سیستم‌های فازی و کاربردها
شاپای چاپی: ۴۴۰۹-۲۷۱۷
سال ششم، شماره اول (بهار و تابستان ۱۴۰۲)
شاپای الکترونیکی: ۳۹۸۴-۲۷۱۷
صص. ۱۷۵ تا ۱۹۴
DOI:10.22034/JFSA.2023.394224.1172

همگرایی سیستمی معادله تفاضلی فازی سطح دی اکسید کربن خون بر اساس تفاضل هاکوهارا

مهران چه لابی
گروه علوم پایه، واحد سوادکوه، دانشگاه آزاد اسلامی، سوادکوه، ایران

تاریخ دریافت: ۱۴۰۲/۰۲/۰۳ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۲/۰۳/۳۰
نوع مقاله: علمی-پژوهشی

چکیده
در این مقاله ، میزان سطح دی اکسید کربن موجود در خون، به صورت یک مدل از معادلات تفاضلی فازی، که بر اساس تفاضل هاکوهارا طراحی شده، مورد مطالعه قرار می گیرد. ابتدا، یک سیستم خطی متشکل از معادلات تفاضلی مرتبه دوم مستقل از یکدیگر، مطالعه شده و شرایط کافی برای وجود جواب عمومی آن یافت شده است. سپس، همگرایی سیستمی معادله تفاضلی فازی تحت مطالعه، مطرح و شرایط کافی برای همگرایی سیستمی آن فراهم شده است.

۱ مقدمه

بیساری از پدیده های دنیای واقعی نظیر پویایی جمعیت، رشد اقتصادی، تکثیر باکتری ها و شبکه های عصبی توابع ای از خودشان در زمانهای قبل یا بعد هستند و لذا در شکل هایی از معادلات تفاضلی مدلسازی می شوند [۲، ۱۲]. علاوه بر این، معادلات تفاضلی برای یافتن جوابهای تقریبی معادلات دیفرانسیل به کارگرفته می شوند [۱۲، ۱۳]. بسته به پیچیدگی پدیده تحت مطالعه، این معادلات به معادلات تفاضلی مرتبه اول، دوم و یا

عبارات و کلمات کلیدی: معادلات تفاضلی، اعدادفازی، تفاضل-H، معادلات تفاضلی فازی.
Email(s): m.chelabi@iausk.ac.ir.
Mathematics Subject Classification: 39A11; 39A12 ; 26E15

بالاتر و هم چنین به دو دسته کلی خطی و غیر خطی تقسیم می شوند. در این مقاله، یک مدل از معادله تفاضلی که از تحلیل و بررسی عوامل موثر در تعیین سطح دی اکسید کربن موجود در خون تولید می شود، مورد مطالعه قرار می دهیم. چنین معادله ای، در حالت کلی، یک معادله تفاضلی غیر خطی مرتبه دوم است و به صورت رابطه بازگشتی زیر مطرح شود [۷، ۱۰]:

$$\begin{cases} c_{n+1} = c_n - L\big(c_n, F(c_{n-1})\big) + G_n, \quad n = 1, 2, \cdots, \\ c_0 = c(0), \\ c_1 = c(1), \end{cases} \tag{1}$$

در این معادله، متغیر مستقل n چرخه (زمان) و c_n میزان سطح دی اکسید کربن خون در چرخه n ام را نشان می دهند. تابع F حجم ریوی در چرخه n ام (مقدار هوایی که در چرخه n وارد ریه ها شده و سپس خارج می شود)، را نمایش می دهد که تابع ای از میزان سطح دی اکسید کربن در چرخه ی قبلی یعنی c_{n-1} می باشد. تابع L میزان دی اکسید کربنی که در چرخه ی n ام از دست می رود را نشان می دهد و در حالت کلی، می تواند تابع ای غیر خطی باشد. در نهایت، تابع G_n میزان سطح دی اکسید کربن ناشی از متابولیسم بدن در چرخه ی n ام را نمایش می دهد. مشابه [۷]، به منظور ساده سازی معادله (۱)، فرض می کنیم شرایط زیر برقرار باشند:

(۱) تابع L وابسته به C_n نیست و به طور مستقیم با حجم ریوی $F(c_{n-1})$ متناسب، همراه با ضریب تناسب $a \in (0, 1)$ است. یعنی:

$$L\big(c_n, F(c_{n-1})\big) = aF(c_{n-1}).$$

(۲) حجم ریوی در چرخه ی n ام یعنی $F(c_n)$ به طور مستقیم با c_n متناسب ، همراه با ضریب تناسب $b \in (0, 1)$ است. یعنی:

$$F(c_n) = bc_n.$$

(۳) دی اکسید کربن ناشی از متابولیسم بدن مستقل از زمان است. یعنی:

$$G_n = m,$$

که در آن m یک عدد حقیقی است. تحت این مفروضات، معادله (۱) به معادله خطی زیر تقلیل می یابد:

$$\begin{cases} c_{n+1} = c_n - abc_{n-1} + m, \quad n = 1, 2, \cdots, \\ c_0 = c(0), \\ c_1 = c(1), \end{cases} \tag{۲}$$

