سیستم‌های فازی و کاربردها

سال دوم، شماره دوم (پاییز و زمستان ۱۳۹۸) صص. ۱ تا ۳۲

t-نرم‌های ارشمیدسی و قانون تناقض

سید علی موسوی، ماشاءا... ماشین‌چی

بخش آمار، دانشکده ریاضی و کامپیوتر، دانشگاه شهید باهنر کرمان

چکیده

در این مقاله، ابتدا مفهوم t-نرم را معرفی کرده و به بررسی خواص اولیه t-نرم‌ها می‌پردازیم. سپس t-نرم‌های ارشمیدسی را مدنظر قرار داده و به طور مفصل مورد مطالعه قرار می‌دهیم. با مدنظر قرار دادن مولدهای ضربی و جمعی برای t-نرم‌های ارشمیدسی، مثال‌های مختلفی از این رده از t-نرم‌ها را ارائه می‌کنیم. در ادامه، یکریختی t-نرم‌ها را تعریف کرده و نشان می‌دهیم تا حد یکریختی، تنها دو t-نرم ارشمیدسی داریم: t-نرم حاصلضرب و t-نرم لوکاسویچ. در انتها t-نرم‌های ارشمیدسی صادق در قانون تناقض را توصیف می‌کنیم.

۱ مقدمه

یکی از رابطه‌های اساسی در ریاضیات و منطق ریاضی، رابط «و» با نماد $\wedge$ می‌باشد که جدول ارزش آن به صورت زیر تعریف می‌شود. از این رابط در تعریف اشتراک دو زیرمجموعه معمولی از یک مجموعه مرجع استفاده می‌شود [۴].

هرگاه A و B زیرمجموعه‌هایی (معمولی) از یک مجموعه مرجع X باشند، مجموعه $A \cap B$

Mathematics Subject Classification (2010): 03B52; 08A72, **Email:** mashinchi@uk.ac.ir.

عبارات و کلمات کلیدی:اشتراک فازی، t-نرم، t-نرم ارشمیدسی، قانون تناقض

$\wedge$	۰	۱
۰	۰	۰
۱	۰	۱

جدول ۱: جدول ارزش رابط $\wedge$

به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$A \cap B = \{x \in X : x \in A \wedge x \in B\}. \tag{۱}$$

برای این که بتوانیم تعریف اشتراک را به زیرمجموعه‌های فازی X تعمیم دهیم اشتراک A و B را با در نظر گرفتن توابع مشخصه آن‌ها تعریف می‌کنیم. در واقع هر گاه

$$\chi_A : X \longrightarrow \{۰, ۱\}, \qquad \chi_A(x) = \begin{cases} ۱, & x \in A, \\ ۰, & x \notin A. \end{cases}$$

و

$$\chi_B : X \longrightarrow \{۰, ۱\}, \qquad \chi_B(x) = \begin{cases} ۱, & x \in B, \\ ۰, & x \notin B. \end{cases}$$

توابع مشخصه A و B و $\chi_{A\cap B}$ تابع مشخصه $A \cap B$ باشد به سادگی می‌توان دید که برای هر $x \in X$،

$$\chi_{A\cap B}(x) = \chi_A(x) \wedge \chi_B(x). \tag{۲}$$

حال فرض کنیم A و B دو زیرمجموعه فازی X باشند. یعنی

$$A, B : X \longrightarrow [۰, ۱].$$

برای تعریف اشتراک A و B در این حالت، با توجه به رابطه ۲ باید بتوانیم $\wedge$ را به تابعی مانند

$$\triangle : [۰, ۱] \times [۰, ۱] \longrightarrow [۰, ۱]$$

توسیع دهیم (بدین معنا که $\wedge = \triangle|_{\{۰,۱\}\times\{۰,۱\}}$). با بررسی دقیق‌تر رابط $\wedge$ (بخش ۳.۱ از مرجع [۲] را ببینید) ویژگی‌های چنین تابعی به صورت زیر خواهد بود.
برای هر $x, y, z, w \in [۰, ۱]$،

$$x\triangle ۱ = x \tag{۳}$$

$$x\triangle y = y\triangle x \tag{۴}$$

$$x\triangle(y\triangle z) = (x\triangle y)\triangle z \tag{۵}$$

$$w \leq x, \quad y \leq z \Longrightarrow w\triangle y \leq x\triangle z \tag{۶}$$

تابع مینیمم که ما آن را نیز با $\wedge$ نمایش می‌دهیم در شروط ۳ تا ۶ صدق می‌کند.

$$\wedge : [۰, ۱] \times [۰, ۱] \longrightarrow [۰, ۱], \quad x \wedge y = \min\{x, y\}.$$

این عملگر اولین بار توسط زاده [۱] در مقاله پیشگام [۹] برای تعریف اشتراک مجموعه‌های فازی به کار گرفته شد.

تابع مینیمم علاوه بر این که در روابط ۳ تا ۶ صدق می‌کند دارای خاصیت خودتوانی نیز هست. تابع $\triangle : [۰, ۱] \times [۰, ۱] \longrightarrow [۰, ۱]$ دارای خاصیت خودتوانی است هرگاه برای هر

[۱] لطفی عسکرزاده

$x \in [۰, ۱]$،

$$x \triangle x = x. \tag{۷}$$

نشان خواهیم داد که تنها یک تابع در شرط‌های ۳ تا ۷ صدق می‌کند که همان تابع مینیمم است (گزاره ۲.۸).

با این حال با حذف شرط خودتوانی (شرط ۷) و در نظر گرفتن فقط شرط‌های (۳) تا (۶) می‌توانیم مثال‌های فراوانی را داشته باشیم. چنین توابعی را نرم‌های مثلثی یا به اختصار t-نرم می‌نامیم.

البته مفهوم t-نرم ابتدا در ارتباط با فضاهای متریک احتمالی معرفی شده است [۷، ۸]. مرجع [۳] به طور مفصل به مطالعه و بررسی t-نرم‌ها پرداخته است.

حال به کمک مفهوم t-نرم می‌توانیم اشتراک زیرمجموعه‌های فازی را تعریف کنیم. اگر $\triangle$ یک t-نرم باشد، آنگاه $A \cap_\triangle B$ یک مجموعه فازی است که به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$A \cap_\triangle B : X \longrightarrow [۰, ۱], \quad (A \cap_\triangle B)(x) = A(x) \triangle B(x). \tag{۸}$$

اهمیت این بحث از آن جاست که در موقعیت‌های مختلف و بسته به وضعیت مسئله، نیازمند ارائه تعاریف متفاوت و متناسب از اشتراک دو مجموعه فازی هستیم. مفهوم t-نرم این امکان را برای ما فراهم می‌کند.

اگر $\triangle = \wedge$ (تابع مینیمم) انتخاب شود، آنگاه تعریف اشتراک منطبق با تعریف زاده در مقاله [۹] خواهد بود.

اهمیت دیگر t-نرم‌ها در بحث ترجمه رابط «و» در جملات شامل عبارات فازی است. در ریاضیات معمولی، رابط «و» به صورت استاندارد با جدول ارزش ؟؟ تعریف می‌شود. اما در ترجمه جملات فازی و در مدل‌سازی رابط «و» دست ما بازتر خواهد بود و می‌توانیم بسته به شرایط یک t-نرم مناسب را برای مدل‌سازی «و» در نظر بگیریم.

در این مقاله با معرفی رده‌ای از t-نرم‌ها به نام t-نرم‌های ارشمیدسی [2]، مثال‌هایی از t-نرم‌ها را ارائه خواهیم کرد.

در بخش ۲، تعریف t-نرم را ارائه کرده و برخی خواص آن را بیان می‌کنیم. همچنین مثال‌هایی از t-نرم‌ها خواهیم آورد.

در بخش ۳، رده خاصی از t-نرم‌ها به نام t-نرم‌های ارشمیدسی را مدنظر قرار داده و به تفصیل مورد بررسی قرار می‌دهیم.

