سیستم‌های فازی و کاربردها
شاپای چاپی: ۴۴۰۹-۲۷۱۷
سال چهارم، شماره دوم (پائیز و زمستان ۱۴۰۰)
شاپای الکترونیکی: ۳۹۸۴-۲۷۱۷
صص. ۱۶۵ تا ۱۸۵
DOI:10.22034/JFSA.2022.296256.1080

تخصیص منابع فازی در سیستم‌های دومرحله‌ای

فرانک حسین زاده سلجوقی* و طیبه دهقانی

دانشکده ریاضی آمار و علوم کامپیوتر،
دانشگاه سیستان و بلوچستان، زاهدان، ایران

تاریخ دریافت: ۱۴۰۰/۴/۳۱ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۰/۱۱/۲۹

چکیده

عموما سازمان‌ها و موسسات دارای بخش‌های متعدد داخلی بوده که عملکرد کلی سازمان، نتیجه‌ای از عملکرد هریک از این بخش‌ها یا مراحل است. هر بخش، دارای عوامل ورودی و خروجی خاص خود همچنین عوامل ارتباط دهنده بین مراحل است. شاخص‌های بین مراحل را شاخص‌های میانی می‌نامند. در یک ساختار دومرحله‌ای، شاخص‌های میانی خروجی‌های مرحله اول بوده که به‌عنوان ورودی مرحله دوم به‌کار می‌روند. ارزیابی عملکرد یک سازمان باید با درنظر گرفتن عملکرد هریک از بخش‌های آن تعیین گردد. تحلیل پوششی داده‌ها یکی از روشهای مناسب برای ارزیابی عملکرد براساس چند شاخص است. در عمل تعیین این شاخص‌ها با مقادیر قطعی امکان‌پذیر نمی‌باشد. این مقاله به ارائه مدلی جهت تعیین عملکرد موسسات دوبخشی در محیط فازی همچنین تخصیص منابع به آن می‌پردازد. با استفاده از تحلیل پوششی داده‌های معکوس، یک مدل برنامه‌ریزی چندهدفه پیشنهاد شده است که با افزایش خروجی‌های واحد تحت ارزیابی، میزان افزایش ورودی‌های مرحله اول و میانی را بنحوی تعیین کند که کارایی آن حفظ شود. سپس مدل پیشنهادی برای تخصیص منابع به شعب بانک استفاده شده‌است.

عبارات و کلمات کلیدی: تحلیل پوششی‌داده‌ها، تحلیل پوششی‌داده‌های معکوس، تخصیص منابع ، مدل دومرحله ای، عدد فازی مثلثی.

Email(s): .

Mathematics Subject Classification: 62J86; 90B50

۱ مقدمه

تحلیل پوششی داده‌ها (DEA)روشی برای ارزیابی کارایی نسبی هر واحد تصمیم‌گیرنده (DMU) نسبت به سایر واحدهاست که از ورودی‌های یکسان برای تولید خروجی‌های یکسان استفاده می‌کنند. سیستم‌هایی با بیش از یک فرآیند تولید، سیستم‌های چند مرحله‌ای نامیده می‌شوند. ساده ترین نوع این سیستم‌ها، سیستم دو مرحله‌ای می‌باشد.

مدل‌های تحلیل پوششی داده‌ها که به ارزیابی سیستم‌های چند مرحله ای می‌پردازند، تحلیل پوششی داده‌های شبکه‌ای $NDEA$ نامیده می‌شوند. مدل‌های دومرحله‌ای پایه مدل‌های شبکه‌ای هستند، در این مدل‌ها، خروجی‌های مرحله اول که به‌عنوان ورودی‌های مرحله دوم استفاده می‌گردند، شاخص‌های میانی نامیده می‌شوند. مرحله دوم، این شاخص‌های میانی را برای تولید خروجی‌های خود به‌کار می‌برد. از ساختار دومرحله ای در مدیریت سازمان‌هایی مثل بیمارستان‌ها، بانک‌ها و... استفاده می‌شود. سیستم بانکی نمونه بارزی از فرآیندهای دو مرحله‌ای می‌باشد. در مرحله اول، نیروی انسانی سپرده‌هایی را تولید می‌کند و مرحله دوم این سپرده‌ها را برای تولید سود به‌کار می‌برد. مطالعات متعددی توسط محققین بسیاری روی ساختارهای دو مرحله‌ای انجام شده‌است. سیفورد و ژو مدل‌های دو مرحله‌ای را برای ارزیابی ۵۵ بانک آمریکایی به‌کار بردند [۱۲]. ژو فرآیند دو مرحله‌ای را برای تعیین میزان سودبخشی ۵۰۰ شرکت به‌کار برد[۱۶]. کائو طبقه‌بندی جامعی برای $NDEA$ بر طبق نوع ساختار، همچنین دیدگاه حل استفاده شده در سال ۲۰۱۷ ارائه داده است [۷]. لیانگ و همکاران محاسبه کارایی مدلهای دومرحله‌ای را بر اساس نظریه بازیها ارائه کردند[۱۰]. همچنین دسپوتیس و همکاران الگوی ترکیب در تحلیل پوششی داده‌های دومرحله‌ای را معرفی کردند و محاسبه کارایی کل شبکه و کارایی هر یک از بخش‌های داخلی آن به صورت مجزا مطرح شده است [۴].

در روش‌های متداول تحلیل پوششی داده‌ها از داده‌های دقیق و قطعی برای تعیین کارایی استفاده می‌شود، در حالی‌که در دنیای واقعی داده‌ها ممکن است قطعی نباشند. داده غیردقیق یا بازه‌ای می‌تواند به عنوان عدد فازی شناخته شود. ونگ و همکاران مدل تحلیل پوششی داده‌های فازی را از دیدگاه بکارگیری محاسبات فازی ارائه کردند [۱۴]. از مطالعات اخیر تحلیل پوششی داده‌های فازی می‌توان به مدل پیشنهادی کائو و لیو اشاره نمود که با استفاده از اصل گسترش مدل‌های دومرحله‌ای را در محیط فازی بررسی و

کارایی کل را از حاصل‌ضرب کارایی بخش‌ها محاسبه کرده‌اند[۸]. آریا و یادو مدل فازی توسعه یافته را ارائه داده‌اند [۱]. توانا و همکاران مدل تحلیل پوششی داه‌های فازی را به‌صورت چندهدفه برای ارزیابی عملکرد پالایشگاه‌های نفت بکاربرده‌اند[۱۳].

یکی از مباحث پرکاربرد در تحلیل پوششی داده‌ها، تغییر یک شاخص و تعیین سایر شاخص‌ها به نحوی است که مقدار کارایی حفظ شود یا بهبود یابد. این مبحث تحت عنوان تحلیل پوششی داده‌ها معکوس شناخته می‌شود. در تحلیل پوششی داده‌ها، با توجه به مقادیر ورودی و خروجی، مقدار کارایی هر یک از واحدهای تصمیم‌گیری تعیین می‌شود. اما در تحلیل پوششی داده‌های معکوس، مقدار کارایی معین بوده و هدف تعیین ورودی‌ها یا خروجی‌ها به‌نحوی است که این مقدار کارایی حفظ شود یا بهبود یابد. اولین بار ویی و همکاران، مدل تحلیل پوششی داده‌های معکوس را برای پاسخگویی به سوال زیر پیشنهاد کردند: اگر در میان یک گروه از واحدهای تصمیم‌گیری ورودی‌های معینی افزایش یابند و بخواهیم واحد تصمیم‌گیرنده کارایی خود را در مقایسه با دیگر واحدهای تصمیم‌گیرنده حفظ کند یا بهبود بخشد، خروجی به چه میزان باید تولید شود؟ آنها برای تخمین سطح خروجی و تعیین واحد تصمیم‌گیرنده کارای ضعیف یک مساله برنامه‌ریزی خطی چند هدفه ارائه دادند[۱۵].