نویسندگان در [۷]، معادله (۲) را در حالت فازی که در آن اعداد a, b و مقادیر اولیه c_0 و c_1 اعداد فازی مثبت لحاظ شده اند، مورد تحلیل قرار داده اند. آنها نشان دادند که دنباله تکراری فازی (۲) همگرا نیست و برای رفع این مشکل، آنها مفهوم دیگری از جواب را پیشنهاد داده اند. در این مقاله، ما انتقال معادله (۲) به حالت فازی را بر اساس تفاضل هاکوهارا، به صورت زیر در نظر می گیریم:

$$\begin{cases} c_{n+1} = (c_n + m) \ominus abc_{n-1}, \quad n = 1, 2, \cdots, \\ c_0 = c(0), \\ c_1 = c(1), \end{cases} \tag{۳}$$

این انتقال، یک انتقال مورد انتظار است. چرا که فاکتور abc_{n-1} در واقع مقدار دی اکسید کربنی است که از مقدار دی اکسید کربن تولید شده در چرخه nام کاسته می شود. ما معادله (۳) را در حالتی که پارامترهای a، b و m همگی اعداد فازی مثبت هستند، مورد مطالعه قرار می دهیم. برای این منظور، ابتدا به تحلیل یک دنباله از سیستم خطی متشکل از معادلات تفاضلی مستقل خطی می پردازیم و شرایط کافی همگرایی آن را فراهم می کنیم. سپس، معادله تفاضلی فازی (۳) به صورت یک سیستم از معادلات تفاضلی غیر فازی پیاده سازی می کنیم و همگرایی سیستمی (۳) را مطرح می کنیم. در ادامه و بر اساس نتیج یافت شده، شرایط کافی همگرایی سیستمی (۳) را فراهم می کنیم.

مقاله به صورت زیر تنظیم شده است: در بخش ۲، تعاریف اولیه از حساب فازی و نمادها و برخی نتایج ضروری آورده شده است. در بخش ۳، یک دنباله از سیستم های خطی مطلوب متشکل از معادلات تفاضلی مرتبه دوم مستقل از یکدیگر، مطرح و شرایط کافی همگرایی آن، بر اساس نرم ستونی ماتریسی ، فراهم شده است. در بخش ۴، وجود جواب معادله (۳) مورد بررسی قرار گرفته و سپس شرایط کافی برای همگرایی سیستمی آن بر اساس نتایج یافت شده در بخش ۳، یافت شده است. در نهایت نتیجه گیری به همراه برخی موضاعات پیشنهادی برای تحقیقات بیشتر، در بخش ۵، داده شده است.

۲ مفاهیم اولیه

در این بخش، تعاریف اولیه، نمادها و برخی نتایج ضروری را مطرح می کنیم.

تعریف ۱.۲. [۹] یک عدد فازی u به صورت $[u]^\alpha = [u^-(\alpha), u^+(\alpha)]$ که نمایش α-برش u نامیده می شود، نشان داده می شود و در آن:

- تابع $u^-(\alpha)$ صعودی، کراندار و پیوسته چپ در $\alpha \in (0, 1]$ و پیوسته راست در $\alpha = 0$ است.
- تابع $u^+(\alpha)$ نزولی، کراندار و پیوسته چپ در $\alpha \in (0, 1]$ و پیوسته راست در $\alpha = 0$ است.
- برای هر $\alpha \in [0, 1]$ داریم: $u^-(\alpha) \leq u^+(\alpha)$.

به طور دقیق تر، برای $\alpha \in (0, 1]$ داریم: $[u]^\alpha = \{x \in \mathbb{R} | \mu_u(x) \geq \alpha\}$ که در آن، $\mu_u(x)$ درجه عضویت x در عدد فازی u است و

$$[u]^0 = supp(u) = cl\{x \in \mathbb{R} | \mu_u(x) > 0\}$$

که تکیه گاه u نامیده می شود. در اینجا، $cl(A)$ بستار مجموعه Aاست. مجموعه تمام اعداد فازی تعریف شده روی خط حقیقی $\mathbb{R}$ را با نماد $\mathbb{R}_\mathbb{F}$ نشان می دهیم. برای

$u, v \in \mathbb{R}_F$ و $\lambda \in \mathbb{R}$، داریم [۹]:

$$[u+v]^\alpha = [u^-(\alpha) + v^-(\alpha), u^+(\alpha) + v^+(\alpha)],$$

$$[\lambda u]^\alpha = \begin{cases} \left[\lambda u^-(\alpha), \lambda u^+(\alpha)\right]; & \lambda \geq \circ, \\ \left[\lambda u^+(\alpha), \lambda u^-(\alpha)\right]; & \lambda < \circ, \end{cases}$$

$$\begin{aligned} [uv]^\alpha &= \big[\min\big(u^-(\alpha)v^-(\alpha), u^-(\alpha)v^+(\alpha), u^+(\alpha)v^-(\alpha), u^+(\alpha)v^+(\alpha)\big), \\ &\quad \max\big(u^-(\alpha)v^-(\alpha), u^-(\alpha)v^+(\alpha), u^+(\alpha)v^-(\alpha), u^+(\alpha)v^+(\alpha)\big)\big]. \end{aligned}$$

تعریف ۲.۲. [۹] دو عدد فازی $u, v \in \mathbb{R}_F$ را در نظر بگیرید. اگر عدد فازی $w \in \mathbb{R}_F$ وجود داشته باشد به طوری که $u = v + w$، آنگاه w تفاضل هاکوهارا (برای سادگی تفاضل-H) دو عدد u و v گفته می شود و به صورت $u \ominus v$ نشان داده می شود.

