سیستم‌های فازی و کاربردها

سال اول، شماره دوم (زمستان ۱۳۹۷) صص. ۱۱۹ تا ۱۳۳

DOR: 20.1001.1.27174409.1397.1.2.6.9

یک رویکرد پیشنهادی برای حل مسایل برنامه‌ریزی خطی تصادفی فازی چندهدفه با احتمال فازی

سید هادی ناصری و سلیم باوندی

دانشگاه مازندران، گروه ریاضی

چکیده

در اکثر پدیده‌هایی که با آن روبرو هستیم عدم قطعیت به نوعی وجود دارد. مسئله اساسی که در این زمینه وجود دارد در ابتدا تشخیص نوع عدم قطعیت و سپس حل مدل‌هایی است که با آن نوع از عدم قطعیت مواجه هستند. البته برخی از محیط‌های عدم قطعیت از پایه ریاضی مناسبی برخوردار نیستند و از روش‌های حل غیراصولی با تنوع بسیار استفاده می‌کنند. از جمله مهمترین محیط‌های عدم قطعیت که امروزه به طور گسترده مورد استفاده قرار می‌گیرد محیط‌های فازی و تصادفی است اما در مواجه با پدیده‌های امروزی متوجه می‌شویم که پیچیدگی پدیده‌ها به نوعی است که نیازمند بکارگیری همزمان دو عدم قطعیت تصادفی و فازی است. از این رو لزوم پرداختن به محیط‌های ترکیبی تصادفی فازی ایجاد می‌شود. برنامه‌ریزی تصادفی فازی در ارتباط با مسایلی از بهینه‌سازی است که برخی یا همه پارامترهای آن بصورت متغیرهای تصادفی فازی هستند. در این مقاله یک رویکرد برای حل مسایل برنامه‌ریزی خطی تصادفی فازی چندهدفه ارایه می‌شود. در ابتدا مدل تصادفی فازی چندهدفه با استفاده از رویکرد برنامه‌ریزی محدودیت شانس با احتمال فازی و مفهوم آلفا-برش به یک مدل برنامه‌ریزی خطی چندهدفه قطعی معادل تبدیل و سپس با اتخاذ یک رویکرد فازی، مدل حاصل حل می‌شود.

Mathematics Subject Classification (2010): 62H25; 03E72, **Email:** nasseri@umz.ac.ir.

عبارات و کلمات کلیدی: برنامه‌ریزی تصادفی، غیرفازی‌سازی اعداد فازی، متغیرهای تصادفی فازی، اعداد فازی مثلثی.

۱ مقدمه

ویژگی‌های فازی در بسیاری از حوزه‌های زندگی که در آن قضاوت، ارزیابی و تصمیم‌گیری افراد اهمیت دارد، وارد می‌شود. نظریه مجموعه‌های فازی یک چارچوب ریاضی است که در آن پدیده‌های دارای مفهوم مبهم موردمطالعه قرار می‌گیرند. طی چند دهه اخیر، این نظریه در حوزه‌های مختلفی نظیر ریاضیات، مهندسی، مالی و بیمه و برای موقعیت‌های همراه با عدم اطمینان توسعه‌یافته است. از طرفی افزایش پیچیدگی‌های جامعه امروزی، مسائل جدیدی با اهداف چندگانه را به ارمغان آورده است؛ ازجمله مسائل اقتصادی، محیط‌زیست، فنی و مهندسی و غیره. از این‌رو به نظر می‌رسد، در نظر گرفتن اهداف بیشتر در روند تصمیم‌گیری، به رویکردهای چند هدفه بجای تک هدفه نیازمند است. هنگام فرموله کردن یک مساله برنامه‌ریزی چندهدفه که توصیف‌کننده و نشان‌دهنده وضعیت واقعی تصمیم‌گیری است، عدم قطعیت‌های ذاتی موجود در سیستم‌های پیچیده دنیای واقعی یا انسان، از جمله تصادفی بودن پیشامدهای مربوط به دستگاه‌ها یا فازی‌بودن قضاوت‌های انسانی، باید در توصیف توابع هدف و محدودیت‌ها و نیز نمایش پارامترهای مرتبط با مسائل فرموله‌شده، انعکاس داده شود. برای سر و کار داشتن با چندهدفه بودن و نیز عدم قطعیت در تصمیم‌گیری، برنامه‌ریزی تصادفی چندهدفه و برنامه‌ریزی فازی چند هدفه به‌صورت جداگانه با معرفی مدل‌های مختلف بهینه‌سازی و تکنیک‌های حل متناظر توسعه داده‌شده است. با این‌حال، یادآوری مبهم بودن یا ذات فازی قضاوت‌های انسانی، برای توابع هدف و یا محدودیت‌های تصادفی متناظر، به این نکته مهم اشاره دارد که عدم قطعیت در مسائل تصمیم‌گیری دنیای واقعی اغلب با تلفیقی از تصادفی بودن و فازی بودن به‌جای فازی بودن یا تصادفی بودن بیان می‌شود. برای حل یک مساله که فقط حالت تصادفی دارد بسیاری از نویسندگان ازجمله ساکاوا[۱]، کاتو [۲]، نی شی زاکی[۳] وکاتاگیری[۴] [۴]، [۵] ، [۶] سعی کردند در طول تصادفی بودنِ آن مساله با فازی بودن آن نیز روبه‌رو شوند. لیو[۵] [۸] و ناندا[۶] نیز به ترتیب با استفاده از نظریه امکان و احتمال‌های نادقیق مدل‌های تصادفی فازی را حل کرده‌اند.

