

## $t$ -نرم‌های ارشمیدسی و قانون تناقض

سید علی موسوی، ماشاء... ماشین‌چی

بخش آمار، دانشکده ریاضی و کامپیوتر، دانشگاه شهید باهنر کرمان

### چکیده

در این مقاله، ابتدا مفهوم  $t$ -نرم را معرفی کرده و به بررسی خواص اولیه  $t$ -نرم‌ها می‌پردازیم. سپس  $t$ -نرم‌های ارشمیدسی را مدنظر قرار داده و به طور مفصل مورد مطالعه قرار می‌دهیم. با مدنظر قرار دادن مولدهای ضربی و جمعی برای  $t$ -نرم‌های ارشمیدسی، مثال‌های مختلفی از این رده از  $t$ -نرم‌ها را ارائه می‌کنیم. در ادامه، یکریختی  $t$ -نرم‌ها را تعریف کرده و نشان می‌دهیم تا حد یکریختی، تنها دو  $t$ -نرم ارشمیدسی داریم:  $t$ -نرم حاصلضرب و  $t$ -نرم لوکاسویچ. در انتها  $t$ -نرم‌های ارشمیدسی صادق در قانون تناقض را توصیف می‌کنیم.

### ۱ مقدمه

یکی از رابط‌های اساسی در ریاضیات و منطق ریاضی، رابط «و» با نماد  $\wedge$  می‌باشد که جدول ارزش آن به صورت زیر تعریف می‌شود. از این رابط در تعریف اشتراک دو زیرمجموعه معمولی از یک مجموعه مرجع استفاده می‌شود [۴].

هرگاه  $A$  و  $B$  زیرمجموعه‌هایی (معمولی) از یک مجموعه مرجع  $X$  باشند، مجموعه  $A \cap B$

Mathematics Subject Classification (2010): 03B52; 08A72, Email: mashinchi@uk.ac.ir.

عبارات و کلمات کلیدی: اشتراک فازی،  $t$ -نرم،  $t$ -نرم ارشمیدسی، قانون تناقض

۱۳۹۸ (انجمن سیستم‌های فازی ایران)

$\wedge$	$\circ$	$\mathbf{1}$
$\circ$	$\circ$	$\circ$
$\mathbf{1}$	$\circ$	$\mathbf{1}$

جدول ۱: جدول ارزش رابط  $\wedge$

به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$A \cap B = \{x \in X : x \in A \wedge x \in B\}. \quad (1)$$

برای این که بتوانیم تعریف اشتراک را به زیرمجموعه‌های فازی  $X$  تعمیم دهیم اشتراک  $A$  و  $B$  را با در نظر گرفتن توابع مشخصه آن‌ها تعریف می‌کنیم. در واقع هرگاه

$$\chi_A : X \longrightarrow \{\circ, \mathbf{1}\}, \quad \chi_A(x) = \begin{cases} \mathbf{1}, & x \in A, \\ \circ, & x \notin A. \end{cases}$$

و

$$\chi_B : X \longrightarrow \{\circ, \mathbf{1}\}, \quad \chi_B(x) = \begin{cases} \mathbf{1}, & x \in B, \\ \circ, & x \notin B. \end{cases}$$

توابع مشخصه  $A$  و  $B$  و  $\chi_{A \cap B}$  تابع مشخصه  $A \cap B$  باشد به سادگی می‌توان دید که برای هر  $x \in X$

$$\chi_{A \cap B}(x) = \chi_A(x) \wedge \chi_B(x). \quad (2)$$

حال فرض کنیم  $A$  و  $B$  دو زیرمجموعه فازی  $X$  باشند. یعنی

$$A, B : X \longrightarrow [\circ, \mathbf{1}].$$

برای تعریف اشتراک  $A$  و  $B$  در این حالت، با توجه به رابطه ۲ باید بتوانیم  $\wedge$  را به تابعی مانند

$$\Delta : [0, 1] \times [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$$

توسیع دهیم (بدین معنا که  $\Delta|_{\{0,1\} \times \{0,1\}} = \wedge$ ). با بررسی دقیق‌تر رابط  $\Delta$  (بخش ۳.۱ از مرجع [۲] را ببینید) ویژگی‌های چنین تابعی به صورت زیر خواهد بود.  
برای هر  $x, y, z, w \in [0, 1]$

$$x \Delta 1 = x \quad (۳)$$

$$x \Delta y = y \Delta x \quad (۴)$$

$$x \Delta (y \Delta z) = (x \Delta y) \Delta z \quad (۵)$$

$$w \leq x, \quad y \leq z \implies w \Delta y \leq x \Delta z \quad (۶)$$

تابع مینیمم که ما آن را نیز با  $\wedge$  نمایش می‌دهیم در شروط ۳ تا ۶ صدق می‌کند.

$$\Delta : [0, 1] \times [0, 1] \longrightarrow [0, 1], \quad x \wedge y = \min\{x, y\}.$$

این عملگر اولین بار توسط زاده<sup>۱</sup> در مقاله پیشگام [۹] برای تعریف اشتراک مجموعه‌های فازی به کار گرفته شد.

تابع مینیمم علاوه بر این که در روابط ۳ تا ۶ صدق می‌کند دارای خاصیت خودتوانی نیز هست. تابع  $\Delta : [0, 1] \times [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$  دارای خاصیت خودتوانی است هرگاه برای هر

---

<sup>۱</sup> لطفی عسکرزاده

$$x \in [0, 1]$$

$$x \Delta x = x. \quad (7)$$

نشان خواهیم داد که تنها یک تابع در شرط‌های ۳ تا ۷ صدق می‌کند که همان تابع مینیمم است (گزاره ۸.۲).

با این حال با حذف شرط خودتوانی (شرط ۷) و در نظر گرفتن فقط شرط‌های (۳) تا (۶) می‌توانیم مثال‌های فراوانی را داشته باشیم. چنین توابعی را نرم‌های مثلثی یا به اختصار  $t$ -نرم می‌نامیم.

البته مفهوم  $t$ -نرم ابتدا در ارتباط با فضاهاى متریک احتمالی معرفی شده است [۷، ۸]. مرجع [۳] به طور مفصل به مطالعه و بررسی  $t$ -نرم‌ها پرداخته است.

حال به کمک مفهوم  $t$ -نرم می‌توانیم اشتراک زیرمجموعه‌های فازی را تعریف کنیم. اگر  $\Delta$  یک  $t$ -نرم باشد، آنگاه  $A \cap_{\Delta} B$  یک مجموعه فازی است که به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$A \cap_{\Delta} B : X \rightarrow [0, 1], \quad (A \cap_{\Delta} B)(x) = A(x) \Delta B(x). \quad (8)$$

اهمیت این بحث از آن جاست که در موقعیت‌های مختلف و بسته به وضعیت مسئله، نیازمند ارائه تعاریف متفاوت و متناسب از اشتراک دو مجموعه فازی هستیم. مفهوم  $t$ -نرم این امکان را برای ما فراهم می‌کند.

اگر  $\Delta = \wedge$  (تابع مینیمم) انتخاب شود، آنگاه تعریف اشتراک منطبق با تعریف زاده در مقاله [۹] خواهد بود.

اهمیت دیگر  $t$ -نرم‌ها در بحث ترجمه رابط «و» در جملات شامل عبارات فازی است. در ریاضیات معمولی، رابط «و» به صورت استاندارد با جدول ارزش **؟؟** تعریف می‌شود. اما در ترجمه جملات فازی و در مدل‌سازی رابط «و» دست ما بازتر خواهد بود و می‌توانیم بسته به شرایط یک  $t$ -نرم مناسب را برای مدل‌سازی «و» در نظر بگیریم.

در این مقاله با معرفی رده‌ای از  $t$ -نرم‌ها به نام  $t$ -نرم‌های ارشمیدسی<sup>۲</sup>، مثال‌هایی از  $t$ -نرم‌ها را ارائه خواهیم کرد.

در بخش ۲، تعریف  $t$ -نرم را ارائه کرده و برخی خواص آن را بیان می‌کنیم. هم‌چنین مثال‌هایی از  $t$ -نرم‌ها خواهیم آورد.

در بخش ۳، رده خاصی از  $t$ -نرم‌ها به نام  $t$ -نرم‌های ارشمیدسی را مدنظر قرار داده و به تفصیل مورد بررسی قرار می‌دهیم.

