega_1 + \omega_2] - A^T g(Ax - b) \\ -\omega_1 + \bar{\omega}_1 \\ -\omega_2 + \bar{\omega}_2, \end{cases} \quad (11)$$

نیم‌پیوسته‌ی بالایی است و مقادیرش ناتهی، فشرده و محدب اند، از این رو برای هر نقطه‌ی اولیه $(x(\circ), \omega_1(\circ), \omega_2(\circ))^T \in \mathbb{R}^{n+n+n}$ ، مطابق با قضیه ۳ در صفحه ۹۸ از [۳] حداقل یک جواب $(x(t), \omega_1(t), \omega_2(t))^T$ از شبکه عصبی (۵) با $(x(\circ), \omega_1(\circ), \omega_2(\circ))$ وجود دارد. که بدین معنی است که توابع اندازه‌پذیر $\zeta(t) \in g(Ax(t) - b)$ و $\eta(t) \in \partial f(x(t))$ هر $t \in [0, T)$

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -(I - P)(\eta(t) - \bar{\omega}_1(t) + \bar{\omega}_2(t)) - A^T \zeta(t) \\ 2\dot{\omega}_1(t) = -\omega_1(t) + \bar{\omega}_1(t) \\ 2\dot{\omega}_2(t) = -\omega_2(t) + \bar{\omega}_2(t), \end{cases} \quad (12)$$

برقرار است. مشابه قضیه ۱ در [۴۳] و [۲۳]، فرض می‌کنیم که $B(x) = \|Ax - b\|_1$ برقرار است. به‌وضوح $B(x)$ محدب و منظم است. با استفاده از قاعده زنجیره‌ای، برای تقریباً هر $t \in [0, T)$ داریم:

$$\frac{d}{dt} B(x(t)) = \xi^T A \dot{x}(t) \quad \forall \xi \in g(Ax(t) - b). \quad (13)$$

با جایگزینی ξ با $\zeta(t) \in g(Ax(t) - b)$ به

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} B(x(t)) &= \zeta(t)^T A \dot{x}(t) = -\zeta(t)^T A(I - P)[\eta(t) - \bar{\omega}_1(t) + \bar{\omega}_2(t)] - \zeta(t)^T A A^T \zeta(t) \\ &= -\zeta(t)^T A A^T \zeta(t) \leq -\lambda_{\max}(A A^T) \|\zeta(t)\|^2, \end{aligned} \quad (14)$$

می‌رسیم، که در آن $\lambda_{\max}(AA^T)$ مقدار ویژه‌ی ماکسیمم AA^T است. در (۱۴)، از این حقیقت استفاده می‌کنیم که $A(I - P) = A(I - A^T(AA^T)^{-1}A) = A - A = 0$ و $AA^T \geq \lambda_{\max}(AA^T) > 0$ زیرا A یک ماتریس با رتبه کامل است. به‌وضوح خارج از ناحیه‌ی شدنی $Ax(t) \neq b$ برطبق تعریف g در (۶)، $\|\zeta(t)\|^2 \geq 1$ که با ترکیب آن با (۱۴) داریم:

$$\frac{d}{dt}B(x(t)) \leq -\lambda_{\max}(AA^T). \quad (15)$$

فرض کنید $t_0 > 0$ به‌گونه‌ای وجود داشته باشد که $x(t) \notin \Omega_2$ و $x(t_0) = x_0 \in \Omega_2$ به‌ازای $t \in [0, t_0]$ از این‌رو با انتگرال‌گیری از طرفین (۱۵) از t_0 تا t خواهیم داشت:

$$B(x(t_0)) - B(x(t_0)) \leq -\lambda_{\max}(AA^T)t_0. \quad (16)$$

که بدین معنی است که

$$0 \leq \|Ax(t_0) - b\|_1 \leq \|Ax(t_0) - b\|_1 - \lambda_{\max}(AA^T)t_0. \quad (17)$$

نتیجه می‌گیریم که $t_0 \leq \frac{\|Ax(t_0) - b\|_1}{\lambda_{\max}(AA^T)}$ است. بدین معنی که $x(t) \in \Omega_2$ ، $\forall t > \frac{\|Ax(t_0) - b\|_1}{\lambda_{\max}(AA^T)}$ به‌عبارتی خط سیر جواب $x(t)$ به $\{x \in \mathbb{R}^n | Ax - b = 0\}$ در زمان متناهی خواهد رسید و $t_u = \frac{\|Ax(t_0) - b\|_1}{\lambda_{\max}(AA^T)}$ یک کران بالا برای زمان خروج می‌باشد. حال اثبات می‌کنیم که خط سیر جواب $x(t)$ درون ناحیه‌ی شدنی مساوی خطی Ω_2 باقی می‌ماند، اگر $x(t)$ در زمان $t_1 > t_u$ ، ناحیه‌ی Ω_2 را ترک کند، در این‌صورت $t_1 > t_u$ باید چنان موجود باشد که به‌ازای هر $t \in (t_1, t_2)$ و $x(t) \notin \Omega_2$ ، $\|Ax(t_1) - b\|_1 = 0$ باشد. بنابراین بر طبق (۱۴) داریم:

$$\|Ax(t_2) - b\|_1 \leq \|Ax(t_1) - b\|_1 - \lambda_{\max}(AA^T)(t_2 - t_1) = -\lambda_{\max}(AA^T)(t_2 - t_1) < 0, \quad (18)$$

که به‌وضوح تناقض است. از این‌رو $x(t)$ در زمان متناهی به Ω_2 می‌رسد و در آن جا

باقی می‌ماند. برای اثبات بخش بعدی با استفاده از (۱۲) داریم:

$$\frac{d}{dt}(e^{\dagger t} \omega_1(t)) = \frac{1}{\dagger} e^{\dagger t} \omega_1(t) + e^{\dagger t} \dot{\omega}_1(t) = \frac{1}{\dagger} e^{\dagger t} \bar{\omega}_1(t) \geq 0, \quad (19)$$

به‌وضوح به $e^{\dagger t} \omega_1(t) \geq e^0 \omega_1(0) = \omega_1(0) \geq 0$ می‌رسیم. بنابراین اگر $\omega_1(0) \geq 0$ باشد، داریم $\omega_1(t) \geq 0$. اثبات $\omega_2(t) \geq 0$ وقتی $\omega_2(0) \geq 0$ مشابه است. \square

لم ۵.۳. برای هر نقطه‌ی آغازین $(x(0), \omega_1(0), \omega_2(0)) \in \Omega_2 \times \mathbb{R}^{n+n}$ خط سیر جواب $x(t)$

$$\dot{x}(t) = -(I - P)(\eta(t) - \bar{\omega}_1(t) + \bar{\omega}_2(t)), \quad \eta(t) \in \partial f(x(t)). \quad (20)$$

را برآورده می‌کند.

اثبات. فرض کنید $(x(t), \omega_1(t), \omega_2(t))^T$ یک خط سیر جواب از شبکه عصبی (۵) با نقطه‌ی آغازین $(x(0), \omega_1(0), \omega_2(0))^T \in \Omega_2 \times \mathbb{R}^{n+n}$ باشد، در این صورت توابع اندازه‌پذیر $\eta(t) \in \partial f(x(t))$ و $\zeta(t) \in g(Ax(t) - b)$ به گونه‌ای وجود دارند که تقریباً به‌ازای هر t داشته باشیم:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}(t) = -(I - P)[\eta(t) - (\omega_1(t) - x(t) + u)^+ \\ \quad + (\omega_2(t) + x(t) - v)^+] - A^T \zeta(t) \\ 2\dot{\omega}_1(t) = -\omega_1(t) + (\omega_1(t) - x(t) + u)^+ \\ 2\dot{\omega}_2(t) = -\omega_2(t) + (\omega_2(t) + x(t) - v)^+, \end{array} \right. \quad (21)$$

برطبق قضیه ۴.۳ وقتی $(x(0), \omega_1(0), \omega_2(0))^T \in \Omega_2 \times \mathbb{R}^{n+n}$ باشد، خط سیر جواب $(x(t), \omega_1(t), \omega_2(t))^T$ در زمان متناهی به $\Omega_2 \times \mathbb{R}^{n+n}$ رسیده و بعد از آن در آن‌جا باقی خواهد ماند. که بدین معنی است که برای هر $t, Ax(t) = b$ است.

بنابراین بر طبق (۲۱) داریم:

$$\begin{aligned} \circ &= A\dot{x}(t) = -A(I - P)[\eta(t) - (\omega_1(t) - x(t) + u)^+ + (\omega_2(t) + x(t) - v)^+] - AA^T\zeta(t) \\ &= -AA^T\zeta(t), \end{aligned} \quad (22)$$

چون A ماتریسی با رتبه کامل است، AA^T معکوس پذیر است و با استفاده از (۲۲) به ازای هر $t \geq 0$ ، $\zeta(t) = 0$ را به دست می آوریم. از این رو با استفاده از (۲۱) درمی یابیم که خط سیر جواب $x(t)$

$$\dot{x}(t) = -(I - P)[\eta(t) - \bar{\omega}_1(t) + \bar{\omega}_2(t)] \quad (23)$$

را برآورده می کند. □

قضیه ۶.۳. هر نقطه‌ی تعادلی $(x^*, \omega_1^*, \omega_2^*)^T$ از شبکه عصبی (۵) یک نقطه‌ی بهینه از مسأله بهینه‌سازی ناهموار (۱) است. برعکس، اگر x^* یک جواب بهینه‌ی مسأله بهینه‌سازی ناهموار (۱) باشد، آنگاه $\omega_1^* > 0$ و $\omega_2^* > 0$ به گونه‌ای وجود دارند که $(x^*, \omega_1^*, \omega_2^*)^T$ یک نقطه‌ی تعادلی شبکه عصبی (۵) است.