---

[1] Sakawa
[2] Kato
[3] Nishizaki
[4] Katagiri
[5] Liu
[6] Nanda

لوهاندجولا[7] [۹] نیز با استفاده از رویکرد α−برش مساله تصادفی فازی را به حالت تصادفی متناظر تبدیل کرد، سپس مساله تصادفی را با روش‌های موجود حل کرد. نویسندگان دیگری نیز مانند روملفانگر[8] و موان [9] [۱۰] از روش تعاملی با استفاده از یک الگوریتم جدید برای حل مدل‌هایی که در آن فازی بودن و تصادفی بودن در کنار هم حضور دارند، استفاده کردند. اخیراً، به‌منظور رویارویی با عدم قطعیت تصادفی و فازی به‌طور هم‌زمان، رویکردهای ترکیبی برنامه‌ریزی تصادفی و برنامه‌ریزی فازی پیشنهادشده است[[۱۲]،[۳]]. به‌ویژه، ساکاوا و همکاران [۱۱] یک روش تعاملی برای مساله برنامه‌ریزی فازی چند هدفه با ضرایب متغیر تصادفی پیشنهاد کردند. کاتاگیری و همکاران [۷] یک روش تعاملی برای مساله برنامه‌ریزی خطی چندهدفه با ضرایب متغیرهای تصادفی فازی ارائه دادند. در این مقاله، مساله برنامه‌ریزی تصادفی فازی را موردبررسی قرار می‌دهیم. این رده از مسایل به دلیل داشتن ابهام از نوع تصادفی فازی در پارامترها بسیار موردتوجه هستند. یکی از روش‌های رایج برای حل چنین مسایلی استفاده ازα−برش است. در اینجا حالتی از برنامه‌ریزی خطی چندهدفه را در نظر گرفته‌ایم که در آن قیود از نوع محدودیت شانس با احتمال‌های فازی هستند. در ابتدا مدل تصادفی فازی چندهدفه با استفاده از رویکرد محدودیت شانس و ویژگی‌های آلفا−برش تبدیل به یک مدل قطعی معادل و سپس با اتخاذ یک رویکرد فازی، جواب رضایت‌بخش بدست می‌آید.

۲ تعاریف و پیش‌نیازها

در این بخش، برخی از مفاهیم پایه و پیش نیازهای اساسی از مراجع [۱] و [۲] بیان خواهد شد.

تعریف ۱.۲. فرض کنیدX یک مجموعه مرجع باشد. آنگاه یک زیرمجموعه فازی $\tilde{A}$ در X، مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب به‌صورت زیر است:

$$\tilde{A} = \{ \left(x, \mu_{\tilde{A}}(x)\right) | x \in X \} \qquad (۱)$$

که در آن $\mu_{\tilde{A}}(x)$ تابع عضویت یا درجه عضویت x در مجموعه فازی $\tilde{A}$ نامیده می‌شود که مجموعه

[7] Luhandjula

[8] Rommelfanger

[9] Mohan

مرجع X را به $[\circ, \text{۱}]$ می‌نگارد.

مفهوم مجموعه α- برش برای بکارگیری رابطه بین یک مجموعه فازی و یک مجموعه معمولی بسیار حایز اهمیت است.

تعریف ۲.۲. برای $\alpha \in [\circ, \text{۱}]$ داده شده، مجموعه α- برش مجموعه فازی $\tilde{A}$، مجموعه‌ای معمولی از عناصر x است به طوری که مقدار تابع عضویت آن بیش تر از α باشد، یعنی

$$A_\alpha = \{x | \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha\} \tag{۲}$$

تعریف ۳.۲. مجموعه فازی A را نرمال گوییم، اگر x ای وجود داشته باشد بطوریکه $\mu_{\tilde{A}}(x) = \text{۱}$.

تعریف ۴.۲. یک مجموعه فازی A از مجموعه اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ را یک عدد فازی حقیقی گوییم اگر دارای سه ویژگی زیر باشد:

۱) مجموعه فازی A محدب باشد.

۲) مجموعه فازی A نرمال باشد.

۳) تابع عضویت آن قطعه به قطعه پیوسته باشد.