در بخش ۴، ابتدا مفهوم نفی فازی را معرفی کرده و در ادامه قانون تناقض را در مورد یک t-نرم و یک نفی فازی تعریف می‌کنیم. سپس شرط لازم و کافی برای این که یک t-نرم ارشمیدسی و یک نفی فازی اکید در قانون تناقض صدق کنند را بیان و اثبات می‌کنیم.

در سرتاسر مقاله، $\wedge$ نمادی برای تابع $\min$ و $\vee$ نشان‌دهنده تابع $\max$ است.

مطالب مقاله برگرفته از مراجع [۱، ۲، ۶] می‌باشند.

۲ t-نرم

در این بخش، مفهوم t-نرم را معرفی کرده و ویژگی‌های اولیه و مثال‌هایی از t-نرم‌ها را ارائه می‌کنیم. همان‌طور که در سرآغاز گفته شد t-نرم‌ها را می‌توان به عنوان رابطی برای تعریف اشتراک مجموعه‌های فازی در نظر گرفت.

تعریف ۱.۲. تابع

$$T : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow [0,1]$$

را یک نرم مثلثی (به اختصار یک t-نرم) می‌نامند هرگاه برای هر $x, y, z, w \in [0,1]$ داشته باشیم:

۱. $T(x, 1) = x$

۲. $T(x, y) = T(y, x)$

[2] Archimedean

۳. $T(x, T(y, z)) = T(T(x, y), z)$

۴. اگر $x \leq w$ و $z \leq y$ آن‌گاه $T(w, y) \leq T(x, z)$.

ملاحظه ۲.۲. از نقطه نظر جبری، می‌توان به یک t-نرم به عنوان یک عمل دوتایی روی مجموعه $[۰, ۱]$ نگریست که در خواص چهارگانه تعریف فوق صدق می‌کند. از آن‌جا که به کار بردن نمادهایی چون $T(x, T(T(w, z), y))$ گیج کننده و نامانوس است از نمادگذاری جبری برای t-نرم‌ها استفاده می‌کنیم. به این معنی که عملگر دوتایی را مابین مولفه‌ها قرار می‌دهیم. هم‌چنین به جای نماد T از نمادهایی مانند $\triangle$، $\circ$، $\diamond$ و غیره برای نشان دادن یک t-نرم استفاده می‌کنیم. با این قرارداد (و با توجه به خاصیت (۳))، عبارت $T(x, T(T(w, z), y))$ به صورت $x \triangle w \triangle z \triangle y$ در خواهد آمد.

با توجه به ملاحظه ۲.۲، مناسب است که تعریف ۱.۲ را به صورت زیر بازنویسی کنیم:

تعریف ۳.۲. عملگر دو تایی

$$\triangle : [۰, ۱] \times [۰, ۱] \longrightarrow [۰, ۱]$$

را یک t-نرم نامند هرگاه برای هر $x, y, z, w \in [۰, ۱]$ داشته باشیم:

۱. $۱ \triangle x = x$ (عضو همانی)

۲. $x \triangle y = y \triangle x$ (خاصیت جابجایی)

۳. $x \triangle (y \triangle z) = (x \triangle y) \triangle z$ (خاصیت شرکت‌پذیری)

۴. اگر $x \leq w$ و $z \leq y$ آن‌گاه $w \triangle y \leq x \triangle z$ (صعودی بودن در هر مولفه)

ملاحظه ۴.۲. در این مقاله به تناسب بحث، از هر دو نوع بیان و نمادگذاری (تابعی یا عملگری) برای t-نرم‌ها که در تعاریف ۱.۲ و ۳.۲ آمدند استفاده خواهیم کرد.

گزاره ۵.۲. فرض کنیم $\triangle$ یک t-نرم باشد. در این صورت $([\circ, ۱], \triangle)$ یک تکواره [۳] جابجایی است.

اثبات. یک تکواره جابجایی یک ساختار با عمل دوتایی است که دارای خواص (۱)، (۲) و (۳) از تعریف ۳.۲ است که برای $\triangle$ روی $[\circ, ۱]$ برقرار است. □

مثال ۶.۲. هر یک از موارد زیر یک t-نرم هستند:

$$x\triangle_\circ y = \begin{cases} y & x = ۱ \\ x & y = ۱ \\ \circ & \text{در غیر این صورت}, \end{cases} \qquad x\triangle_۱ y = (x + y - ۱) \vee \circ,$$

$$x\triangle_۲ y = \frac{xy}{۲ - (x + y - xy)}, \qquad x\triangle_۳ y = xy,$$

$$x\triangle_۴ y = \begin{cases} \frac{xy}{x+y-xy} & x \neq \circ \\ \circ & x = \circ, \end{cases} \qquad x\triangle_۵ y = x \wedge y.$$

گزاره ۷.۲. فرض کنیم $\triangle$ یک t-نرم باشد و $x, y \in [\circ, ۱]$. در این صورت:

۱. $\circ \triangle x = \circ$

۲. $x\triangle_\circ y \leq x\triangle y \leq x\triangle_۵ y$

اثبات. برای اثبات (۱)، با توجه به خواص (۱) و (۴) از تعریف ۳.۲ داریم:

$$\circ \leq \circ\triangle x \leq \circ\triangle ۱ = \circ.$$

[3] Monoid

برای اثبات (۲) واضح است که $x\triangle_\circ y \leq x\triangle y$. از طرفی، $x\triangle y \leq x\triangle 1 = x$ و $x\triangle y \leq 1\triangle y = y$. بنابراین $x\triangle y \leq x\wedge y = x\triangle_5 y$. □

طبق خاصیت (۱) از تعریف ۳.۲ داریم:

$$\circ\triangle 1 = 1\triangle\circ = \circ, \quad 1\triangle 1 = 1$$

و طبق قسمت (۱) از گزاره ۷.۲ داریم: $\circ = \circ\triangle\circ$. بنابراین هر t-نرم $\triangle$ یک توسیع از رابط $\wedge$ با جدول ؟؟ است.

قسمت (۲) نشان می‌دهد که t-نرم مینیمم ($\wedge = \triangle_5$) بزرگترین t-نرم است. البته هر دو t-نرم لزوماً قابل مقایسه نیستند. مثلاً t-نرم‌های $\triangle_3$ و $\triangle_5$ در مثال ۶.۲ قابل مقایسه نیستند.

t-نرم $\triangle$ را خودتوان نامند هرگاه $x\triangle x = x$ برای هر $x \in [\circ, 1]$. تنها t-نرم خودتوان، t-نرم مینیمم است.

گزاره ۸.۲. فرض کنیم $\triangle$ یک t-نرم باشد. $\triangle$ خودتوان است اگر و تنها اگر $\triangle = \wedge$.

اثبات. اگر $\triangle = \wedge$، آن‌گاه $x\triangle x = x \wedge x = x$ برای هر $x \in [\circ, 1]$ و لذا $\triangle$ خودتوان است. برعکس؛ فرض کنیم $\triangle$ خودتوان باشد. طبق گزاره ۷.۲ (۲)، $\triangle \leq \wedge$. نشان می‌دهیم عکس این نیز برقرار است. فرض کنیم $x, y \in [\circ, 1]$. بدون کم شدن از کلیت، فرض کنیم $x \leq y$. طبق خاصیت (۴) t-نرم‌ها داریم:

$$x \wedge y = x = x\triangle x \leq x\triangle y.$$

بنابراین $\wedge \leq \triangle$ و حکم ثابت است. □

۳ t-نرم‌های ارشمیدسی و مولدهای ضربی و جمعی آن‌ها

در موقعیت‌های مختلف، نیازمند t-نرم‌های متفاوتی هستیم. بنابراین مهم است که بتوانیم متناسب با هر موقعیت، t-نرم خاص آن موقعیت را بسازیم. برای این منظور به رده خاصی از t-نرم‌ها می‌پردازیم که می‌توان به کمک مفهوم تابع مولد آن‌ها را تولید کرد.

تعریف ۱.۳. t-نرم $\triangle$ را ارشمیدسی نامند اگر پیوسته بوده و $x \triangle x < x$ برای هر $x \in (0,1)$.