در بخش ۴، ابتدا مفهوم نفی فازی را معرفی کرده و در ادامه قانون تناقض را در مورد یک  $t$ -نرم و یک نفی فازی تعریف می‌کنیم. سپس شرط لازم و کافی برای این که یک  $t$ -نرم ارشمیدسی و یک نفی فازی اکید در قانون تناقض صدق کنند را بیان و اثبات می‌کنیم. در سرتاسر مقاله،  $\wedge$  نمادی برای تابع  $\min$  و  $\vee$  نشان‌دهنده تابع  $\max$  است. مطالب مقاله برگرفته از مراجع [۱، ۲، ۶] می‌باشند.

## ۲ $t$ -نرم

در این بخش، مفهوم  $t$ -نرم را معرفی کرده و ویژگی‌های اولیه و مثال‌هایی از  $t$ -نرم‌ها را ارائه می‌کنیم. همان‌طور که در سرآغاز گفته شد  $t$ -نرم‌ها را می‌توان به عنوان رابطی برای تعریف اشتراک مجموعه‌های فازی در نظر گرفت.

### تعریف ۱.۰۲. تابع

$$T : [0, 1] \times [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$$

را یک نرم مثلثی (به اختصار یک  $t$ -نرم) می‌نامند هر گاه برای هر  $x, y, z, w \in [0, 1]$  داشته باشیم:

$$T(x, 1) = x \quad .1$$

$$T(x, y) = T(y, x) \quad .2$$

---

<sup>2</sup>Archimedean

$$T(x, T(y, z)) = T(T(x, y), z) \quad ۳.$$

$$۴. \text{ اگر } w \leq x \text{ و } y \leq z \text{ آن‌گاه } T(w, y) \leq T(x, z).$$

**ملاحظه ۲.۲.** از نقطه نظر جبری، می‌توان به یک  $t$ -نرم به عنوان یک عمل دوتایی روی مجموعه  $[0, 1]$  نگریست که در خواص چهارگانه تعریف فوق صدق می‌کند. از آن‌جا که به کار بردن نمادهایی چون  $(T(x, T(T(w, z), y)))$  گیج‌کننده و نامانوس است از نمادگذاری جبری برای  $t$ -نرم‌ها استفاده می‌کنیم. به این معنی که عملگر دوتایی را مابین مولفه‌ها قرار می‌دهیم. هم‌چنین به جای نماد  $T$  از نمادهایی مانند  $\Delta, \circ, \diamond$  و غیره برای نشان دادن یک  $t$ -نرم استفاده می‌کنیم. با این قرارداد (و با توجه به خاصیت (۳))، عبارت  $(T(x, T(T(w, z), y)))$  به صورت  $x \Delta w \Delta z \Delta y$  در خواهد آمد.

با توجه به ملاحظه ۲.۲، مناسب است که تعریف ۱.۲ را به صورت زیر بازنویسی کنیم:

**تعریف ۳.۲.** عملگر دوتایی

$$\Delta : [0, 1] \times [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$$

را یک  $t$ -نرم نامند هرگاه برای هر  $x, y, z, w \in [0, 1]$  داشته باشیم:

$$۱. \quad x \Delta x = x \quad (\text{عضو همانی})$$

$$۲. \quad x \Delta y = y \Delta x \quad (\text{خاصیت جابجایی})$$

$$۳. \quad x \Delta (y \Delta z) = (x \Delta y) \Delta z \quad (\text{خاصیت شرکت‌پذیری})$$

$$۴. \text{ اگر } w \leq x \text{ و } y \leq z \text{ آن‌گاه } w \Delta y \leq x \Delta z \quad (\text{صعودی بودن در هر مولفه})$$

**ملاحظه ۴.۲.** در این مقاله به تناسب بحث، از هر دو نوع بیان و نمادگذاری (تابعی یا عملگری) برای  $t$ -نرم‌ها که در تعاریف ۱.۲ و ۳.۲ آمدند استفاده خواهیم کرد.

گزاره ۵.۲. فرض کنیم  $\Delta$  یک  $t$ -نرم باشد. در این صورت  $(\Delta, [0, 1])$  یک تکواره<sup>۳</sup> جابجایی است.

اثبات. یک تکواره جابجایی یک ساختار با عمل دوتایی است که دارای خواص (۱)، (۲) و (۳) از تعریف ۳.۲ است که برای  $\Delta$  روی  $[0, 1]$  برقرار است.  $\square$

مثال ۶.۲. هر یک از موارد زیر یک  $t$ -نرم هستند:

$$x \Delta_{\circ} y = \begin{cases} y & x = 1 \\ x & y = 1 \\ \circ & \text{در غیر این صورت} \end{cases}, \quad x \Delta_{\vee} y = (x + y - 1) \vee \circ,$$

$$x \Delta_{\uplus} y = \frac{xy}{2 - (x + y - xy)}, \quad x \Delta_{\times} y = xy,$$

$$x \Delta_{\neq} y = \begin{cases} \frac{xy}{x+y-xy} & x \neq \circ \\ \circ & x = \circ \end{cases}, \quad x \Delta_{\wedge} y = x \wedge y.$$

گزاره ۷.۲. فرض کنیم  $\Delta$  یک  $t$ -نرم باشد و  $x, y \in [0, 1]$ . در این صورت:

$$\circ \Delta x = \circ \quad ۱.$$

$$x \Delta_{\circ} y \leq x \Delta y \leq x \Delta_{\circ} y \quad ۲.$$

اثبات. برای اثبات (۱)، با توجه به خواص (۱) و (۴) از تعریف ۳.۲ داریم:

$$\circ \leq \circ \Delta x \leq \circ \Delta 1 = \circ.$$

<sup>3</sup> Monoid

برای اثبات (۲) واضح است که  $x \Delta y \leq x \Delta 1 = x$ ، از طرفی،  $x \Delta y \leq x \wedge y = x \Delta y$  و  $x \Delta y \leq 1 \Delta y = y$  بنابراین  $x \Delta y \leq x \wedge y = x \Delta y$ .  
 طبق خاصیت (۱) از تعریف ۳.۲ داریم:

$$0 \Delta 1 = 1 \Delta 0 = 0, \quad 1 \Delta 1 = 1$$

و طبق قسمت (۱) از گزاره ۷.۲ داریم:  $0 \Delta 0 = 0$ . بنابراین هر  $t$ -نرم  $\Delta$  یک توسیع از رابط  $\wedge$  با جدول ؟؟ است.

قسمت (۲) نشان می‌دهد که  $t$ -نرم مینیمم ( $\Delta_5 = \wedge$ ) بزرگترین  $t$ -نرم است. البته هر دو  $t$ -نرم لزوماً قابل مقایسه نیستند. مثلاً  $t$ -نرم‌های  $\Delta_3$  و  $\Delta_5$  در مثال ۶.۲ قابل مقایسه نیستند.  
 $t$ -نرم  $\Delta$  را خودتوان نامند هر گاه  $x \Delta x = x$  برای هر  $x \in [0, 1]$ . تنها  $t$ -نرم خودتوان،  $t$ -نرم مینیمم است.

گزاره ۸.۲. فرض کنیم  $\Delta$  یک  $t$ -نرم باشد.  $\Delta$  خودتوان است اگر و تنها اگر  $\Delta = \wedge$ .

اثبات. اگر  $\Delta = \wedge$ ، آن‌گاه  $x \Delta x = x \wedge x = x$  برای هر  $x \in [0, 1]$  و لذا  $\Delta$  خودتوان است. برعکس؛ فرض کنیم  $\Delta$  خودتوان باشد. طبق گزاره ۷.۲ (۲)،  $\Delta \leq \wedge$ . نشان می‌دهیم عکس این نیز برقرار است. فرض کنیم  $x, y \in [0, 1]$ . بدون کم شدن از کلیت، فرض کنیم  $x \leq y$ . طبق خاصیت (۴)  $t$ -نرم‌ها داریم:

$$x \wedge y = x = x \Delta x \leq x \Delta y.$$

بنابراین  $\Delta \leq \wedge$  و حکم ثابت است. □



### ۳ $t$ -نرم‌های ارشمیدسی و مولدهای ضربی و جمعی آنها

در موقعیت‌های مختلف، نیازمند  $t$ -نرم‌های متفاوتی هستیم. بنابراین مهم است که بتوانیم متناسب با هر موقعیت،  $t$ -نرم خاص آن موقعیت را بسازیم. برای این منظور به رده خاصی از  $t$ -نرم‌ها می‌پردازیم که می‌توان به کمک مفهوم تابع مولد آنها را تولید کرد.