تعریف ۵.۲. یک سه تایی (m, α, β) را یک عدد فازی مثلثی گوییم هرگاه تابع عضویت آن بصورت زیر باشد:

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} \text{۱} - \frac{m-x}{\alpha} & , \quad m - \alpha \leq x \leq m \\ \text{۱} - \frac{x-m}{\beta} & , \quad m \leq x \leq m + \beta \\ \circ & , \quad o.w. \end{cases}$$

که در آن m نماد هسته، α و β به ترتیب پهنای چپ و راست $\tilde{A}$ هستند.

تعریف ۶.۲. به هر پیشامد E عددی مانند $P(E)$ وابسته است که احتمال وقوع پیشامد E نامیده می‌شود، که در قواعد احتمال ذیل صدق می کند:

۱) احتمال هر پیشامد، عددی حقیقی و نامنفی است، به عبارت دیگر، برای هر پیشامد E داریم $P(E) \geq 0$.

۲) همواره داریم $P(\Omega) = 1$.

۳) اگر $E_1, E_2, \cdots, E_n$، پیشامدهای دو به دو ناسازگار باشند، آنگاه داریم

$$P\left(E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_n\right) = P\left(E_1\right) + P\left(E_2\right) + \cdots + P\left(E_n\right)$$

سه تایی مرتب $(\Omega, \Lambda_\Omega, P)$ را فضای احتمال گویند.

۳ برنامه‌ریزی چندهدفه تصادفی فازی

مساله برنامه‌ریزی تصادفی چندهدفه زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} & \max z_l = \sum_{j=1}^{n} c_j^{(l)} x_j, \qquad l = 1, 2, \cdots, k \\ s.t. \qquad & Pr\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^s x_j \leq b_i^s\right) \geq \beta_i, \qquad i = 1, 2, \cdots, m \\ & x_j \geq 0, \qquad j = 1, 2, \cdots, n \end{aligned} \tag{3}$$

که در آن $0 \leq \beta_i \leq 1$، $j = 1, \cdots, n$، x_j متغیرهای تصمیم نامنفی و a_{ij}^s،b_i^s وc_j^l متغیرهای تصادفی هستند.

فرض کنید X یک متغیر تصادفی پیوسته باشد، دراینصورت، یک تابع چگالی احتمال $f(x;\theta)$ وجود دارد که در آن $x \in \mathbb{R}$ و $\theta = (\theta_1, \cdots, \theta_n)$ پارامترهایθ_i ، $1 \leq i \leq n$ است، به طوری‌که $P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t,\theta)\, dt$ و $\int_{-\infty}^{\infty} f(t,\theta)\, dt = 1$. برای مثال تابع چگالی توزیع نرمال دارای دو پارامتر μ و σ^2 به ترتیب به عنوان میانگین و واریانس است. اغلب این

پارامترها با استفاده از نمونه‌های تصادفی از جمعیت تخمین زده می‌شوند که این تخمین‌ها می‌تواند بصورت یک برآورد نقطه‌ای یا بصورت بازه اطمینان باشند. هدف، جایگزینی بازه اطمینان برای θ_i به جای برآورد نقطه‌ای، به منظور پرداختن به تابع چگالی احتمال برای بدست آوردن یک تابع چگالی احتمال بازه‌ای است. به همین منظور، عدم‌قطعیت موجود در θ_i با جایگزین کردن عدد فازی مربوط به θ_i مدل‌بندی می‌شود و یک تابع چگالی احتمال فازی بدست می‌آید. با استفاده از α− برش اعداد فازی تابع چگالی احتمال بازه‌ای تولید می‌شود. بنابراین اگر تابع چگالی احتمال f به دلیل مبهم بودن اطلاعات دارای پارامترهای نامشخص باشد، در اینصورت تابع چگالی شامل پارامتر فازی با نام $\tilde{\theta}$ است که یک عدد فازی می‌باشد. $f\left(x;\tilde{\theta}\right)$ نیز تابع چگالی متغیر تصادفی فازی $\tilde{X}$ را نشان می دهد که یک مجموعه فازی است. لذا، $Pr\left(X \leq x\right)$ تبدیل به یک عدد فازی می‌شود که به صورت $\tilde{P}r\left(\tilde{X} \leq x\right)$ نشان داده می‌شود. با توجه به مطالب مطرح‌شده، تعاریف زیر را که توسط بارکلی و همکاران [۱۲] بیان شده است، برای متغیر تصادفی فازی ارایه می‌دهیم.

تعریف ۱.۳. متغیر تصادفی فازی، یک متغیر تصادفی است که پارامترهای آن (میانگین، واریانس و غیره) اعداد فازی هستند. فرض کنید $\tilde{X}$ یک متغیر تصادفی پیوسته با پارامتر فازی $\tilde{\theta}$ و $\tilde{P}r$ بعنوان یک احتمال فازی باشد، در اینصورت $\tilde{X}$ یک متغیر تصادفی فازی با تابع چگالی $f\left(x;\tilde{\theta}\right)$ خواهد بود. همچنین $\tilde{P}r\left(\tilde{X} \leq x\right) = \tilde{\beta}$، که در آن $۰ \leq \tilde{\beta} \leq ۱$ و $\tilde{\beta} = \left(\beta^m, \beta^l, \beta^r\right)$ که $۰ \leq \beta^l$ و $\beta^r \leq ۱$.