ملاحظه ۲.۳. تعاریف معادل دیگری نیز برای t-نرم‌های ارشمیدسی وجود دارد. به عنوان نمونه، تعریف ۶.۱.۵ از مرجع [۶] را ببینید.

مثال ۳.۳. t-نرم‌های $\triangle_1$، $\triangle_2$، $\triangle_3$ و $\triangle_4$ در مثال ۶.۲، همگی ارشمیدسی هستند. اما t-نرم $\triangle_5$ (یا همان مینیمم) ارشمیدسی نیست. هم‌چنین $\triangle_0$ ارشمیدسی نمی‌باشد زیرا پیوسته نیست. (در برخی کتب شرط پیوستگی جزء تعریف t-نرم‌های ارشمیدسی نیست. مثلاً تعریف ۵.۱ از مرجع [۲] را ببینید.)

t-نرم‌های ارشمیدسی دارای مولدهای جمعی و ضربی هستند. در ادامه این مولدها را تعریف می‌کنیم.

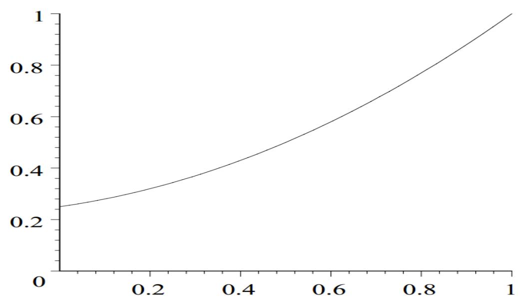
۱.۳ مولدهای ضربی

یک راه ساختن t-نرم‌های ارشمیدسی، استفاده از مفهوم مولد ضربی است.

تعریف ۴.۳. فرض کنید $0 \leq a < 1$. تابع $f : [0,1] \longrightarrow [a,1]$ را یک یکریختی ترتیبی نامند هرگاه یک به یک و پوشا بوده و حافظ ترتیب باشد؛ یعنی هرگاه $x \leq y$ آن‌گاه $f(x) \leq f(y)$.

به بیان دیگر، یک یکریختی ترتیبی، تابعی دوسویی و اکیداً صعودی است. هم‌چنین واضح است که $f(0) = a$ و $f(1) = 1$. شکل ؟؟ شمای کلی یک یکریختی ترتیبی را نشان می‌دهد.

گزاره ۵.۳. فرض کنیم $f : [0,1] \longrightarrow [a,1]$ یک یکریختی ترتیبی باشد. در این صورت f تابعی پیوسته است.



شکل ۱: نمودار یک یکریختی ترتیبی (=مولد ضربی)

اثبات. [۵، قضیه ۱]. □

تعریف ۶.۳. فرض کنیم $f:[0,1]\longrightarrow[a,1]$ یک یکریختی ترتیبی و $\triangle$ یک t-نرم ارشمیدسی باشد. $\triangle_f$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\triangle_f:[0,1]\times[0,1]\longrightarrow[0,1]$$
$$\triangle_f(x,y)=x\triangle_f y=f^{-1}((f(x)\triangle f(y))\vee a). \tag{9}$$

نشان می‌دهیم $\triangle_f$ یک t-نرم ارشمیدسی است. برای این منظور به لم زیر نیاز داریم.

لم ۷.۳. فرض کنیم $\triangle$ یک t-نرم بوده و $x,y,z,a\in[0,1]$. در این‌صورت

$$(x\triangle((y\triangle z)\vee a))\vee a=(x\triangle y\triangle z)\vee a. \tag{10}$$

اثبات. اگر $a\leq y\triangle z$ آن‌گاه تساوی با توجه به شرکت‌پذیری $\triangle$ برقرار خواهد بود. اگر $y\triangle z\leq a$ آن‌گاه با توجه به این‌که $x\triangle a\leq 1\triangle a=a$، داریم:

$$(x\triangle((y\triangle z)\vee a))\vee a=(x\triangle a)\vee a=a.$$

از سوی دیگر، $a \leq y\triangle z \leq x\triangle y\triangle z$. پس $(x\triangle y\triangle z) \vee a = a$ و تساوی برقرار است. $\square$

قضیه ۸.۳. $\triangle_f$ در تعریف ۶.۳ یک t-نرم ارشمیدسی است.

اثبات. با توجه به جابجایی بودن $\triangle$، $\triangle_f$ نیز جابجایی است. همچنین داریم:

$$\begin{aligned} 1\triangle_f x &= f^{-1}((f(1)\triangle f(x)) \vee a) && (f(1)=1)\\ &= f^{-1}(f(x) \vee a) && (a \leq f(x))\\ &= f^{-1}(f(x))\\ &= x. \end{aligned}$$

برای شرکت‌پذیری، باید نشان دهیم

$$x\triangle_f(y\triangle_f z) = (x\triangle_f y)\triangle_f z.$$

با توجه به لم ۷.۳ داریم:

$$\begin{aligned} x\triangle_f(y\triangle_f z) &= x\triangle_f(f^{-1}((f(y)\triangle f(z)) \vee a)\\ &= f^{-1}((f(x)\triangle f(f^{-1}((f(y)\triangle f(z)) \vee a))) \vee a)\\ &= f^{-1}(((f(x)\triangle(f(y)\triangle f(z)) \vee a)) \vee a)\\ &= f^{-1}((f(x)\triangle f(y)\triangle f(z)) \vee a). \end{aligned}$$

از سوی دیگر،

$$\begin{aligned}(x\triangle_f y)\triangle_f z &= (f^{-1}((f(x)\triangle f(y))\vee a))\triangle_f z\\ &= f^{-1}((f(f^{-1}((f(x)\triangle f(y))\vee a))\triangle f(z))\vee a)\\ &= f^{-1}(((f(x)\triangle(f(y)\triangle f(z))\vee a))\vee a)\\ &= f^{-1}((f(x)\triangle f(y)\triangle f(z))\vee a).\end{aligned}$$

صعودی بودن $\triangle_f$ نسبت به هر مولفه: فرض کنیم $w \leq x$ و $z \leq y$. از آن‌جا که f صعودی است، $f(w) \leq f(x)$ و $f(z) \leq f(y)$. چون $\triangle$ یک t-نرم است پس
$f(w)\triangle f(y) \leq f(x)\triangle f(z)$. در نتیجه، $(f(w)\triangle f(y))\vee a \leq (f(x)\triangle f(z))\vee a$.
حال از آن‌جا که f^{-1} نیز صعودی است داریم:

$$w\triangle_f y = f^{-1}((f(w)\triangle f(y))\vee a) \leq f^{-1}((f(x)\triangle f(z))\vee a) = x\triangle_f z.$$

بنابراین $\triangle_f$ یک t-نرم است.
حال نشان می‌دهیم $x\triangle_f x < x$ برای هر $x \in (\circ, ۱)$. با برهان خلف، فرض کنیم $x \in (\circ, ۱)$ موجود باشد به طوری‌که $x\triangle_f x = x$. در نتیجه، $f^{-1}((f(x)\triangle f(x))\vee a) = x$. لذا $(f(x)\triangle f(x))\vee a = f(x)$. در صورتی‌که $f(x)\triangle f(x) \leq a$ آن‌گاه $(f(x)\triangle f(x))\vee a = a$ و در نتیجه، $f(x) = a = f(\circ)$. پس $x = \circ$ که تناقض است.
بنابراین $a < f(x)\triangle f(x)$. و از این‌جا، $f(x)\triangle f(x) = f(x)$ که در تناقض با ارشمیدسی بودن $\triangle$ است و حکم ثابت می‌شود. $\square$

قضیه فوق به ما این امکان را می‌دهد که با در نظر گرفتن یک t-نرم ارشمیدسی $\triangle$ و یک یکریختی ترتیبی f، t-نرم‌های ارشمیدسی زیادی را بسازیم.

- یکی از مهم‌ترین t-نرم‌های ارشمیدسی، t-نرم حاصلضرب معمولی است که آن را با

نمایش می‌دهیم. بنابراین

$$x \bullet y := xy, \qquad x, y \in [۰, ۱]. \qquad (۱۱)$$

حال t-نرم‌های متفاوتی را با در نظر گرفتن $\bullet = \triangle$، تعریف ۶.۳، و قضیه ۸.۳ معرفی می‌کنیم. برای این منظور به لم زیر نیاز داریم.