مدل تحلیل پوششی داده‌های معکوس کاربردهای متعددی دارد. به عنوان مثال در مسئله تحلیل سرمایه گذاری همواره تعیین میزان افزایش خروجی به‌ازای افزایش ورودی دارای اهمیت ویژه‌ای است. همچنین در تخصیص منابع، به‌منظور افزایش خروجی‌ها در سطح معین لازم است میزان افزایش منابع یا ورودی‌ها تعیین گردد. مدل تحلیل پوششی داده‌های معکوس برای مسائل سرمایه‌گذاری و تخصیص منابع حائز اهمیت است [۶، ۹].

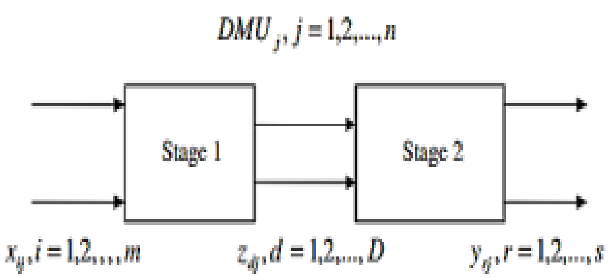
در این مقاله ابتدا مدلی برای ارزیابی کارایی واحدهای تصمیم‌گیری در مدل تحلیل پوششی داده‌های دو مرحله‌ای با داده‌های فازی پیشنهاد می‌دهیم. سپس یک روش جدید برای تخصیص منابع در سیستم‌های دو مرحله‌ای را ارائه می‌دهیم. هدف ما حفظ کارایی نسبی واحد تصمیم‌گیری تحت ارزیابی بعد از تخصیص می‌باشد.

ساختار مقاله بدین صورت است: در بخش ۲ یک نمونه از مدل‌های تحلیل پوششی داده‌های دو مرحله‌ای را ارائه می‌کنیم. در بخش ۳، مدلی را برای ارزیابی کارایی سیستم‌های دو مرحله‌ای با داده‌های فازی ارائه داده و در بخش ۴، روش پیشنهادی

تخصیص منابع در سیستم‌های دو مرحله‌ای را شرح می‌دهیم. سپس در بخش ۵ روش تخصیص منابع با داده‌های فازی را ارائه می‌کنیم. در پایان با یک مثال واقعی، کاربرد مدل پیشنهادی را در ارزیابی شعب یک بانک تجاری نشان می‌دهیم.

۲ مدل تحلیل پوششی داده‌های دو مرحله‌ای

یکی از ابزارهای مناسب در زمینه ارزیابی کارایی واحدهای تصمیم‌گیری، تحلیل پوششی داده‌ها می‌باشد. در مدلهای اولیه به ساختار داخلی واحد تصمیم‌گیری توجهی نمی‌شد ولی بادرنظر گرفتن ارتباط بین مراحل مدل‌های چند مرحله‌ای خصوصا دومرحله‌ای ارائه گردید. سیستم دو مرحله ای با ساختار نشان داده شده در شکل ۱ را در نظر بگیرید:



شکل ۱: *فرایند دومرحله‌ای*

که $x_{ij}(i = ۱, \cdots, m)$ ورودی‌های مرحله اول، $z_{dj}(d = ۱, \cdots, D)$ شاخص‌های میانی که خروجی‌های مرحله اول و ورودی‌های مرحله دوم محسوب می‌شوند و $y_{rj}(r = ۱, \cdots, s)$ خروجی‌های مرحله دوم می‌باشند. چن و همکاران [۲، ۳] مدل (۱) را برای سنجش کارایی کلی واحد تحت ارزیابی (که با نماد DMU_o مشخص می‌شود) با دو بخش مطابق شکل ۱ پیشنهاد دادند:

$$\min \theta_o$$

$$s.t. \sum_{j=۱}^{n} \lambda_j \, x_{ij} \leq \theta_o x_{io}, \qquad i = ۱, \cdots, m$$

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{n} \lambda_j z_{dj} \geq \hat{z}_{do}, && d = 1, \cdots, D \\
&\sum_{j=1}^{n} \mu_j z_{dj} \leq \hat{z}_{do}, && d = 1, \cdots, D \\
&\sum_{j=1}^{n} \mu_j y_{rj} \geq y_{ro}, && r = 1, \cdots, s \\
&\theta_o \leq 1, \quad \hat{z}_{do}, \lambda_j, \mu_j \geq 0 \quad j = 1, \cdots, n \quad d = 1, \cdots, D. && (1)
\end{aligned}
$$

همانگونه که در مدل فوق مشاهده می‌شود مدل (۱) براساس مدل پایه تحلیل پوششی داده‌ها ارائه گردیده است. برطبق این مدل، محاسبه کارایی هر مرحله با توجه به وجود واحد غالب انجام می‌شود. به عبارت دیگر، وجود یک واحد مجازی (که از ترکیب خطی نامنفی واحدهای مشاهده شده با ضرایب λ_j برای مرحله اول و ضرایب μ_j برای مرحله دوم ساخته می‌شود) یا واحد مشاهده شده با ورودی کمتر و خروجی بیشتر را بررسی می‌گردد. بنابراین قیود مربوط به شاخص میانی برای مرحله اول با دیدگاه خروجی و برای مرحله دوم با دیدگاه ورودی نوشته می‌شوند. چون شاخص میانی z_{dj} برای مرحله اول به عنوان خروجی می‌باشد با درنظر گرفتن متغیر $\hat{z}_{do}$ ، قید $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j z_{dj} \geq \hat{z}_{do}$ به مدل پایه تحلیل پوششی داده‌ها افزوده شده همچنین z_{dj} برای مرحله دوم به عنوان ورودی است بنابراین لازم است قید متناظر آن بصورت $\sum_{j=1}^{n} \mu_j z_{dj} \leq \hat{z}_{do}$ درنظر گرفته شود. DMU_o کاراست اگر و فقط اگر $\theta_o^*=1$ [۲، ۳].

۳ مدل تحلیل پوششی داده‌های دو مرحله ای با داده‌های فازی

فرض کنید n واحد تصمیم‌گیرنده با m ورودی و s خروجی وجود دارد. ورودی‌ها، شاخص‌های میانی و خروجی‌های واحد تصمیم‌گیری jام به ترتیب اعداد فازی مثلثی نامنفی $\tilde{x}_{ij}=(x_{ij}^l, x_{ij}^m, x_{ij}^u)$ و $\tilde{z}_{dj}=(z_{dj}^l, z_{dj}^m, z_{dj}^u)$ و $\tilde{y}_{rj}=(y_{rj}^l, y_{rj}^m, y_{rj}^u)$ می‌باشند. اگر واحد تحت ارزیابی را DMU_o بنامیم، مدل تعمیم یافته چن و همکاران [۳] با

داده‌های فازی بصورت مدل (۲) می‌باشد:

$$\begin{aligned}
\min \quad & \widetilde{\theta}_o \\
s.t. \quad & \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \, \tilde{x}_{ij} \leq \widetilde{\theta}_o \tilde{x}_{io}, \qquad i = 1, \cdots, m \\
& \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \tilde{z}_{dj} \geq \acute{z}_{do}, \qquad d = 1, \cdots, D \\
& \sum_{j=1}^{n} \mu_j \tilde{z}_{dj} \leq \acute{z}_{do}, \qquad d = 1, \cdots, D \\
& \sum_{j=1}^{n} \mu_j \tilde{y}_{rj} \geq \tilde{y}_{ro}, \qquad r = 1, \cdots, s \\
& \widetilde{\theta}_o \leq \tilde{1}, \; \acute{z}_{do} \,, \; \lambda_j \,, \mu_j \geq 0 \quad j = 1, \cdots, n
\end{aligned} \tag{2}$$

متغیر $\acute{z}_{do}$ یک متغیر فازی مثلثی است که در قید $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \tilde{z}_{dj} \geq \acute{z}_{do}$ به‌عنوان خروجی مرحله اول و در قید $\sum_{j=1}^{n} \mu_j \tilde{z}_{dj} \leq \acute{z}_{do}$ ورودی مرحله دوم است. لازم به ذکر است $\tilde{1} = (1, 1, 1)$. مدل (۲) یک مدل برنامه‌ریزی فازی است.