**تعریف ۱.۳.۱.**  $t$ -نرم  $\Delta$  را ارشمیدسی نامند اگر پیوسته بوده و  $x \Delta x < x$  برای هر  $x \in (0, 1)$ .

**ملاحظه ۲.۳.** تعاریف معادل دیگری نیز برای  $t$ -نرم‌های ارشمیدسی وجود دارد. به عنوان نمونه، تعریف ۶.۱.۵ از مرجع [۶] را ببینید.

**مثال ۳.۳.**  $t$ -نرم‌های  $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$  و  $\Delta_4$  در مثال ۶.۲، همگی ارشمیدسی هستند. اما  $t$ -نرم  $\Delta_5$  (یا همان مینیم) ارشمیدسی نیست. همچنین  $\Delta_0$  ارشمیدسی نمی‌باشد زیرا پیوسته نیست. (در برخی کتب شرط پیوستگی جزء تعریف  $t$ -نرم‌های ارشمیدسی نیست. مثلاً تعریف ۵.۱ از مرجع [۲] را ببینید.)

$t$ -نرم‌های ارشمیدسی دارای مولدهای جمعی و ضربی هستند. در ادامه این مولدها را تعریف می‌کنیم.

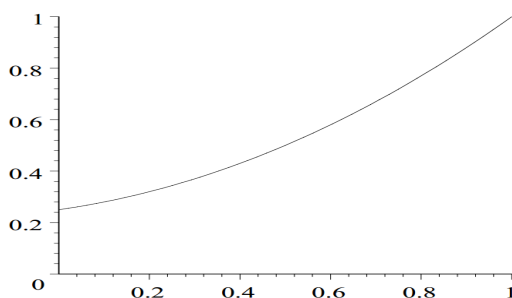
### ۱.۳ مولدهای ضربی

یک راه ساختن  $t$ -نرم‌های ارشمیدسی، استفاده از مفهوم مولد ضربی است.

**تعریف ۴.۳.** فرض کنید  $0 \leq a < 1$ . تابع  $f : [0, 1] \rightarrow [a, 1]$  را یک یکرخیختی ترتیبی نامند هرگاه یک به یک و پوشا بوده و حافظ ترتیب باشد؛ یعنی هرگاه  $x \leq y$  آن‌گاه  $f(x) \leq f(y)$ .

به بیان دیگر، یک یکرخیختی ترتیبی، تابعی دوسویی و اکیداً صعودی است. همچنین واضح است که  $f(0) = a$  و  $f(1) = 1$ . شکل **؟؟** شمای کلی یک یکرخیختی ترتیبی را نشان می‌دهد.

**گزاره ۵.۳.** فرض کنیم  $f : [0, 1] \rightarrow [a, 1]$  یک یکرخیختی ترتیبی باشد. در این صورت  $f$  تابعی پیوسته است.



شکل ۱: نمودار یک یکرختی ترتیبی (=مولد ضربی)

اثبات. [۵، قضیه ۱]. □

**تعریف ۶.۳.** فرض کنیم  $f : [0, 1] \rightarrow [a, 1]$  یک یکرختی ترتیبی و  $\Delta$  یک  $t$ -نرم ارشمیدسی باشد.  $\Delta_f$  را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \Delta_f : [0, 1] \times [0, 1] &\rightarrow [0, 1] \\ \Delta_f(x, y) = x \Delta_f y &= f^{-1}((f(x) \Delta f(y)) \vee a). \end{aligned} \quad (9)$$

نشان می‌دهیم  $\Delta_f$  یک  $t$ -نرم ارشمیدسی است. برای این منظور به لم زیر نیاز داریم.

**لم ۷.۳.** فرض کنیم  $\Delta$  یک  $t$ -نرم بوده و  $x, y, z, a \in [0, 1]$ . در این صورت

$$(x \Delta ((y \Delta z) \vee a)) \vee a = (x \Delta y \Delta z) \vee a. \quad (10)$$

**اثبات.** اگر  $a \leq y \Delta z$  آن‌گاه تساوی با توجه به شرکت‌پذیری  $\Delta$  برقرار خواهد بود. اگر  $y \Delta z \leq a$  آن‌گاه با توجه به این‌که  $x \Delta a \leq 1 \Delta a = a$  داریم:

$$(x \Delta ((y \Delta z) \vee a)) \vee a = (x \Delta a) \vee a = a.$$

از سوی دیگر،  $x \Delta y \Delta z \leq y \Delta z \leq a$  پس  $(x \Delta y \Delta z) \vee a = a$  و تساوی برقرار است.  $\square$

قضیه ۸.۳.  $\Delta_f$  در تعریف ۶.۳ یک  $t$ -نرم ارشمیدسی است.

اثبات. با توجه به جابجایی بودن  $\Delta$ ،  $\Delta_f$  نیز جابجایی است. هم چنین داریم:

$$\begin{aligned} 1 \Delta_f x &= f^{-1}((f(1) \Delta f(x)) \vee a) & (f(1) = 1) \\ &= f^{-1}(f(x) \vee a) & (a \leq f(x)) \\ &= f^{-1}(f(x)) \\ &= x. \end{aligned}$$

برای شرکت پذیری، باید نشان دهیم

$$x \Delta_f (y \Delta_f z) = (x \Delta_f y) \Delta_f z.$$

با توجه به لم ۷.۳ داریم:

$$\begin{aligned} x \Delta_f (y \Delta_f z) &= x \Delta_f (f^{-1}((f(y) \Delta f(z)) \vee a)) \\ &= f^{-1}((f(x) \Delta f(f^{-1}((f(y) \Delta f(z)) \vee a))) \vee a) \\ &= f^{-1}(((f(x) \Delta (f(y) \Delta f(z)) \vee a) \vee a) \\ &= f^{-1}((f(x) \Delta f(y) \Delta f(z)) \vee a). \end{aligned}$$

از سوی دیگر،

$$\begin{aligned} (x \Delta_f y) \Delta_f z &= (f^{-1}((f(x) \Delta f(y)) \vee a)) \Delta_f z \\ &= f^{-1}((f(f^{-1}((f(x) \Delta f(y)) \vee a)) \Delta f(z)) \vee a) \\ &= f^{-1}(((f(x) \Delta (f(y) \Delta f(z))) \vee a) \vee a) \\ &= f^{-1}((f(x) \Delta f(y) \Delta f(z)) \vee a). \end{aligned}$$

صعودی بودن  $\Delta_f$  نسبت به هر مولفه: فرض کنیم  $w \leq x$  و  $y \leq z$ . از آن‌جا که  $f$  صعودی است،  $f(w) \leq f(x)$  و  $f(y) \leq f(z)$ . چون  $\Delta$  یک  $t$ -نرم است پس  $f(w) \Delta f(y) \leq f(x) \Delta f(z)$ . در نتیجه،  $(f(w) \Delta f(y)) \vee a \leq (f(x) \Delta f(z)) \vee a$ . حال از آن‌جا که  $f^{-1}$  نیز صعودی است داریم:

$$w \Delta_f y = f^{-1}((f(w) \Delta f(y)) \vee a) \leq f^{-1}((f(x) \Delta f(z)) \vee a) = x \Delta_f z.$$

بنابراین  $\Delta_f$  یک  $t$ -نرم است.

حال نشان می‌دهیم  $x \Delta_f x < x$  برای هر  $x \in (0, 1)$ . با برهان خلف، فرض کنیم  $x \in (0, 1)$  موجود باشد به طوری که  $x \Delta_f x = x$ . در نتیجه،  $f^{-1}((f(x) \Delta f(x)) \vee a) = x$ . لذا  $(f(x) \Delta f(x)) \vee a = f(x)$ . در صورتی که  $f(x) \Delta f(x) \leq a$  در صورتی که  $f(x) \Delta f(x) = f(x)$  و در نتیجه،  $f(x) = a = f(0)$ . پس  $x = 0$  که تناقض است. بنابراین  $a < f(x) \Delta f(x)$  و از این‌جا،  $f(x) \Delta f(x) = f(x)$  که در تناقض با ارشمیدسی بودن  $\Delta$  است و حکم ثابت می‌شود.  $\square$

قضیه فوق به ما این امکان را می‌دهد که با در نظر گرفتن یک  $t$ -نرم ارشمیدسی  $\Delta$  و یک یکریختی ترتیبی  $f$ ،  $t$ -نرم‌های ارشمیدسی زیادی را بسازیم.