لم ۹.۳. فرض کنیم $f : [۰, ۱] \longrightarrow [a, ۱]$ یک یکریختی ترتیبی باشد. در این‌صورت $f^{-۱} : [a, ۱] \longrightarrow [۰, ۱]$ حافظ ترتیب بوده و برای هر $x, y \in [a, ۱]$ داریم:

$$f^{-۱}(x \vee y) = f^{-۱}(x) \vee f^{-۱}(y), \quad f^{-۱}(x \wedge y) = f^{-۱}(x) \wedge f^{-۱}(y).$$

اثبات. به سادگی از تعاریف حاصل می‌شود. $\square$

مثال ۱۰.۳ (t-نرم لوکاسویچ [۴]). فرض کنیم $\bullet = \triangle$ و $f(x) = e^{x-۱}$. تابع

$$f : [۰, ۱] \longrightarrow [e^{-۱}, ۱]$$

یک یکریختی ترتیبی است و $f^{-۱}(x) = ۱ + \ln x$. بنابراین طبق لم ۹.۳ داریم:

$$\begin{aligned} f^{-۱}(f(x)f(y) \vee f(۰)) &= f^{-۱}(e^{x-۱}e^{y-۱} \vee e^{-۱}) \\ &= f^{-۱}(e^{x-۱}e^{y-۱}) \vee f^{-۱}(e^{-۱}) \\ &= ۱ + ((x + y - ۲) \vee (-۱)) \\ &= (x + y - ۱) \vee ۰. \end{aligned}$$

[4] J. Lukasiewicz

لذا طبق قضیه ۸.۳، تابع

$$x\blacktriangle y = (x+y-۱)\vee ۰, \qquad x,y\in[۰,۱] \tag{۱۲}$$

یک t-نرم ارشمیدسی است که آن را t-نرم لوکاسویچ می‌نامند.

مثال ۱۱.۳. فرض کنیم $\bullet = \triangle$ و $f(x) = e^{-\frac{۱-x}{x}}$. به سادگی دیده می‌شود که

$$f:[۰,۱]\longrightarrow[۰,۱]$$

یک یکریختی ترتیبی است و $f^{-۱}(x) = \frac{۱}{۱-\ln x}$ (توجه داریم که $f(۰) = e^{-\infty} = ۰$).
بنابراین طبق تعریف ۶.۳ داریم:

$$\begin{aligned} x\triangle_f y = x\bullet_f y &= f^{-۱}(f(x)f(y)\vee ۰)\\ &= f^{-۱}\left(e^{-\frac{۱-x}{x}}e^{-\frac{۱-y}{y}}\right)\\ &= \frac{۱}{۱-\ln\left(e^{-\frac{۱-x}{x}}e^{-\frac{۱-y}{y}}\right)}\\ &= \left(۱+\frac{۱-x}{x}+\frac{۱-y}{y}\right)^{-۱}\\ &= \frac{xy}{x+y-xy}. \end{aligned}$$

در ادامه نشان می‌دهیم که تمام t-نرم‌های ارشمیدسی از روی t-نرم حاصلضرب و یک یکریختی ترتیبی ساخته می‌شوند.

تعریف ۱۲.۳. فرض کنیم $\triangle$ یک t-نرم ارشمیدسی باشد. یکریختی ترتیبی $f:[۰,۱]\longrightarrow[a,۱]$ را یک تابع مولد ضربی برای $\triangle$ نامند هرگاه $\bullet_f = \triangle$. به عبارت

دیگر، f یک تابع مولد ضربی $\triangle$ است هرگاه

$$x\triangle y = f^{-1}(f(x)f(y) \vee a). \tag{۱۳}$$

قضیه زیر نشان می‌دهد که هر t-نرم ارشمیدسی، تابع مولد ضربی دارد.

قضیه ۱۳.۳. فرض کنیم $\triangle$ یک t-نرم ارشمیدسی باشد. در این صورت عنصر $a \in [0, 1)$ و یکریختی ترتیبی $f : [0, 1] \longrightarrow [a, 1]$ وجود دارند به طوری که

$$x\triangle y = f^{-1}(f(x)f(y) \vee a),$$

برای هر $x, y \in [0, 1]$؛ هم‌چنین اگر $k : [0, 1] \longrightarrow [b, 1]$ یک یکریختی ترتیبی باشد آن‌گاه $x\triangle y = k^{-1}(k(x)k(y) \vee b)$ اگر و تنها اگر $f(x) = k(x)^r$ برای بعضی $r > 0$.

اثبات. [۶، قضیه ۳.۲.۵] □

می‌توان قضایای ۸.۳ و ۱۳.۳ را به شکل زیر و در یک قضیه ادغام کرد.

فرض کنیم

$$\mathcal{F} = \{f | f : [0, 1] \longrightarrow [a, 1], \quad \text{است (=مولد ضربی) یکریختی ترتیبی } f\}. \tag{۱۴}$$

رابطه $\approx$ را روی $\mathcal{F}$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

برای هر $f, k \in \mathcal{F}$،

$$f \approx k \quad \text{اگر و تنها اگر} \quad f(x) = k(x)^r \quad \text{برای بعضی } r > 0. \tag{۱۵}$$

به سادگی دیده می‌شود که $\approx$ یک رابطه هم‌ارزی روی مجموعه $\mathcal{F}$ است.

قرار می‌دهیم:

$$\mathcal{A} = \{\triangle | \quad \text{یک } t\text{-نرم ارشمیدسی است } \triangle\} \tag{۱۶}$$

قضیه ۱۴.۳. فرض کنیم $\mathcal{F}$ و $\mathcal{A}$ مجموعه‌های معرفی شده در (۱۴) و (۱۶) باشند. در این صورت تابع

$$\varphi : \frac{\mathcal{F}}{\approx} \longrightarrow \mathcal{A}$$
$$[f] \longmapsto \triangle_f$$

یک تناظر یک به یک است. که در آن $\frac{\mathcal{F}}{\approx}$ مجموعه کلاس‌های هم‌ارزی $\mathcal{F}$ تحت رابطه هم‌ارزی $\approx$ و $\triangle_f$ همان t-نرم در تعریف ۶.۳ است.

اثبات. این مطلب در واقع ترکیب دو قضیه ۸.۳ و ۱۳.۳ می‌باشد. □

در ادامه نشان می‌دهیم t-نرم‌های ارشمیدسی به دو دسته مجزا تقسیم می‌شوند.

تعریف ۱۵.۳. فرض کنیم $\triangle$ یک t-نرم باشد. $\triangle$ را

۱. پوچ‌توان نامند اگر برای هر $x \in [۰, ۱)$، عدد صحیح مثبت n موجود باشد به طوری‌که $x^{[n]} = ۰$؛ جایی‌که

$$x^{[n]} = \underbrace{x \triangle x \triangle \dots \triangle x}_{n \text{ بار}}.$$

۲. اکید نامند هرگاه برای هر $x \in (۰, ۱]$، $x^{[n]} > ۰$ برای هر عدد صحیح مثبت n.

مثال ۱۶.۳. فرض کنیم $\blacktriangle$ همان t-نرم لوکاسویچ تعریف شده در (۱۲) باشد. در این صورت $\blacktriangle$ پوچ‌توان است. برای اثبات این مطلب توجه می‌کنیم که برای هر $x \in [۰, ۱)$ عدد طبیعی n وجود دارد به طوری‌که $x \leq \frac{n}{n+۱}$. زیرا در غیر این صورت،

$$x \geq \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+۱} = ۱.$$

که تناقض است. در نتیجه، $(n+۱)x - n \leq ۰$. بنابراین $x^{[n+۱]} = ((n+۱)x - n) \vee ۰ = ۰$.

مثال ۱۷.۳. فرض کنیم $\bullet$ همان t-نرم حاصلضرب تعریف شده در (۱۱) و $\triangle_5 (= \min)$ همان t-نرم تعریف شده در مثال ۶.۲ باشد. به سادگی دیده می‌شود که $\bullet$ و $\triangle_5$ اکید هستند.