قواعد جمع و تفریق اعداد فازی مثلثی به‌صورت زیر است:

$$\tilde{x} + \tilde{y} = (x^l + y^l, x^m + y^m, x^u + y^u)$$
$$\tilde{x} - \tilde{y} = (x^l - y^u, x^m - y^m, x^u - y^l)$$

همچنین برای مقایسه دو عدد فازی مثلثی می‌توان از روش زیر استفاده نمود:

$$\tilde{x} \leq \tilde{y} \Longleftrightarrow (x^l \leq y^l, x^m \leq y^m, x^u \leq y^u)$$

بنابراین برای نامعادلات فازی عبارت زیر برقرار است.

اگر $\sum_{j=1}^{n} \tilde{a}_{ij} x_j \leq \tilde{b}_i$ که $\tilde{a}_{ij} = (a_{ij}^l, a_{ij}^m, a_{ij}^u)$ و $\tilde{b}_{ij} = (b_{ij}^l, b_{ij}^m, b_{ij}^u)$ ، آنگاه

داریم:

$$\begin{array}{ll} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{l} x_j \leq b_i^{l}, & i=1,\cdots,m \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{m} x_j \leq b_i^{m}, & i=1,\cdots,m \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{u} x_j \leq b_i^{u}, & i=1,\cdots,m \end{array} \tag{3}$$

بادرنظرگرفتن ساختار فازی مثلثی شاخص‌ها، مدل (۲) به‌صورت مدل برنامه‌ریزی خطی چندهدفه (۴) تبدیل می‌شود:

$$\begin{array}{ll} & \min\ (\theta_o^l, \theta_o^m, \theta_o^u) \\ s.t. & \sum_{j=1}^{n} \lambda_j\ x_{ij}^t \leq \theta_o^t x_{io}^t, t=l,m,u,\ i=1,\cdots,m \\ & \sum_{j=1}^{n} \lambda_j z_{dj}^t \geq \hat{z}_{do}^t, t=l,m,u,\ d=1,\cdots,D \\ & \sum_{j=1}^{n} \mu_j z_{dj}^t \leq \hat{z}_{do}^t, t=l,m,u,\ d=1,\cdots,D \\ & \sum_{j=1}^{n} \mu_j y_{rj}^t \geq y_{ro}^t, \qquad t=l,m,u,\ r=1,\cdots,s \\ & \theta_o^l \leq \theta_o^m \leq \theta_o^u \leq 1\ ,\ \hat{z}_{do}^t \geq 0\ ,\ \lambda_j\ ,\mu_j \geq 0 \quad j=1,\cdots,n \end{array} \tag{4}$$

اگر برای حل مدل برنامه‌ریزی خطی چندهدفه (۴) ، از روش مجموع وزن‌دار شده (با

وزن‌های برابر) استفاده کنیم. مدل برنامه‌ریزی خطی (۵) حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned}
\min \quad & \theta_o^l + \theta_o^m + \theta_o^u \\
s.t. & \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \; x_{ij}^t \leq \theta_o^t x_{io}^t, t = l, m, u, \; i = 1, \cdots, m \\
& \sum_{j=1}^{n} \lambda_j z_{dj}^t \geq \hat{z}_{do}^t, t = l, m, u, \; d = 1, \cdots, D \\
& \sum_{j=1}^{n} \mu_j z_{dj}^t \leq \hat{z}_{do}^t, t = l, m, u, \; d = 1, \cdots, D \\
& \sum_{j=1}^{n} \mu_j y_{rj}^t \geq y_{ro}^t, \qquad t = l, m, u, \; r = 1, \cdots, s \\
& \theta_o^l \leq \theta_o^m \leq \theta_o^u \leq 1 \;\; , \; \hat{z}_{do}^t \geq 0 \;\; , \; \lambda_j \; , \mu_j \geq 0 \quad j = 1, \cdots, n
\end{aligned} \tag{5}$$

با حل مدل (۵) ، مقدار کارایی به صورت یک عدد فازی مثلثی $(\theta_o^{l*}, \theta_o^{m*}, \theta_o^{u*})$ بدست می‌آید.

گزاره ۱.۳. *جواب بهینه مدل (۵) یک جواب کارا برای مدل (۴) است.*

براساس قضایای بهینه‌سازی چندهدفه می‌دانیم، اگر برنامه‌ریزی خطی چندهدفه با استفاده از روش مجموع وزندار با وزنهای اکیدا مثبت یه برنامه‌ریزی خطی تبدیل شود آنگاه هر جواب بهینه مدل خطی یک جواب کارا برای مدل چندهدفه است [۵]. چون مدل (۵) با استفاده از روش مجموع وزندار با وزن‌های برابر یک (اکیدا بزرگتر از صفر) از مساله برنامه‌ریزی خطی چندهدفه (۴) نتیجه می‌شود، بنابراین گزاره ۱.۳ برقرار است.

تعریف ۲.۳. در ارزیابی DMU_o با استفاده از مدل (۵) ، کارا نامیده می‌شود هرگاه

$$\left(\theta_o^{l*}, \theta_o^{m*}, \theta_o^{u*}\right) = (1, 1, 1).$$

نحوه مقایسه بردارها در این مبحث، مقایسه مولفه به مولفه دو بردار موردنظر است.

۴ تخصیص منابع در مدل تحلیل پوششی داده دو مرحله ای

در این بخش برای تخصیص منابع از مدل تحلیل پوششی داده‌های معکوس استفاده می‌کنیم. فرض کنید خروجی‌های واحد تحت ارزیابی (DMU_o) از y_o به $\beta_o{=}y_o+\triangle y_o$ افرایش یابند که $\triangle y_o \geq \circ$ و $\triangle y_o \neq \circ$. بدیهی است برای حفظ کارایی باید شاخص های ورودی و میانی تغییر کنند. میزان تغییر مقادیر بردارهای ورودی و شاخص‌های میـانی را بصورت $\alpha_o^*{=}x_o+\triangle x_o$ و $\delta_o^*{=}\hat{z}_o+\triangle \hat{z}_o$ که $\triangle x_o \geq \circ$ و$\triangle \hat{z}_o \geq \circ$ و $\triangle x_o \neq \circ$ $\triangle \hat{z}_o \neq \circ$ درنظر بگیرید. می‌خواهیم مقدار تغییرات $\triangle x_o$ و $\triangle \hat{z}_o$ را بنحوی تعیین کنیم که کارایی DMU_o ثابت باقی بماند. بنابراین با استفاده از مدل (۶) ، حداقل تغییرات α_o و δ_o را به‌ازای حفظ مقدار θ_o^* محاسبه می‌کنیم. برای این منظورگام‌های زیر را بکار می‌بریم.

گام ۱. مدل (۱) را برای DMU_o حل کنید.

گام ۲. با توجه به مقادیر بهینه$\hat{z}_{do}^*$ وθ_o^* که از حل مدل (۱) برای DMU_o بدست آمده اند، مقادیر بهینه (α_o^*, δ_o^*) را با استفاده از مدل (۶) بدست آورید.

$$
\begin{aligned}
\min \quad & (\alpha_{1o}, \cdots, \alpha_{mo}, \delta_{1o}, \cdots, \delta_{Do}) \\
s.t. \quad & \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \, x_{ij} \leq \theta_o^* \alpha_{io}, && i = 1, \cdots, m \\
& \sum_{j=1}^{n} \lambda_j z_{dj} \geq \delta_{do}, && d = 1, \cdots, D \\
& \sum_{j=1}^{n} \mu_j z_{dj} \leq \delta_{do}, && d = 1, \cdots, D \\
& \sum_{j=1}^{n} \mu_j y_{rj} \geq \beta_{ro}, && r = 1, \cdots, s \\
& \alpha_{io} \geq x_{io}, && i = 1, \cdots, m \\
& \delta_{do} \geq \widehat{z}_{do}^*, && d = 1, \cdots, D \\
& \lambda_j \, , \mu_j \geq 0 && j = 1, \cdots, n
\end{aligned}
\tag{۶}
$$

گام۳. با استفاده از مقادیر بهینه (α_o^*, δ_o^*) شاخص‌های ورودی و میانی واحد تحت ارزیابی DMU_o را تصحیح کنید. واحد با شاخص های تغییر یافته را به عنوان یک واحد جدید DMU_{n+1} فرض نموده و مدل (۷) را حل کنید:

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \theta_o \\
s.t. \quad & \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \, x_{ij} + \lambda_{n+1}\alpha_{io}^* \leq \theta_o \alpha_{io}^*, && i = 1, \cdots, m \\
& \sum_{j=1}^{n} \lambda_j z_{dj} + \lambda_{n+1}\delta_{do}^* \geq \delta_{do}^*, && d = 1, \cdots, D \\
& \sum_{j=1}^{n} \mu_j z_{dj} + \mu_{n+1}\delta_{do}^* \leq \delta_{do}^* \,, && d = 1, \cdots, D, \\
& \sum_{j=1}^{n} \mu_j y_{rj} + \mu_{n+1}\beta_{ro} \geq \beta_{ro}, && r = 1, \cdots, s \\
& \theta_o \leq 1 \;,\; \lambda_j \,, \mu_j \geq 0 \quad j = 1, \cdots, n+1
\end{aligned}
\tag{۷}
$$

مدل (۷) ، ارزیابی کارایی DMU_{n+1} را انجام می‌دهد. درواقع DMU_{n+1} کارایی DMU_o بعد از تغییر شاخص های خروجی، ورودی و میانی است. بدیهی است که با توجه به مدل (۶)، تغییر مقادیر شاخص‌ها به‌ازای حفظ کارایی محاسبه شده‌اند بنابراین گزاره زیر را داریم.

گزاره ۱.۴. *مقدار بهینه تابع هدف مدل (۱) با مقدار بهینه مدل (۷) برابر است. بنابراین کارایی ثابت است.*

۵ تخصیص منابع فازی در مدل DEA دو مرحله ای

در تمامی مدل های تخصیص منابع موجود، فرض بر داده های دقیق است ولی در جهان واقعی نیاز به مدل هایی برای تحلیل مفاهیم نادقیق داریم. فرض کنید خروجی‌های DMU_o از $\tilde{y}_o$ به $\widetilde{\beta}_o = \tilde{y}_o + \triangle\tilde{y}_o$ افزایش یابد که $\triangle\tilde{y}_o \geq 0$ و $\triangle\tilde{y}_o \neq 0$. اکنون می‌خواهیم بردارهای شاخص ورودی $\widetilde{\alpha}_o = \tilde{x}_o + \triangle\tilde{x}_o$ و شاخص میانی $\widetilde{\delta}_o = \acute{z}_o + \triangle\acute{z}_o$ را

به منظور حفظ کارایی DMU_o $(\widetilde{\theta}_o)$ بدست آوریم. حداقل تغییرات $\widetilde{\alpha}_o$ و $\widetilde{\delta}_o$ با استفاده از مدل (۸) ، به‌ازای حفظ مقدار کارایی θ_o^* محاسبه می‌شود. مدل برنامه‌ریزی خطی چندهدفه (۸) را درنظر بگیرید:

$$\begin{aligned}
\min \quad & \left(\widetilde{\alpha}_{1o},\cdots,\widetilde{\alpha}_{mo},\widetilde{\delta}_{1o},\cdots,\widetilde{\delta}_{Do}\right) \\
s.t. \quad & \sum_{j=1}^{n}\lambda_j\,\tilde{x}_{ij}\le\widetilde{\theta}_o^*\widetilde{\alpha}_{io}, && i=1,\cdots,m \\
& \sum_{j=1}^{n}\lambda_j\tilde{z}_{dj}\ge\widetilde{\delta}_{do}, && d=1,\cdots,D \\
& \sum_{j=1}^{n}\mu_j\tilde{z}_{dj}\le\widetilde{\delta}_{do}, && d=1,\cdots,D \\
& \sum_{j=1}^{n}\mu_j\tilde{y}_{rj}\ge\widetilde{\beta}_{ro}, && r=1,\cdots,s \\
& \widetilde{\alpha}_{io}\ge\widetilde{x}_{io}, && i=1,\cdots,m \\
& \widetilde{\delta}_{do}\ \ge\acute{z}_{do}^*, && d=1,\cdots,D \\
& \lambda_j\ ,\mu_j\ge 0 && j=1,\cdots,n \qquad (8)
\end{aligned}$$

که $\acute{z}_{do}^*$ مقدار اندازه میانی و$\widetilde{\theta}_o^*$ از حل مدل (۲) به دست آمده اند.

تعریف ۱.۵. فرض کنید $\left(\overline{\widetilde{\alpha}}_o,\overline{\widetilde{\delta}}_o,\overline{\lambda}\right)$ یک جواب شدنی مدل (۸) باشد. اگر هیچ جواب شدنی $(\widetilde{\alpha}_o,\widetilde{\delta}_o,\widetilde{\lambda})$ برای مدل (۸) وجود نداشته باشدکه $(\widetilde{\alpha}_{1o},\cdots,\widetilde{\alpha}_{mo})^T<\left(\overline{\widetilde{\alpha}}_{1o},\cdots,\overline{\widetilde{\alpha}}_{mo}\right)^T$ و $\left(\widetilde{\delta}_{1o},\cdots,\widetilde{\delta}_{do}\right)^T<\left(\overline{\widetilde{\delta}}_{1o},\cdots,\overline{\widetilde{\delta}}_{do}\right)^T$ آنگاه گوییم $\left(\overline{\widetilde{\alpha}}_o,\overline{\widetilde{\delta}}_o,\overline{\lambda}\right)$ یک جواب کارایی ضعیف مدل(۸) است.

تعریف ۲.۵. فرض کنید $\left(\overline{\widetilde{\alpha}}_o,\overline{\widetilde{\delta}}_o,\overline{\lambda}\right)$ یک جواب شدنی مدل(۸) باشد. اگر هیچ جواب شدنی$\left(\widetilde{\alpha}_o,\widetilde{\delta}_o,\widetilde{\lambda}\right)$ برای مدل (۸) وجود نداشته باشد که $\left(\overline{\widetilde{\alpha}}_{1o},\cdots,\overline{\widetilde{\alpha}}_{mo}\right)^T(\widetilde{\alpha}_{1o},\cdots,\widetilde{\alpha}_{mo})^T$ و$\left(\overline{\widetilde{\delta}}_{1o},\cdots,\overline{\widetilde{\delta}}_{do}\right)^T\left(\widetilde{\delta}_{1o},\cdots,\widetilde{\delta}_{do}\right)^T$ و برای حد اقل یک از مولفه‌های بردارهای فوق، نامعادلات مذکور بطور اکید برقرار باشد

دراینصورت $\left(\overline{\widetilde{\alpha}}_o, \overline{\widetilde{\delta}}_o, \overline{\lambda}\right)$ را یک جواب کارای مدل (۸) گوییم.

اگر در مدل (۸) سه مفهوم زیر را اعمال می‌کنیم: درنظر گرفتن متغیرها و اعداد در مدل (۸) بصورت فازی مثلثی، بکارگیری نامعادلات (۳) برای قیود نامعادله فازی و استفاده از روش مجموع وزندار برای تبدیل مدل برنامه‌ریزی چند هدفه به برنامه‌ریزی خطی، مدل (۸) به مدل برنامه‌ریزی خطی (۹) تبدیل می‌شود:

$$
\begin{array}{lll}
\min & \sum_{i=1}^{m} (\alpha_{io}^{l} + \alpha_{io}^{u} + \alpha_{io}^{m} + \delta_{io}^{l} + \delta_{io}^{u} + \delta_{io}^{m}) & \\
s.t. & \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \, x_{ij}^{t} \leq \widetilde{\theta}_o^{*} \alpha_{io}^{t}, & t = l, m, u, \ \ i = 1, \cdots, m \\
& \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \ \ z_{dj}^{t} \geq \delta_{io}^{t}, & t = l, m, u, \ d = 1, \cdots, D \\
& \sum_{j=1}^{n} \mu_j \ \ z_{dj}^{t} \leq \delta_{io}^{t}, \ \ , & t = l, m, u, \ d = 1, \cdots, D \\
& \sum_{j=1}^{n} \mu_j y_{rj}^{t} \geq \widetilde{\beta}_{ro}, & t = l, m, u, \ r = 1, \cdots, s \\
& \alpha_{io}^{t} \geq x_{io}^{t}, & t = l, m, u, \ i = 1, \cdots, m \\
& \delta_{io}^{t} \ \geq \acute{z}_{do}^{*}, & t = l, m, u, \ d = 1, \cdots, D \\
& \alpha_{io}^{l} \leq \alpha_{io}^{u} \leq \alpha_{io}^{m} & i = 1, \cdots, m \\
& \delta_{io}^{l} \leq \delta_{io}^{u} \leq \delta_{io}^{m} & i = 1, \cdots, m \\
& \lambda_j \ , \mu_j \geq 0 & j = 1, \cdots, n
\end{array} \qquad (9)
$$

با توجه به اینکه از روش مجموع وزندار با وزن‌های برابر یک (بزرگتر از صفر) برای تبدیل مساله برنامه‌ریزی خطی چندهدفه به برنامه‌ریزی خطی استفاده شده است بنابرگزاره ۱.۳، جواب بهینه مدل (۹) یک جواب بهینه پارتو برای (۸) است.