یکی از مهم‌ترین  $t$ -نرم‌های ارشمیدسی،  $t$ -نرم حاصلضرب معمولی است که آن را با

نمایش می‌دهیم. بنابراین

$$x \bullet y := xy, \quad x, y \in [0, 1]. \quad (11)$$

حال  $t$ -نرم‌های متفاوتی را با در نظر گرفتن  $\bullet = \Delta$ ، تعریف ۶.۳، و قضیه ۸.۳ معرفی می‌کنیم. برای این منظور به لم زیر نیاز داریم.

لم ۹.۳. فرض کنیم  $f : [0, 1] \rightarrow [a, 1]$  یک یکرخیختی ترتیبی باشد. در این صورت  $f^{-1} : [a, 1] \rightarrow [0, 1]$  حافظ ترتیب بوده و برای هر  $x, y \in [a, 1]$  داریم:

$$f^{-1}(x \vee y) = f^{-1}(x) \vee f^{-1}(y), \quad f^{-1}(x \wedge y) = f^{-1}(x) \wedge f^{-1}(y).$$

اثبات. به سادگی از تعاریف حاصل می‌شود.  $\square$

مثال ۱۰.۳ ( $t$ -نرم لوکاسویچ<sup>۴</sup>). فرض کنیم  $\bullet = \Delta$  و  $f(x) = e^{x-1}$ . تابع

$$f : [0, 1] \rightarrow [e^{-1}, 1]$$

یک یکرخیختی ترتیبی است و  $f^{-1}(x) = 1 + \ln x$ . بنابراین طبق لم ۹.۳ داریم:

$$\begin{aligned} f^{-1}(f(x)f(y) \vee f(0)) &= f^{-1}(e^{x-1}e^{y-1} \vee e^{-1}) \\ &= f^{-1}(e^{x-1}e^{y-1}) \vee f^{-1}(e^{-1}) \\ &= 1 + ((x + y - 2) \vee (-1)) \\ &= (x + y - 1) \vee 0. \end{aligned}$$

---

<sup>4</sup>J. Lukasiewicz

لذا طبق قضیه ۸.۳، تابع

$$x \blacktriangle y = (x + y - 1) \vee 0, \quad x, y \in [0, 1] \quad (12)$$

یک  $t$ -نرم ارشمیدسی است که آن را  $t$ -نرم لوکاسویچ می‌نامند.

مثال ۱۱.۳. فرض کنیم  $\bullet$  و  $\Delta = e^{-\frac{1-x}{x}}$  و  $f(x) = e^{-\frac{1-x}{x}}$  به سادگی دیده می‌شود که

$$f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$$

یک یکرختی ترتیبی است و  $f^{-1}(x) = \frac{1}{1 - \ln x}$  (توجه داریم که  $f(0) = e^{-\infty} = 0$ ). بنابراین طبق تعریف ۶.۳ داریم:

$$\begin{aligned} x \Delta_f y &= x \bullet_f y = f^{-1}(f(x)f(y) \vee 0) \\ &= f^{-1}\left(e^{-\frac{1-x}{x}} e^{-\frac{1-y}{y}}\right) \\ &= \frac{1}{1 - \ln\left(e^{-\frac{1-x}{x}} e^{-\frac{1-y}{y}}\right)} \\ &= \left(1 + \frac{1-x}{x} + \frac{1-y}{y}\right)^{-1} \\ &= \frac{xy}{x + y - xy}. \end{aligned}$$

در ادامه نشان می‌دهیم که تمام  $t$ -نرم‌های ارشمیدسی از روی  $t$ -نرم حاصلضرب و یک یکرختی ترتیبی ساخته می‌شوند.

تعریف ۱۲.۳. فرض کنیم  $\Delta$  یک  $t$ -نرم ارشمیدسی باشد. یکرختی ترتیبی

$f : [0, 1] \rightarrow [a, 1]$  را یک تابع مولد ضربی برای  $\Delta$  نامند هرگاه  $\bullet_f = \Delta$ . به عبارت

دیگر،  $f$  یک تابع مولد ضربی  $\Delta$  است هرگاه

$$x \Delta y = f^{-1}(f(x)f(y) \vee a). \quad (13)$$

قضیه زیر نشان می‌دهد که هر  $t$ -نرم ارشمیدسی، تابع مولد ضربی دارد.

قضیه ۱۳.۳. فرض کنیم  $\Delta$  یک  $t$ -نرم ارشمیدسی باشد. در این صورت عنصر  $a \in [0, 1)$  و یکرخیختی ترتیبی  $[a, 1] \rightarrow [0, 1] : f$  وجود دارند به طوری که

$$x \Delta y = f^{-1}(f(x)f(y) \vee a),$$

برای هر  $x, y \in [0, 1]$ ؛ هم‌چنین اگر  $k : [0, 1] \rightarrow [b, 1]$  یک یکرخیختی ترتیبی باشد آن‌گاه  
 $x \Delta y = k^{-1}(k(x)k(y) \vee b)$  اگر و تنها اگر  $f(x) = k(x)^r$  برای بعضی  $r > 0$ .

□

اثبات. [۶، قضیه ۳.۲.۵]

می‌توان قضایای ۸.۳ و ۱۳.۳ را به شکل زیر و در یک قضیه ادغام کرد.  
 فرض کنیم

$$\mathcal{F} = \{f | f : [0, 1] \rightarrow [a, 1], \text{ } f \text{ یکرخیختی ترتیبی (مولد ضربی) است}\}. \quad (14)$$

رابطه  $\approx$  را روی  $\mathcal{F}$  به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

برای هر  $f, k \in \mathcal{F}$ ،

$$f \approx k \text{ اگر و تنها اگر } f(x) = k(x)^r \text{ برای بعضی } r > 0. \quad (15)$$

به سادگی دیده می‌شود که  $\approx$  یک رابطه هم‌ارزی روی مجموعه  $\mathcal{F}$  است.

قرار می‌دهیم:

$$\mathcal{A} = \{\Delta | \Delta \text{ یک } t\text{-نرم ارشمیدسی است}\} \quad (16)$$

قضیه ۱۴.۳. فرض کنیم  $\mathcal{F}$  و  $A$  مجموعه‌های معرفی شده در (۱۴) و (۱۶) باشند. در این صورت تابع

$$\begin{aligned} \varphi: \frac{\mathcal{F}}{\approx} &\longrightarrow A \\ [f] &\longmapsto \Delta_f \end{aligned}$$

یک تناظر یک به یک است. که در آن  $\frac{\mathcal{F}}{\approx}$  مجموعه کلاس‌های هم‌ارزی  $\mathcal{F}$  تحت رابطه هم‌ارزی  $\approx$  و  $\Delta_f$  همان  $t$ -نرم در تعریف ۶.۳ است.

اثبات. این مطلب در واقع ترکیب دو قضیه ۸.۳ و ۱۳.۳ می‌باشد.  $\square$   
در ادامه نشان می‌دهیم  $t$ -نرم‌های ارشمیدسی به دو دسته مجزا تقسیم می‌شوند.

تعریف ۱۵.۳. فرض کنیم  $\Delta$  یک  $t$ -نرم باشد.  $\Delta$  را

۱. پوچ‌توان نامند اگر برای هر  $x \in [0, 1)$ ، عدد صحیح مثبت  $n$  موجود باشد به طوری که  $x^{[n]} = 0$ ؛ جایی که

$$x^{[n]} = \underbrace{x \Delta x \Delta \dots \Delta x}_n.$$

۲. اکید نامند هرگاه برای هر  $x \in (0, 1)$ ،  $x^{[n]} > 0$  برای هر عدد صحیح مثبت  $n$ .

مثال ۱۶.۳. فرض کنیم  $\blacktriangle$  همان  $t$ -نرم لوکاسویچ تعریف شده در (۱۲) باشد. در این صورت  $\blacktriangle$  پوچ‌توان است. برای اثبات این مطلب توجه می‌کنیم که برای هر  $x \in [0, 1)$  عدد طبیعی  $n$  وجود دارد به طوری که  $x \leq \frac{n}{n+1}$  زیرا در غیر این صورت،

$$x \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1.$$

که تناقض است. در نتیجه،  $(n+1)x - n \leq 0$ . بنابراین  $x^{[n+1]} = ((n+1)x - n) \vee 0 = 0$ .