می‌توان t-نرم‌هایی را ساخت که نه پوچ‌توان هستند و نه اکید.

مثال ۱۸.۳. تابع

$$x \triangle y = \begin{cases} 0 & (x,y) \in [0, \frac{1}{2}] \times [0, \frac{1}{2}], \\ x \wedge y & \text{در غیر این صورت.} \end{cases}$$

یک t-نرم بوده که نه پوچ‌توان است و نه اکید.

در مورد t-نرم‌های ارشمیدسی وضعیت به گونه دیگری است. در ادامه نشان می‌دهیم یک t-نرم ارشمیدسی، اکید است اگر و تنها اگر پوچ‌توان نباشد.

لم ۱۹.۳. فرض کنید $f : [0,1] \longrightarrow [a,1]$ یک مولد ضربی از t-نرم ارشمیدسی $\triangle$ باشد. در این‌صورت

$$x^{[n]} = f^{-1}(f(x)^n \vee f(0)), \qquad x \in [0,1].$$

اثبات. اثبات را با استقراء روی n انجام می‌دهیم. از آن‌جا که $f(0) \leq f(x)$ بنابراین داریم:

$$f^{-1}(f(x) \vee f(0)) = f^{-1}(f(x)) = x = x^{[1]}.$$

لذا حکم به ازای $n = 1$ برقرار است. حال فرض کنیم حکم برای $n = k$ برقرار باشد. نشان می‌دهیم برای $n = k + 1$ نیز برقرار خواهد بود. با توجه به تساوی (۱۳)، فرض استقراء و لم

۷.۳ داریم:

$$\begin{aligned} x^{[k+1]} = x^{[k]} \triangle x &= f^{-1}(f(x)^k \vee f(0)) \triangle x \\ &= f^{-1}(f(f^{-1}(f(x)^k \vee f(0))) f(x) \vee f(0)) \\ &= f^{-1}((f(x)^k \vee f(0)) f(x) \vee f(0)) \\ &= f^{-1}(f(x)(f(x)^{k-1} f(x) \vee f(0)) \vee f(0)) \\ &= f^{-1}(f(x)^{k+1} \vee f(0)). \end{aligned}$$

و حکم ثابت می‌شود. □

نتیجه ۲۰.۳. فرض کنیم $\triangle$ یک t-نرم ارشمیدسی بوده و $f : [0, 1] \longrightarrow [a, 1]$ مولدی ضربی برای آن باشد. در این صورت،

۱. $\triangle$ پوچ‌توان است اگر و تنها اگر $f(0) > 0$؛

۲. $\triangle$ اکید است اگر و تنها اگر $f(0) = 0$.

اثبات. (۱) فرض کنیم $x \in (0, 1)$. بنابراین $0 < f(x) < 1$. اگر $f(0) > 0$ آن‌گاه عدد طبیعی n وجود دارد به طوری‌که $f(x)^n < f(0)$. در نتیجه داریم:

$$x^{[n]} = f^{-1}(f(x)^n \vee f(0)) = f^{-1}(f(0)) = 0$$

و لذا $\triangle$ پوچ‌توان است.

حال فرض کنیم $\triangle$ پوچ‌توان باشد و با برهان خلف گیریم $f(0) = 0$. بنابراین برای هر عدد طبیعی n،

$$x^{[n]} = f^{-1}(f(x)^n \vee f(0)) = f^{-1}(f(x)^n).$$

اما $f(x)^n \neq ۰$ و در نتیجه، $x^{[n]} \neq ۰$ که در تناقض با پوچ‌توانی $\triangle$ است.

(۲) با استدلالی مشابه (۱) به دست می‌آید. □

نتیجه ۲۱.۳. فرض کنیم $\triangle$ یک t-نرم ارشمیدسی باشد. در این صورت $\triangle$ اکید است اگر و تنها اگر پوچ‌توان نباشد.

اثبات. فرض کنیم f مولدی ضربی برای $\triangle$ باشد. در این صورت $f(۰) = ۰$ یا $f(۰) > ۰$ و هر دوی این‌ها نمی‌تواند با هم اتفاق بیفتد. حال حکم از نتیجه ۲۰.۳ به دست می‌آید. □

نتیجه ۲۲.۳. فرض کنیم $\triangle$ یک t-نرم ارشمیدسی باشد. در این صورت $\triangle$ اکید است اگر و تنها اگر یکریختی ترتیبی $f : [۰, ۱] \longrightarrow [۰, ۱]$ موجود باشد به طوری‌که

$$x \triangle y = f^{-۱}(f(x)f(y)).$$

هم‌چنین یکریختی ترتیبی $k : [۰, ۱] \longrightarrow [۰, ۱]$ در این شرط صدق می‌کند اگر و تنها اگر $f(x) = k(x)^r$ برای بعضی $r > ۰$.

اثبات. از قضیه ۱۳.۳ و نتیجه ۲۰.۳ ثابت می‌شود. □

گزاره زیر در مورد t-نرم‌های ارشمیدسی پوچ‌توان، در بخش بعد مورد استفاده ما خواهد بود.

گزاره ۲۳.۳. فرض کنیم $\triangle$ یک t-نرم ارشمیدسی باشد. در این صورت $\triangle$ پوچ‌توان است اگر و تنها اگر عناصر $x, y \in (۰, ۱)$ موجود باشند به طوری که $x \triangle y = ۰$.

اثبات. فرض کنیم $\triangle$ پوچ‌توان بوده و $x \in (۰, ۱)$ عنصر دلخواهی باشد. بنابراین عدد طبیعی $n > ۱$ وجود دارد به طوری که $x^{[n]} = ۰$ و $x^{[n-۱]} \neq ۰$. بنابراین با در نظر گرفتن $y = x^{[n-۱]}$ داریم $x \triangle y = ۰$.

برعکس، فرض کنیم عناصر $x, y \in (۰, ۱)$ موجود باشند به طوری که

$x\triangle y = \circ$. و فرض کنیم $\triangle$ پوچ‌توان نباشد. بنابراین تابع مولدی مانند f وجود دارد به طوری که $f(\circ) = \circ$ و $x\triangle y = f^{-1}(f(x)f(y)) = \circ$. پس $f(x)f(y) = \circ$. و از اینجا، $f(x) = \circ$ یا $f(y) = \circ$. و در نتیجه، $x = \circ$ یا $y = \circ$ که تناقض است زیرا $x, y \in (\circ, 1)$. □

۲.۳ مولدهای جمعی

از نقطه نظر تاریخی، نمایش t-نرم‌های ارشمیدسی ابتدا به وسیله مولدهای جمعی صورت گرفت.

تعریف ۲۴.۳. فرض کنیم $\triangle$ یک t-نرم ارشمیدسی باشد. تابع پیوسته و اکیداً نزولی $g : [\circ, 1] \longrightarrow [\circ, \infty]$ که $\circ < g(\circ) \leq \infty$ و $g(1) = \circ$ را یک مولد جمعی برای $\triangle$ می‌نامند هرگاه

$$x\triangle y = g^{-1}((g(x) + g(y)) \wedge g(\circ)).$$

قضیه زیر ارتباط بین مولدهای ضربی و جمعی یک t-نرم ارشمیدسی را مشخص می‌کند.

قضیه ۲۵.۳. فرض کنیم $g : [\circ, 1] \longrightarrow [\circ, \infty]$ یک تابع پیوسته، اکیداً نزولی با $\circ < g(\circ) \leq \infty$ و $g(1) = \circ$ باشد. قرار می‌دهیم

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{-g(x)} \\ x \bullet_f y &= f^{-1}(f(x)f(y) \vee f(\circ)) \\ x\triangle_{g^+} y &= g^{-1}((g(x) + g(y)) \wedge g(\circ)). \end{aligned}$$

در این صورت، $f : [\circ, 1] \longrightarrow [\circ, \infty]$ یک یکریختی ترتیبی بوده و $\triangle_{g^+} = \bullet_f$.