اگر $u \ominus v$ وجود داشته باشد، آنگاه α-برش های آن خواهد شد:

$$[u \ominus v]^\alpha = [u^-(\alpha) - v^-(\alpha), u^+(\alpha) - v^+(\alpha)].$$

همچنین، می نویسیم: $u \ominus u = \circ$ که عدد فازی همراه با α-برش های $[\circ]^\alpha = \{\circ\}$ را نمایش می دهد. برای برخی خواص تفاضل-H مراجع [۳، ۴، ۶، ۱۱، ۱۴] پیشنهاد می کنیم.

متر هاسدروف یک متر معروف در مجموعه اعداد فازی است که برای $u, v \in \mathbb{R}_F$ به صورت زیر تعریف می شود:

$$D(u,v) = \sup_{\circ \leq \alpha \leq 1} \max\left\{|u^-(\alpha) - v^-(\alpha)|, |u^+(\alpha) - v^+(\alpha)|\right\}.$$

مجموعه $(\mathbb{R}_F, D)$ یک فضای متریک کامل است [۸]. همچنین، خواص اساسی این متر در [۵، ۸] قابل مشاهده است.

تعریف ۳.۲. عدد فازی u را مثبت می نامیم هرگاه $u^-(\alpha) > \circ,\ \forall \alpha \in [\circ, 1]$ و آن را

منفی می نامیم هرگاه $u^+(\alpha) < ۰,\ \forall \alpha \in [۰,۱]$. عدد فازی u را عدد فازی تقریبا" صفر می نامیم هرگاه برای تمام $\alpha \in [۰,۱]$ داشته باشیم: $u^-(\alpha) < ۰$ و $u^+(\alpha) > ۰$.
مجموعه اعداد فازی مثبت، منفی و تقریبا" صفر را به ترتیب با نمادهای $\mathbb{R}_F^+$، $\mathbb{R}_F^-$ و $\mathbb{R}_F^\circ$ نشان می دهیم.

۳ همگرایی یک سیستم خطی از معادلات تفاضلی مرتبه دوم

نتایج این بخش برای نتایج روی معادله (۳) که در بخش بعد مطرح می شوند، مورد استفاده قرار می گیرند. از آنجا که نرم های ماتریسی با یکدیگر معادلند، برای سادگی، در این بخش، ما از نرم ستونی ماتریسی زیر و هم چنین خواص نرم های ماتریسی ([۱]) استفاده می کنیم:

$$\|A\|_\infty = \max_{۱\leq i\leq n} \sum_{j=۱}^{n} |a_{ij}|,$$

که در آن $A = (a_{ij})$ یک ماتریس $n \times n$ است.

فرض کنید $A = diag(a_{۱۱}\ a_{۲۲} \cdots a_{nn})$ و $B = diag(b_{۱۱}\ b_{۲۲} \cdots b_{nn})$ ماتریس های قطری باشند به طوری که، سیستم زیر متشکل از n معادله تفاضلی مستقل خطی باشد:

$$x_{n+۱} = Ax_n + Bx_{n-۱} + y, \quad n = ۱, ۲, \ldots \tag{۴}$$

در اینجا، بردار $y = (y_۱\ y_۲\ \ldots\ y_n)^t$ و مقادیر اولیه

$$x_\circ = (p_۱\ p_۲\ \ldots\ p_n)^t, \quad x_۱ = (q_۱\ q_۲\ \ldots\ q_n)^t.$$

معلوم و بردارهای $x_k = (x_{k۱}\ x_{k۲}\ \ldots\ x_{kn})^t$ برای $k = ۲, ۳, \cdots$ بردارهای مجهول هستند.

قضیه ۱.۳. *اگر همه درایه های قطر اصلی ماتریس $A^۲ + ۴B$ مثبت باشند و ماتریس*

$I-A-B$ نامنفرد باشد، آنگاه سیستم (۴) دارای جواب عمومی زیر است:

(۵)

$$x_n = \Big(\frac{A+(A^۲+۴B)^{\frac{۱}{۲}}}{۲}\Big)^n x_۰ + \Big(\frac{A-(A^۲+۴B)^{\frac{۱}{۲}}}{۲}\Big)^n x_۱ + (I-A-B)^{-۱}y.$$

اثبات. تعریف می‌کنیم:

$$C = diag(y_۱\ y_۲\ \dots\ y_n),$$

$$D_k = diag(x_{k۱}\ x_{k۲}\ \dots\ x_{kn}),\quad k = ۲,۳,\dots$$

سیستم (۴) معادل با سیستم کاملاً ماتریسی زیر است:

$$D_{n+۱} = AD_n + BD_{n-۱} + C,\quad n = ۱,۲,\dots, \tag{۶}$$

همراه با ماتریس های اولیه:

$$D_۰ = diag(p_۱\ p_۲\ \dots p_n),\quad D_۱ = diag(q_۱\ q_۲\ \dots q_n).$$

چون سیستم (۶) متشکل از معادلات مستقل است پس مشابه حالت یک بعدی، فرض می‌کنیم U^n جواب حالت همگن سیستم (۶) باشد، پس:

$$U^{n+۱} = AU^n + BU^{n-۱},$$

که بسادگی ایجاب می‌کند:

$$U^۲ - AU - B = ۰.$$

این تساوی قابل بازنویسی به صورت زیر است:

$$(\frac{A}{۲} - U)^۲ = \frac{۱}{۴}(A^۲ + ۴B).$$

چون A و B ماتریس های قطری هستند، پس ماتریس $A^۲ + ۴B$ نیز ماتریسی قطری بوده و چون طبق فرض درایه های آن مثبت هستند، لذا تساوی اخیر دو جواب مستقل زیر را فراهم می کند:

$$U_۱ = \frac{A + (A^۲ + ۴B)^{\frac{۱}{۲}}}{۲}, \quad U_۲ = \frac{A - (A^۲ + ۴B)^{\frac{۱}{۲}}}{۲}. \qquad (۷)$$

بنابراین:

$$U_۱^n C_۰ + U_۲^n C_۱,$$

جواب عمومی حالت همگن سیستم (۶) است، که در آن، ماتریس های $C_۰$ و $C_۱$ با توجه به ماتریس های اولیه $D_۰$ و $D_۱$، به صورت زیر یافت می شوند:

$$C_۰ = D_۰ - C_۱,$$

$$C_۱ = \Big((A^۲ + ۴B)^{\frac{۱}{۲}}\Big)^{-۱}(D_۱ - U_۱ D_۰).$$

حالا چنانچه ماتریس $\hat{U}$ یک جواب خاص از سیستم غیر همگن (۶) باشد، آنگاه عبارت $U_۱^n C_۰ + U_۲^n C_۱ + \hat{U}$ جواب سیستم (۶) خواهد بود. پس با قرار دادن در سیستم (۶) به سادگی نتیجه می شود:

$$\hat{U} = A\hat{U} + B\hat{U} + C,$$

که یعنی:

$$\hat{U} = (I - A - B)^{-۱} C.$$

به این ترتیب، جواب سیستم (۶) عبارت است از:

$$D_n = \Big(\frac{A + (A^۲ + ۴B)^{\frac{۱}{۲}}}{۲}\Big)^n C_۰ + \Big(\frac{A - (A^۲ + ۴B)^{\frac{۱}{۲}}}{۲}\Big)^n C_۱ + (I - A - B)^{-۱} C,$$

که همان بردار $\{x_n\}$ معرفی شده در (۵) را نشان می دهد. □

قضیه ۲.۳. *فرض کنید A و B ماتریس های قطری صادق در شرایط زیر باشند:*
(i) ماتریس های A و $I-A-B$ نامنفرد هستند.
(ii) همه درایه های قطری ماتریس $I+۴(A^{-۱})^۲B$ مثبت هستند.
(iii) $\|A\|_\infty \leq ۱$ و $۰ < \|I+۴(A^{-۱})^۲B\|_\infty < ۱$.
در این صورت، دنباله $\{x_n\}$ داده شده در (۵) به نقطه ثابت تابع $F(x) = (A+B)x+y$ همگراست.

اثبات. ابتدا، توجه می کنیم که اگر بردار $x_۰$ نقطه ثابت F باشد، پس: $F(x_۰) = x_۰$، که بسادگی ایجاب می کند $(I-A-B)x_۰ = y$. چون طبق فرض (i) ماتریس $I-A-B$ نامنفرد است پس بردار $x_۰ = (I-A-B)^{-۱}y$ دارای نقطه ثابت یکتای F است. با توجه به (۵)، کافی است ثابت کنیم ماتریس های $U_۱$ و $U_۲$، داده شده در (۷)، همگرا هستند. یعنی:

$$\lim_{n\to+\infty} U_i^n = o, \quad i = ۱, ۲.$$

فرض کنید $A = diag(a_{۱۱}\ a_{۲۲}\ \ldots a_{nn})$ و $B = diag(b_{۱۱}\ b_{۲۲}\ \ldots b_{nn})$. چون A نامنفرد است پس: $A^{-۱} = diag(\frac{۱}{a_{۱۱}}\ \frac{۱}{a_{۲۲}}\ \ldots \frac{۱}{a_{nn}})$ و لذا ماتریس $I+۴(A^{-۱})^۲B$ نیز قطری با درایه های قطری $(۱+۴\frac{b_{ii}}{a_{ii}^۲})$ است، که با توجه به فرض (ii) مثبت هستند. لذا می توان نوشت:

$$I+۴(A^{-۱})^۲B = \big(I+۴(A^{-۱})^۲B\big)^{\frac{۱}{۲}}\big(I+۴(A^{-۱})^۲B\big)^{\frac{۱}{۲}}$$

که در آن، $\big(I+۴(A^{-۱})^۲B\big)^{\frac{۱}{۲}}$ ماتریسی قطری با درایه های قطری $(۱+۴\frac{b_{ii}}{a_{ii}^۲})^{\frac{۱}{۲}}$

است. داریم:

$$\begin{aligned} \|(I+4(A^{-1})^2B)^{\frac{1}{2}}\|_\infty &= \max_{1\le i\le n}\left(1+4\frac{b_{ii}}{a_{ii}^2}\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\max_{1\le i\le n}\left(1+4\frac{b_{ii}}{a_{ii}^2}\right)\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \|I+4(A^{-1})^2B\|_\infty^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