مثال ۱۷.۳. فرض کنیم • همان  $t$ -نرم حاصلضرب تعریف شده در (۱۱) و  $\Delta_5 (= \min)$  همان  $t$ -نرم تعریف شده در مثال ۶.۲ باشد. به سادگی دیده می‌شود که • و  $\Delta_5$  اکید هستند.

می‌توان  $t$ -نرم‌هایی را ساخت که نه پوچ‌توان هستند و نه اکید.

مثال ۱۸.۳. تابع

$$x \Delta y = \begin{cases} \circ & (x, y) \in [\circ, \frac{1}{2}] \times [\circ, \frac{1}{2}], \\ x \wedge y & \text{در غیر این صورت.} \end{cases}$$

یک  $t$ -نرم بوده که نه پوچ‌توان است و نه اکید.

در مورد  $t$ -نرم‌های ارشمیدسی وضعیت به گونه دیگری است. در ادامه نشان می‌دهیم یک  $t$ -نرم ارشمیدسی، اکید است اگر و تنها اگر پوچ‌توان نباشد.

لم ۱۹.۳. فرض کنید  $f : [0, 1] \rightarrow [a, 1]$  یک مولد ضربی از  $t$ -نرم ارشمیدسی  $\Delta$  باشد. در این صورت

$$x^{[n]} = f^{-1}(f(x)^n \vee f(\circ)), \quad x \in [0, 1].$$

اثبات. اثبات را با استقراء روی  $n$  انجام می‌دهیم. از آن جا که  $f(\circ) \leq f(x)$  بنابراین داریم:

$$f^{-1}(f(x) \vee f(\circ)) = f^{-1}(f(x)) = x = x^{[1]}.$$

لذا حکم به ازای  $n = 1$  برقرار است. حال فرض کنیم حکم برای  $n = k$  برقرار باشد. نشان می‌دهیم برای  $n = k + 1$  نیز برقرار خواهد بود. با توجه به تساوی (۱۳)، فرض استقراء و لم

۷.۳ داریم:

$$\begin{aligned} x^{[k+1]} &= x^{[k]} \Delta x = f^{-1}(f(x)^k \vee f(\circ)) \Delta x \\ &= f^{-1}(f(f^{-1}(f(x)^k \vee f(\circ)))f(x) \vee f(\circ)) \\ &= f^{-1}((f(x)^k \vee f(\circ))f(x) \vee f(\circ)) \\ &= f^{-1}(f(x)(f(x)^{k-1}f(x) \vee f(\circ)) \vee f(\circ)) \\ &= f^{-1}(f(x)^{k+1} \vee f(\circ)). \end{aligned}$$

□ و حکم ثابت می‌شود.

نتیجه ۲.۰.۳. فرض کنیم  $\Delta$  یک  $t$ -نرم ارشمیدسی بوده و  $[a, 1] \rightarrow [0, 1] : f$  مولدی ضربی برای آن باشد. در این صورت،

۱.  $\Delta$  پوچ‌توان است اگر و تنها اگر  $f(\circ) > \circ$ ؛

۲.  $\Delta$  اکید است اگر و تنها اگر  $f(\circ) = \circ$ .

اثبات. (۱) فرض کنیم  $x \in (\circ, 1)$ . بنابراین  $1 > f(x) > \circ$ . اگر  $f(\circ) > \circ$  آن‌گاه عدد طبیعی  $n$  وجود دارد به طوری که  $f(x)^n < f(\circ)$ . در نتیجه داریم:

$$x^{[n]} = f^{-1}(f(x)^n \vee f(\circ)) = f^{-1}(f(\circ)) = \circ$$

و لذا  $\Delta$  پوچ‌توان است.

حال فرض کنیم  $\Delta$  پوچ‌توان باشد و با برهان خلف بگیریم  $f(\circ) = \circ$ . بنابراین برای هر عدد طبیعی  $n$ ،

$$x^{[n]} = f^{-1}(f(x)^n \vee f(\circ)) = f^{-1}(f(x)^n).$$

اما  $f(x)^n \neq 0$  و در نتیجه،  $x^{[n]} \neq 0$  که در تناقض با پوچ توانی  $\Delta$  است.

(۲) با استدلالی مشابه (۱) به دست می‌آید. □

**نتیجه ۲۱.۳.** فرض کنیم  $\Delta$  یک  $t$ -نرم ارشمیدسی باشد. در این صورت  $\Delta$  اکید است اگر و تنها اگر پوچ توان نباشد.

**اثبات.** فرض کنیم  $f$  مولدی ضربی برای  $\Delta$  باشد. در این صورت  $f(0) = 0$  یا  $f(0) > 0$  و هر دوی این‌ها نمی‌تواند با هم اتفاق بیفتد. حال حکم از نتیجه ۲۰.۳ به دست می‌آید. □

**نتیجه ۲۲.۳.** فرض کنیم  $\Delta$  یک  $t$ -نرم ارشمیدسی باشد. در این صورت  $\Delta$  اکید است اگر و تنها اگر یکریختی ترتیبی  $[0, 1] \rightarrow [0, 1]$ :  $f$  موجود باشد به طوری که

$$x \Delta y = f^{-1}(f(x)f(y)).$$

هم چنین یکریختی ترتیبی  $[0, 1] \rightarrow [0, 1]$ :  $k$  در این شرط صدق می‌کند اگر و تنها اگر  $f(x) = k(x)^r$  برای بعضی  $r > 0$ .

**اثبات.** از قضیه ۱۳.۳ و نتیجه ۲۰.۳ ثابت می‌شود. □

گزاره زیر در مورد  $t$ -نرم‌های ارشمیدسی پوچ توان، در بخش بعد مورد استفاده ما خواهد بود.

**گزاره ۲۳.۳.** فرض کنیم  $\Delta$  یک  $t$ -نرم ارشمیدسی باشد. در این صورت  $\Delta$  پوچ توان است اگر و تنها اگر عناصر  $(0, 1)$ :  $x, y$  موجود باشند به طوری که  $x \Delta y = 0$ .

**اثبات.** فرض کنیم  $\Delta$  پوچ توان بوده و  $x \in (0, 1)$  عنصر دلخواهی باشد. بنابراین عدد طبیعی  $n > 1$  وجود دارد به طوری که  $x^{[n]} = 0$  و  $x^{[n-1]} \neq 0$ . بنابراین با در نظر گرفتن  $y = x^{[n-1]}$  داریم  $x \Delta y = 0$ .

برعکس، فرض کنیم عناصر  $(0, 1)$ :  $x, y$  موجود باشند به طوری که

$x \Delta y = \circ$  و فرض کنیم  $\Delta$  پوچ‌توان نباشد. بنابراین تابع مولدی مانند  $f$  وجود دارد به طوری که  $f(\circ) = \circ$  و  $f(\circ) = \circ$  و  $x \Delta y = f^{-1}(f(x)f(y))$  پس  $f(x)f(y) = \circ$  و از اینجا،  $f(x) = \circ$  یا  $f(y) = \circ$  و در نتیجه،  $x = \circ$  یا  $y = \circ$  که تناقض است زیرا  $x, y \in (\circ, 1)$ .  $\square$

### ۲.۳ مولدهای جمعی

از نقطه نظر تاریخی، نمایش  $t$ -نرم‌های ارشمیدسی ابتدا به وسیله مولدهای جمعی صورت گرفت.

**تعریف ۲۴.۳.** فرض کنیم  $\Delta$  یک  $t$ -نرم ارشمیدسی باشد. تابع پیوسته و اکیداً نزولی  $g : [0, 1] \rightarrow [0, \infty]$  که  $g(0) < \infty$  و  $g(1) = 0$  را یک مولد جمعی برای  $\Delta$  می‌نامند هرگاه

$$x \Delta y = g^{-1}((g(x) + g(y)) \wedge g(0)).$$

قضیه زیر ارتباط بین مولدهای ضربی و جمعی یک  $t$ -نرم ارشمیدسی را مشخص می‌کند.

**قضیه ۲۵.۳.** فرض کنیم  $g : [0, 1] \rightarrow [0, \infty]$  یک تابع پیوسته، اکیداً نزولی با  $g(1) = 0$  و  $g(0) < \infty$  قرار می‌دهیم

$$f(x) = e^{-g(x)}$$

$$x \bullet_f y = f^{-1}(f(x)f(y) \vee f(0))$$

$$x \Delta_{g+y} = g^{-1}((g(x) + g(y)) \wedge g(0)).$$

در این صورت،  $f : [0, 1] \rightarrow [0, \infty]$  یک یکرختی ترتیبی بوده  $\bullet_f = \Delta_{g+y}$ .