اثبات. فرض کنید $(x^*, \omega_1^*, \omega_2^*)^T$ یک نقطه‌ی تعادلی از شبکه عصبی (۵) باشد، در این صورت داریم:

$$\left\{ \begin{aligned} \circ &\in (I - P)(\partial f(x^*) - \omega_1^* + \omega_2^*) + A^T g(Ax^* - b) \\ \circ &= -\omega_1^* + \bar{\omega}_1^* \\ \circ &= -\omega_2^* + \bar{\omega}_2^*. \end{aligned} \right. \quad (24)$$

بنابر قضیه ۴.۳ داریم: $Ax^* = b$ ، $\omega_1^* \geq 0$ و $\omega_2^* \geq 0$. اکنون با انتخاب

$$\lambda^* = (AA^T)^{-1} A(\partial f(x^*) - \omega_1^* + \omega_2^*) + g(Ax^* - b)$$

داریم:

$$\circ \in (I - P)(\partial f(x^*) - \omega_1^* + \omega_2^*) + A^T g(Ax^* - b) = \partial f(x^*) - \omega_1^* + \omega_2^* + A^T \lambda^*. \quad (25)$$

از این رو ترکیب (۲۵) با نامساوی‌های (۲۴)، لم ۹.۲ را برآورده نموده و در نتیجه x^* یک جواب بهینه برای مسئله بهینه‌سازی (۱) است. برعکس، فرض کنید x^* یک جواب بهینه برای مسئله بهینه‌سازی (۱) باشد، در این صورت برطبق لم ۹.۲، $(\omega_1^*, \omega_2^*, \lambda^*)^T$ چنان موجود است که تساوی‌ها در لم بیان شده برقرار باشند. بنابراین

$$\circ \in (I - P)[\partial f(x^*) - \omega_1^* + \omega_2^* + A^T \lambda^*] = (I - P)[\partial f(x^*) - \omega_1^* + \omega_2^*]. \quad (26)$$

هم‌چنین بنا بر $\circ \in g(Ax^* - b)$ داریم:

$$\circ \in (I - P)[\partial f(x^*) - \omega_1^* + \omega_2^*] + g(Ax^* - b). \quad (27)$$

به علاوه با ترکیب (۲۷) با مساوی‌های در لم ۹.۲، به‌وضوح نتیجه می‌گیریم که $(x^*, \omega_1^*, \omega_2^*)^T$ یک نقطه‌ی تعادلی شبکه عصبی (۵) است. \square

۴ تحلیل همگرایی

در این بخش به تجزیه و تحلیل و اثبات همگرایی سراسری شبکه عصبی (۵) می‌پردازیم. ابتدا اثبات می‌کنیم که خط سیر جواب شبکه عصبی (۵) به یک نقطه‌ی تعادلی از (۵) همگرا می‌شود. سپس پایداری شبکه عصبی (۵) به مفهوم لیاپانوف و همگرایی سراسری به یک نقطه‌ی بهینه‌ی مسئله بهینه‌سازی (۱) را اثبات می‌کنیم.

لم ۱.۴. توابع $\|\bar{\omega}_1\|^2$ و $\|\bar{\omega}_2\|^2$ محدب و بر $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ به‌طور پیوسته مشتق‌پذیرند.

اثبات. [۲۲] را ببینید. □

قضیه ۲.۴. هر نقطه‌ی تعادلی از شبکه عصبی (۵) به مفهوم لیاپانوف پایدار است.

اثبات. فرض کنید $(x^*, \omega_1^*, \omega_2^*)^T$ یک نقطه‌ی تعادلی از شبکه عصبی (۵) باشد. از این رو $\eta^* \in \partial f(x^*)$ و $\zeta^* \in g(Ax^* - b)$ به‌گونه‌ای وجود دارند که

$$\begin{cases} \circ = (I - P)(\eta^* - \omega_1^* + \omega_2^*) + A^T \zeta^* \\ \circ = -\omega_1^* + \bar{\omega}_1^* \\ \circ = -\omega_2^* + \bar{\omega}_2^*. \end{cases} \quad (28)$$

با ضرب طرفین (۲۸) در $(I - P)$ ، داریم:

$$\circ = (I - P)^\nu (\eta^* - \omega_1^* + \omega_2^*) + (I - P)A^T \zeta^* = (I - P)(\eta^* - \omega_1^* + \omega_2^*). \quad (29)$$

با الهام از لم ۲ در [۶۱]، تابع لیاپانوف زیر را می‌سازیم:

$$\begin{aligned} V(x, \omega_1, \omega_2) &= f(x) - f(x^*) + \frac{1}{\nu} \|\bar{\omega}_1\|^2 + \frac{1}{\nu} \|\bar{\omega}_2\|^2 - \frac{1}{\nu} \|\omega_1^*\|^2 \\ &\quad - \frac{1}{\nu} \|\omega_2^*\|^2 - (x - x^*)^T (\eta^* - \omega_1^* + \omega_2^*) \\ &\quad - (\omega_1 - \omega_1^*)^T \omega_1^* - (\omega_2 - \omega_2^*)^T \omega_2^* + \frac{1}{\nu} \|x - x^*\|^2 \\ &\quad + \frac{1}{\nu} \|\omega_1 - \omega_1^*\|^2 + \frac{1}{\nu} \|\omega_2 - \omega_2^*\|^2, \end{aligned} \quad (30)$$

که در آن $\bar{\omega}_1 = (\omega_1 - x + u)^+$ و $\bar{\omega}_2 = (\omega_2 + x - v)^+$ می‌باشند. تابع

$$\psi(x, \omega_1, \omega_2) = f(x) + \frac{1}{\nu} \|\bar{\omega}_1\|^2 + \frac{1}{\nu} \|\bar{\omega}_2\|^2$$

را در نظر بگیرید. به دلیل این‌که $f(x)$ محدب است و بنابر لم ۱.۴، $\|\bar{\omega}_1\|^2$ و $\|\bar{\omega}_2\|^2$ بر $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ محدب‌اند، به‌وضوح ψ نیز نسبت به (x, ω_1, ω_2) محدب است. بنابراین

به وسیله‌ی لم ۹.۲ و خواص توابع محدب داریم:

$$\begin{aligned} \psi(x, \omega_1, \omega_2) - \psi(x^*, \omega_1^*, \omega_2^*) &\geq \frac{\partial}{\partial x} \psi|_{(x^*, \omega_1^*, \omega_2^*)} (x - x^*) \\ &+ \frac{\partial}{\partial \omega_1} \psi|_{(x^*, \omega_1^*, \omega_2^*)} (\omega_1 - \omega_1^*) + \frac{\partial}{\partial \omega_2} \psi|_{(x^*, \omega_1^*, \omega_2^*)} (\omega_2 - \omega_2^*) \\ &= (\eta^* - \omega_1^* + \omega_2^*)^T (x - x^*) \\ &+ \omega_1^{*T} (\omega_1 - \omega_1^*) + \omega_2^{*T} (\omega_2 - \omega_2^*). \end{aligned} \quad (31)$$

از (۳۱) به آسانی در می‌یابیم که

$$V(x, \omega_1, \omega_2) \geq \frac{1}{\nu} \|x - x^*\|^2 + \frac{1}{\nu} \|\omega_1 - \omega_1^*\|^2 + \frac{1}{\nu} \|\omega_2 - \omega_2^*\|^2 \geq 0. \quad (32)$$

که به‌وضوح $V(x, \omega_1, \omega_2)$ به‌طور شعاعی بی‌کران و معین مثبت است. هم‌چنین

$$\partial_x V(x, \omega_1, \omega_2) = \frac{\partial V}{\partial x}(x, \omega_1, \omega_2) = \partial f(x) - \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2 - \eta^* + \omega_1^* - \omega_2^* + x - x^* \quad (33)$$

را به‌عنوان زیردیفرانسیلی از $V(x, \omega_1, \omega_2)$ نسبت به x داریم و می‌توان زیردیفرانسیل $V(x, \omega_1, \omega_2)$ را نسبت به ω_1 و ω_2 به‌صورت زیر به‌دست آورد.

$$\begin{aligned} \partial_{\omega_1} V(x, \omega_1, \omega_2) &= \frac{\partial V}{\partial \omega_1}(x, \omega_1, \omega_2) = \bar{\omega}_1 + \omega_1 - \nu \omega_1^*, \\ \partial_{\omega_2} V(x, \omega_1, \omega_2) &= \frac{\partial V}{\partial \omega_2}(x, \omega_1, \omega_2) = \bar{\omega}_2 + \omega_2 - \nu \omega_2^*. \end{aligned} \quad (34)$$

اگر $(x(t), \omega_1(t), \omega_2(t))^T$ یک خط سیر جواب شبکه عصبی (۵) با نقطه‌آغازین $(x(0), \omega_1(0), \omega_2(0))^T$ باشد، آنگاه توابع اندازه‌پذیر $\eta(t) \in \partial f(x(t))$ و

$\zeta(t) \in g(Ax(t) - b)$ به گونه‌ای وجود دارند که تقریباً برای هر t

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -(I - P)(\eta(t) - \bar{\omega}_1(t) + \bar{\omega}_2(t)) - A^T \zeta(t) \\ 2\dot{\omega}_1(t) = -\omega_1(t) + \bar{\omega}_1(t), \\ 2\dot{\omega}_2(t) = -\omega_2(t) + \bar{\omega}_2(t), \end{cases} \quad (35)$$

برقرار است.