اگر مقادیر بهینه $\widetilde{\alpha}_o^{*} = (\alpha_{io}^{*l}, \alpha_{io}^{*m}, \alpha_{io}^{*u})$ و $\widetilde{\delta}_o^{*} = (\delta_{io}^{*l}, \delta_{io}^{*m}, \delta_{io}^{*u})$ باشند می‌توان مقدار کارایی بهینه بعد از تخصیص را از مدل (۱۰) بدست آورد.

برای این منظور فرض کنید DMU_{n+1} نمایش DMU_o پس از اعمال تغییرات در

مدل (۲) باشد. مدل زیر را برای اندازه‌گیری کارایی DMU_{n+1} پیشنهاد می دهیم:

$$\begin{aligned}
\min \quad & \widetilde{\theta}_o \\
s.t. \quad & \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \, \tilde{x}_{ij} + \lambda_{n+1} \widetilde{\alpha}^*_{io} \leq \widetilde{\theta}_o \widetilde{\alpha}^*_{io}, && i = 1, \cdots, m \\
& \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \tilde{z}_{dj} + \lambda_{n+1} \widetilde{\delta}^*_{do} \geq \widetilde{\delta}^*_{do}, && d = 1, \cdots, D \\
& \sum_{j=1}^{n} \mu_j \tilde{z}_{dj} + \mu_{n+1} \widetilde{\delta}^*_{do} \geq \widetilde{\delta}^*_{do}, && d = 1, \cdots, D \\
& \sum_{j=1}^{n} \mu_j \tilde{y}_{rj} + \mu_{n+1} \widetilde{\beta}_{ro} \geq \widetilde{\beta}_{ro}, && r = 1, \cdots, s \\
& \widetilde{\theta}_o \leq \tilde{1} \quad , \ \lambda_j \ , \mu_j \geq 0 && j = 1, \cdots, n+1 \qquad (10)
\end{aligned}$$

که $\tilde{1}$، عدد یک فازی است که در این مقاله بصورت $\tilde{1} = (1, 1, 1)$ درنظر گرفته شده‌است.

قضیه ۳.۵. *فرض کنید $\left(\overline{\widetilde{\alpha}}_o, \overline{\widetilde{\delta}}_o, \overline{\lambda}\right)$ یک جواب کارای مدل (۸) و $\widetilde{\theta}^*_o$ مقدار بهینه مدل (۲) باشد وقتی ورودی‌های DMU_o به $\overline{\widetilde{\alpha}}_o$ و مقادیر شاخص‌های میانی به $\overline{\widetilde{\delta}}_o$ تغییر یابند، مقدار بهینه مدل (۱۰) نیز $\widetilde{\theta}^*_o$ می باشد و کارایی ثابت است.*

اثبات. اگر $(\widetilde{\theta}^*_o, \ \tilde{z}^*_{do} \ , \ \lambda^*_j|_{j=1,2,..,n}, \mu^*_j|_{j=1,2,..,n})$ جواب بهینه مدل (۲) باشد بدیهی است که $(\widetilde{\theta}^*_o, \ \tilde{z}^*_{do} \ , \ \lambda^*_j|_{j=1,2,..,n}, \lambda_{n+1}=0, \mu^*_j|_{j=1,2,..,n}, \mu_{n+1}=0)$ جواب شدنی (۱۰) است. اگر مقدار بهینه تابع هدف مدل (۱۰) را θ'^*_o بنامیم خواهیم داشت $\widetilde{\theta}^*_o \leq \theta'^*_o$. اکنون ثابت می‌کنیم $\widetilde{\theta}^*_o \nless \theta'^*_o$.

چون $\widetilde{\theta}^*_o$ مقدار بهینه تابع هدف مدل (۲) است با توجه به قیود شاخص‌های ورودی مدل (۲) داریم $\widetilde{\theta}^*_o \leq 1$

درنتیجه خواهیم داشت: $\forall i \quad \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \, x_{ij} \leq \theta^*_o \widetilde{\alpha}^*_{io} \leq \ \widetilde{\alpha}^*_{io}$

با توجه به قیود شاخص‌های ورودی مدل (۱۰) $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \, \tilde{x}_{ij} + \lambda_{n+1} \widetilde{\alpha}^*_{io} \leq \widetilde{\theta}_o \widetilde{\alpha}^*_{io} \quad \forall i$ و همچنین شدنی بودن $\widetilde{\theta}^*_o$ در مدل (۱۰) داریم $\widetilde{\theta}^*_o \widetilde{\alpha}^*_{io} \geq \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \, \tilde{x}_{ij} + \lambda_{n+1} \widetilde{\alpha}^*_{io}$

برای شاخص‌های میانی که برای مرحله اول، خروجی هستندچون $\widetilde{\delta}_o = \acute{z}_o + \triangle \acute{z}_o$ و $\triangle \tilde{z}_o \geq 0$ درنتیجه: $\acute{z}_{do} \leq \widetilde{\delta}_{do}$

با توجه به قیود مدل (۱۰) داریم

$$
\begin{aligned}
\acute{z}_{do} \leq \widetilde{\delta}_{do} &\leq \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \acute{z}_{dj} + \lambda_{n+1} \widetilde{\delta}_{do} \\
&\leq \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \acute{z}_{dj} + \lambda_{n+1} \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^* \acute{z}_{dj} = \sum_{j=1}^{n} \acute{z}_{dj} (\lambda_j + \lambda_{n+1} \ \lambda_j^*)
\end{aligned}
$$

درنتیجه، $j = 1, \cdots, n \quad \widetilde{\lambda}_j = \lambda_j + \lambda_{n+1} \ \lambda_j^*$ در قیود مرحله اول صدق می‌کند.

برای دسته قیود مرحله دوم ، چون $\triangle \tilde{y}_o \geq 0$ بنابراین:

$$
\begin{aligned}
\tilde{y}_{ro} \leq \widetilde{\beta}_{ro} &\leq \sum_{j=1}^{n} \mu_j \tilde{y}_{rj} + \mu_{n+1} \widetilde{\beta}_{ro} \\
&\leq \sum_{j=1}^{n} \mu_j \tilde{y}_{rj} + \mu_{n+1} \sum_{j=1}^{n} \mu_j^* \tilde{y}_{rj} = \sum_{j=1}^{n} \tilde{y}_{rj} (\mu_j + \mu_{n+1} \ \mu_j^*) \\
\widetilde{\delta}_{do} &\geq \sum_{j=1}^{n} \mu_j \acute{z}_{dj} + \mu_{n+1} \widetilde{\delta}_{do} \\
&\geq \sum_{j=1}^{n} \mu_j \acute{z}_{dj} + \mu_{n+1} \sum_{j=1}^{n} \mu_j^* \acute{z}_{dj} = \sum_{j=1}^{n} \acute{z}_{dj} (\mu_j + \mu_{n+1} \ \mu_j^*)
\end{aligned}
$$

درنتیجه ، $j = 1, \cdots, n \quad \widetilde{\mu}_j = \mu_j + \mu_{n+1} \ \mu_j^*$ و $j = 1, \cdots, n \quad \widetilde{\lambda}_j = \lambda_j + \lambda_{n+1} \ \lambda_j^*$ یک نقطه شدنی برای مدل (۱۰) است.