پس طبق فرض (iii)، نامساویهای زیر را داریم:

$$0<\|(I+4(A^{-1})^2B)^{\frac{1}{2}}\|_\infty<1.$$

چون A قطری و نامنفرد پس $\|A\|_\infty>0$ است و از نامساوی فوق داریم:

$$\|A\|_\infty\|I+4(A^{-1})^2B\|_\infty<\|A\|_\infty.$$

این نامساوی، با توجه به خواص نرم ماتریسی، نتیجه می دهد:

$$\|A(I+4(A^{-1})^2B)^{\frac{1}{2}}\|_\infty<\|A\|_\infty,$$

که یعنی:

$$\|(A^2+4B)^{\frac{1}{2}}\|_\infty<\|A\|_\infty. \tag{8}$$

اکنون به کمک این نامساوی، به دست می آوریم:

$$\|U_i\|_\infty\le\frac{1}{2}\left(\|A\|_\infty+\|(A^2+4B)^{\frac{1}{2}}\|_\infty\right)<\|A\|_\infty,\quad i=1,2.$$

چون طبق فرض (iii)، $\|A\|_\infty\le 1$ نتیجه می گیریم:

$$\|U_i\|_\infty<1,\quad i=1,2.$$

از طرفی دیگر، با توجه به نامساوی (۸) و فرض (iii) نتیجه می گیریم:

$$\|U_i\|_\infty \geq \|U_۲\|_\infty \geq \frac{۱}{۲}\left(\|A\|_\infty - \|(A^۲ + ۴B)^{\frac{۱}{۲}}\|_\infty\right) > ۰, \quad i = ۱, ۲.$$

به این ترتیب:

$$۰ < \|U_i\|_\infty < ۱, \quad i = ۱, ۲.$$

در نتیجه:

$$\lim_{n \to +\infty} \|U_i\|_\infty^n = ۰, \quad i = ۱, ۲.$$

این تساوی، با توجه به قطری بودن U_iها، به این یعنی است که

$$\lim_{n \to +\infty} \|U_i^n\|_\infty = ۰, \quad i = ۱, ۲,$$

و این هم با توجه به پیوستگی تابع نرم نتیجه می دهد:

$$\lim_{n \to +\infty} U_i^n = o, \quad i = ۱, ۲.$$

□

برای بیان نتیجه بعدی ما نیاز به لم زیر داریم.

لم ۳.۳. *اگر A یک ماتریس قطری باشد و $\|A\|_\infty > ۱$، آنگاه*

$$\|I + A\|_\infty > ۲ \quad \text{یا} \quad \|I - A\|_\infty > ۲.$$

اثبات. فرض کنید: $A = diag(a_{۱۱}\ a_{۲۲}\ \ldots a_{nn})$ و

$$\|A\|_\infty = |a_{kk}| = \max_{۱ \leq i \leq n} |a_{ii}|.$$

اگر $a_{kk} > ۰$، طبق فرض داریم $\|A\|_\infty = a_{kk} > ۱$ که نتیجه می دهد:

$$\|I + A\|_\infty = \max_{۱\leq i\leq n} |۱ + a_{ii}| \geq ۱ + a_{kk} > ۲,$$

و اگر $a_{kk} < ۰$، طبق فرض داریم $\|A\|_\infty = -a_{kk} > ۱$ که نتیجه می دهد:

$$\|I - A\|_\infty = \max_{۱\leq i\leq n} |۱ - a_{ii}| \geq ۱ - a_{kk} > ۲.$$

□

قضیه ۴.۳. *ماتریس های قطری A و B را در نظر بگیرید. اگر A نامنفرد باشد و داشته باشیم $\|A^{-۱}\|_\infty \leq ۱$ و $\|I + ۴(A^{-۱})^۲B\|_\infty > ۱$ آنگاه دنباله تکراری (۴) واگراست.*

اثبات. از اثبات قضیه ۲.۳، می دانیم:

$$\|\big(I + ۴(A^{-۱})^۲B\big)^{\frac{۱}{۲}}\|_\infty = \|I + ۴(A^{-۱})^۲B\|_\infty^{\frac{۱}{۲}}.$$

پس طبق فرض، داریم: $\|\big(I + ۴(A^{-۱})^۲B\big)^{\frac{۱}{۲}}\|_\infty > ۱$. لذا از لم ۳.۳ حداقل یکی از نامساوی های زیر برقرار است:

$$\|I + \big(I + ۴(A^{-۱})^۲B\big)^{\frac{۱}{۲}}\|_\infty > ۲ \tag{۹}$$

یا

$$\|I - \big(I + ۴(A^{-۱})^۲B\big)^{\frac{۱}{۲}}\|_\infty > ۲. \tag{۱۰}$$

اجازه دهید فرض کنیم نامساوی (۹) برقرار باشد. به کمک این نامساوی، به دست می

آوریم:

$$\begin{aligned}\|A^{-1}\|_\infty\|U_1\|_\infty &= \frac{1}{2}\|A^{-1}\|_\infty\|A+(A^2+4B)^{\frac{1}{2}}\|_\infty\\ &\geq \frac{1}{2}\|A^{-1}\big(A+(A^2+4B)^{\frac{1}{2}}\big)\|_\infty\\ &= \frac{1}{2}\|I+\big(I+4(A^{-1})^2B\big)^{\frac{1}{2}}\|_\infty\\ &> 1.\end{aligned}$$