برطبق قضیه ۴.۳، $x(t)$ در زمان متناهی به ناحیه‌ی شدنی مساوی $\Omega_2 = \{x \in \mathbb{R}^n | Ax - b = 0\}$ خواهد رسید و بعد از آن در آن جا باقی خواهد ماند. بدون کم شدن از کلیت، فقط پایداری شبکه عصبی (۵) را با $x(t) \in \Omega_2$ در نظر می‌گیریم. بنابراین با استفاده از لم ۵.۳ داریم:

$$\dot{x}(t) = -(I - P)(\eta(t) - \bar{\omega}_1(t) + \bar{\omega}_2(t)). \quad (36)$$

چون $(I - P) = (I - P)^2$ است، پس داریم:

$$\begin{aligned} & [\eta(t) - \bar{\omega}_1(t) + \bar{\omega}_2(t)]^T (I - P) [\eta(t) - \bar{\omega}_1(t) + \bar{\omega}_2(t)] \\ &= [\eta(t) - \bar{\omega}_1(t) + \bar{\omega}_2(t)]^T (I - P)^2 [\eta(t) - \bar{\omega}_1(t) + \bar{\omega}_2(t)] \quad (37) \\ &= \| (I - P)(\eta(t) - \bar{\omega}_1(t) + \bar{\omega}_2(t)) \|^2, \end{aligned}$$

به دلیل این‌که $(x(t) - x^*)^T P = (x(t) - x^*)^T A^T (AA^T)^{-1} A = (Ax(t) - Ax^*)^T (AA^T)^{-1} A = 0$

$$\| \dot{x}(t) \|^2 = \| (I - P)(\eta(t) - \bar{\omega}_1(t) + \bar{\omega}_2(t)) \|^2 \quad \text{بنابر (۲۹)، (۳۳)،}$$

(۳۶) و (۳۷) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial V}{\partial x} \frac{dx}{dt} &= [\eta(t) - \bar{\omega}_1(t) + \bar{\omega}_2(t) - \eta^* + \omega_1^* - \omega_2^* + x(t) - x^*]^T \dot{x}(t) \\
 &= -[\eta(t) - \bar{\omega}_1(t) + \bar{\omega}_2(t)]^T (I - P)[\eta(t) - \bar{\omega}_1(t) + \bar{\omega}_2(t) - (\eta^* - \omega_1^* + \omega_2^*) + x(t) - x^*] \\
 &= -\| (I - P)[\eta(t) - \bar{\omega}_1(t) + \bar{\omega}_2(t)] \|^2 - [\eta^* - \omega_1^* + \omega_2^*]^T (I - P)[\eta(t) - \bar{\omega}_1(t) + \bar{\omega}_2(t) + x(t) - x^*] \\
 &\quad - (x(t) - x^*)^T (I - P)[\eta(t) - \bar{\omega}_1(t) + \bar{\omega}_2(t) - \eta^* + \omega_1^* - \omega_2^*] \\
 &= -\| \dot{x}(t) \|^2 - (x(t) - x^*)^T (\eta(t) - \eta^*) - (x(t) - x^*)^T (-\bar{\omega}_1(t) + \bar{\omega}_2(t) + \omega_1^* - \omega_2^*).
 \end{aligned}
 \tag{۳۸}$$

همچنین با توجه به (۳۴) و (۳۵) داریم:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial V}{\partial \omega_1} \frac{d\omega_1}{dt} + \frac{\partial V}{\partial \omega_2} \frac{d\omega_2}{dt} &= \frac{1}{\gamma} (\bar{\omega}_1(t) + \omega_1(t) - \gamma \omega_1^*)^T (-\omega_1(t) + \bar{\omega}_1(t)) + \frac{1}{\gamma} (\bar{\omega}_2(t) + \omega_2(t) - \gamma \omega_2^*)^T (-\omega_2(t) + \bar{\omega}_2(t)) \\
 &= \frac{1}{\gamma} (\gamma \bar{\omega}_1(t) + \omega_1(t) - \bar{\omega}_1(t) - \gamma \omega_1^*)^T (-\omega_1(t) + \bar{\omega}_1(t)) \\
 &\quad + \frac{1}{\gamma} (\gamma \bar{\omega}_2(t) + \omega_2(t) - \bar{\omega}_2(t) - \gamma \omega_2^*)^T (-\omega_2(t) + \bar{\omega}_2(t)) = -\frac{1}{\gamma} \| \omega_1(t) - \bar{\omega}_1(t) \|^2 \\
 &\quad - \frac{1}{\gamma} \| \omega_2(t) - \bar{\omega}_2(t) \|^2 - (\omega_1(t) - \bar{\omega}_1(t))^T (\bar{\omega}_1(t) - \omega_1^*) - (\omega_2(t) - \bar{\omega}_2(t))^T (\bar{\omega}_2(t) - \omega_2^*) \\
 &= -\gamma \| \dot{\omega}_1(t) \|^2 - \gamma \| \dot{\omega}_2(t) \|^2 - (\omega_1(t) - \bar{\omega}_1(t))^T (\bar{\omega}_1(t) - \omega_1^*) - (\omega_2(t) - \bar{\omega}_2(t))^T (\bar{\omega}_2(t) - \omega_2^*)
 \end{aligned}
 \tag{۳۹}$$

همچنین بر طبق قاعده زنجیره‌ای برای تقریباً هر $t \geq 0$ و به کمک (۳۸) و (۳۹) داریم:

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} V(x(t), \omega_1(t), \omega_2(t)) &= \frac{\partial V}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial V}{\partial \omega_1} \frac{d\omega_1}{dt} + \frac{\partial V}{\partial \omega_2} \frac{d\omega_2}{dt} \\
 &= -\| \dot{x}(t) \|^2 - (x(t) - x^*)^T (\eta(t) - \eta^*) - \gamma \| \dot{\omega}_1(t) \|^2 \\
 &\quad - \gamma \| \dot{\omega}_2(t) \|^2 - (x(t) - x^*)^T (-\bar{\omega}_1(t) + \bar{\omega}_2(t) + \omega_1^* - \omega_2^*) \\
 &\quad - (\omega_1(t) - \bar{\omega}_1(t))^T (\bar{\omega}_1(t) - \omega_1^*) - (\omega_2(t) - \bar{\omega}_2(t))^T (\bar{\omega}_2(t) - \omega_2^*)
 \end{aligned}
 \tag{۴۰}$$

از تحدب f داریم:

$$(x(t) - x^*)^T (\eta(t) - \eta^*) \geq 0, \quad (41)$$

بنابراین با ترکیب (۴۱) با (۴۰) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} V(x(t), \omega_1(t), \omega_2(t)) \\ & \leq -\|\dot{x}(t)\|^2 - (x(t) - x^*)^T (-\bar{\omega}_1(t) + \bar{\omega}_2(t) + \omega_1^* - \omega_2^*) \\ & \quad - 2\|\dot{\omega}_1(t)\|^2 - 2\|\dot{\omega}_2(t)\|^2 - (\omega_1(t) - \bar{\omega}_1(t))^T (\bar{\omega}_1(t) - \omega_1^*) \\ & \quad - (\omega_2(t) - \bar{\omega}_2(t))^T (\bar{\omega}_2(t) - \omega_2^*) \end{aligned} \quad (42)$$

به وضوح می توان تساوی های زیر را اثبات نمود:

$$\begin{aligned} & - (x(t) - x^*)^T (-\bar{\omega}_1(t) + \bar{\omega}_2(t) + \omega_1^* - \omega_2^*) \\ & - (\omega_1(t) - \bar{\omega}_1(t))^T (\bar{\omega}_1(t) - \omega_1^*) - (\omega_2(t) - \bar{\omega}_2(t))^T (\bar{\omega}_2(t) - \omega_2^*) \\ & = - (x(t) - x^*)^T (\omega_1^* - \bar{\omega}_1(t) - (\omega_2^* - \bar{\omega}_2(t))) \\ & + (\omega_1^* - \bar{\omega}_1(t))^T (\omega_1(t) - \bar{\omega}_1(t)) + (\omega_2^* - \bar{\omega}_2(t))^T (\omega_2(t) - \bar{\omega}_2(t)) \\ & = - (x(t) - x^*)^T (\omega_1^* - \bar{\omega}_1(t)) + (-x(t) + x^*)^T (\omega_2^* - \bar{\omega}_2(t)) \\ & + (\omega_1^* - \bar{\omega}_1(t))^T (\omega_1^* - \bar{\omega}_1(t)) + (\omega_2^* - \bar{\omega}_2(t))^T (\omega_2^* - \bar{\omega}_2(t)) \\ & = (\omega_1^* - \bar{\omega}_1(t))^T (\omega_1(t) - \bar{\omega}_1(t) - x(t) + x^*) + (\omega_2^* - \bar{\omega}_2(t))^T (\omega_2(t) - \bar{\omega}_2(t) - x(t) + x^*) \end{aligned} \quad (43)$$

با توجه به این که $\omega_1(t) - \bar{\omega}_1(t) = x(t) - (x(t) - \omega_1(t))^+$ و $\omega_2(t) - \bar{\omega}_2(t) = x(t) - (x(t) - \omega_2(t))^+$ می باشند، داریم:

$$\begin{aligned} & (\omega_1^* - \bar{\omega}_1(t))^T (\omega_1(t) - \bar{\omega}_1(t) - x(t) + x^*) \\ & = (\omega_1^* - \bar{\omega}_1(t))^T (-x(t) + x^* + x(t) - (x(t) - \omega_1(t))^+). \end{aligned} \quad (44)$$

به طور مشابه:

$$\begin{aligned} & (\omega_1^* - \bar{\omega}_1(t))^T (\omega_1(t) - \bar{\omega}_1(t) - x(t) + x^*) \\ & = (\omega_1^* - \bar{\omega}_1(t))^T (-x(t) + x^* + x(t) - (x(t) - \omega_1(t))^+). \end{aligned} \quad (45)$$

حال با در نظر گرفتن این حقایق که $\omega_1^* x^* = 0$ ، $\omega_2^* x^* = 0$ ، $\bar{\omega}_1(t) x^* \geq 0$ ، $\bar{\omega}_2(t) x^* \geq 0$ ، $\omega_1^* (x(t) - \omega_1(t))^+ \geq 0$ ، $\omega_2^* (x(t) - \omega_2(t))^+ \geq 0$ ، $\bar{\omega}_1(t) (x(t) - \omega_1(t))^+ = 0$ و $\bar{\omega}_2(t) (x(t) - \omega_2(t))^+ = 0$ و با ترکیب (۴۳)، (۴۴) و (۴۵) با (۴۲) نتیجه می‌گیریم که

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} V(x(t), \omega_1(t), \omega_2(t)) \\ & \leq -\| \dot{x}(t) \|^2 - 2\| \dot{\omega}_1(t) \|^2 - 2\| \dot{\omega}_2(t) \|^2 \leq 0. \end{aligned} \quad (46)$$

برطبق (۴۶)، به ازای هر $t > 0$ داریم:

$$0 \leq V(x(t), \omega_1(t), \omega_2(t)) \leq V(x(0), \omega_1(0), \omega_2(0)) < +\infty.$$

همچنین از (۳۲)، در می‌یابیم که V به طور بی‌کران شعاعی است و از این رو خط سیر $(x(t), \omega_1(t), \omega_2(t))^T$ از شبکه عصبی (۵) به ازای هر نقطه‌ی آغازین $(x(0), \omega_1(0), \omega_2(0))^T \in \mathbb{R}^{n+n+n}$ کران‌دار است که بدین معنی است که به وضوح خط سیر جواب $(x(t), \omega_1(t), \omega_2(t))^T$ به ازای $t \in [0, +\infty)$ موجود است. با استفاده از (۴۶)، پایداری نقطه‌ی تعادلی $(x^*, \omega_1^*, \omega_2^*)^T$ از شبکه عصبی (۵) به مفهوم لیاپانوف اثبات می‌گردد. علاوه بر این، چون $(x^*, \omega_1^*, \omega_2^*)^T$ دلخواه است بنابراین هر نقطه‌ی تعادلی از شبکه عصبی (۵) به مفهوم لیاپانوف پایدار است. \square

قضیه ۳.۴. برای هر نقطه‌ی آغازین $(x(0), \omega_1(0), \omega_2(0))^T \in \mathbb{R}^{n+n+n}$ ، خط سیر جواب $(x(t), \omega_1(t), \omega_2(t))^T$ از شبکه عصبی (۵) به یک نقطه‌ی تعادلی از شبکه عصبی (۵) همگراست.