تعریف ۲.۳. فرض کنید $E = [c, d]$ یک پیشامد باشد. در اینصورت احتمال رخ دادن پیشامد E متغیر تصادفی فاز $\tilde{X}$، یک عدد فازی است که α− برش آن به صورت تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned}\tilde{P}r\left[c \leq \tilde{X} \leq d\right] = \Bigg[&\min : \left\{ \int_a^b f\left(x,\theta\right)\, dx | \theta \in \tilde{\theta}\left[\alpha\right], \int_{-\infty}^{\infty} f\left(x,\theta\right) dx = ۱ \right\} \\ &\max : \int_a^b f\left(x,\theta\right)\, dx | \theta \in \tilde{\theta}\left[\alpha\right], \int_{-\infty}^{\infty} f\left(x,\theta\right) dx = ۱ \Bigg] \\ &= \left[\underline{\beta}\left[\alpha\right], \bar{\beta}\left[\alpha\right]\right]\end{aligned}$$

اکنون توزیع نرمال $N\left(\mu, \sigma^۲\right)$ دارای تابع چگالی $f\left(x;\mu,\sigma^۲\right)$ است که در آن $x \in \mathbb{R}\mu$، و $\sigma^۲$

به ترتیب میانگین و واریانس آن هستند. بنابراین، توزیع نرمال فازی $N\left(\tilde{\mu},\tilde{\sigma}^{۲}\right)$ برای اعداد فازی $\tilde{\mu}$ و $\tilde{\sigma}^{۲} > ۰$ را در نظر بگیرید. در اینجا، قصد داریم احتمال فازی را برای یافتن یک مقدار در بازه $[c,d]$ محاسبه کنیم. این احتمال فازی را بصورت $\tilde{P}\left[c,d\right]$ نشان می‌دهیم. برای $\alpha\in[۰,۱]$، $\mu\in\tilde{\mu}\left[\alpha\right]$ و $\sigma^{۲}\in\tilde{\sigma}^{۲}\left[\alpha\right]$، فرض کنید $z_{۱}=\frac{c-\mu}{\sigma}$ و $z_{۲}=\frac{d-\mu}{\sigma}$، آنگاه

$$\tilde{P}r\left[c,d\right]\left[\alpha\right]=\left\{\int_{z_{۱}}^{z_{۲}}f\left(x;۰,۱\right)dx|\mu\in\tilde{\mu}\left[\alpha\right],\tilde{\sigma}^{۲}\left[\alpha\right]\right\} \qquad (۴)$$

برای $۰ \leq \alpha \leq ۱$. معادله فوق یکα-برش از $\tilde{P}\left[c,d\right]$ است. همچنین، $f\left(x;۰,۱\right)$ معادل چگالی نرمال استاندارد با میانگین صفر و واریانس یک است. فرض کنید $\tilde{P}\left[c,d\right]\left[\alpha\right]=\left[p_{۱}\left(\alpha\right),p_{۲}\left(\alpha\right)\right]$، آنگاه مقدار کمینه و بیشینه عبارت سمت راست معادله (۴)، به ترتیب $p_{۱}\left(\alpha\right)$ و $p_{۲}\left(\alpha\right)$ خواهد بود. به‌طورکلی، یافتن این مقادیر بسیار دشوار است و ممکن است الگوریتم ژنتیک و الگوریتم تکاملی به ترتیب برای یافتن کمینه و بیشینه مقدار به کار گرفته شود. با این حال، در مثال زیر نشان می‌دهیم که در برخی از موارد به راحتی می توان این مقادیر را محاسبه کرد.

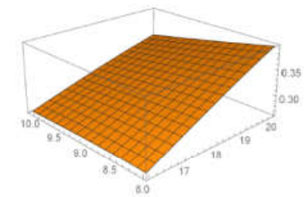
مثال ۳.۳. فرض کنید $\tilde{\mu}=(۱۶,۱۸,۲۰)$ یا به طور معادل، میانگین تقریباً ۱۸ است و $\tilde{\sigma}^{۲}=(۸,۹,۱۰)$ یا به طور معادل واریانس تقریباً ۹ است. می‌خواهیم $\tilde{P}\left[۱۸,۲۷\right]$ را محاسبه کنیم. با در نظر گرفتن برش $\alpha=۱$ خواهیم داشت $\tilde{P}\left[۱۸,۲۷\right]\left[۱\right]=۰/۴۹۸۶۵$. حال برش $\alpha=۰$ را در نظر می‌گیریم. با استفاده از نرم‌افزار متمتیکا، تابع