به برهان خلف فرض می کنیم: $\theta_o'^* < \widetilde{\theta}_o^*$

با توجه به رابطه $\widetilde{\alpha}_{io} = \widetilde{x}_{io} + \triangle \tilde{x}_{io}$ و $\triangle \tilde{x}_o \geq 0$ داریم: $\widetilde{\alpha}_{io} \geq \widetilde{x}_{io}$

اگر $\widetilde{\alpha}_{io} = \widetilde{x}_{io}$ درنتیجه با توجه به فرض خلف، خواهیم داشت: $\sum_{j=1}^{n} \widetilde{\lambda}_j \ \tilde{x}_{ij} \leq \theta_o'^* \tilde{x}_{io} \leq \ \widetilde{\theta}_o^* \tilde{x}_{io}$

بنابراین $(\theta_o'^*, \widetilde{\lambda}, \widetilde{\mu})$ یک جواب شدنی برای مدل (۲) است که با بهینگی $\widetilde{\theta}_o^*$ در تناقض است.

اگر $\widetilde{\alpha}_{io}>\widetilde{x}_{io}$ با توجه به فرض خلف، خواهیم داشت:

$$\sum_{j=1}^{n}\widetilde{\lambda}_j\ \widetilde{x}_{ij}\leq \theta_o'^*\widetilde{x}_{io}<\ \widetilde{\theta}_o^*\widetilde{\alpha}_{io}$$

اکنون پارامتر نامنفی k را به‌صورت

$$k=\min_{1\leq i\leq m}\left\{\frac{\widetilde{\theta}_o^*\widetilde{\alpha}_{io}-\sum_{j=1}^{n}\widetilde{\lambda}_j\widetilde{x}_{ij}}{\widetilde{\theta}_o^*},\widetilde{\alpha}_{io}-\widetilde{x}_{io}\right\}$$

همچنین $\overline{\alpha}_{io}$ را با عبارت زیر تعریف می‌کنیم

$$\overline{\alpha}_{io}=\begin{cases}\widetilde{\alpha}_{io}^* & if\ \widetilde{\alpha}_{io}^*=\widetilde{x}_{io}\\ \widetilde{\alpha}_{io}^*-k & if\ \widetilde{\alpha}_{io}^*>\widetilde{x}_{io}\end{cases}$$

با توجه به تعریف k: $k\leq\frac{\widetilde{\theta}_o^*\widetilde{\alpha}_{io}-\sum_{j=1}^{n}\widetilde{\lambda}_j\widetilde{x}_{ij}}{\widetilde{\theta}_o^*}$ و $k\leq\widetilde{\alpha}_{io}-\widetilde{x}_{io}$

از رابطه اول نتیجه می‌شود: $\sum_{j=1}^{n}\widetilde{\lambda}_j\widetilde{x}_{ij}\leq\ \widetilde{\theta}_o^*(\widetilde{\alpha}_{io}-k)\leq\ \widetilde{\theta}_o^*\overline{\alpha}_{io}$

همچنین از رابطه دوم $\widetilde{\alpha}_{io}-k\geq\widetilde{x}_{io}$بنابراین $\overline{\alpha}_{io}\geq\widetilde{x}_{io}$ درنتیجه $(\overline{\alpha}_o,\widetilde{\lambda},\widetilde{\mu})$ یک جواب شدنی (۲) است و براساس ویژگی جواب بهینه $\widetilde{\theta}_o^*\leq\theta_o'^*$. بنابراین$\widetilde{\theta}_o^*=\theta_o'^*$

با توجه به مدل (۹) که در آن هدف بدست آوردن حداقل تغییرات شاخصهای ورودی و میانی بنحوی است که کارایی حفظ شود و همان مقدار شاخصها در مدل (۱۰) بکار می رود بنابراین کارایی ثابت باقی مانده و همچنین اگر $\left(\overline{\widetilde{\alpha}}_o,\overline{\widetilde{\delta}}_o,\overline{\lambda}\right)$ یک جواب کارای ضعیف مدل (۸) باشد داریم $\overline{\widetilde{\alpha}}_o\geq\widetilde{x}_o,\overline{\widetilde{\delta}}_o\geq\widetilde{z}_o^*$. □

۶ مثال کاربردی

در این قسمت مدل پیشنهادی در بخش ۴ را روی یک مثال واقعی به‌کار می‌بریم. بانک‌های تجاری بعنوان یک موسسه مالی با دریافت پول از مشتریان و شرکت درپروژه‌های بزرگ، تاثیر زیادی بر امور اقتصادی هر کشور دارند. بنابراین مرحله اول در بانک‌ها جمع‌آوری پول و مرحله دوم سرمایه‌گذاری این منابع برای بدست آوردن سود می‌باشد. بنابراین، بانک‌ها می‌توانند به عنوان یک سیستم دو مرحله ای در نظر گرفته شوند.

در جدول ۱ داده های فازی مثلثی مربوط به ۱۰ شعبه بانک ایرانی داده شده است [۱۱].

شاخص‌های ارزیابی عبارتند از:

مقادیر ورودی‌ها: پرداخت بهره $x_۱$، تعداد کارمندان $x_۲$، وام های غیراجرایی $x_۳$،

خروجی‌های مرحله اول و ورودی‌های مرحله دوم، مجموع کل چهار سپرده اصلی: $z_۱$ و سایر سپرده ها $z_۲$

و خروجی‌های مرحله دوم: اعطای وام $y_۱$، دریافت بهره $y_۲$ و پاداش $y_۳$.

جدول ۱: *داده های ورودی و میانی ۱۰ شعبه بانک*

	$x_۱$	$x_۲$	$x_۳$	$z_۱$
شعبه ۱	(۱۶۰۰, ۱۶۳۹/۱۷, ۱۶۷۸)	(۱۲, ۱۴/۲۱, ۱۶)	(۱۶۰۰۰, ۱۶۶۷۵, ۱۷۳۵۰)	(۲۴۵۰۰۰, ۲۵۰۹۵۲, ۲۵۶۹۰۴)
شعبه ۲	(۱۳۰۰, ۱۳۰۷/۹۱, ۱۳۱۴)	(۱۰, ۱۲/۱۵, ۱۴)	(۷۰۰۰, ۷۴۳۸, ۷۸۷۶)	(۱۸۰۰۰۰, ۱۸۲۴۲۷/۱۰, ۱۸۴۸۵۴)
شعبه ۳	(۹۰۰, ۹۸۱/۰۳, ۱۶۰۲)	(۱۱, ۱۳/۱۱, ۱۵)	(۱۰۰۰۰, ۱۰۳۸۶/۷۹, ۱۰۷۷۲)	(۱۴۰۰۰, ۱۴۹۲۶۹, ۱۵۸۵۳۸)
شعبه ۴	(۵۰۰, ۵۶۳/۴۱, ۶۰۰)	(۱۵, ۱۷/۱۷, ۱۹)	(۹۰۰۰, ۹۹۴۱/۵, ۱۰۸۸۲)	(۸۰۰۰۰,۸۰۴۵۸,۸۰۹۱۶)
شعبه ۵	(۳۰۰, ۳۷۲/۹۶, ۴۴۴)	(۱۵, ۱۷/۴۷, ۱۹)	(۲۰۰۰۰, ۲۲۰۱۹, ۲۴۰۰۰)	(۷۰۰۰۰, ۷۷۵۱۲, ۸۵۰۲۴)
شعبه ۶	(۱۱۰۰, ۱۱۸۷/۲۵, ۱۳۷۴)	(۸, ۱۱/۷۶, ۱۴)	(۵۰۰۰, ۵۲۷۶/۲۸, ۵۵۵۲)	(۱۶۰۰۰۰, ۱۶۷۳۱۶/۹, ۱۷۴۶۳۲)
شعبه ۷	(۶۰۰, ۶۷۹/۲۶, ۷۵۸)	(۷, ۱۱/۷۰, ۱۵)	(۶۰۰۰, ۶۹۷۸, ۷۹۵۶)	((۱۵۰۰۰۰, ۱۵۴۲۴۶/۵, ۱۵۸۴۹۲
شعبه ۸	(۳۰۰, ۳۹۳/۷۸, ۴۸۶)	(۲۲, ۲۴/۴۸, ۲۶)	(۸۰۰۰, ۸۹۴۲۶, ۹۸۸۵۲)	(۱۴۰۰۰۰, ۱۴۵۷۴۰, ۱۵۰۷۴۰)
شعبه ۹	(۵۰۰, ۵۵۴/۷, ۶۰۸)	(۷, ۱۱/۳۷, ۱۴)	(۳۰۰۰, ۳۹۶۴, ۴۹۲۸)	(۷۰۰۰, ۷۳۳۱۶, ۷۶۶۳۲)
شعبه ۱۰	(۱۵۰۰, ۱۵۱۰/۹۱, ۱۵۲۰)	(۱۵, ۲۰/۳۰, ۲۵)	(۲۰۰۰, ۲۸۸۸, ۳۷۷۶)	(۱۷۰۰۰۰, ۱۷۱۵۹۰, ۱۷۲۵۹۰)

کارایی حاصل از مدل (۴) در جدول ۳ امده است. همانگونه که مشاهده می‌شود، چهار شعبه ۲،۳،۸ و ۱۰ کارای کامل هستند.