بنابراین، با توجه به فرض $\|A^{-1}\|_\infty \leq 1$ نتیجه می گیریم: $\|U_1\|_\infty > 1$. در نتیجه ماتریس U_1 واگراست. به طور مشابه، با استفاده از نامساوی (۱۰) نتیجه می شود ماتریس U_2 واگراست. □

ملاحظه ۵.۳. قابل ذکر است که شرط $\|A^{-1}\|_\infty \leq 1$ در قضیه ۴.۳، ایجاب می کند که $\|A\|_\infty \geq 1$. چرا که می دانیم:

$$\|A\|_\infty\|A^{-1}\|_\infty \geq \|AA^{-1}\|_\infty = \|I\|_\infty = 1.$$

ملاحظه ۶.۳. نویسندگان در مقاله [۷]، معادله تفاضلی فازی (۲) را به صورت سیستم برداری زیر تبدیل نموده اند:

$$z_{n+1} = z_n - Dz_{n-1} + y, \tag{11}$$

که در آن، D ماتریس قطری زیر است:

$$D = \begin{pmatrix} \sqrt{a^+(\alpha)b^+(\alpha)a^-(\alpha)b^-(\alpha)} & 0 \\ 0 & -\sqrt{a^+(\alpha)b^+(\alpha)a^-(\alpha)b^-(\alpha)} \end{pmatrix}.$$

ملاحظه می شود که سیستم (۱۱) یک نمونه از سیستم (۴) است که در آن، $A = I$ و

$B = -D$. پس، ما داریم: $\|A^{-1}\|_\infty = \|I\|_\infty = 1$ و

$$\begin{aligned} \|I + 4(A^{-1})^2 B\|_\infty &= \|I - 4D\|_\infty \\ &= \max\Big\{|1 - 4\sqrt{a^+(\alpha)b^+(\alpha)a^-(\alpha)b^-(\alpha)}|, \\ &\qquad |1 + 4\sqrt{a^+(\alpha)b^+(\alpha)a^-(\alpha)b^-(\alpha)}|\Big\} \\ &= 1 + 4\sqrt{a^+(\alpha)b^+(\alpha)a^-(\alpha)b^-(\alpha)} \\ &> 1. \end{aligned}$$

بنابراین، طبق قضیه ۴.۳، سیستم (۱۱) واگراست، که با نتیجه یافت شده در [۷] مطابقت دارد.

۴ همگرایی سیستمی معادله تفاضلی فازی سطح دی اکسید کربن خون

در این بخش، به تحلیل معادله تفاضلی فازی مربوط به میزان سطح دی اکسید کربن موجود در خون که به شکل زیر در نظر گرفته شده، می پردازیم:

$$c_{n+1} = (c_n + m) \ominus abc_{n-1}, \qquad (12)$$

که در آن، $a, b, m \in \mathbb{R}_F^+$ و مقادیر اولیه c_0 و c_1 معلوم می باشند. همچنین، فرض بر این است که a و b اعداد فازی کوچکی هستند. به این معنی که: $supp(a) \subset (0, 1)$ و $supp(b) \subset (0, 1)$.

در حالت کلی، پیچیدگی معادله (۱۲) به مقادیر اولیه c_0 و c_1، عدد m و ضرایب a و b (بخصوص زمانی که این ضرایب اعداد فازی غیر حقیقی باشند)، بستگی دارد. در واقع، وجود جواب معادله (۱۲)، این ضرورت را می طلبد که تفاضل-H در (۱۲) در هر چرخه nام وجود داشته باشد. اگر فرض کنیم که مقادیر اولیه فازی c_0 و c_1 بگونه ای داده شده اند که برای هر عدد طبیعی n، تفاضل-H در (۱۲) وجود دارد، آنگاه دنباله اعداد

فازی $\{c_n\}$ جواب معادله تفاضلی (۱۲) خواهد بود. مثال زیر نشان می دهد که حتی در شرایطی که a و b اعداد حقیقی باشند، ممکن است در همان تکرار اول متوقف شویم.

مثال ۱.۴. معادله تفاضلی (۱۲) همراه با $a=b=\frac{۱}{\sqrt{۱۰}}$ و اعداد فازی $c_۰, c_۱, m \in \mathbb{R}_F^+$ داده شده با α-برش های زیر، در نظر بگیرید:

$$[c_۰]^\alpha = [۲+۳۰\alpha, ۴۰-۸\alpha],$$

$$[c_۱]^\alpha = [۲+\alpha, ۶-۳\alpha],$$

$$[m]^\alpha = [۱+\alpha, ۳-\alpha].$$

ما داریم:

$$c_{n+۱} = (c_n + m) \ominus \frac{۱}{۱۰} c_{n-۱}.$$

به سادگی نتیجه می شود:

$$[c_۲]^\alpha = \Big([c_۱+m]^\alpha\Big) \ominus \frac{۱}{۱۰}[c_۰]^\alpha = [\frac{۱۴}{۵}-\alpha, ۵-\frac{۱۶}{۵}\alpha],$$

که به وضوح، α-برش یک عدد فازی را تعریف نمی کند.