$$g\left(x,y^{۲}\right)=\int_{z_{۱}}^{z_{۲}}f\left(x;۰,۱\right)dx$$

را برای $z_{۱}=\frac{(۱۸-x)}{y}$، $z_{۲}=\frac{(۲۷-x)}{y}$ ، $۱۶\leq x\leq ۲۰$ و $۸\leq y^{۲}\leq ۱۰$، رسم می‌کنیم که در شکل ۱ نمایش داده شده است. برش $\alpha=۰$ برای $(۱۶,۱۸,۲۰)$ بصورت بازه $[۱۶,۲۰]$ که گستره‌ای برای $x=\mu$ و برای $(۸,۹,۱۰)$ بصورت بازه $[۸,۱۰]$ که گستره‌ای برای $y^{۲}=\sigma^{۲}$

است. لذا داریم:

$$g\,(۱۶,۸) = ۰/۲۳۸۸۰۲ \quad g\,(۱۶,۹) = ۰/۲۵۱۳۰۸ \quad g\,(۱۶,۱۰) = ۰/۲۶۴۰۹۷$$
$$g\,(۲۰,۸) = ۰/۷۴۹۵۴۴ \quad g\,(۲۰,۹) = ۰/۷۳۸۶۶۸ \quad g\,(۲۰,۱۰) = ۰/۷۲۲۲۲۵$$



شکل ۱: *نمودار* $g\,(x, y^۲)$ *برای مثال* ۱

به وضوح مقادیر بدست آمده نشان می‌دهد که کمینه مقدار ۰/۲۳۸۸۰۲ در $x = ۱۶$ و $y = ۸$ و بیشینه مقدار ۰/۷۴۹۵۴۴ در $x = ۲۰$ و $y = ۸$ اتفاق می‌افتد. از این‌رو، برش $\alpha = ۰$ این احتمال فازی، بصورت بازه $[۰/۲۳۸۸۰۲, ۰/۷۴۹۵۴۴]$ است.

قضیه ۴.۳. *اگر $f\,(x; \mu, \sigma^۲)$ تابع چگالی توزیع نرمال $N\,(\mu, \sigma^۲)$ با میانگین و واریانس به ترتیب μ و $\sigma^۲$ باشد. آنگاه، $\tilde{\mu}$ و $\tilde{\sigma}^۲$ به ترتیب میانگین و واریانس فازی $N\,(\tilde{\mu}, \tilde{\sigma}^۲)$ خواهد بود.*

اکنون فرض کنیم a_{ij}^s و b_i^s به ازای $i = ۱, ۲, \cdots, m$ و $j = ۱, ۲, \cdots, m$ متغیرهای تصادفی فازی مستقل دارای توزیع نرمال با میانگین و واریانس مشخص باشند که به ترتیب با $\tilde{a}_{ij}^s$ و $\tilde{b}_i^s$ نشان داده شوند. لذا مدل برنامه‌ریزی ریاضی برای مساله برنامه‌ریزی تصادفی فازی چندهدفه بصورت زیر فرمول‌بندی می‌شوند.

$$\begin{aligned} &\max z_l = \sum_{j=۱}^{n} c_j^{(l)} x_j, \ \ l = ۱, ۲, \cdots, k \\ &s.t. \qquad \tilde{P}\left(\sum_{j=۱}^{n} \tilde{a}_{ij}^s x_j \leq \tilde{b}_i^s\right) \geq \tilde{\beta}_i, \qquad i = ۱, ۲, \cdots, m \\ &\qquad\qquad x_j \geq ۰, \qquad j = ۱, ۲, \cdots, n \end{aligned} \tag{۵}$$

که در آن $\tilde{\beta}_i$، $i=۱,۲,\cdots,m$ اعدادی فازی $c_j^l\in\mathbb{R}$، $j=۱,۲,\cdots,m$.

در مساله (۵) حالتی را در نظر می‌گیریم که در آن a_{ij}^s و b_i^s به طور همزمان تصادفی فازی باشند. حل مستقیم مدل برنامه‌ریزی مطرح شده بسیار دشوار است. بنابراین یک مدل قطعی معادل به منظور بدست آوردن یک جواب سازگار برای مدل‌های ریاضی ارایه‌شده ضروری است. مدل قطعی محدودیت فازی مساله (۵) در قالب قضیه زیر بدست می‌آید:

قضیه ۵.۳. *اگر $\tilde{a}_{ij}^s$ و $\tilde{b}_i^s$، به ازای $i=۱,۲,\cdots,m$ و، $j=۱,۲,\cdots,n$ متغیرهای تصادفی فازی مستقل با توزیع نرمال با میانگین و واریانس مشخص باشند، در اینصورت*

$$\tilde{P}r\left(\sum_{j=۱}^{n}\tilde{a}_{ij}^s x_j\le\tilde{b}_i^s\right)\succeq\tilde{\beta}_i,\ \ i=۱,۲,\cdots,m \tag{۶}$$