در واحد کارا $(\theta_o^{l^*}, \theta_o^{m^*}, \theta_o^{u^*}) = (۱, ۱, ۱)$. یک واحد ناکارا، به‌عنوان نمونه شعبه نهم را درنظر بگیرید. کارایی شعبه نهم، مطابق ارزیابی مدل (۵) عبارت‌است از:

$$\left(\theta_۹^{l*}, \theta_۹^{m*}, \theta_۹^{u*}\right) = (۰/۱۹۱۲۰۰۷, ۰/۱۸۴۴۷۳۴, ۰/۱۷۹۲۱۲۸)$$

جدول ۲: *ادامه داده های ورودی و میانی ۱۰ شعبه بانک*

	z_2	y_1	y_2	y_3
شعبه ۱	(۱۴۰۰۰, ۱۴۹۲۴, ۱۵۸۴۸)	(۲۰۰۰۰۰, ۲۰۳۵۳۸, ۲۰۷۰۷۶)	(۳۵۰, ۳۵۴/۹۸, ۳۵۸)	(۱۰۰, ۱۳۸/۴۱, ۱۷۶)
شعبه ۲	(۱۰۰۰۰, ۱۲۱۸۸/۲۳, ۱۴۳۷۶)	(۱۵۰۰۰۰, ۱۵۷۷۹۶/۷, ۱۶۵۵۹۲)	(۷۰۰, ۷۲۸/۱۲, ۷۵۶)	(۲۴۰, ۲۴۴/۲۹, ۲۴۸)
شعبه ۳	(۲۰۰۰۰, ۲۸۱۱۰/۷, ۳۶۲۲۰)	(۲۰۰۰۰۰, ۲۰۲۱۶۱/۱, ۲۰۴۳۲۲)	(۹۰۰, ۹۳۲/۳۹, ۹۶۴)	(۱۴۰, ۱۴۵/۴۲, ۱۵۰)
شعبه ۴	(۵۰۰۰, ۵۲۸۵, ۵۵۷۰)	(۲۰۰۰۰۰, ۲۰۸۵۰۰, ۲۱۷۰۰۰)	(۱۳۰, ۱۳۵/۷۹, ۱۴۰)	(۱۲, ۱۴/۲۲, ۱۶)
شعبه ۵	(۵۰۰۰, ۵۶۵۶, ۶۳۱۲)	(۲۰۰۰۰۰, ۲۴۰۳۵, ۲۸۰۷۰)	(۱۰۰۰, ۱۵۳۴/۹۶, ۲۰۰۰)	(۱۷, ۱۹/۸۲, ۲۱)
شعبه ۶	(۵۰۰۰, ۵۴۱۰/۸۵, ۵۸۲۸)	(۷۰۰۰۰, ۷۳۹۷۸/۴۲, ۷۷۹۵۶)	(۹۰۰, ۹۹۹/۹۶, ۱۰۹۸)	(۹۰, ۹۷/۴۶, ۱۰۴)
شعبه ۷	(۴۰۰۰, ۴۴۴۲, ۴۸۸۴)	(۸۳۰۰۰, ۸۳۹۲۲, ۸۷۸۴۴)	(۲۰۰, ۲۹۴/۴۶, ۳۸۸)	(۴۵, ۵۰/۱۰, ۵۵)
شعبه ۸	(۱۶۰۰۰۰, ۱۶۴۴۶۶۵, ۱۶۹۳۳۰)	(۴۹۰۰۰۰, ۴۹۴۵۲۹, ۴۹۹۰۵۸)	(۶۰۰, ۶۴۶/۶۶, ۶۹۲)	(۸۰, ۸۵/۴۸, ۹۰)
شعبه ۹	(۱۰۰۰, ۱۱۴۱, ۱۲۸۲)	(۱۴۰۰۰, ۱۴۲۲۷, ۱۴۴۵۴)	(۱۰۰, ۱۰۹/۰۴, ۱۱۸)	(۱۴, ۱۶/۱۶, ۱۸)
شعبه ۱۰	(۲۰۰۰۰, ۲۲۳۴۰, ۲۴۶۸۰)	(۹۰۰۰۰, ۹۳۲۰۸, ۹۶۴۱۶)	(۵۰۰, ۵۶۸/۷۷, ۶۳۶)	(۹۰, ۹۶/۸۵, ۱۰۲)

جدول ۳: *کارایی*

	$(\theta_o^{l^*}, \theta_o^{m^*}, \theta_o^{u^*})$
شعبه ۱	(۰/۶۸۱۳۵۸۴, ۰/۶۸۱۴۹۶۶, ۰/۶۸۱۷۳۶۱)
شعبه ۲	(۱, ۱, ۱)
شعبه ۳	(۱, ۱, ۱)
شعبه ۴	(۰/۶۱۹۷۳۴, ۰/۶۲۵۵۳۶۱۰/۶۵۷۸۶۹۶)
شعبه ۵	(۰/۸۲۵۷۱۵۱, ۰/۸۶۱۸۲۱۲, ۰/۹۱۹۲۳۹۱)
شعبه ۶	(۰/۷۹۰۷۱۶۱, ۰/۷۹۲۸۰۰۹, ۰/۸۶۶۹۷۴۷)
شعبه ۷	(۰/۴۶۳۷۸۰۳, ۰/۴۸۳۹۸۱۲, ۰/۴۶۸۶۰۳۴)
شعبه ۸	(۱, ۱, ۱)
شعبه ۹	(۰/۱۷۹۲۱۲۸, ۰/۱۸۴۴۷۳۴, ۰/۱۹۱۲۰۰۷)
شعبه ۱۰	(۱, ۱, ۱)

و مقدار دو شاخص میانی برابر $(\hat{z}_1^{l*}, \hat{z}_1^{m*}, \hat{z}_1^{u*}) =$ (۱۶۸۴۱/۶۸, ۱۷۴۳۰/۳۷, ۱۷۹۴۷/۸۵) و $(\hat{z}_2^{l*}, \hat{z}_2^{m*}, \hat{z}_2^{u*}) =$ (۱۰۰۰/۳۱۰, ۱۱۸۵/۲۰۷, ۱۳۷۰/۰۷۴) بدست می‌آیند.