مسئله (۱۲) در نظر بگیرید. فرض کنید:

$$[a]^\alpha = [a^-(\alpha), a^+(\alpha)], \quad [b]^\alpha = [b^-(\alpha), b^+(\alpha)],$$

$$[m]^\alpha = [m^-(\alpha), m^+(\alpha)], \quad [c_n]^\alpha = [c_n^-(\alpha), c_n^+(\alpha)], \quad \forall \alpha \in [۰,۱].$$

به سادگی می توان دید که توابع بالا و پایین در نمایش α-برش های فوق در سیستم معادلات تفاضلی زیر صدق می کنند:

$$\begin{cases} c_{n+۱}^-(\alpha) = c_n^-(\alpha) - a^-(\alpha)b^-(\alpha)c_{n-۱}^-(\alpha) + m^-(\alpha), \\ c_{n+۱}^+(\alpha) = c_n^+(\alpha) - a^+(\alpha)b^+(\alpha)c_{n-۱}^+(\alpha) + m^+(\alpha). \end{cases} \tag{۱۳}$$

سیستم (۱۳) با تعریف بردارهای $c_n(\alpha) = \left(c_n^-(\alpha), c_n^+(\alpha)\right)^t$، $m(\alpha) = \left(m^-(\alpha), m^+(\alpha)\right)^t$ و ماتریس

$$B(\alpha) = \begin{pmatrix} -a^-(\alpha)b^-(\alpha) & 0 \\ 0 & -a^+(\alpha)b^+(\alpha) \end{pmatrix}$$

قابل بیان به صورت زیر است:

$$c_{n+1}(\alpha) = c_n(\alpha) + B(\alpha)c_{n-1}(\alpha) + m(\alpha). \qquad (۱۴)$$

تعریف ۲.۴. می گوییم معادله تفاضلی (۱۲) بطور سیستمی به عدد فازی u همگرا است هرگاه سیستم (۱۴) همگرا به بردار $u(\alpha) = \left(u^-(\alpha), u^+(\alpha)\right)^t$ باشد به طوری که $u^-(\alpha)$ و $u^+(\alpha)$ به ترتیب واحد های پایین و بالای α-برش u را تعریف کنند. یعنی در شرایط تعریف (۱.۲) صدق کنند.

قضیه ۳.۴. *فرض کنید اعداد $a, b, m \in \mathbb{R}_F^+$ همرا با α-برش های*

$$[a]^\alpha = [a^-(\alpha), a^+(\alpha)],\ [b]^\alpha = [b^-(\alpha), b^+(\alpha)],\ [m]^\alpha = [m^-(\alpha), m^+(\alpha)],$$

در شرایط زیر صدق کنند:

(i) $supp(ab) \subset (0, \frac{1}{4})$,

(ii) $[m^*]^\alpha = \left[\frac{m^-(\alpha)}{a^-(\alpha)b^-(\alpha)}, \frac{m^+(\alpha)}{a^+(\alpha)b^+(\alpha)}\right]$ *تعریف می کنند α-برش های یک عدد فازی m^*.*

در این صورت، دنباله تفاضلی (۱۲) با هر دو مقدار اولیه فازی c_0 و c_1 بطور سیستمی به عدد m^* همگراست.

اثبات. ابتدا توجه می کنیم چون توابع $a^-(\alpha)b^-(\alpha)$ و $a^+(\alpha)b^+(\alpha)$ توابع ای به ترتیب صعودی و نزولی روی $[0, 1]$ هستند، شرط (i) ایجاب می کند که:

$$0 < a^-(\alpha)b^-(\alpha) \le a^+(\alpha)b^+(\alpha) < \frac{1}{4}, \quad \forall \alpha \in [0, 1]. \qquad (۱۵)$$

فرض کنید α دلخواه اما ثابت باشد و سیستم (۱۴) را در نظر بگیرید. این سیستم یک نمونه از سیستم عمومی (۴) است که در آن $A = I$ و

$$B(\alpha) = diag\big(-a^-(\alpha)b^-(\alpha) \quad -a^+(\alpha)b^+(\alpha)\big).$$

پس: $\|A\|_\infty = ۱$ و چون بسادگی از (۱۵) نتیجه می شود:

$$\circ < ۱ - ۴a^+(\alpha)b^+(\alpha) \leq ۱ - ۴a^-(\alpha)b^۱(\alpha) < ۱,$$

لذا داریم:

$$\begin{aligned}\|I + ۴(A^{-۱})^۲B\|_\infty &= \|I + ۴B(\alpha)\|_\infty \\ &= \max\{|۱ - ۴a^-(\alpha)b^-(\alpha)|, |۱ - ۴a^+(\alpha)b^+(\alpha)|\} \\ &< ۱.\end{aligned}$$

بنابراین، همه شرایط قضیه ۲.۳ برقرار هستند. در نتیجه سیستم (۱۴) همگراست و نقطه همگرایی به دست می آید:

$$(I - A - B)^{-۱}m = (-B(\alpha))^{-۱}m(\alpha) = \begin{pmatrix} \frac{m^-(\alpha)}{a^-(\alpha)b^-(\alpha)} \\ \frac{m^+(\alpha)}{a^+(\alpha)b^+(\alpha)} \end{pmatrix}.$$