**اثبات.** به سادگی دیده می‌شود که  $f$  یک یکرختی ترتیبی بوده و  $f^{-1}(x) = g^{-1}(-\ln(x))$ . حال فرض کنیم  $x, y \in [0, 1]$ . اگر  $f(x)f(y) \geq f(0)$  آنگاه با لگاریتم‌گیری از طرفین

می‌توان نشاد داد که  $g(x) + g(y) \leq g(\circ)$  لذا داریم:

$$\begin{aligned} x \bullet_f y &= f^{-1}(f(x)f(y)) \\ &= f^{-1}(e^{-g(x)}e^{-g(y)}) \\ &= f^{-1}(e^{-(g(x)+g(y))}) \\ &= g^{-1}(-\ln(e^{-(g(x)+g(y))})) \\ &= g^{-1}(g(x) + g(y)) \\ &= x \Delta_{g^+} y. \end{aligned}$$

اما اگر  $f(x)f(y) < f(\circ)$  آن‌گاه  $g(x) + g(y) > g(\circ)$  و داریم:

$$\begin{aligned} x \bullet_f y &= f^{-1}(f(\circ)) = \circ \\ x \Delta_{g^+} y &= g^{-1}(g(\circ)) = \circ. \end{aligned}$$

□ و حکم ثابت است.

نتیجه ۲۶.۳. فرض کنیم  $\Delta$  یک  $t$ -نرم ارشمیدسی با مولد جمعی  $g$  باشد. در این صورت:

$$۱. \Delta \text{ پوچ توان است اگر و تنها اگر } g(\circ) < \infty;$$

$$۲. \Delta \text{ اکید است اگر و تنها اگر } g(\circ) = \infty.$$

اثبات. در قضیه ۲۵.۳،  $f$  تابع مولد ضربی و  $g$  تابع مولد جمعی برای  $t$ -نرم  $\bullet_f (= \Delta_{g^+})$

□ است و  $g(x) = -\ln f(x)$ . بنابراین نتیجه از ۲۰.۳ حاصل می‌شود.

می‌توان مشابه قضایای ۸.۳ و ۱۳.۳ را برای حالت مولد جمعی به صورت زیر بیان کرد:

قضیه ۲۷.۳. فرض می‌کنیم  $\Delta$  یک  $t$ -نرم باشد. در این صورت  $\Delta$  ارشمیدسی است اگر و

تنها اگر یک تابع پیوسته و اکیداً نزولی  $[0, \infty] \rightarrow [0, 1] : g$  با  $g(1) = \circ$  موجود باشد به

طوری که

$$x \Delta y = g^{-1}((g(x) + g(y)) \wedge g(\circ)).$$

هم‌چنین هرگاه  $s : [0, 1] \rightarrow [0, \infty]$  خواص  $g$  را داشته باشد آن‌گاه

$$x \Delta y = s^{-1}((s(x) + s(y)) \wedge s(\circ))$$

اگر و تنها اگر  $g(x) = rs(x)$  برای بعضی  $r > 0$ .

اثبات. به کمک قضایای ۱۳.۳ و ۲۵.۳ به سادگی اثبات می‌شود.  $\square$

ملاحظه ۲۸.۳. دقت کنید که با توجه به قسمت دوم قضیه ۲۷.۳، مولدهای جمعی یک  $t$ -نرم ارشمیدسی تا حد یک ثابت ضربی مثبت، یکتا هستند. هم‌چنین می‌توان مشابه قضیه ۱۴.۳ را در مورد مولدهای جمعی، بیان و اثبات کرد.

به کمک قضیه ۲۵.۳ می‌توانیم توصیف دیگری از  $t$ -نرم‌های ارشمیدسی پوچ‌توان ارائه کنیم. گزاره ۲۹.۳. فرض کنیم  $\Delta$  یک  $t$ -نرم ارشمیدسی باشد. در این صورت  $\Delta$  پوچ‌توان است اگر و تنها اگر یکریختی ترتیبی  $\varphi : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  موجود باشد به طوری که

$$x \Delta y = \varphi^{-1}(\varphi(x) \blacktriangle \varphi(y))$$

که در آن  $\blacktriangle$  همان  $t$ -نرم لوکاسویچ در ۱۲ است.

اثبات. فرض کنیم  $\Delta$  پوچ‌توان بوده و  $g : [0, 1] \rightarrow [0, \infty)$  مولد جمعی آن باشد. بنابراین

$$x \Delta y = g^{-1}((g(x) + g(y)) \wedge g(\circ)).$$

قرار می‌دهیم

$$\varphi(x) = 1 - \frac{g(x)}{g(\circ)}, \quad x \in [0, 1].$$

به سادگی دیده می‌شود که  $\varphi$  یک یکرختی ترتیبی است و

$$g(x) = g(\circ) - g(\circ)\varphi(x),$$

$$g^{-1}(x) = \varphi^{-1}\left(1 - \frac{x}{g(\circ)}\right).$$

بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} x \Delta y &= g^{-1}((g(x) + g(y)) \wedge g(\circ)) \\ &= \varphi^{-1}\left(1 - \frac{(g(\circ) - g(\circ)\varphi(x) + g(\circ) - g(\circ)\varphi(y)) \wedge g(\circ)}{g(\circ)}\right) \\ &= \varphi^{-1}((\varphi(x) + \varphi(y)) \vee \circ) \\ &= \varphi^{-1}(\varphi(x) \blacktriangle \varphi(y)). \end{aligned}$$

برای اثبات عکس گزاره، فرض کنیم  $x \in [0, 1)$ . بنابراین  $\varphi(x) \in [0, 1)$ . اما در مثال ۱۶.۳ نشان دادیم که  $\blacktriangle$  یک  $t$ -نرم پوچ توان است. بنابراین عدد طبیعی  $n$  وجود دارد به طوری که

$$\varphi(x)^{[n]} = \underbrace{\varphi(x) \blacktriangle \varphi(x) \blacktriangle \dots \blacktriangle \varphi(x)}_{n \text{ بار}} = \circ.$$

از سوی دیگر به سادگی (و به کمک استقراء) دیده می‌شود که  $\varphi(x)^{[n]} = \varphi(x)^{[n]}$ . در نتیجه،  $\varphi(x)^{[n]} = \circ$ . لذا  $x^{[n]} = \circ$ . بنابراین  $\Delta$  پوچ توان است.  $\square$

ملاحظه ۳۰.۳. با استفاده از قضایای ۸.۳، ۱۳.۳ و ۲۵.۳ برخی از مثال‌های مهم از  $t$ -نرم‌های ارشمیدسی را به همراه توابع مولد ضربی و جمعی آن‌ها را در جدول ۲ آورده‌ایم. طبق نتیجه ۲۰.۳،  $t$ -نرم‌هایی که برای مولد ضربی  $f$  آن‌ها داشته باشیم  $f(\circ) = \circ$  اکید بوده و بقیه  $t$ -نرم‌ها

پوچ‌توان هستند. بنابراین در جدول ۲ ملاحظه می‌کنیم که  $t$ -نرم‌های حاصلضرب، شوایزر<sup>۵</sup> (۱) و هاماشه<sup>۶</sup> اکید بوده و لوکاسویچ، یاگر<sup>۷</sup> و شوایزر (۲)، پوچ‌توان هستند.

جدول ۲: برخی از  $t$ -نرم‌های ارشمیدسی به همراه توابع مولد [۶، فصل ۵]

نام $t$ -نرم	ضابطه $t$ -نرم، ( $p > 0$ )	مولد ضربی $f$	مولد جمعی $g$
حاصلضرب	$xy$	$x$	$-\ln x$
لوکاسویچ	$(x + y - 1) \vee 0$	$e^{x-1}$	$1 - x$
یاگر	$\left(1 - \sqrt[p]{(1-x)^p + (1-y)^p}\right) \vee 0$	$e^{-(1-x)^p}$	$(1-x)^p$
شوایزر (۱)	$(x^{-p} + y^{-p} - 1)^{-\frac{1}{p}}$	$e^{-x^{-p}}$	$x^{-p}$
شوایزر (۲)	$(x^p + y^p - 1) \vee 0$	$e^{x^p-1}$	$1 - x^p$
هاماشه	$\frac{xy}{p+(1-p)(x+y-xy)}$	$\frac{x}{p+(1-p)x}$	$\ln \frac{p+(1-p)x}{x}$

### ۳.۳ یکرختی $t$ -نرم‌ها

همان‌طور که در قضیه ۸.۳ دیدیم یک راه برای ساختن  $t$ -نرم‌های ارشمیدسی به صورت زیر است: برای هر  $a \in [0, 1]$  و هر یکرختی ترتیبی  $[a, 1] \rightarrow [0, 1]$ :  $f$  (تعریف ۴.۳) تعریف

$$x \bullet_f y = f^{-1}(f(x)f(y) \vee a) \quad (17)$$

یک  $t$ -نرم ارشمیدسی به ما می‌دهد. هم‌چنین طبق قضیه ۱۳.۳ تمام  $t$ -نرم‌های ارشمیدسی به صورت (۱۷) هستند.