حال فرض کنید بخواهیم خروجی‌های این شعبه به ترتیب از (۱۴۰۰۰, ۱۴۲۲۷, ۱۴۴۵۴) و (۱۰۰, ۱۰۹/۰۴, ۱۱۸) و (۱۴, ۱۶/۱۶, ۱۸) (۱۵۰۰۰, ۲۰۰۰۰, ۲۵۰۰۰)، (۱۵۰, ۳۰۰, ۱۵۰) و (۱۸, ۲۰, ۲۲) افزایش یابند. با قرار دادن مقادیر بالا در مدل (۹) و حل آن داریم:

$$\left(\alpha_1^{l*}, \alpha_1^{m*}, \alpha_1^{u*}\right) = (۱۰۲۵/۰۱۲, ۱۱۳۴/۱۷۴ , ۱۳۰۷/۳۸۹)$$

و

$$\left(\alpha_2^{l*}, \alpha_2^{m*}, \alpha_2^{u*}\right) = (۸/۷۰۷۴۲۱۸, ۱۲/۵۱۳۴۲ , ۱۵/۳۳۹۳۴)$$

و

$$\left(\alpha_{۳}^{l*}, \alpha_{۳}^{m*}, \alpha_{۳}^{u*}\right) = (۵۰۲۷٫۹۰۲, ۵۵۷۲٫۵۱۸\ , ۶۱۰۷٫۳۰۷)$$

و

$$\left(\delta_{۱}^{l*}, \delta_{۱}^{m*}, \delta_{۱}^{u*}\right) = (۲۷۲۷۲٫۱۰, ۱۷۴۳۰٫۳۷\ , ۳۰۰۲۶٫۶۹)$$

و

$$\left(\delta_{۲}^{l*}, \delta_{۲}^{m*}, \delta_{۲}^{u*}\right) = (۱۷۱۱٫۸۳۲, ۱۹۸۵٫۶۹۲\ , ۲۲۵۹٫۵۱۹)\,.$$

یعنی وقتی خروجی‌های شعبه نهم به ترتیب از (۱۴۰۰۰, ۱۴۲۲۷, ۱۴۴۵۴) و (۱۰۰, ۱۰۹٫۰۴, ۱۱۸)و (۱۴, ۱۶٫۱۶, ۱۸) به (۱۵۰۰۰, ۲۰۰۰۰, ۲۵۰۰۰)، (۱۵۰, ۳۰۰, ۱۵۰) و (۱۸, ۲۰, ۲۲) افزایش یابند، ورودی‌های مرحله اول به ترتیب باید از (۵۰۰, ۵۵۴٫۷, ۶۰۸) و (۷, ۱۱٫۳۳, ۱۴) و (۳۰۰۰, ۳۹۶۴, ۴۹۲۸)

به (۱۰۲۵٫۰۱۲, ۱۱۳۴٫۱۷۴ , ۱۳۰۷٫۳۸۹) ، (۸٫۷۰۷۴۲۱۸, ۱۲٫۵۱۳۴۲ , ۱۵٫۳۳۹۳۴) و (۵۰۲۷٫۹۰۲, ۵۵۷۲٫۵۱۸ , ۶۱۰۷٫۳۰۷) و میانی‌ها باید از (۷۰۰۰۰, ۷۳۳۱۶ , ۷۶۶۳۲) و (۱۰۰۰, ۱۱۴۱ , ۱۲۸۲) به (۲۷۲۷۲٫۱۰, ۱۷۴۳۰٫۳۷ , ۳۰۰۲۶٫۶۹) و (۱۷۱۱٫۸۳۲, ۱۹۸۵٫۶۹۲ , ۲۲۵۹٫۵۱۹) تغییر یابند. در حالی‌که با قرار دادن مقادیر جدید در مدل (۸) و حل آن، کارایی شعبه نهم حفظ می‌شود.

۷ نتیجه‌گیری

تخصیص منابع یکی از موضوعات مهم در مدیریت است. محدودیت منابع دردسترس مانند مواد اولیه، نیروی انسانی، سرمایه و ... مدیران را برای بکارگیری راهکارهای مناسب درجهت بهره‌وری بهینه و هرچه مطلوب‌تر از این عوامل وادار می‌کند. ضمن آنکه در شرایط نرمال، سطح کارایی یک موسسه نباید درکوتاه مدت تغییرات اساسی داشته باشد. در این شرایط مدلهای تحلیل پوششی داده‌های معکوس را می‌توان برای مسائل تخصیص مجدد منابع بدون تغییر سطح کارایی به‌کار برد. در این مقاله مدلی جدید از تخصیص منابع در دو حالت با داده‌های دقیق و داده‌های فازی روی سیستم‌های دو

مرحله‌ای ارائه دادیم. با استفاده از مدل پیشنهادی می‌توان میزان افزایش ورودی‌های مرحله اول و شاخص‌های میانی را بازاء افزایش خروجی‌های کلی سیستم، با فرض حفظ کارایی تعیین نمود. به این منظور با ارائه یک مدل برنامه‌ریزی چند هدفه و به کاربردن جواب های کارای ضعیف یا قوی به محاسبه می‌پردازد. مدل پیشنهادی تخصیص منابع فازی را در سیستم‌های دو مرحله‌ای هنگامی که تمامی داده‌ها به‌صورت اعداد فازی مثلثی باشند، میزان تغییر سطح ورودی‌ها و میانی را با فرض حفظ کارایی در این مدل با افزایش سطح خروجی‌ها، محاسبه کردیم.

به منظور بررسی کاربرد مدل پیشنهادی در جهان واقعی، مدل پیشنهادی را برای ارزیابی بانک‌ها ایران به‌ازای شاخص‌های ورودی: پرداخت بهره، دستمزد کارمندان و وام‌های غیراجرایی شاخص‌های میانی: مجموع چهار سپرده اصلی و سایر سپرده‌ها و خروجی‌های مرحله دوم: اعطای وام، دریافت بهره و پاداش را بکار برده‌ایم. مدلهای پیشنهادی کارایی ضعیف را محاسبه می کنند، در تحقیقات آتی می توان به ارائه مدلهایی که کارایی اکید را در محیط نادقیق تعیین نماید پرداخت.

مراجع

[1] Arya, A., & Yadav, S. P. (2018). Development of FDEA models to measure the performanceefficiencies of dmus. International Journal of Fuzzy Systems, 20,163–173.

[2] Chen Y, Du J., Sherman H.D., Zhu J. (2010) DEA model with shared resources and efficiency decomposition, European Journal of Operational Research, 207, 339-349.

[3] Chen, Y., Cook W.D., Zhu, J., (2010) Deriving the DEA frontier for two-stage processes,European Journal of Operational Research 202, 138–142

[4] Despotis, D. K., Sotiros, D., and Koronakos, G., (2016) A network DEA approach for series multi-stage processes. Omega, 61, 35-48.

[5] Ehrgott M. (2005) Multicriteria Optimization. 2nd edition, springer.

[6] Ghiyasi, M. (2015) On inverse DEA model: The case of variable returns to scale, ComputersIndustrial Engineering 87, 407–409.

[7] Kao, C., (2017) Efficiency measurement and frontier projection identification for general two-stage systems in data envelopment analysis, European Journal of Operational Research, 261, 679 – 689.

[8] Kao, C, Liu S-T.(2011) Efficiencies of two-stage systems with fuzzy data. Fuzzy Sets and Systems 176, 20–35.

[9] Lertworasirikul S., Charnsethikul P., Fang S.,(2011) Inverse data envelopment analysis model to preserve relative efficiency values: The case of variable returns to scale, Computers & Industrial Engineering 61, 1017–1023

[10] Liang, L., Cook, W., Zhu, J., (2008) DEA models for two-stage processes: Game approach and efficiency decomposition, Naval Research Logistics 55, 643–653.

[11] Payan, A, Noora, A.A, Hosseinzadeh Lotfi, F, Khodabakhshi, A, (2013) Relative Efficiency in Two-Stage DEA and Its Application to Bank Branches, Journal of Basic and Applied Scientific Research, 3(2s) 396-404.

[12] Seiford, L.M., Zhu, J., Profitability and marketability of the top 55 US commercial banks,Management Sciences, 45 (1999) 1270-1288

[13] Tavana M., Khalili-Damghani K., Santos Arteaga F., Hosseini A. (2019) A fuzzy multi-objective multi-period network DEA model for efficiency measurement in oil refineries, Computers & Industrial Engineering 135, 143–155

[14] Wang, Y-M., Luo, Y., Liang, L., Fuzzy data envelopment analysis based upon fuzzy arithmetic with an application to performance assessment of manufacturing enterprises, Expert Systems with Applications 36 (2009) 5205–5211.

[15] Wei, Q., Zhang, J., & Zhang, X. (2000). An inverse DEA model for inputs/outputs estimate. European Journal of Operational Research,121(1),151–16.

[16] Zhu, J. (2000) Multi-factor performance measure model with an application to Fortune 500 companies, European Journal of Operational Research 123, 105-124.