معادل است با

$$\sum_{j=۱}^{n}\bar{\mu}_{a_{ij}^s}x_j+\Phi^{-۱}\left(\bar{\beta}_i\right)\sqrt{\bar{\sigma}_{b_i^s}^۲+\sum_{j=۱}^{n}\bar{\sigma}_{a_{ij}^s}^۲x_j^۲}\le\bar{\mu}_{b_i^s},\ \ i=۱,۲,\cdots,m \tag{۷}$$

بنابراین با توجه به قضیه اخیر مدل قطعی معادل برای مساله برنامه‌ریزی تصادفی فازی (۵) به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{aligned}
&\max z_l=\sum_{j=۱}^{n}c_j^{(l)}x_j, && l=۱,۲,\cdots,k\\
&s.t.\quad \sum_{j=۱}^{n}\bar{\mu}_{a_{ij}^s}x_j+\Phi^{-۱}\left(\bar{\beta}_i\right)\sqrt{\bar{\sigma}_{b_i^s}^۲+\sum_{j=۱}^{n}\bar{\sigma}_{a_{ij}^s}^۲x_j^۲}\le\bar{\mu}_{b_i^s}\\
&\qquad x_j\ge ۰, && j=۱,۲,\cdots,n
\end{aligned} \tag{۸}$$

که در آن μ و $\sigma^{۲}$ به ترتیب میانگین و واریانس هستند.

رویکرد فازی مطرح‌شده در [۱] به منظور حل مساله (۸) مورد استفاده قرار می‌گیرد.

گام‌های تکنیک برنامه‌ریزی فازی به‌صورت زیر ارایه می‌شود[۴]

گام نخست: ابتدا مساله برنامه‌ریزی تصادفی فازی داده شده را با استفاده از تکنیک شرح داده شده در بخش قبل، به یک مدل برنامه‌ریزی قطعی معادل تبدیل کنید.

گام دوم: مساله قطعی بدست‌آمده از گام نخست را هر بار تنها برای یک هدف و نادیده گرفتن مابقی هدف‌ها حل کنید.

گام سوم: با استفاده از جواب‌های بدست آمده از گام دوم، مقدار متناظر همه توابع هدف در هر حل را بیابید.

گام چهارم: از گام۳، کران بالا و پایین (L_l و U_l، $l = ۱, \cdots, k$) را برای هریک از توابع هدف بدست آورید.

گام پنجم: برای lامین تابع هدف $z_l\left(x\right)$، تابع عضویت هذلولوی $\mu_{z_l}\left(x\right)$ را متناظرکنید که به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mu_{z_l}(x) = \frac{(\tan h((z_l(x) - g_l)\alpha_l + ۱)}{۲} \tag{۹}$$

که در آن، U_l و L_l به ترتیب کران‌های بالا و پایین $z^{(l)}(x)$ و $g_l = \frac{U_l + L_l}{۲}$، $\alpha_l > ۰$ یک ثابت است که برابر است با $\alpha_l = \frac{۶}{U_l - L_l}$. همچنین فرض شده است که L_l با U_l برابر نیست.

گام ششم: از عملگر $\max - \min$ با متغیر افزوده λ استفاده کنید و مساله چندهدفه را به‌صورت مساله قطعی تک هدفه زیر فرمول‌بندی کنید:

$$\begin{aligned} & \max \quad \lambda \\ & s.t. \quad \lambda \leq \mu_{z_l}\left(x\right), \quad l = ۱, ۲, \cdots, k \\ & \qquad x \in S \end{aligned} \tag{۱۰}$$

که S ناحیه شدنی مدل شرح داده شده است.

گام هفتم: مساله برنامه‌ریزی خطی یا غیر خطی را برای یافتن جواب ایده‌آل حل کنید.

مثال ۶.۳. مساله برنامه‌ریزی تصادفی چندهدفه زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} &\max z_1 = 3x_1 + 8x_2 \\ &\max z_2 = 5x_1 + 4x_2 \\ &s.t.\ \tilde{P}r\left(\tilde{a}^s_{11}x_1 + \tilde{a}^s_{12}x_2 \le \tilde{b}^s_1\right) \ge 0/4 \\ &\tilde{P}r\left(\tilde{a}^s_{21}x_1 + \tilde{a}^s_{22}x_2 \le \tilde{b}^s_2\right) \ge 0/6 \\ &\qquad x_1 \ge 0, \qquad x_2 \ge 0. \end{aligned} \tag{11}$$

که در آن $\tilde{a}^s_{ij}$ و $\tilde{b}^s_i$ ، $j = 1, 2$ و $i = 1, 2$ متغیرهای تصادفی فازی با میانگین به ترتیب $\tilde{\mu}_{a^s_{ij}}$ و $\tilde{\mu}_{b^s_i}$ و واریانس به ترتیب $\tilde{\sigma}^2_{a^s_{ij}}$ و $\tilde{\sigma}^2_{b^s_i}$ به‌صورت اعداد مثلثی هستند که مقادیر آن در جدول ۱ داده شده است.