اثبات. به سادگی دیده می‌شود که f یک یکریختی ترتیبی بوده و $f^{-1}(x) = g^{-1}(-\ln(x))$. حال فرض کنیم $x, y \in [\circ, 1]$. اگر $f(x)f(y) \geq f(\circ)$ آن‌گاه با لگاریتم‌گیری از طرفین

می‌توان نشاد داد که $g(\circ) \leq g(x)+g(y)$. لذا داریم:

$$\begin{aligned} x \bullet_f y &= f^{-1}(f(x)f(y)) \\ &= f^{-1}(e^{-g(x)}e^{-g(y)}) \\ &= f^{-1}(e^{-(g(x)+g(y))}) \\ &= g^{-1}(-\ln(e^{-(g(x)+g(y))})) \\ &= g^{-1}(g(x)+g(y)) \\ &= x\triangle_{g+}y. \end{aligned}$$

اما اگر $f(x)f(y) < f(\circ)$ آن‌گاه $g(x)+g(y) > g(\circ)$ و داریم:

$$\begin{aligned} x \bullet_f y &= f^{-1}(f(\circ)) = \circ \\ x\triangle_{g+}y &= g^{-1}(g(\circ)) = \circ. \end{aligned}$$

و حکم ثابت است. □

نتیجه ۲۶.۳. فرض کنیم $\triangle$ یک t-نرم ارشمیدسی با مولد جمعی g باشد. در این صورت:

۱. $\triangle$ پوچ‌توان است اگر و تنها اگر $g(\circ) < \infty$؛

۲. $\triangle$ اکید است اگر و تنها اگر $g(\circ) = \infty$.

اثبات. در قضیه ۲۵.۳، f تابع مولد ضربی و g تابع مولد جمعی برای t-نرم $\bullet_f(=\triangle_{g+})$ است و $g(x) = -\ln f(x)$. بنابراین نتیجه از ۲۰.۳ حاصل می‌شود. □

می‌توان مشابه قضایای ۸.۳ و ۱۳.۳ را برای حالت مولد جمعی به صورت زیر بیان کرد:

قضیه ۲۷.۳. فرض می‌کنیم $\triangle$ یک t-نرم باشد. در این صورت $\triangle$ ارشمیدسی است اگر و تنها اگر یک تابع پیوسته و اکیداً نزولی $g : [\circ, ۱] \longrightarrow [\circ, \infty]$ با $g(۱) = \circ$ موجود باشد به

طوری‌که
$$x \triangle y = g^{-1}((g(x)+g(y)) \wedge g(0)).$$
هم‌چنین هرگاه $s : [0,1] \longrightarrow [0,\infty]$ خواص g را داشته باشد آن‌گاه
$$x \triangle y = s^{-1}((s(x)+s(y)) \wedge s(0))$$
اگر و تنها اگر $g(x) = rs(x)$ برای بعضی $r > 0$.

اثبات. به کمک قضایای ۱۳.۳ و ۲۵.۳ به سادگی اثبات می‌شود. □

ملاحظه ۲۸.۳. دقت کنید که با توجه به قسمت دوم قضیه ۲۷.۳، مولدهای جمعی یک t-نرم ارشمیدسی تا حد یک ثابت ضربی مثبت، یکتا هستند. هم‌چنین می‌توان مشابه قضیه ۱۴.۳ را در مورد مولدهای جمعی، بیان و اثبات کرد.

به کمک قضیه ۲۵.۳ می‌توانیم توصیف دیگری از t-نرم‌های ارشمیدسی پوچ‌توان ارائه کنیم.

گزاره ۲۹.۳. فرض کنیم $\triangle$ یک t-نرم ارشیمدسی باشد. در این صورت $\triangle$ پوچ‌توان است اگر و تنها اگر یکریختی ترتیبی $\varphi : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ موجود باشد به طوری که
$$x \triangle y = \varphi^{-1}(\varphi(x) \blacktriangle \varphi(y))$$
که در آن $\blacktriangle$ همان t-نرم لوکاسویچ در ۱۲ است.

اثبات. فرض کنیم $\triangle$ پوچ‌توان بوده و $g : [0,1] \longrightarrow [0,\infty)$ مولد جمعی آن باشد. بنابراین
$$x \triangle y = g^{-1}((g(x)+g(y)) \wedge g(0)).$$
قرار می‌دهیم
$$\varphi(x) = 1 - \frac{g(x)}{g(0)}, \qquad x \in [0,1].$$

به سادگی دیده می‌شود که φ یک یکریختی ترتیبی است و

$$g(x) = g(\circ) - g(\circ)\varphi(x),$$
$$g^{-۱}(x) = \varphi^{-۱}(۱ - \frac{x}{g(\circ)}).$$

بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} x\triangle y &= g^{-۱}((g(x)+g(y)) \wedge g(\circ)) \\ &= \varphi^{-۱}(۱ - \frac{(g(\circ) - g(\circ)\varphi(x) + g(\circ) - g(\circ)\varphi(y)) \wedge g(\circ)}{g(\circ)}) \\ &= \varphi^{-۱}((\varphi(x)+\varphi(y)) \vee \circ) \\ &= \varphi^{-۱}(\varphi(x)\blacktriangle\varphi(y)). \end{aligned}$$

برای اثبات عکس گزاره، فرض کنیم $x \in [\circ, ۱)$. بنابراین $\varphi(x) \in [\circ, ۱)$. اما در مثال ۱۶.۳ نشان دادیم که $\blacktriangle$ یک t-نرم پوچ‌توان است. بنابراین عدد طبیعی n وجود دارد به طوری که

$$\varphi(x)^{[n]} = \underbrace{\varphi(x)\blacktriangle\varphi(x)\blacktriangle\ldots\blacktriangle\varphi(x)}_{n \text{ بار}} = \circ.$$

از سوی دیگر به سادگی (و به کمک استقراء) دیده می‌شود که $\varphi(x)^{[n]} = \varphi(x^{[n]})$. در نتیجه، $\varphi(x^{[n]}) = \circ$. لذا $x^{[n]} = \circ$. بنابراین $\triangle$ پوچ‌توان است. $\square$

ملاحظه ۳۰.۳. با استفاده از قضایای ۸.۳، ۱۳.۳ و ۲۵.۳ برخی از مثال‌های مهم از t-نرم‌های ارشمیدسی را به همراه توابع مولد ضربی و جمعی آن‌ها را در جدول ۲ آورده‌ایم. طبق نتیجه ۲۰.۳، t-نرم‌هایی که برای مولد ضربی f آن‌ها داشته باشیم $f(\circ) = \circ$ اکید بوده و بقیه t-نرم‌ها

پوچ‌توان هستند. بنابراین در جدول ۲ ملاحظه می‌کنیم که t-نرم‌های حاصلضرب، شوایزر [۵] (۱) و هاماشه [۶] اکید بوده و لوکاسویچ، یاگر [۷] و شوایزر (۲)، پوچ‌توان هستند.

جدول ۲: برخی از t-نرم‌های ارشمیدسی به همراه توابع مولد [۶، فصل ۵]

نام t-نرم	ضابطه t-نرم، $(p > ۰)$	مولد ضربی f	مولد جمعی g
حاصلضرب	xy	x	$-\ln x$
لوکاسویچ	$(x+y-۱) \vee ۰$	$e^{x-۱}$	$۱-x$
یاگر	$\left(۱-\sqrt[p]{(۱-x)^p+(۱-y)^p}\right) \vee ۰$	$e^{-(۱-x)^p}$	$(۱-x)^p$
شوایزر (۱)	$(x^{-p}+y^{-p}-۱)^{-\frac{۱}{p}}$	$e^{-x^{-p}}$	x^{-p}
شوایزر (۲)	$(x^p+y^p-۱) \vee ۰$	$e^{x^p-۱}$	$۱-x^p$
هاماشه	$\frac{xy}{p+(۱-p)(x+y-xy)}$	$\frac{x}{p+(۱-p)x}$	$\ln\frac{p+(۱-p)x}{x}$

۳.۳ یکریختی t-نرم‌ها

همان‌طور که در قضیه ۳.۸ دیدیم یک راه برای ساختن t-نرم‌های ارشمیدسی به صورت زیر است:
برای هر $a \in [۰,۱)$ و هر یکریختی ترتیبی $f : [۰,۱] \longrightarrow [a,۱]$ (تعریف ۳.۴) تعریفِ

$$x \bullet_f y = f^{-۱}(f(x)f(y) \vee a) \qquad (۱۷)$$

یک t-نرم ارشمیدسی به ما می‌دهد. همچنین طبق قضیه ۳.۱۳ تمام t-نرم‌های ارشمیدسی به صورت (۱۷) هستند.