اثبات. با در نظر گرفتن اثبات قضیه ۲.۴، تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned} & \Gamma(x, \omega_1, \omega_2) \\ &= \inf_{\eta \in \partial f(x)} \{ \| (I - P)[\eta - \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2] \|^2 + \frac{1}{\nu} \| \omega_1 - \bar{\omega}_1 \|^2 + \frac{1}{\nu} \| \omega_2 - \bar{\omega}_2 \|^2 \}. \end{aligned} \quad (47)$$

به‌وضوح اگر (x, ω_1, ω_2) یک نقطه‌ی تعادلی از شبکه عصبی (۵) باشد، در این صورت $\Gamma(x, \omega_1, \omega_2) = 0$ را با $Ax = b$ و برعکس داریم. از کران‌داری خط سیر جواب $(x(t), \omega_1(t), \omega_2(t))^T$ از شبکه عصبی (۵)، یک دنباله‌ی صعودی $\{t_k\}$ با $\lim_{k \rightarrow \infty} t_k = \infty$ و یک نقطه‌ی حدی $(\hat{x}, \hat{\omega}_1, \hat{\omega}_2)$ به‌گونه‌ای وجود دارند که $\lim_{k \rightarrow \infty} (x(t_k), \omega_1(t_k), \omega_2(t_k))^T = (\hat{x}, \hat{\omega}_1, \hat{\omega}_2)^T$ بر طبق قضیه ۴.۳ به‌وضوح $A\hat{x} - b = 0$ است. حال اثبات می‌کنیم که $\Gamma(\hat{x}, \hat{\omega}_1, \hat{\omega}_2) = 0$ ، که بدین معنی است که $(\hat{x}, \hat{\omega}_1, \hat{\omega}_2)^T$ یک نقطه‌ی تعادلی از شبکه عصبی (۵) است. از کران‌داری خط سیر جواب $(x(t), \omega_1(t), \omega_2(t))^T$ از شبکه عصبی (۵)، $\| \dot{x}(t) \|$ ، $\| \dot{\omega}_1(t) \|$ و $\| \dot{\omega}_2(t) \|$ هم‌چنین کران‌دارند. بنابراین می‌توان یک کران بالا مانند M به‌صورت زیر انتخاب نمود:

$$\| \dot{x}(t) \| + \| \dot{\omega}_1(t) \| + \| \dot{\omega}_2(t) \| \leq M \quad \text{هر } t \geq 0$$

با الهام از اثبات‌های انجام شده در [۳۹] و [۱۰]، اثبات می‌کنیم که $\Gamma(\hat{x}, \hat{\omega}_1, \hat{\omega}_2) = 0$ است. فرض می‌کنیم که برقرار نباشد، بنابراین $\Gamma(\hat{x}, \hat{\omega}_1, \hat{\omega}_2) > 0$ است. بنابر تعریف $\Gamma(x, \omega_1, \omega_2)$ ، آن نیم‌پیوسته‌ی پایینی نسبت به (x, ω_1, ω_2) است، پس $\rho > 0$ و $\epsilon > 0$ چنان موجودند که

$$\Gamma(x, \omega_1, \omega_2) > \epsilon, \quad (48)$$

به‌ازای هر $(x, \omega_1, \omega_2)^T \in B((\hat{x}, \hat{\omega}_1, \hat{\omega}_2)^T, \rho)$ برقرار باشد، که در آن

$$B((\hat{x}, \hat{\omega}_1, \hat{\omega}_2)^T, \rho) = \{(x, \omega_1, \omega_2)^T \in \mathbb{R}^{n+n+n} : \| x - \hat{x} \| + \| \omega_1 - \hat{\omega}_1 \| + \| \omega_2 - \hat{\omega}_2 \| < \rho\}$$

یک ρ همسایگی از $(\hat{x}, \hat{\omega}_1, \hat{\omega}_2)^T$ است. به دلیل اینکه $\lim_{k \rightarrow \infty} (x(t_k), \omega_1(t_k), \omega_2(t_k))^T = (\hat{x}, \hat{\omega}_1, \hat{\omega}_2)^T$ است پس عدد صحیح مثبت N به گونه ای وجود دارد که به ازای هر $k \geq N$ $\|x(t_k) - \hat{x}\|$ ، $\|\omega_1(t_k) - \hat{\omega}_1\| + \|\omega_2(t_k) - \hat{\omega}_2\| < \frac{\rho}{4}$ را داشته باشیم. زمانی که $k \geq N$ و $t \in [t_k - \frac{\rho}{\lambda M}, t_k + \frac{\rho}{\lambda M}]$ باشند، داریم:

$$\begin{aligned} & \|x(t) - \hat{x}\| + \|\omega_1(t) - \hat{\omega}_1\| + \|\omega_2(t) - \hat{\omega}_2\| \\ & \leq \|x(t) - x(t_k)\| + \|x(t_k) - \hat{x}\| + \|\omega_1(t) - \omega_1(t_k)\| \\ & + \|\omega_1(t_k) - \hat{\omega}_1\| + \|\omega_2(t) - \omega_2(t_k)\| + \|\omega_2(t_k) - \hat{\omega}_2\| \\ & \leq M|t - t_k| + \frac{\rho}{4} \leq \rho. \end{aligned} \tag{۴۹}$$

برطبق (۴۸)، به ازای هر $t \in [t_k - \frac{\rho}{\lambda M}, t_k + \frac{\rho}{\lambda M}]$ $\Gamma(x, \omega_1, \omega_2) > \epsilon$ است. از یک طرف، چون انتگرال لبگ مجموعه $\cup_{k \geq N} [t_k - \frac{\rho}{\lambda M}, t_k + \frac{\rho}{\lambda M}]$ نامتناهی است، به آسانی می توان اثبات نمود که

$$\int_0^{\infty} \Gamma(x, \omega_1, \omega_2) dt = +\infty. \tag{۵۰}$$

از سویی دیگر، با استفاده از (۳۲) و (۴۶) عدد ثابت V_0 چنان موجود است که $\lim_{t \rightarrow \infty} V(x(t), \omega_1(t), \omega_2(t)) = V_0$. به علاوه داریم:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \Gamma(x(t), \omega_1(t), \omega_2(t)) dt &= \lim_{s \rightarrow \infty} \int_0^s \Gamma(x(t), \omega_1(t), \omega_2(t)) dt \\ &\leq - \lim_{s \rightarrow \infty} \int_0^s \dot{V}(x(t), \omega_1(t), \omega_2(t)) dt \\ &= - \lim_{s \rightarrow \infty} [V(x(s), \omega_1(s), \omega_2(s)) \\ &\quad - V(x(0), \omega_1(0), \omega_2(0))] \\ &= -V_0 + V(x(0), \omega_1(0), \omega_2(0)) < +\infty, \end{aligned} \tag{۵۱}$$

که با (۵۰) تناقض دارد. بنابراین $\Gamma(\hat{x}, \hat{\omega}_1, \hat{\omega}_2) = 0$ که بدین معنی است که نقطه ی

حدی $(\hat{x}, \hat{\omega}_1, \hat{\omega}_2)^T$ یک نقطه‌ی تعادلی از شبکه عصبی (۵) و \hat{x} یک جواب بهینه از مسأله (۱) است. در پایان تابع لیاپانوف دیگری به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \tilde{V}(x, \omega_1, \omega_2) = & f(x) - f(\tilde{x}) + \frac{1}{\gamma} \|\bar{\omega}_1\|^2 + \frac{1}{\gamma} \|\bar{\omega}_2\|^2 - \frac{1}{\gamma} \|\tilde{\omega}_1\|^2 \\ & - \frac{1}{\gamma} \|\tilde{\omega}_2\|^2 - (x - \tilde{x})^T (\tilde{\eta} - \tilde{\omega}_1 + \tilde{\omega}_2) \\ & - (\omega_1 - \tilde{\omega}_1)^T \tilde{\omega}_1 - (\omega_2 - \tilde{\omega}_2)^T \tilde{\omega}_2 + \frac{1}{\gamma} \|x - \tilde{x}\|^2 \\ & + \frac{1}{\gamma} \|\omega_1 - \tilde{\omega}_1\|^2 + \frac{1}{\gamma} \|\omega_2 - \tilde{\omega}_2\|^2, \end{aligned} \quad (52)$$

مشابه اثبات قضیه ۲.۴، داریم:

$$\begin{aligned} & \tilde{V}(x, \omega_1, \omega_2) \\ & \geq \frac{1}{\gamma} \|x - \tilde{x}\|^2 + \frac{1}{\gamma} \|\omega_1 - \tilde{\omega}_1\|^2 + \frac{1}{\gamma} \|\omega_2 - \tilde{\omega}_2\|^2 \geq 0, \quad (53) \\ & \frac{d}{dt} \tilde{V}(x(t), \omega_1(t), \omega_2(t)) \leq 0. \end{aligned}$$

به آسانی می‌توان دریافت که $\tilde{V}(\tilde{x}, \tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2) = 0$. با توجه به پیوستگی تابع $\tilde{V}(x(t), \omega_1(t), \omega_2(t))$ ، به ازای هر $\varepsilon > 0$ ، $\tau > 0$ به گونه‌ای وجود دارد که

$$\begin{aligned} \tilde{V}(x, \omega_1, \omega_2) = |\tilde{V}(x, \omega_1, \omega_2) - \tilde{V}(\tilde{x}, \tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2)| < \varepsilon \\ \|x - \tilde{x}\|^2 + \|\omega_1 - \tilde{\omega}_1\|^2 + \|\omega_2 - \tilde{\omega}_2\|^2 < \tau \end{aligned} \quad (54)$$