جدول ۱: *مقادیر مساله ۱۴*

	$\tilde{a}^s_{11}$	$\tilde{a}^s_{12}$	$\tilde{a}^s_{21}$	$\tilde{a}^s_{22}$	$\tilde{b}^s_1$	$\tilde{b}^s_2$
میانگین	$(4, 5, 6)$	$(5, 6, 7)$	$(7, 8, 9)$	$(8, 9, 10)$	$(5, 6, 7)$	$(6, 7, 8)$
واریانس	$(2, 3, 4)$	$(3, 4, 5)$	$(8, 9, 10)$	$(3, 4, 5)$	$(4, 5, 6)$	$(3, 4, 5)$

$\widetilde{0/4}$ و $\widetilde{0/6}$ نیز اعداد فازی مثلثی هستند که به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\widetilde{0/4} = (0/2, 0/4, 0/6)$$
$$\widetilde{0/6} = (0/4, 0/6, 0/8)$$

با استفاده از رویکرد α- برش و برای برش $\alpha = ۰/۱$ مساله (۱۱) به مساله زیر تبدیل می‌شود:

$$\begin{aligned} &\max z_۱ = ۳x_۱ + ۸x_۲ \\ &\max\ z_۲ = ۵x_۱ + ۴x_۲ \\ &s.t.\ \ ۵/۹x_۱ + ۶/۹x_۲\ + ۰/۲۱\sqrt{۵/۹ + ۳/۹x_۱^۲ + ۴/۹x_۲^۲} \leq ۶/۹ \\ &۸/۹x_۱ + ۹/۹x_۲\ + ۰/۷۸\ \sqrt{۴/۹ + ۹/۹x_۱^۲ + ۴/۹x_۲^۲} \leq ۷/۹ \\ &\qquad\quad x_۱ \geq ۰,\ \ x_۲ \geq ۰. \end{aligned} \tag{۱۲}$$

اکنون با اتخاذ گام‌های رویکرد برنامه‌ریزی فازی برای مساله برنامه‌ریزی تصادفی چندهدفه اخیر، دو جواب ایده‌آل $x^{(۱)} = (۰, ۰/۵۹۵۰۳۵۴)$ و $x^{(۲)} = (۰/۶۲۷۶۵۵۰, ۰)$ به ترتیب با مقادیر $z^{(۱)} = ۴/۷۶۰۲۸۳$ و $z^{(۲)} = ۳/۱۳۸۲۷۵$ با استفاده از نرم‌افزار Lingo۱۴۰۰ بدست می‌آید. با استفاده از رویکرد فازی مطرح‌شده در [۱]، جواب‌های رضایت بخش مساله چندهدفه (۱۲)، برای مقادیر مختلف α بدست می‌آید که در جدول ۲ داده شده است.

جدول ۲: *جواب‌های بهینه برای مقادیر مختلف* α

α	x_1	x_2	z_1	z_2	λ
۰٫۱	۰٫۲۹۸۵۵۳	۰٫۳۳۱۴۱۰	۳٫۵۴۷۶۵۹	۲٫۸۱۸۷۶۶	۰٫۷۱۹۶۴۲
۰٫۲	۰٫۳۰۹۴۹۷	۰٫۳۳۷۶۴۰	۳٫۶۲۹۶۰۹	۲٫۸۹۸۰۴۳	۰٫۷۰۴۸۹۰
۰٫۳	۰٫۳۱۸۳۹۵	۰٫۳۴۲۲۲۳	۳٫۶۹۲۹۶۶	۲٫۹۶۰۸۶۵	۰٫۶۹۲۲۰۳
۰٫۴	۰٫۳۲۵۹۲۷	۰٫۳۴۸۲۳۲	۳٫۷۶۳۶۳۴	۳٫۰۲۲۵۶۱	۰٫۶۷۲۱۵۰
۰٫۵	۰٫۳۳۶۲۰۵	۰٫۳۵۰۵۶۶	۳٫۸۱۳۱۴۴	۳٫۰۸۳۳۰۰	۰٫۶۶۵۳۵۸
۰٫۶	۰٫۳۴۵۹۸۵	۰٫۳۵۴۷۷۷	۳٫۸۷۶۱۷۲	۳٫۱۴۹۰۳۴	۰٫۶۴۹۹۷۷
۰٫۷	۰٫۳۵۵۱۶۰	۰٫۳۵۸۴۳۸	۳٫۹۳۲۹۸۶	۳٫۲۰۹۵۵۰	۰٫۶۳۵۰۷۷
۰٫۸	۰٫۳۶۴۶۱۰	۰٫۳۶۱۹۹۳	۳٫۹۸۹۷۷۵	۳٫۲۷۱۰۲۳	۰٫۶۱۹۴۱۰
۰٫۹	۰٫۳۷۴۳۴۴	۰٫۳۶۵۴۴۴	۴٫۰۴۶۵۸۶	۳٫۳۳۲۴۹۰	۰٫۶۰۲۹۷۹

از مقادیر جدول ۲ مشخص است که بهترین جواب در $\alpha = ۰٫۹$ حاصل می‌شود.