حال این سوال مطرح است که چه موقع دو t-نرم اساساً یکی هستند؟
برای پاسخ، مفهوم یکریختی t-نرم‌ها را تعریف کرده و نشان می‌دهیم تا حد یکریختی، تنها یک t-نرم ارشمیدسی اکید داریم که همان t-نرم حاصلضرب است. و تا حد یکریختی، تنها یک

[5] B. Schweizer
[6] H. Hamacher
[7] R. R. Yager

t-نرم ارشمیدسی پوچ‌توان داریم که همان t-نرم لوکاسویچ است.

نمادگذاری. ساختار $([\circ,\text{۱}],\leq)$ را با نماد $\mathbb{I}$ نمایش می‌دهیم. هم‌چنین مجموعه تمام یکریختی‌های ترتیبی روی $\mathbb{I}$ (تعریف ۴.۳ به ازای $a=\circ$) را با $Aut(\mathbb{I})$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۳۱.۳. فرض کنیم $\circ$ و $\diamond$ دو t-نرم باشند. سیستم‌های $(\mathbb{I},\circ)$ و $(\mathbb{I},\diamond)$ را یکریخت نامند هرگاه عضو $h\in Aut(\mathbb{I})$ موجود باشد به طوری‌که برای هر $x,y\in[\circ,\text{۱}]$ داشته باشیم $h(x\circ y)=h(x)\diamond h(y)$.

قضیه ۳۲.۳. فرض کنیم $\circ$ یک t-نرم ارشمیدسی باشد. در این‌صورت $\circ$ اکید است اگر و تنها اگر با t-نرم حاصلضرب یکریخت باشد؛ یعنی $f\in Aut(\mathbb{I})$ موجود باشد به طوری‌که برای هر $x,y\in[\circ,\text{۱}]$ داشته باشیم $f(x\circ y)=f(x)f(y)$. هم‌چنین عضو $k\in Aut(\mathbb{I})$ در این شرط صدق می‌کند اگر و تنها اگر $f(x)=k(x)^r$ برای بعضی $r>\circ$.

اثبات. به سادگی از نتیجه ۲۰.۳ حاصل می‌شود. □

قضیه ۳۳.۳. فرض کنیم $\triangle$ یک t-نرم ارشمیدسی باشد. در این‌صورت $\triangle$ پوچ‌توان است اگر و تنها اگر با t-نرم لوکاسویچ یکریخت باشد؛ یعنی $\varphi\in Aut(\mathbb{I})$ موجود باشد به طوری‌که $\varphi(x\triangle y)=\varphi(x)\blacktriangle\varphi(y)$ جایی که $\blacktriangle$ همان t-نرم لوکاسویچ است که در ۱۲ تعریف شده است.

اثبات. به سادگی از گزاره ۲۹.۳ به دست می‌آید. □

۴ t-نرم‌های صادق در قانون تناقض

در این بخش ابتدا مفهوم نفی فازی را تعریف کرده و سپس t-نرم‌های صادق در قانون تناقض را مدنظر قرار می‌دهیم. نشان می‌دهیم که t-نرم‌های ارشمیدسی که در این قانون صدق کنند پوچ‌توان هستند. در پایان مثال‌هایی از چنین t-نرم‌هایی را ارائه می‌کنیم.

تعریف ۱.۴. تابع $N : [\circ, ۱] \longrightarrow [\circ, ۱]$ را یک نفی فازی نامند اگر $N(\circ) = ۱$، $N(۱) = \circ$ و N صعودی نباشد.

مثال ۲.۴. تابع

$$N : [\circ, ۱] \longrightarrow [\circ, ۱], \quad N(x) = \begin{cases} ۱ & x = \circ, \\ \circ & x > \circ. \end{cases}$$

یک نفی فازی است.

تعریف ۳.۴. نفی N را اکید نامند اگر پیوسته و اکیداً نزولی باشد.

مثال ۴.۴. تابع

$$N : [\circ, ۱] \longrightarrow [\circ, ۱], \quad N(x) = ۱ - x^{۲}.$$

یک نفی اکید است.

تعریف ۵.۴. نفی اکید N را قوی نامند اگر $N(N(x)) = x$ برای هر $x \in [\circ, ۱]$.

مثال ۶.۴. تابع

$$N_\lambda : [\circ, ۱] \longrightarrow [\circ, ۱], \quad N_\lambda(x) = \frac{۱ - x}{۱ + \lambda x} \quad (\lambda > -۱)$$

یک نفی قوی است. این نفی را نفی سوگینو [8] می‌نامند که در حالت خاص $N_\circ(x) = ۱ - x$ نفی زاده است.

تعریف ۷.۴. فرض کنید T یک t-نرم و N یک نفی فازی باشد. گوییم زوج (T, N) در قانون تناقض [9] صدق می‌کند اگر به ازای هر $x \in [\circ, ۱]$،

$$T(N(x), x) = \circ. \qquad (۱۸)$$

[8] M. Sugeno

[9] Law of Contradiction

حال به بررسی t-نرم‌های ارشمیدسی صادق در قانون تناقض در تعریف ۷.۴ می‌پردازیم.

قضیه ۸.۴. فرض کنید T یک t-نرم ارشمیدسی و N یک نفی فازی باشد به طوری‌که $x \in (0, 1)$ موجود باشد که $N(x) \neq 0$. اگر (T, N) در قانون تناقض صدق کند آن‌گاه T پوچ‌توان است.

اثبات. به سادگی از گزاره ۲۳.۳ نتیجه می‌شود. □

نتیجه ۹.۴. فرض کنیم T یک t-نرم ارشمیدسی و N_λ نفی سوگینو در مثال ۶.۴ باشد به طوری‌که برای هر $x \in [0, 1]$،

$$T(x, N_\lambda(x)) = 0. \tag{19}$$

در این صورت T پوچ‌توان است.

اثبات. تابع N_λ در مثال ۶.۴ یک نفی است که در شرط قضیه ۸.۴ صدق می‌کند. □

نتیجه ۱۰.۴. فرض کنیم T یک t-نرم ارشمیدسی باشد به طوری‌که برای هر $x \in [0, 1]$،

$$T(x, 1 - x) = 0. \tag{20}$$

در این صورت T پوچ‌توان است.

اثبات. این همان نتیجه ۹.۴ به ازای $\lambda = 0$ است. □

در ادامه، یک شرط لازم و کافی را برای این که زوج (T, N) در قانون تناقض صدق کند بیان و اثبات می‌کنیم. برای این منظور به لم زیر نیاز داریم.

لم ۱۱.۴. فرض کنیم T یک t-نرم پیوسته و N یک نفی فازی اکید باشد به طوری که (T, N) در قانون تناقض صدق کند. در این صورت T ارشمیدسی است.