در نهایت، چون طبق فرض (ii)، مولفه های این بردار واحد های پایین و بالای عدد فازی m^* را تشکیل می دهند، لذا، طبق تعریف ۲.۴، دنباله (۱۲) بطور سیستمی به m^* همگراست. □

مثال ۴.۴. معادله تفاضلی (۱۲) را در نظر بگیرید، که در آن:

$$[a]^\alpha = \frac{۱}{۶}[۱ + \alpha, ۳ - \alpha],$$

$$[b]^\alpha = \frac{۱}{۸}[۱+\alpha, ۳-\alpha],$$
$$[m]^\alpha = [(۱+\alpha)^۴, (۳-\alpha)^۴],$$

برای تمام $\alpha \in [۰,۱]$. در اینجا، $a, b, m \in \mathbb{R}_F^+$ و

$$[ab]^\alpha = \frac{۱}{۴۸}[(۱+\alpha)^۲, (۳-\alpha)^۲], \quad \forall\alpha \in [۰,۱].$$

داریم:

$$supp(ab) = \frac{۱}{۴۸}[۱,۹] \subset (۰, \frac{۱}{۴}).$$

همچنین:

$$[m^*]^\alpha = ۴۸[(۱+\alpha)^۲, (۳-\alpha)^۲],$$

که به روشنی به عنوان α-برش های یک عدد فازی تعریف شده است. بنابراین، طبق قضیه ۳.۴ دنباله $\{c_n\}$ با هر دو مقدار اولیه $c_۰$ و $c_۱$ بطور سیستمی به عدد m^* همگراست.

۵ نتیجه گیری و پیشنهادات

در این مقاله، با هدف مطالعه معادله تفاضلی میزان سطح دی اکسید کربن خون که بر اساس تفاضل هاکوهارا طراحی شده، ابتدا یک سیستم خطی از معادلات تفاضلی مورد مطالعه و تحلیل قرار گرفته و نتایج همگرایی آن یافت شده است. شرایط کافی برای همگرایی (در معنایی که همگرایی سیستمی نامیده شده)، معادله تفاضلی سطح دی اکسید کربن خون، یافت شده است.

برای تحقیقات بیشتر ما بررسی همگرایی معادله تفاضلی فازی

$$c_{n+۱} = (c_n + m) \ominus abc_{n-۱},$$

که در آن a و b اعداد حقیقی مثبت هستند، را پیشنهاد می کنیم. هم چنین، مطالعه

مسئله در حالتی که ضرایب به چرخه n وابسته باشند، پیشنهاد می شود. به عبارتی دیگر، معادله تفاضلی سطح دی اکسید کربن خون به صورت کلی تر زیر در نظر گرفته شود:

$$c_{n+۱} = (c_n + m) \ominus a_n b_n c_{n-۱}.$$

تشکر و قدردانی

از سردبیر محترم مجله و هم چنین از داوران محترم ناشناس به خاطر دقت و توجه شان قدردانی می نمایم.

مراجع

[۱] اللهویرانلو، ت. خضرلو، م. خضرلو، س. روشهای عددی در جبر خطی با تاکید بر حل مساله (۱۳۸۷). انتشارات دانشگاه آزاد اسلامی واحد علوم و تحقیقات تهران.

[2] Agarwal, R.P. (2000) Difference equations and inequalities, *2nd ed. Dekker, New York*.

[3] Allahviranloo, T. Chehlabi, M. (2015) Solving fuzzy differential equations based on the length function properties, *Soft Computing*, **19**, 307-320.

[4] Bede, B. Rudas, J. Bencsik, L. (2007) First order linear fuzzy differential equations under generalized differentiability. *Information Sciences*, **177**, 1648-1662.

[5] Bede, B. (2013) Mathematics of Fuzzy Sets and Fuzzy Logic, *Springer, London*.

[6] Chehlabi, M. (2022) Trapezoidal approximation operators preserving the most indicators of fuzzy numbers-relationships and applications. *Soft Computing*, **26**, 7081-7105.

[7] Deeba, E., De Korvin, A. (1999) Analysis by fuzzy difference equations of a model of CO_2 level in the blood. *Applied Mathematics Letters*, **12**, 33-40.

[8] Diamond, P., Kloeden, P. (2000) Metric topology of fuzzy numbers and fuzzy analysis, in: Dubois, D., Prade, H. (Eds.), Handbook Fuzzy Sets, Ser., vol. **7**, *Kluwer Academic Publishers, Dordrecht*, 583-641.

[9] Dubois, D. Prade, H. (1987) The mean value of a fuzzy number, *Fuzzy sets and Systems*, **24**, 279-300.

[10] Edeistein-Keshet, L. (1987) *Mathematical Models in Biology*, McGraw-Hill, New York.

[11] Khastan, A. Rodríguez-López, R. (2016) On the solutions to first order linear fuzzy differential equations, *Fuzzy Sets and Systems*, **295**, 114-135.

[12] Lakshmikantham V. Prigiante, D. (1990) *Theory of Difference Equations*, Academic Press, New York.

[13] Maximon, L.C. (2016) Differential and Difference Equations: A Comparison of Methods of Solution. *Springer International Publishing Switzerland*.

[14] Rodríguez-López, R. (2013) On the existence of solutions to periodic boundary value problems for fuzzy linear differential equations, *Fuzzy Sets and Systems*, **219**, 1–26.