چون $\lim_{k \rightarrow \infty} (x(t_k), \omega_1(t_k), \omega_2(t_k))^T = (\tilde{x}, \tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2)^T$ ، عدد صحیح مثبت L به گونه‌ای وجود دارد که به ازای هر $t > t_L$ داریم:

$$\|x(t_L) - \tilde{x}\|^2 + \|\omega_1(t_L) - \tilde{\omega}_1\|^2 + \|\omega_2(t_L) - \tilde{\omega}_2\|^2 < \tau. \quad (55)$$

از این رو با ترکیب (۵۳)، (۵۴) و (۵۵) به ازای هر $t > t_L$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\gamma} \|x(t) - \tilde{x}\|^2 + \frac{1}{\gamma} \|\omega_1(t) - \tilde{\omega}_1\|^2 + \frac{1}{\gamma} \|\omega_2(t) - \tilde{\omega}_2\|^2 \\ & \leq \tilde{V}(x(t), \omega_1(t), \omega_2(t)) \leq \tilde{V}(x(t_L), \omega_1(t_L), \omega_2(t_L)) \leq \varepsilon, \end{aligned} \quad (56)$$

را به دست می‌آوریم. که بدین معنی است که $\lim_{t \rightarrow \infty} (x(t), \omega_1(t), \omega_2(t))^T = (\tilde{x}, \tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2)^T$. بنابراین به ازای هر نقطه‌ی آغازین $(x(0), \omega_1(0), \omega_2(0))^T \in \mathbb{R}^{n+n+n}$ ، خط سیر جواب شبکه عصبی (۵) به یک نقطه‌ی تعادلی همگراست. ترکیب نمودن با قضیه ۶.۳ اثبات را کامل می‌کند. \square

ملاحظه ۴.۴. برای حل مسایل مشابه مسأله بهینه‌سازی (۱)، یک شبکه عصبی بازگشتی با یک تابع فعال‌ساز سخت توسط لیو و وانگ [۲۲] پیشنهاد شده است. برای حل مسأله (۱)، مدل پیشنهادی آن‌ها نیاز به انتخاب پارامترهای جریمه از قبل دارد که ممکن است منجر به جوابی غلط یا واگرایی شود، ولی در این جا برای اجتناب از استفاده هر پارامتر جریمه ساختار شبکه عصبی (۵) پیشنهاد گردید. در مقایسه با شبکه عصبی پیشنهادی توسط یانگ و کائو [۶۱]، شبکه عصبی (۵) دارای برخی مزایاست. به عنوان نمونه، قید $x \geq 0$ با قید کران‌دار جایگزین شده و تابع هدف می‌تواند ناهموار باشد که موجب گسترش دامنه کاربرد مسأله بهینه‌سازی (۱) در [۶۱] می‌شود. به علاوه پایداری لیاپانوف و همگرایی سراسری به جواب بهینه شبکه عصبی پیشنهادی (۵) اثبات گردیدند.

۵ مثال‌های عددی و کاربردها

مسأله بهینه‌سازی محدب زیر با قيود مساوی خطی و $x \geq 0$ را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} & \min \quad f(x) \\ & \text{subject to } Ax = b, \quad x \geq 0, \end{aligned} \quad (57)$$

که در آن $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$ ، $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ، $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ماتریس ضرایب با رتبه سطری کامل است (یعنی $rank(A) = m \leq n$) و $b \in \mathbb{R}^m$. تابع هدف f محدب ولی ممکن است در ناحیه شدنی $\Omega = \Omega_1 \cap \Omega_2 = \{x \in \mathbb{R}^n | Ax = b, x \geq 0\}$ $\Omega_1 = \{x \in \mathbb{R}^n | x \geq 0\}$ و $\Omega_2 = \{x \in \mathbb{R}^n | Ax = b\}$ ناهموار باشد. با توجه به مباحث مطرح شده در بخش‌های دوم و سوم، به‌عنوان کاربردی از شبکه عصبی پیشنهادی (۵)، شبکه عصبی (۵) را به مدل زیر که قابل استفاده برای حل مسأله بهینه‌سازی محدب ناهموار (۵۷) با پیچیدگی کمتر باشد، تبدیل می‌کنیم.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} \in -(I - P)(\partial f(x) - \bar{\omega}) - A^T g(Ax - b) \\ \forall \frac{d\omega}{dt} = -\omega + \bar{\omega}, \end{cases} \quad (58)$$

که در آن $[\omega_i]^+ = \max\{0, \omega_i\}$ ، $(\omega)^+ = ([\omega_1]^+, \dots, [\omega_n]^+)^T$ ، $\bar{\omega} = (\omega - x)^+$ I ماتریس همانی است، $P = A^T(AA^T)^{-1}A$ ، $\partial f(x)$ گرادیان تعمیم یافته $f(x)$ است و $g(x) = (\tilde{g}(x_1), \tilde{g}(x_2), \dots, \tilde{g}(x_m))^T$ تابع فعال‌ساز با مؤلفه‌های

$$\tilde{g}(x_i) = \begin{cases} 1, & \text{if } x_i > 0, \\]1, 1[- & \text{if } x_i = 0, \\ -1 & \text{if } x_i < 0. \end{cases} \quad (59)$$

است. با تحلیلی مشابه و اثبات‌هایی نظیر بخش‌های دوم و سوم، شبکه عصبی (۵۸) به‌طور سراسری در زمان متناهی همگرا به یک نقطه‌ی تعادلی درون ناحیه شدنی مساوی مسأله (۵۷) است و بعد از رسیدن به آن‌جا در داخل ناحیه باقی می‌ماند. به‌علاوه هر نقطه‌ی تعادلی شبکه عصبی (۵۸) به مفهوم لیاپانوف پایدار است و هر نقطه‌ی تعادلی شبکه عصبی (۵۸) یک جواب بهینه‌ی مسأله بهینه‌سازی (۵۷) است و برعکس. باقیمانده این بخش شامل پنج مثال است که دو مثال اول برای روشن ساختن کارایی شبکه عصبی (۵۸) در حل مسأله بهینه‌سازی (۵۷) ارائه شده‌اند. سپس سه مثال برای روشن ساختن کارایی شبکه عصبی پیشنهادی (۵) برای حل مسأله بهینه‌سازی (۱) ارائه و حل گردیده‌اند. در تمام مثال‌ها، شمول‌های دیفرانسیلی تعریف شده با (۵) و (۵۸) با استفاده از

الگوریتم ۴۵ode در نرم افزار متلب حل شده‌اند.

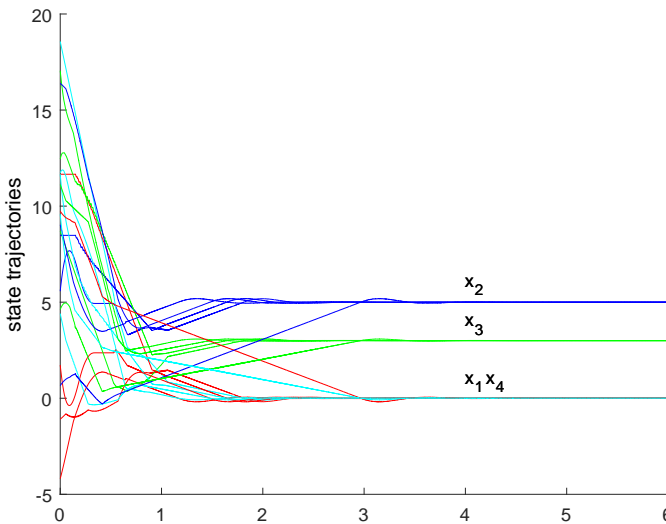
مثال ۱.۵. مسأله بهینه‌سازی محدب ناهموار زیر را در نظر بگیرید:

$$\min f(x) = |x_1 - x_2 + 2x_3 + 1| + |x_2 - x_3 + x_4 - 2| - |x_1 + x_3 - 2|,$$

subject to $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 8, x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 2, x_i \geq 0.$

(۶۰)

به‌وضوح تابع هدف $f(x)$ نامحدب و ناهموار است. این مسأله در [۴۵] بحث و حل شده است. در این جا مسأله را برای $x_i \geq 0$ به‌جای $x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ در آن مقاله در نظر گرفته‌ایم. برطبق آن مقاله، اگر قيود مساوی را در تابع هدف $f(x)$ جایگزین کنیم، تابع هدف $f(x)$ محدب است. این مثال را با شبکه عصبی (۵۸) حل می‌کنیم. شکل ۳ نشان می‌دهد که خط سیرهای جواب شبکه عصبی (۵۸) با ۵ نقطه‌ی آغازین تصادفی به‌طور سراسری به جواب بهینه‌ی یکتای $x^* = (0, 5, 3, 0)^T$ همگرایند.