۴ نتیجه

در این مقاله، یک رویکرد برای حل مسایل برنامه‌ریزی خطی تصادفی فازی چندهدفه ارایه شد. متغیرهای تصادفی فازی با توزیع نرمال با میانگین و واریانس مشخص در نظرگرفته شده‌اند. در ابتدا، با استفاده از مفهوم آلفا-برش و رویکرد محدودیت شانس با احتمال فازی مساله تصادفی فازی به یک مساله قطعی معادل تبدیل شد و سپس یک رویکرد فازی برای حل مساله قطعی مورد استفاده قرار گرفت. بررسی رفتار مدل‌ها برای حالتی که تغییرات سطوح اطمینان پیوسته باشد یک مسیر تحقیق جذاب است. هرچند متغیرهای غیر قطعی ارایه‌شده در این مقاله را به طور یکنواخت از یک نوع خطی در نظر گرفته‌ایم، ولی کلیت مساله حفظ‌شده و می‌توان نتایج را برای حالتی که متغیرهای غیرقطعی ترکیبی بوده یا از نوع دیگر مانند متغیر غیرقطعی لگاریتم-نرمال هستند و یا مقدار سطوح اطمینان یا باور برای محدودیت‌ها متفاوت باشند، تعمیم داد. تعمیم این دو مدل برای مساله‌های برنامه‌ریزی خطی صحیح و ترکیبی و هم‌چنین برای مساله‌های درجه دو محدب نیز می‌تواند از مسیرهای تحقیقاتی دیگر باشد.

مراجع

[۱] س. باوندی، مطالعه یک روش برای مسایل برنامه‌ریزی خطی تصادفی فازی، پایان‌نامه کارشناسی ارشد ریاضی کاربردی، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه مازندران، (۱۳۹۶).

[۲] س.ه. ناصری، ح. عطاری، برنامه‌ریزی خطی فازی، انتشارات دانشگاه مازندران، (۱۳۹۴).

[3] S. Hulsurkar, M. P. Biswal and S. B. Shinha, Fuzzy Programming Approach to Multi-Objective Stochastic Linear Programming Problems, *Fuzzy Sets and Systems*, **88**(1997), 173-181.

[4] H. Katagiri, M. Sakawa, K. Kato and I. Nishizaki, A Fuzzy Random Multi-objective 0-1 Programming based on the Expectation Optimization Model Using Possibility and Necessity Measures, *Mathematical and Computer Modeling*, **40** (2004), 411–421.

[5] H. Katagiri, I. Nishizaki, M. Sakawa and K. Kato, Stackelberg solutions to stochastic two-level linear programming problems, Proceedings of the 2007 IEEE Symposium on Computational Intelligence in Multicriteria Decision Making (MCDM'07), Hawaii, (2007), 240–244.

[6] H. Katagiri, T. Hasuike, H. Ishii and I. Nishizaki, Interactive Multi-objective Programming under Random Fuzzy Environments, Proceedings of the 11th Czech-Japan Seminar on Data Analysis and Decision Making under Uncertainty, Sendai, (2008), 33–38.

[7] H. Katagiri, M. Sakawa, K. Kato and I. Nishizaki, Interactive Multi-objective Fuzzy Random Linear Programming: Maximization of Possibility and Probability, *European Journal of Operational Research*, **188**(2008), 530-539.

[8] Y.K. Liu and B. Liu, Fuzzy Random Variables: A Scalar Expected Value Operator, *Fuzzy Optimization and Decision Making*, **2** (2003), 143–160.

[9] M. K. Luhandjula, Fuzzy Approaches for Multiple Objective Linear Fractional Optimization, *Fuzzy Sets and Systems*, **13**(1984), 11–23.

[10] C. Mohan and H. T. Nguyen, An Interactive Satisfying Method for Solving Multi-objective Mixed Fuzzy-Stochastic Programming Problems, *Fuzzy Sets and Systems*, **117** (2001), 61–79.

[11] M. Sakawa and K. Kato, Interactive Fuzzy Multi-objective Stochastic Linear Programming, Fuzzy Multi-Criteria Decision Making-Theory and Applications with Recent Developments. Kahraman (ed.), Springer, (2008), 375–408.

[12] R. Slowinski and J. Teghem, Stochastic Versus Fuzzy Approaches to Multi-objective Mathematical Programming under Uncertainty, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, London, (1990).