حال این سوال مطرح است که چه موقع دو  $t$ -نرم اساساً یکی هستند؟

برای پاسخ، مفهوم یکرختی  $t$ -نرم‌ها را تعریف کرده و نشان می‌دهیم تا حد یکرختی، تنها یک  $t$ -نرم ارشمیدسی اکید داریم که همان  $t$ -نرم حاصلضرب است. و تا حد یکرختی، تنها یک

<sup>5</sup>B. Schweizer

<sup>6</sup>H. Hamacher

<sup>7</sup>R. R. Yager



$t$ -نرم ارشمیدسی پوچ توان داریم که همان  $t$ -نرم لوکاسویچ است.

نمادگذاری. ساختار  $(\leq, [0, 1])$  را با نماد  $\mathbb{I}$  نمایش می‌دهیم. هم‌چنین مجموعه تمام یکرختی‌های ترتیبی روی  $\mathbb{I}$  (تعریف ۴.۳ به ازای  $a = 0$ ) را با  $Aut(\mathbb{I})$  نمایش می‌دهیم.

تعریف ۳.۱.۳. فرض کنیم  $\diamond$  و  $\circ$  دو  $t$ -نرم باشند. سیستم‌های  $(\mathbb{I}, \diamond)$  و  $(\mathbb{I}, \circ)$  را یکرخت نامند هر گاه عضو  $h \in Aut(\mathbb{I})$  موجود باشد به طوری که برای هر  $x, y \in [0, 1]$  داشته باشیم

$$h(x \circ y) = h(x) \diamond h(y)$$

قضیه ۳.۲.۳. فرض کنیم  $\circ$  یک  $t$ -نرم ارشمیدسی باشد. در این صورت  $\circ$  اکید است اگر و تنها اگر با  $t$ -نرم حاصلضرب یکرخت باشد؛ یعنی  $f \in Aut(\mathbb{I})$  موجود باشد به طوری که برای هر  $x, y \in [0, 1]$  داشته باشیم  $f(x \circ y) = f(x)f(y)$ . هم‌چنین عضو  $k \in Aut(\mathbb{I})$  در این شرط صدق می‌کند اگر و تنها اگر  $f(x) = k(x)^r$  برای بعضی  $r > 0$ .

اثبات. به سادگی از نتیجه ۲۰.۳ حاصل می‌شود.  $\square$

قضیه ۳.۳.۳. فرض کنیم  $\Delta$  یک  $t$ -نرم ارشمیدسی باشد. در این صورت  $\Delta$  پوچ توان است اگر و تنها اگر با  $t$ -نرم لوکاسویچ یکرخت باشد؛ یعنی  $\varphi \in Aut(\mathbb{I})$  موجود باشد به طوری که  $\varphi(x \Delta y) = \varphi(x) \blacktriangle \varphi(y)$  جایی که  $\blacktriangle$  همان  $t$ -نرم لوکاسویچ است که در ۱۲ تعریف شده است.

اثبات. به سادگی از گزاره ۲۹.۳ به دست می‌آید.  $\square$

## ۴ $t$ -نرم‌های صادق در قانون تناقض

در این بخش ابتدا مفهوم نفی فازی را تعریف کرده و سپس  $t$ -نرم‌های صادق در قانون تناقض را مدنظر قرار می‌دهیم. نشان می‌دهیم که  $t$ -نرم‌های ارشمیدسی که در این قانون صدق کنند پوچ توان هستند. در پایان مثال‌هایی از چنین  $t$ -نرم‌هایی را ارائه می‌کنیم.

تعریف ۱.۴. تابع  $N : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  را یک نفی فازی نامند اگر  $N(0) = 1$ ،  $N(1) = 0$  و صعودی نباشد.

مثال ۲.۴. تابع

$$N : [0, 1] \rightarrow [0, 1], \quad N(x) = \begin{cases} 1 & x = 0, \\ 0 & x > 0. \end{cases}$$

یک نفی فازی است.

تعریف ۳.۴. نفی  $N$  را اکید نامند اگر پیوسته و اکیداً نزولی باشد.

مثال ۴.۴. تابع

$$N : [0, 1] \rightarrow [0, 1], \quad N(x) = 1 - x^2.$$

یک نفی اکید است.

تعریف ۵.۴. نفی اکید  $N$  را قوی نامند اگر  $N(N(x)) = x$  برای هر  $x \in [0, 1]$ .

مثال ۶.۴. تابع

$$N_\lambda : [0, 1] \rightarrow [0, 1], \quad N_\lambda(x) = \frac{1-x}{1+\lambda x} \quad (\lambda > -1)$$

یک نفی قوی است. این نفی را نفی سوگینو<sup>۸</sup> می‌نامند که در حالت خاص  $N_0(x) = 1 - x$  نفی زاده است.

تعریف ۷.۴. فرض کنید  $T$  یک  $t$ -نرم و  $N$  یک نفی فازی باشد. گوییم زوج  $(T, N)$  در قانون تناقض<sup>۹</sup> صدق می‌کند اگر به ازای هر  $x \in [0, 1]$

$$T(N(x), x) = 0. \quad (18)$$

<sup>۸</sup>M. Sugeno

<sup>۹</sup>Law of Contradiction

حال به بررسی  $t$ -نرم‌های ارشمیدسی صادق در قانون تناقض در تعریف ۷.۴ می‌پردازیم.

قضیه ۸.۴. فرض کنید  $T$  یک  $t$ -نرم ارشمیدسی و  $N$  یک نفی فازی باشد به طوری که  $x \in (0, 1)$  موجود باشد که  $N(x) \neq 0$ . اگر  $(T, N)$  در قانون تناقض صدق کند آنگاه  $T$  پوچ‌توان است.

اثبات. به سادگی از گزاره ۲۳.۳ نتیجه می‌شود.  $\square$

نتیجه ۹.۴. فرض کنیم  $T$  یک  $t$ -نرم ارشمیدسی و  $N_\lambda$  نفی سوگینو در مثال ۶.۴ باشد به طوری که برای هر  $x \in [0, 1]$

$$T(x, N_\lambda(x)) = 0. \quad (19)$$

در این صورت  $T$  پوچ‌توان است.

اثبات. تابع  $N_\lambda$  در مثال ۶.۴ یک نفی است که در شرط قضیه ۸.۴ صدق می‌کند.  $\square$

نتیجه ۱۰.۴. فرض کنیم  $T$  یک  $t$ -نرم ارشمیدسی باشد به طوری که برای هر  $x \in [0, 1]$

$$T(x, 1 - x) = 0. \quad (20)$$

در این صورت  $T$  پوچ‌توان است.

اثبات. این همان نتیجه ۹.۴ به ازای  $\lambda = 0$  است.  $\square$   
در ادامه، یک شرط لازم و کافی را برای این که زوج  $(T, N)$  در قانون تناقض صدق کند بیان و اثبات می‌کنیم. برای این منظور به لم زیر نیاز داریم.

لم ۱۱.۴. فرض کنیم  $T$  یک  $t$ -نرم پیوسته و  $N$  یک نفی فازی اکید باشد به طوری که  $(T, N)$  در قانون تناقض صدق کند. در این صورت  $T$  ارشمیدسی است.