شکل ۳: رفتار خط سیرهای جواب شبکه عصبی (۵۸) با ۵ نقطه آغازین تصادفی در مثال ۱.۵

مثال ۲.۵. مسأله مینیم‌سازی نرم L_1 زیر با برخی قیود را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \min \quad & \|Cx - d\|_1, \\ \text{s.t.} \quad & x_1 - x_2 + x_3 = 0, \quad 2x_2 + x_3 = 2, \quad x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned} \quad (61)$$

که در آن $x \in \mathbb{R}^3$ و

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3/5 \\ 0 & 2 & 1/6 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad d = \begin{pmatrix} 1/5 \\ 3/8 \\ -6/2 \end{pmatrix}. \quad (62)$$

به‌وضوح شبکه عصبی (۵۸) به‌طور سراسری همگراست و مناسب برای حل این مثال، بنابراین شبکه عصبی (۵۸) برای این مثال به‌صورت زیر می‌باشد:

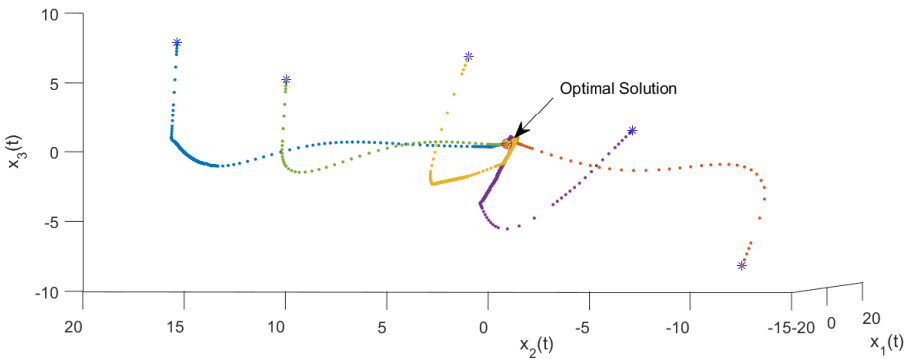
$$\begin{cases} \dot{x}(t) \in -(I - P)(\partial f(x) - \bar{\omega}) - A^T g(Ax - b) \\ \frac{\partial d\omega}{\partial t} = -\omega + \bar{\omega}, \end{cases} \quad (63)$$

که در آن تابع هدف و $I - P$ به‌صورت زیر می‌باشند:

$$f(x) = |x_1 + 3/5x_2 - 1/5| + |2x_2 + 1/6x_3 - 3/8| + |x_1 + x_2 + x_3 + 6/2|, \quad (64)$$

$$I - P = \begin{pmatrix} 0.6429 & 0.2143 & -0.4286 \\ 0.2143 & 0.0714 & -0.1429 \\ -0.4286 & -0.1429 & 0.2857 \end{pmatrix}. \quad (65)$$

تنها جواب بهینه‌ی این مسأله برابر است با $x^* = (0.6223, 0.8741, 0.2518)^T$ که تمام نتایج عددی نشان می‌دهند که خط سیر جواب $x(t)$ از مدل پیشنهادی به جواب یکتای x^* همگرا است. شکل ۴ حالت فضایی خط سیرهای (۶۳) برای حل (۶۱) با شروع از پنج شرط آغازین تصادفی که با ستاره‌های آبی رنگ مشخص شده‌اند را نشان می‌دهد، که



شکل ۴: حالت فضایی خط سیرهای (۶۳) برای حل (۶۱) با شروع از پنج شرط آغازین تصادفی که با ستاره‌های آبی رنگ مشخص شده‌اند.

با متلب شبیه‌سازی شده است. مشاهده می‌شود که کلیه خط سیر جواب‌ها در زمان متناهی به جواب بهینه‌ی $x^* = (0.6223, 0.8741, 0.2518)^T$ که با دایره‌ی قرمز رنگ مشخص شده، هم‌گرایی می‌یابند. هم‌چنین، شکل ۵ همگرایی خط سیرهای شبکه عصبی (۵۸) را با پنج نقطه‌ی آغازین تصادفی نشان می‌دهد. ما این مثال را با روش نقطه‌ی درونی نیز حل کردیم و جواب برابر است با $(0.186, 0.7699, 0.4232)^T$ که به‌وضوح ناشدنی است و جواب بهینه نمی‌باشد.

مثال ۳.۵. مسأله بهینه‌سازی محدب ناهموار زیر را در نظر بگیرید:

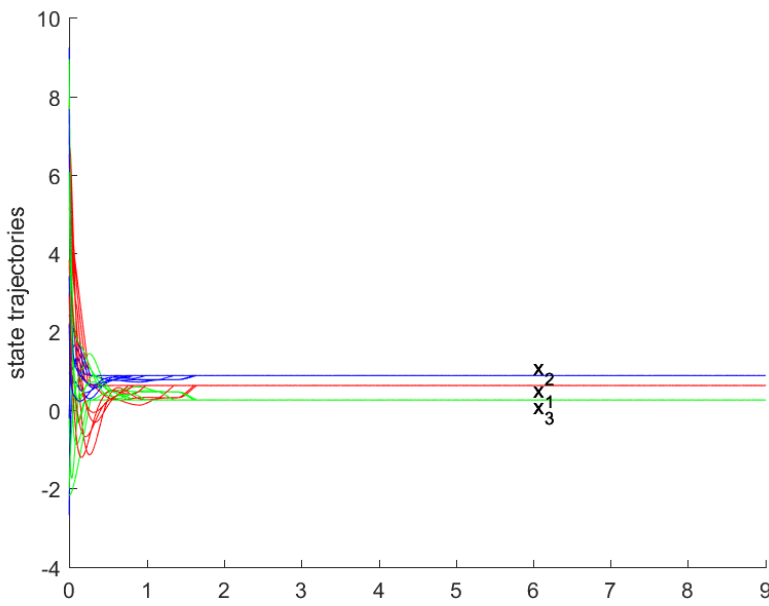
$$\min f(x) = \sum_{i=1}^4 x_i^2 + \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 |x_i - x_j|,$$

$$\text{subject to } x_1 + 2x_2 = 1, \quad x_3 - 2x_4 = 1$$

$$x \in \Omega_1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4)^T \in \mathbb{R}^4 \mid -1 \leq x_i \leq 1, i = 1, 2, 3, 4\}.$$

(۶۶)

این مثال را با شبکه عصبی (۵) حل نموده‌ایم. این مسأله دارای جواب بهینه‌ی یکتای $x^* = (0.3333, 0.3333, 0.3333, -0.3333)^T$ می‌باشد. شکل ۶ همگرایی سراسری خط سیرهای جواب مسأله با انتخاب پنج نقطه‌ی آغازین تصادفی از خارج از ناحیه‌ی



شکل ۵: خط سیرهای جواب شبکه عصبی (۵۸) با ۵ نقطه‌ی آغازین تصادفی برای مثال ۲.۵.

شدنی به جواب بهینه‌ی یکتا را نشان می‌دهد، به‌وضوح مشاهده می‌شود که این جواب درون ناحیه‌ی شدنی مساوی واقع است.

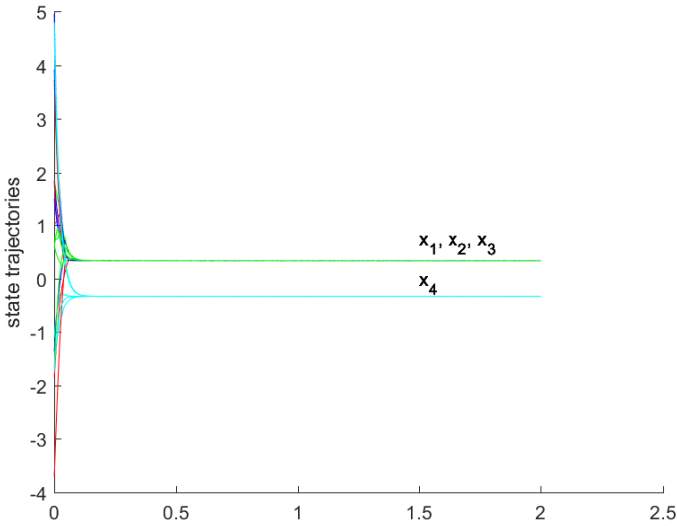
مثال ۴.۵. مسأله بهینه‌سازی ناهموار زیر را در نظر بگیرید:

$$\min f(x) = |x_1 - x_2 - 2x_3 + 1| + |x_1 + 2x_2 - x_3 - 2| + |x_1 + x_2 - 1| - |x_3 - 1|,$$

$$\text{subject to } x_1 + x_2 + x_3 = 0, \quad -1 \leq x_i \leq 1, \quad i = 1, 2, 3.$$

(۶۷)

این مسأله در [۴۴] بحث و حل گردیده است. به‌وضوح تابع هدف ناهموار و نامحدب است ولی با جایگزینی $x_3 = x_1 + x_2$ در تابع هدف، در می‌یابیم که $f(x)$ در ناحیه شدنی محدب است. بنابراین می‌توان از شبکه عصبی (۵) برای حل (۶۷) استفاده نمود. جواب بهینه‌ی یکتای (۶۷) عبارت است از $x^* = (-0.5, 1, -0.5)^T$. شکل ۷ همگرایی خط سیرهای جواب شبکه عصبی (۵) را با ۵ نقطه‌ی آغازین تصادفی به جواب بهینه‌ی

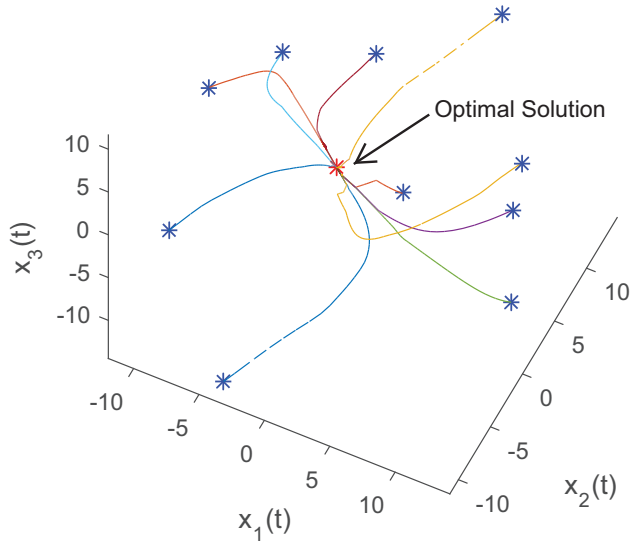


شکل ۶: خط سیرهای جواب شبکه عصبی (۴۵) با ۵ نقطه‌ی آغازین تصادفی برای مثال ۳.۵.

یکتا را نشان می‌دهد. در مقایسه با [۴۴]، شبکه عصبی پیشنهادی در این مقاله به هیچ پارامتر جریمه‌ای نیاز ندارد. اگرچه روش‌های مبتنی بر پارامتر جریمه ممکن است کارا باشند، ولی تخمین پارامترهای جریمه در کاربردهای واقعی مشکل است. هم‌چنین از وضعیت خط سیرهای جواب مسأله (۶۷) با ۱۰ نقطه‌ی آغازین تصادفی که در شکل ۸ با ستاره‌های آبی نمایش داده شده‌اند، در می‌یابیم که تمام خط سیرهای جواب به جواب بهینه‌ی یکتای $x^* = (-0.5, 1.0, -0.5)^T$ که با ستاره قرمز مشخص شده همگرا هستند.