اثبات. با برهان خلف فرض کنیم T ارشمیدسی نباشد؛ یعنی $x \in (\circ, \text{۱})$ موجود باشد به طوری که $T(x, x) = x$. اگر $x \leq N(x)$ آن‌گاه

$$x = T(x, x) \leq T(N(x), x) = \circ.$$

پس $x = \circ$ که تناقض است زیرا $x \in (\circ, \text{۱})$. اگر $x > N(x)$ آن گاه با توجه به پیوستگی T، تابع

$$T_x : [\circ, \text{۱}] \longrightarrow [\circ, \text{۱}], \qquad T_x(y) = T(x, y),$$

پیوسته بوده و با توجه به قضیه مقدار میانی، $y \in [\circ, \text{۱}]$ وجود دارد به طوری که

$$N(x) = T_x(y) = T(x, y).$$

از طرفی، $y \leq x$. زیرا اگر $y > x$ آن‌گاه

$$N(x) = T(x, y) \geq T(x, x) = x$$

که تناقض است. بنابراین داریم:

$$N(x) = T(x, y) = T(T(x, x), y) = T(x, T(x, y)) = T(x, N(x)) = \circ.$$

اما N یک به یک است (زیرا اکیداً نزولی است). پس از $N(x) = \circ = N(\text{۱})$ نتیجه می‌شود که $x = \text{۱}$ و این تناقض است زیرا $x \in (\circ, \text{۱})$. $\square$

قضیه ۱۲.۴. فرض کنیم T یک t-نرم پیوسته و N یک نفی فازی اکید باشد. در این صورت

(T,N) در قانون تناقض صدق می‌کند اگر و تنها اگر یکریختی ترتیبی $\varphi:[۰,۱]\longrightarrow[۰,۱]$ موجود باشد به طوری که به ازای هر $x,y\in[۰,۱]$،

$$T(x,y)=\varphi^{-۱}(\varphi(x)\blacktriangle\varphi(y))$$

که در آن $\blacktriangle$، همان t-نرم لوکاسویچ است و

$$N(x)\leq\varphi^{-۱}(۱-\varphi(x)).$$

اثبات. فرض کنیم (T,N) در قانون تناقض در تعریف ۷.۴ صدق کند. لذا T طبق لم ۱۱.۴، ارشمیدسی است و طبق قضیه ۸.۴ پوچ‌توان است. بنابراین طبق گزاره ۲۹.۳ یکریختی ترتیبی $\varphi:[۰,۱]\longrightarrow[۰,۱]$ وجود دارد به طوری که

$$T(x,y)=\varphi^{-۱}(\varphi(x)\blacktriangle\varphi(y)).$$

بنابراین داریم:

$$\begin{aligned}T(N(x),x)=۰&\Longleftrightarrow\varphi^{-۱}(\varphi(N(x))\blacktriangle\varphi(x))=۰\\&\Longleftrightarrow\varphi(N(x))\blacktriangle\varphi(x)=۰\\&\Longleftrightarrow(\varphi(N(x))+\varphi(x)-۱)\vee۰=۰\\&\Longleftrightarrow\varphi(N(x))\leq۱-\varphi(x)\\&\Longleftrightarrow N(x)\leq\varphi^{-۱}(۱-\varphi(x)).\end{aligned}$$

□

در ادامه t-نرم‌های ارشمیدسی را که در شرط (۲۰) صدق می‌کنند می‌سازیم.

لم ۱۳.۴. فرض کنیم $h : [-\frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۲}] \longrightarrow \mathbb{R}$ یک تابع پیوسته و اکیداً نزولی باشد. در این صورت،

$$g : [۰, ۱] \longrightarrow [۰, \infty), \quad g(t) = h(t - \frac{۱}{۲}) - h(\frac{۱}{۲})$$

تابعی پیوسته و اکیداً نزولی بوده، $۰ < g(۰) < \infty$ و $g(۱) = ۰$.

اثبات. به سادگی ثابت می‌شود. □

قضیه ۱۴.۴. اگر h و g توابع معرفی شده در لم ۱۳.۴، همچنین h تابعی فرد و به علاوه T یک t-نرم ارشمیدسی با تابع مولد جمعی g باشد، آنگاه شرط (۲۰) برقرار بوده و در نتیجه زوج $(T, N(x) = ۱ - x)$ در قانون تناقض در تعریف ۷.۴ صدق می‌کند.

اثبات. فرض کنیم $x \in [۰, ۱]$. به سادگی دیده می‌شود که $g(x) + g(۱ - x) = g(۰)$. در نتیجه طبق قضیه ۲۵.۳ داریم:

$$T(x, ۱ - x) = g^{-۱}((g(x) + g(۱ - x)) \wedge g(۰)) = g^{-۱}(g(۰)) = ۰.$$

□

حال به کمک مفاهیم فوق و قضیه ۲۵.۳، مثال‌هایی از t-نرم‌های صادق در قانون تناقض را خواهیم آورد.

مثال ۱۵.۴. در لم ۱۳.۴ تابع h را با ضابطه $h(x) = -x$ تعریف می‌کنیم. به سادگی دیده می‌شود که $g(x) = ۱ - x$ و $T(x, y) = (x + y - ۱) \vee ۰$ که همان t-نرم لوکاسویچ است.

مثال ۱۶.۴. در لم ۱۳.۴ تابع h را با ضابطه $h(x) = -\frac{۱}{۲}\tan(\frac{\pi x}{۲})$ تعریف می‌کنیم. به سادگی دیده می‌شود که $g(x) = \frac{۱}{۲} + \tan(\frac{\pi x}{۲} - \frac{\pi}{۴})$ و

$$T(x, y) = (\frac{۱}{۲} + \frac{۲}{\pi}\arctan(\frac{۱}{۲} + \tan(\frac{\pi x}{۲} - \frac{\pi}{۴}) + \tan(\frac{\pi y}{۲} - \frac{\pi}{۴}))) \vee ۰.$$

۵ نتیجه‌گیری

عملگر «و» در ریاضیات و منطق، به عنوان رابطی بین گزاره‌ها از اهمیت خاصی برخوردار است. جدول ارزش این عملگر، در قالب ریاضیات معمولی، به صورت یکتا و منحصر به فرد (مطابق جدول شماره ۱) تعریف می‌شود و این تعریف، مورد توافق منطق‌دانان و ریاضی‌دانان است. اما برای مدل‌سازی این عملگر در ریاضیات فازی، می‌توانیم علاوه بر عملگر مینیمم از t–نرم‌ها نیز استفاده کنیم. این مفهوم را تعریف کرده و سپس به بررسی یک رده خاص از t–نرم‌ها تحت عنوان t–نرم‌های ارشمیدسی پرداختیم. نشان دادیم که این رده دارای مولدهای ضربی و نیز جمعی می‌باشد. مثال‌های متنوعی از t–نرم‌ها به همراه مولدهایشان را در جدول شماره ۲ ارائه کردیم. سپس با معرفی مفهوم یکریختی t–نرم‌ها ثابت کردیم که تا حد یکریختی تنها دو t–نرم ارشمیدسی داریم. یکی t–نرم حاصلضرب و دیگری t–نرم لوکاسویچ. t–نرم‌های صادق در قانون تناقض، به دلیل حفظ خاصیت طرد شق ثالث، از اهمیت خاصی برخوردار هستند. مفاهیم نفی فازی و قانون تناقض را تعریف کرده و توصیفی از زوج‌های صادق در قانون تناقض ارائه کردیم. در انتها مثال‌هایی از t–نرم‌های صادق در قانون تناقض را به کمک مفاهیمی از حسابان، آورده‌ایم.

مراجع

[1] Bacczynski, M. Jayaram, B. (2008), *Fuzzy Implications*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg.

[2] Fodor, J., Roubens, M. (1994), *Fuzzy preference modelling and multicriteria decision support*, Kluwer, Dordrecht.

[3] Klement, P., Mesiar, R., Pap, E. (2000), *Triangular Norms*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands.

[4] Lin, S. Y. T., Lin, Y. F. (1985), *Set theory with applications*, Mancorp Pub.

[5] Mandelkern, M. (1982), Continuity of monotone functions, *Pacific J. Math. 99*, **2**, 413-418.

[6] Nguyen, H.T., Walker, E.A. (2006), *A first course in fuzzy logic*, 3nd edn. CRC Press, Boca Raton.

[7] Schweizer, B. Sklar, A. (1961), Associative functions and statistical triangle inequalities, *Publ. Math. Debrecen*, **8**, 169-186.

[8] Schweizer, B. Sklar, A. (1983), *Probabilistic Metric Spaces*, NorthHolland, Amsterdam.

[9] Zadeh, L. (1965), Fuzzy Sets, *Information and Control*, **8**, 338-353.