اثبات. با برهان خلف فرض کنیم  $T$  ارشمیدسی نباشد؛ یعنی  $x \in (0, 1)$  موجود باشد به طوری که  $T(x, x) = x$ . اگر  $x \leq N(x)$  آن‌گاه

$$x = T(x, x) \leq T(N(x), x) = 0.$$

پس  $x = 0$  که تناقض است زیرا  $x \in (0, 1)$ . اگر  $x > N(x)$  آن‌گاه با توجه به پیوستگی  $T$ ، تابع

$$T_x : [0, 1] \rightarrow [0, 1], \quad T_x(y) = T(x, y),$$

پیوسته بوده و با توجه به قضیه مقدار میانی،  $y \in [0, 1]$  وجود دارد به طوری که

$$N(x) = T_x(y) = T(x, y).$$

از طرفی،  $y \leq x$  زیرا اگر  $y > x$  آن‌گاه

$$N(x) = T(x, y) \geq T(x, x) = x$$

که تناقض است. بنابراین داریم:

$$N(x) = T(x, y) = T(T(x, x), y) = T(x, T(x, y)) = T(x, N(x)) = 0.$$

اما  $N$  یک به یک است (زیرا اکیداً نزولی است). پس از  $N(1) = 0$  نتیجه می‌شود که  $x = 1$  و این تناقض است زیرا  $x \in (0, 1)$ .  $\square$

قضیه ۱۲.۴. فرض کنیم  $T$  یک  $t$ -نرم پیوسته و  $N$  یک نفی فازی اکید باشد. در این صورت

$(T, N)$  در قانون تناقض صدق می‌کند اگر و تنها اگر یکرخیختی ترتیبی  $[\circ, 1] \rightarrow [\circ, 1] : \varphi$  موجود باشد به طوری که به ازای هر  $x, y \in [\circ, 1]$

$$T(x, y) = \varphi^{-1}(\varphi(x) \blacktriangle \varphi(y))$$

که در آن  $\blacktriangle$ ، همان  $t$ -نرم لوکاسویچ است و

$$N(x) \leq \varphi^{-1}(1 - \varphi(x)).$$

اثبات. فرض کنیم  $(T, N)$  در قانون تناقض در تعریف ۷.۴ صدق کند. لذا  $T$  طبق لم ۱۱.۴، ارشمیدسی است و طبق قضیه ۸.۴ پوچ‌توان است. بنابراین طبق گزاره ۲۹.۳ یکرخیختی ترتیبی  $[\circ, 1] \rightarrow [\circ, 1] : \varphi$  وجود دارد به طوری که

$$T(x, y) = \varphi^{-1}(\varphi(x) \blacktriangle \varphi(y)).$$

بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} T(N(x), x) = \circ &\iff \varphi^{-1}(\varphi(N(x)) \blacktriangle \varphi(x)) = \circ \\ &\iff \varphi(N(x)) \blacktriangle \varphi(x) = \circ \\ &\iff (\varphi(N(x)) + \varphi(x) - 1) \vee \circ = \circ \\ &\iff \varphi(N(x)) \leq 1 - \varphi(x) \\ &\iff N(x) \leq \varphi^{-1}(1 - \varphi(x)). \end{aligned}$$

□

در ادامه  $t$ -نرم‌های ارشمیدسی را که در شرط (۲۰) صدق می‌کنند می‌سازیم.

لم ۱۳.۴. فرض کنیم  $h : [-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}] \rightarrow \mathbb{R}$  یک تابع پیوسته و اکیداً نزولی باشد. در این صورت،

$$g : [0, 1] \rightarrow [0, \infty), \quad g(t) = h(t - \frac{1}{4}) - h(\frac{1}{4})$$

تابعی پیوسته و اکیداً نزولی بوده،  $0 < g(0) < \infty$  و  $g(1) = 0$ .

اثبات. به سادگی ثابت می‌شود. □

قضیه ۱۴.۴. اگر  $h$  و  $g$  توابع معرفی شده در لم ۱۳.۴، هم‌چنین  $h$  تابعی فرد و به علاوه  $T$  یک  $t$ -نرم ارشمیدسی با تابع مولد جمعی  $g$  باشد، آنگاه شرط (۲۰) برقرار بوده و در نتیجه زوج  $(T, N(x) = 1 - x)$  در قانون تناقض در تعریف ۷.۴ صدق می‌کند.

اثبات. فرض کنیم  $x \in [0, 1]$ . به سادگی دیده می‌شود که  $g(x) + g(1 - x) = g(0)$ . در نتیجه طبق قضیه ۲۵.۳ داریم:

$$T(x, 1 - x) = g^{-1}((g(x) + g(1 - x)) \wedge g(0)) = g^{-1}(g(0)) = 0.$$

□

حال به کمک مفاهیم فوق و قضیه ۲۵.۳، مثال‌هایی از  $t$ -نرم‌های صادق در قانون تناقض را خواهیم آورد.

مثال ۱۵.۴. در لم ۱۳.۴ تابع  $h$  را با ضابطه  $h(x) = -x$  تعریف می‌کنیم. به سادگی دیده می‌شود که  $g(x) = 1 - x$  و  $T(x, y) = (x + y - 1) \vee 0$  که همان  $t$ -نرم لوکاسویچ است.

مثال ۱۶.۴. در لم ۱۳.۴ تابع  $h$  را با ضابطه  $h(x) = -\frac{1}{4} \tan(\frac{\pi x}{4})$  تعریف می‌کنیم. به سادگی دیده می‌شود که  $g(x) = \frac{1}{4} + \tan(\frac{\pi x}{4} - \frac{\pi}{4})$  و

$$T(x, y) = (\frac{1}{4} + \frac{2}{\pi} \arctan(\frac{1}{4} + \tan(\frac{\pi x}{4} - \frac{\pi}{4}) + \tan(\frac{\pi y}{4} - \frac{\pi}{4}))) \vee 0.$$

## ۵ نتیجه‌گیری

عملگر «و» در ریاضیات و منطق، به عنوان رابطی بین گزاره‌ها از اهمیت خاصی برخوردار است. جدول ارزش این عملگر، در قالب ریاضیات معمولی، به صورت یکتا و منحصر به فرد (مطابق جدول شماره ۱) تعریف می‌شود و این تعریف، مورد توافق منطق‌دانان و ریاضی‌دانان است. اما برای مدل‌سازی این عملگر در ریاضیات فازی، می‌توانیم علاوه بر عملگر مینیمم از  $t$ -نرم‌ها نیز استفاده کنیم. این مفهوم را تعریف کرده و سپس به بررسی یک رده خاص از  $t$ -نرم‌ها تحت عنوان  $t$ -نرم‌های ارشمیدسی پرداختیم. نشان دادیم که این رده دارای مولدهای ضربی و نیز جمعی می‌باشد. مثال‌های متنوعی از  $t$ -نرم‌ها به همراه مولدهایشان را در جدول شماره ۲ ارائه کردیم. سپس با معرفی مفهوم یکریختی  $t$ -نرم‌ها ثابت کردیم که تا حد یکریختی تنها دو  $t$ -نرم ارشمیدسی داریم. یکی  $t$ -نرم حاصلضرب و دیگری  $t$ -نرم لوکاسویچ.  $t$ -نرم‌های صادق در قانون تناقض، به دلیل حفظ خاصیت طرد شق ثالث، از اهمیت خاصی برخوردار هستند. مفاهیم نفی فازی و قانون تناقض را تعریف کرده و توصیفی از زوج‌های صادق در قانون تناقض ارائه کردیم. در انتها مثال‌هایی از  $t$ -نرم‌های صادق در قانون تناقض را به کمک مفاهیمی از حسابان، آورده‌ایم.

## مراجع

- [1] Bacczynski, M. Jayaram, B. (2008), *Fuzzy Implications*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
- [2] Fodor, J., Roubens, M. (1994), *Fuzzy preference modelling and multicriteria decision support*, Kluwer, Dordrecht.
- [3] Klement, P., Mesiar, R., Pap, E. (2000), *Triangular Norms*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands.
- [4] Lin, S. Y. T., Lin, Y. F. (1985), *Set theory with applications*, Mancorp Pub.

- [5] Mandelkern, M. (1982), Continuity of monotone functions, *Pacific J. Math.* 99, 2, 413-418.
- [6] Nguyen, H.T., Walker, E.A. (2006), *A first course in fuzzy logic*, 3rd edn. CRC Press, Boca Raton.
- [7] Schweizer, B. Sklar, A. (1961), Associative functions and statistical triangle inequalities, *Publ. Math. Debrecen*, 8, 169-186.
- [8] Schweizer, B. Sklar, A. (1983), *Probabilistic Metric Spaces*, NorthHolland, Amsterdam.
- [9] Zadeh, L. (1965), Fuzzy Sets, *Information and Control*, 8, 338-353.