مثال ۵.۵. مسأله می‌نیمم سازی نرم L_1 - زیر با برخی قیود داده شده را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \min \quad & \|Cx - d\|_1, \\ \text{s.t.} \quad & 0.4x_1 + 0.2x_2 + 0.3x_3 + 0.4x_4 + 0.5x_5 = 1, \\ & 0.6x_1 + 0.5x_2 + 0.2x_3 + 0.9x_4 + 0.6x_5 = 2, \quad (68) \\ & 0.4x_1 + 1.2x_2 + 0.5x_3 + 1.4x_4 + 0.9x_5 = 3 \\ & -1 \leq x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \leq 1 \end{aligned}$$



شکل ۸: خط سیرهای جواب شبکه عصبی (۵) با ۱۰ نقطه‌ی آغازین تصادفی برای مثال ۴.۵ که با ستاره‌های آبی نمایش داده شده‌اند.

این مسأله در [۴۶] بیان و حل شده است. به‌وضوح شبکه عصبی (۵) به‌طور سراسری پایدار بوده و قابل اعمال برای حل این مسأله بهینه‌سازی می‌باشد. بنابراین شبکه عصبی (۵) برای این مسأله به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) \in -(I - P)[\partial f(x(t)) - \bar{\omega}_1(t) + \bar{\omega}_2(t)] - A^T g(Ax(t) - b) \\ 2\dot{\omega}_1(t) = -\omega_1(t) + \bar{\omega}_1(t) \\ 2\dot{\omega}_2(t) = -\omega_2(t) + \bar{\omega}_2(t). \end{cases} \quad (70)$$

که در آن تابع هدف $f(x) = \|Cx - d\|_1$ (مجموع $|C_i x - d_i| (i = 1, \dots, 10)$) است

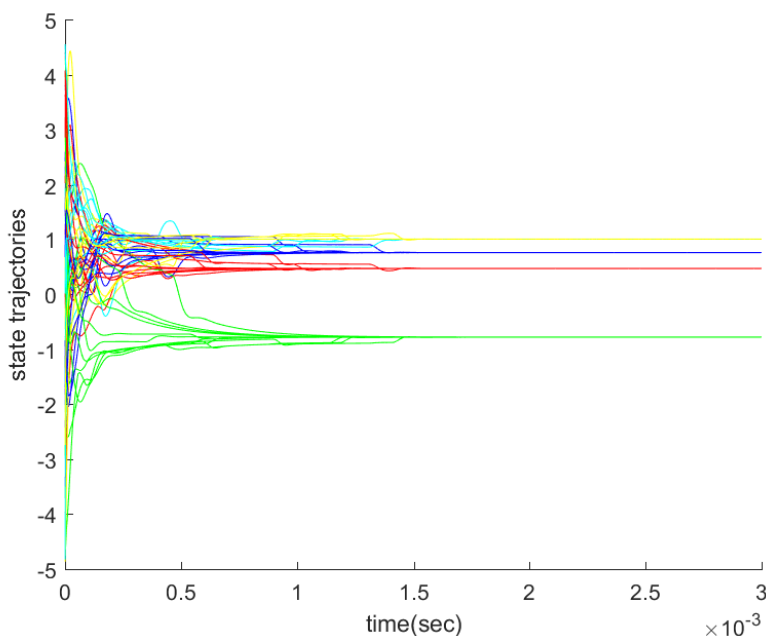
که d_i و C_i ها به ترتیب i امین سطر C و d هستند و می‌توانند به صورت زیر محاسبه شوند:

$$\begin{aligned}
 f(x) = & |0.1x_1 + 0.2x_2 + 0.3x_3 + 0.4x_4 + 0.5x_5 + 0.1| \\
 & + |0.6x_1 + 0.7x_2 + 0.8x_3 + 0.9x_4 + x_5 - 0.1| \\
 & + |1.5x_1 + 1.2x_2 + 1.3x_3 + 1.4x_4 + 1.5x_5 + 0.1| \\
 & + |0.15x_1 + 0.05x_2 + 0.1x_3 + 0.2x_4 + 0.3x_5 - 0.1| \\
 & + |0.2x_1 + 0.2x_2 + 0.32x_3 + 0.75x_4 + 0.1x_5 + 0.1| \\
 & + |0.32x_1 + 0.1x_2 + 0.3x_3 + 0.75x_4 + 0.1x_5 - 0.1| \\
 & + |0.1x_1 + 0.4x_2 + 0.3x_3 + 0.8x_4 + 0.2x_5 + 0.1| \\
 & + |0.15x_1 + 0.5x_2 + 0.2x_3 + 0.3x_4 + 0.7x_5 - 0.1| \\
 & + |0.5x_1 + 1.4x_2 + 1.2x_3 + 0.3x_4 + 0.6x_5 + 0.1| \\
 & + |0.2x_1 + 1.2x_2 + 0.1x_3 + 0.6x_4 + 0.8x_5 - 0.1|,
 \end{aligned} \tag{71}$$

هم چنین $I - P$ می‌تواند به صورت زیر به دست آید:

$$I - P = \begin{pmatrix} 0.2879 & 0.3003 & 0.1014 & -0.2296 & -0.2277 \\ 0.3003 & 0.4152 & -0.0892 & -0.3768 & -0.0514 \\ 0.1014 & -0.0892 & 0.4087 & 0.1820 & -0.4363 \\ -0.2296 & -0.3768 & 0.1820 & 0.3682 & -0.0693 \\ -0.2277 & -0.0514 & -0.4363 & -0.0693 & 0.5199 \end{pmatrix}. \tag{72}$$

همان‌طور که از شکل ۹ پیداست خط سیرهای جواب $x(t)$ از شبکه عصبی پیشنهادی (۵) با ۱۰ نقطه‌ی آغازین تصادفی به این جواب یکتا همگرا می‌باشند، که با نتایج به دست آمده در [۴۶] سازگارند.



شکل ۹: خط سیرهای جواب شبکه عصبی (۵) با ۱۰ نقطه‌ی آغازین تصادفی برای مثال ۵.۵.

۶ نتیجه گیری

در این مقاله یک شبکه عصبی بازگشتی غیرجریمه‌ای مبتنی بر شمول‌های دیفرانسیلی برای حل مسایل بهینه‌سازی محدب ناهموار با قیود مساوی خطی و کران‌دار با الهام از شبکه‌های عصبی موجود برای مسایل بهینه‌سازی مشتق‌پذیر پیشنهاد گردید. با استفاده از نظریه لیاپانوف و تحلیل شمول دیفرانسیلی پایداری و همگرایی سراسری به جواب مسایل بهینه‌سازی محدب ناهموار تضمین گردید. به‌عنوان کاربرد، شبکه عصبی پیشنهادی (۵) به یک مدل (۵۸) که قابل اعمال برای حل مسأله بهینه‌سازی محدب ناهموار با قیود مساوی خطی و $x \geq 0$ است را تبدیل نمودیم. هم‌چنین کارایی شبکه‌های پیشنهادی‌مان را با تعدادی مثال نشان دادیم. در آینده مدل پیشنهادی را برای حل مسایل بهینه‌سازی محدب ناهموار با قیود کلی توسعه خواهیم داد. هم‌چنین، به بررسی کاربرد شبکه‌های عصبی بازگشتی در حل مسایل بهینه‌سازی ظاهر شده در پردازش تصاویر و سیگنال، طراحی سیستم‌های کنترلی، رنگ آمیزی گراف‌ها و مانند آن خواهیم پرداخت.

مراجع

- [1] Ahmad I, Kaur A, Sharma MK, *Robust duality for generalized convex nonsmooth vector programs with uncertain data in constraints*, RAIRO-Oper. Res. 55(4), 2181–2188 (2021). doi:10.1051/ro/2021095.
- [2] Antoniou A, Lu WS, *Practical optimization*, Springer, New York, USA (2007).
- [3] Aubin J, Cellina A, *Differential inclusions*, Springer-Verlag, Berlin, Germany, (1984).
- [4] Bazaraa MS, Sherali HD, Shetty CM, *Nonlinear programming: theory and algorithms*, Wiley, New York, USA (1993).
- [5] Beliakov G, Bagirov A, *Non-smooth optimization methods for computation of the conditional value-at-risk and portfolio optimization*, Optimization, 55(5-6), 459–479 (2006).
- [6] Bertsekas D, *Constrained optimization and Lagrange multiplier methods*, Academic, New York, USA (1982).
- [7] Bian W, Xue X, *Neural network for solving constrained convex optimization problems with global attractivity*, IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers, 60(3), 710–723 (2013).
- [8] Chen D, Cao X, Li S, *A multi-constrained zeroing neural network for time-dependent nonlinear optimization with application to mobile robot tracking control*, Neurocomputing, 460, 331–344 (2021). doi:10.1016/j.neucom.2021.06.089
- [9] Cheng L, Hou ZG, Homma N, Tan M, Gupta MM, *Solving convex optimization problems using recurrent neural networks in finite time*, in: International Joint Conference on Neural Networks, IJCNN2009, Atlanta, Georgia, USA, 538–543 (2009).

- [10] Cheng L, Hou ZG, Lin Y, Tan M, Zhang WC, Wu FX, *Recurrent neural network for non-smooth convex optimization problems with application to the identification of genetic regulatory networks*, IEEE Transactions on Neural Networks, 22(5), 714–726 (2011).
- [11] Chua L, Lin GN, *Nonlinear programming without computation*, IEEE Transactions on Circuits and Systems, 31(2), 182–188 (1984).
- [12] Clarke F, *Optimization and nonsmooth analysis*, Wiley, New York, USA, (1969).
- [13] Dai J, Yang X, Xiao L, Jia L, Li Y, *ZNN with Fuzzy Adaptive Activation Functions and Its Application to Time-Varying Linear Matrix Equation*, IEEE Transactions on Industrial Informatics, (2022) doi: 10.1109/TII.2021.3099819.
- [14] Ebadi M. J., Hosseini A., Hosseini M. M., *A projection type steepest descent neural network for solving a class of nonsmooth optimization problems*, Neurocomputing, 235, (2017), 164–181.
- [15] Ebadi M. J., Hosseini M. M., Karbassi S. M., *An efficient one-layer recurrent neural network for solving a class of nonsmooth pseudoconvex optimization problems*, Journal of Theoretical and Applied Information Technology, 96(7) (2018) 1999-2014.
- [16] Ebadi M. J., Hosseini A., Jafari H., *An efficient one-layer recurrent neural network for solving a class of nonsmooth optimization problems*, Journal of New Researches in Mathematics, 6(24), 97–110 (2020).http://journals.srbiau.ac.ir/article_15615_f34599f523793828ae53dca49834f495.pdf
- [17] Ebadi M.J., Jafari H., (2021) Solving a Class of Optimal Control Problems by Using Chebyshev Polynomials and Recurrent Neural Networks. In: Allahviranloo T., Salahshour S., Arica N. (eds) Progress in Intelligent Decision Science. IDS

2020. *Advances in Intelligent Systems and Computing*, vol 1301. Springer, Cham.
https://doi.org/10.1007/978-3-030-66501-2_15
- [18] Effati S, Baymani M, *A new nonlinear neural network for solving convex nonlinear programming problems*, *Applied Mathematics and Computation*, 168(2), 1370–1379 (2005).
- [19] Effati S, Mansoori A, Eshaghnezhad M, *An efficient projection neural network for solving bilinear programming problems*, *Neurocomputing*, 168, 1188-1197 (2015).
- [20] Eshaghnezhad M, Effati S, Mansoori A, *A neurodynamic model to solve nonlinear pseudo-monotone projection equation and its applications*, *IEEE transactions on cybernetics*, 47(10), 3050–3062 (2017).
- [21] Forti M, Nistri P, Quincampoix M, *Generalized neural network for nonsmooth non-linear programming problems*, *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers*, 51(9), 1741–1754 (2004).
- [22] Gao X, *A novel neural network for nonlinear convex programming*, *IEEE Transactions on Neural Networks*, 15(3), 613–621 (2004).
- [23] Guo Z, Liu Q, Wang J, *A one-layer recurrent neural network for pseudoconvex optimization subject to linear equality constraints*, *IEEE Trans. Neural Networks*, 22, 1892–1900 (2011).
- [24] Heydarpoor, F, Abbasi, E., Ebadi, M. J., Karbassi, M. M. *Solving multi-objective functions for cancer treatment by using Metaheuristic Algorithms*, *International Journal of Combinatorial Optimization Problems and Informatics*, 11(3), 61-75.
- [25] Heydarpoor, F, Abbasi, E., Ebadi, M. J., Karbassi, M. M. *Solving optimal control problem of cancer treatment by artificial neural networks*, *International Jour-*

- nal of Interactive Multimedia and Artificial Intelligence, 6(4) (2020): 18-25. doi: 10.9781/ijimai.2020.11.011.
- [26] Hosseini A, Hosseini SM, Soleimani-damaneh M, *A differential inclusion-based approach for solving nonsmooth convex optimization problems*, Optimization, 62(9), 1203–1226 (2013).
- [27] Hosseini A, *A non-penalty recurrent neural network for solving a class of constrained optimization problems*, Neural Networks, 73, 10–25 (2016).
- [28] Hu X, Zhang B, *A new recurrent neural network for solving convex quadratic programming problems with an application to the k-winners-take-all problem*, IEEE Transactions on Neural Networks, 20(4), 654–664 (2009).
- [29] Jamali N., Sadegheih A., Lotfi M. M., Lincoln C. Wood, Ebadi M. J., *Estimating the Depth of Anesthesia During the Induction by a Novel Adaptive Neuro-Fuzzy Inference System: A Case Study*, Neural Processing Letters 53, 131–175 (2021). <https://doi.org/10.1007/s11063-020-10369-7>.
- [30] Jiang X, Qin S, Xue X, Liu X, *A second-order accelerated neurodynamic approach for distributed convex optimization*, Neural Networks, 146, 161–173 (2022). doi:10.1016/j.neunet.2021.11.013.
- [31] Ju X, Hu D, Li C, He X, Feng G, *A Novel Fixed-Time Converging Neurodynamic Approach to Mixed Variational Inequalities and Applications*, IEEE Transactions on Cybernetics, (2021). doi:10.1109/TCYB.2021.3093076.
- [32] Kennedy M, Chua L, *Unifying the Tank and Hopfield linear programming Circuit and the Canonical Nonlinear Programming circuit of Chua and Lin*, IEEE Transactions on Circuits and Systems, 34(2), 210–214 (1987).
- [33] Kennedy M, Chua L, *Neural networks for nonlinear programming*, IEEE Transactions on Circuits and Systems, 35(5), 554–562 (1988).

- [34] Li W, Bian W, *Smoothing neural network for regularized optimization problem with general convex constraints*, Neural Networks, 143, 678–689 (2021). doi:10.1016/j.neunet.2021.08.001.
- [35] Li G, Song S, Wu C, Du Z, *A neural network model for nonsmooth optimization over a compact convex subset*, In: Lecture Notes in Computer Science, Vol. 3971, Springer-Verlag, Berlin, Germany, 344–349 (2006).
- [36] Liang Xb, Wang J, *A recurrent neural network for nonlinear optimization with a continuously differentiable objective function and bound constraints*, IEEE Transactions on Neural Networks, 11(6), 1251–1262 (2000).
- [37] Liu N, Wang J, Qin S, *A one-layer recurrent neural network for nonsmooth pseudoconvex optimization with quasiconvex inequality and affine equality constraints*, Neural Networks, 147, 1–9 (2022). doi:10.1016/j.neunet.2021.12.001.
- [38] Liu SB, Wang J, *A simplified dual neural network for quadratic programming with its KWTa application*, IEEE Transactions on Neural Networks, 17(6), 1500–1510 (2006).
- [39] Liu Q, Wang J, *A recurrent neural network for nonsmooth convex programming subject to linear equality and bound constraints*, ICONIP 2006 LNCS, Vol. 4223, Springer, Heidelberg, Germany, 1004–1013 (2006).
- [40] Liu Q, Wang J, *A one-layer recurrent neural network with a discontinuous hard-limiting activation function for quadratic programming*, IEEE Transactions on Neural Networks, 19(4), 558–570 (2008).
- [41] Liu Q, Wang J, *A one-layer recurrent neural network for non-smooth convex optimization subject to linear equality constraints*, In: Lecture Notes in Computer Science, Vol. 5507, Springer-Verlag, Berlin, Germany, 1003–1010 (2009).

- [42] Liu Q, Wang J, *Finite-time convergent recurrent neural network with a hard-limiting activation function for constrained optimization with piecewise-linear objective functions*, IEEE Transactions on Neural Networks, 22(4), 601–613 (2011).
- [43] Liu Q, Wang J, *A one-layer recurrent neural network for constrained nonsmooth optimization*, IEEE Trans. Systems, Man, and Cybernetics Part B, 41, 1323–1333 (2011).
- [44] Liu Q, Guo Z, Wang J, *A one-layer recurrent neural network for constrained pseudoconvex optimization and its application for dynamic portfolio optimization*, Neural Networks, 26, 99–109 (2012).
- [45] Liu Q, Wang J, *A one-layer projection neural network for nonsmooth optimization subject to linear equalities and bound constraints*, IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems, 24(5), 812–824 (2013).
- [46] Liu Q, Yang S, Wang J, *A collective neurodynamic approach to distributed constrained optimization*, IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems, 28(8), 1747–1758 (2017.)
- [47] Mordukhovich BS, *Variational analysis and generalized differentiation, I: basic theory*, Springer, New York, USA, (2006a).
- [48] Mordukhovich BS, *Variational analysis and generalized differentiation, II: applications*, Springer, New York, USA, (2006b).
- [49] Nazemi AR, *A dynamic system model for solving convex nonlinear optimization problems*, Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 17(4), 1696–1705 (2012).
- [50] Qin S, Xue X, *A two-layer recurrent neural network for nonsmooth convex optimization problems*, IEEE transactions on neural networks and learning systems, 26(6), 1149–1160 (2015).

- [51] Soleimani-damaneh M, *Nonsmooth optimization using Mordukhovich's subdifferential*, SIAM Journal on Control and Optimization, 48(5), 3403–3432 (2010).
- [52] Tank D, Hopfield J, *Simple neural optimization networks: An a/d converter, signal decision circuit, and a linear programming circuit*, IEEE Transactions on Circuits and Systems, 33(5), 533–554 (1986).
- [53] Wang J, *A deterministic annealing neural network for convex programming*, Neural Networks, 7(4), 629–641 (1994).
- [54] Wang J, Hu Q, Jiang D, *A Lagrangian network for kinematic control of redundant robot manipulators*, IEEE Transactions on Neural Networks, 10(5), 1123–1132 (1999).
- [55] Wei F, Chen G, Wang W, *Finite-time stabilization of memristor-based inertial neural networks with time-varying delays combined with interval matrix method*, Knowledge-Based Systems, 230, 107395 (2021). doi:10.1016/j.knosys.2021.107395.
- [56] Xia Y, *A new neural network for solving linear and quadratic programming problems*, IEEE Transactions on Neural Networks, 7(6), 1544–1548 (1996).
- [57] Xia Y, Wang J, *On the stability of globally projected dynamical systems*, Journal of Optimization Theory and Applications, 106(1), 129–150 (2000).
- [58] Xia Y, Leung H, Wang J, *A projection neural network and its application to constrained optimization problems*, IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications, 49(4), 447–458 (2002).
- [59] Xia Y, Wang J, *A recurrent neural network for nonlinear convex optimization subject to nonlinear inequality constraints*, IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers, 51(7), 1385–1394 (2004).

- [60] Xia Y, Wang J, *A recurrent neural network for solving nonlinear convex programs subject to linear constraints*, IEEE Transactions on Neural Networks, 16(2), 379–386 (2005).
- [61] Yang Y, Cao Y, *A new neural network for solving nonlinear convex programs with linear constraints*, Neurocomputing, 74(17), 3079–3083 (2011).
- [62] Yashtini M, Malek A, *A discrete-time neural network for solving nonlinear convex problems with hybrid constraints*, Applied Mathematics and Computation, 195(2), 576–584 (2008).
- [63] Zhang Z, Xiao T, Qin X, *Fly visual evolutionary neural network solving large-scale global optimization*, International Journal of Intelligent Systems. 36, 6680–6712 (2021). doi:10.1002/int.22564.
- [64] Zhang S, Constantinides AG, *Lagrange programming neural networks*, IEEE Transactions on Circuits and Systems-II: Analog and Digital Signal Processing, 39(7), 441–452 (1992).