سیستم‌های فازی و کاربردها

سال دوم، شماره دوم (پاییز و زمستان ۱۳۹۸) صص. ۱۲۳ تا ۱۵۰

DOR: 20.1001.1.27174409.1397.2.2.6.6

مروری بر مجموعه‌های فازی نوع-۲

شکوه سرگلزائی، حسن میش مست نهی

دانشگاه سیستان و بلوچستان، دانشکده ریاضی

چکیده

اکثر داده‌ها در جهان واقعی به صورت نادقیق و مبهم هستند؛ یکی از روش‌های مدل‌سازی مفاهیم نادقیق، استفاده از مجموعه‌های فازی است. یک تعمیم از مجموعه‌های فازی به صورت مجموعه‌های فازی نوع-۲ هستند که درجه عضویت‌هایی از نوع مجموعه‌های فازی دارند. چنین مجموعه‌هایی در جایی که تعیین دقیق درجه‌ی عضویت برای یک مجموعه فازی مبهم باشد، مفید واقع می‌شود. مجموعه‌های فازی نوع-۲ بازه‌ای حالت خاصی از مجموعه‌های فازی نوع-۲ می‌باشند که از پیچیدگی کمتر و فهم آسانتری برخوردار هستند و نوع خاصی از این مجموعه‌ها، اعداد فازی نوع-۲ بازه‌ای می‌باشند. در این پژوهش مروری بر مجموعه‌های فازی نوع-۲ و مجموعه‌های فازی نوع-۲ بازه‌ای ارائه و به بررسی اعداد فازی نوع-۲ بازه‌ای و اعمال حسابی موجود بر آنها پرداخته می‌شود. همچنین مروری بر چند روش مقایسه‌ای و رتبه‌بندی مربوط به اعداد فازی نوع-۲ بازه‌ای ارائه خواهد شد.

۱ مقدمه

در مدل‌های جهان واقعی، داده‌ها به صورت قطعی بیان می‌شوند در حالی که بسیاری از این داده‌ها نادقیق هستند. برای تحلیل و بررسی مدل‌های واقعی با داده‌های نادقیق نمی‌توان از حساب اعداد حقیقی استفاده کرد. لذا برای بیان تجزیه و تحلیل داده‌های نادقیق مدل‌های جهان واقعی، از

Mathematics Subject Classification (2010): 62H25; 03E72, **Email:** hmnehi@hamoon.usb.ac.ir .

عبارات و کلمات کلیدی: مجموعه‌های فازی نوع-۱، مجموعه‌های فازی نوع-۲، مجموعه‌های فازی نوع-۲ بازه‌ای، رتبه بندی اعداد فازی نوع-۲ بازه‌ای.

رویکردهای بازه‌ای، تصادفی یا فازی که تعمیمی از اعداد حقیقی و حساب اعداد حقیقی هستند، استفاده می‌شود. مجموعه‌های فازی، برای اولین بار در سال ۱۹۶۵ میلادی توسط پروفسور لطفی عسگرزاده [۱۱] معرفی گردید.

سیستم‌های فازی به علت دارا بودن توابع عضویت با درجات تعلق دقیق، توانایی محدودی در کاهش اثر عدم قطعیت دارند و برای حل مسائل پیچیده با ابهامات زیاد، مناسب نیستند. زاده در سال ۱۹۷۵ میلادی مجموعه‌های فازی نوع-۲ را به عنوان تعمیمی از مجموعه‌های فازی مطرح کرد [۱۲، ۱۳، ۱۴]. برای آنکه بین مجموعه‌های فازی و مجموعه‌های فازی نوع-۲، تمایزی ایجاد شود به مجموعه‌های فازی معمولی، مجموعه‌های فازی نوع-۱ می‌گویند. مجموعه‌های فازی نوع-۲ دارای درجه عضویت‌های فازی می‌باشند که توانایی بیشتری برای کاهش اثر عدم قطعیت و مدل سازی مسائل دارند [۴]. یکی از حالت‌های خاص مجموعه‌های فازی نوع-۲، مجموعه‌های فازی نوع-۲ بازه‌ای می‌باشد که تعمیمی بر مجموعه‌های فازی نوع-۱ است [۹]. بنابراین نسبت به مجموعه‌های فازی نوع-۱، اطلاعات نادقیق بیشتری را بیان و نسبت به مجموعه‌های فازی نوع-۲ از پیچیدگی کمتر و فهم آسانتری برخوردار هستند. به همین دلیل در سال‌های اخیر، مدل برنامه‌ریزی خطی فازی نوع-۲ بازه‌ای از اهمیت و کاربرد بیشتری برخوردار شده است و تحقیقات بسیاری روی روش‌های حل آنها صورت گرفته است [۲، ۳]. همچنین، سنجش و مقایسه مجموعه‌های فازی نیز یکی دیگر از مفاهیم مهمی است که امروزه بسیار مورد توجه محققان قرار گرفته است. روش‌های رتبه‌بندی متعددی برای مقایسه و رتبه‌بندی اعداد فازی نوع-۱ ارائه شده است [۱۰]. با تعمیم اعداد فازی نوع-۱ به اعداد فازی نوع-۲ بازه‌ای که اطلاعات نادقیق بیشتری را پوشش می‌دهد، رتبه‌بندی در این سطح از اهمیت ویژه‌ای برخوردار خواهد بود [۵]. در پژوهش پیش رو، ابتدا در بخش ۲، مفاهیم مقدماتی مجموعه‌های فازی نوع-۱ را بیان کرده و سپس در بخش ۳، به بیان ویژگی‌های مجموعه‌های فازی نوع-۲ پرداخته خواهد شود. در بخش ۴، مجموعه‌های فازی نوع-۲ بازه‌ای بیان می‌شوند. در بخش ۵، اعداد فازی (ذوزنقه‌ای و مثلثی) نوع-۲ بازه‌ای که حالت خاصی از مجموعه‌های فازی نوع-۲ بازه‌ای هستند، شرح و اعمال حسابی موجود روی آن‌ها بیان خواهد شد. و در انتها در بخش ۶، مروری بر برخی روش‌های رتبه‌بندی اعداد فازی (ذوزنقه‌ای یا مثلثی) ارائه می‌شود.

۲ مجموعه فازی نوع

در حالت معمول به مجموعه‌های فازی، مجموعه‌های فازی نوع-۱ می‌گویند.

تعریف ۱.۲. فرض کنید X نشان دهنده‌ی مجموعه‌ی مرجع باشد. در این صورت مجموعه فازی $\tilde{A}$ روی X مجموعه‌ای از جفت های مرتب $\tilde{A} = \{(x, \mu_{\tilde{A}}(x)) | x \in X\}$ است، که در آن $\mu_{\tilde{A}}(x)$ درجه عضویت x می‌باشد.

$\mu_{\tilde{A}}(x)$ در بازه‌ی صفر و یک قرار دارد. صفر نشان دهنده‌ی عدم عضویت و یک نشان دهنده‌ی عضویت قطعی در A می‌باشد.

تعریف ۲.۲. تکیه گاه یک مجموعه فازی $\tilde{A}$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$supp(\tilde{A}) = \{x \in X | \mu_{\tilde{A}}(x) > ۰\}$$

تعریف ۳.۲. یک مجموعه فازی $\tilde{A}$، تعریف شده روی اعداد حقیقی را عدد فازی گویند هرگاه

۱. مجموعه فازی $\tilde{A}$ نرمال باشد؛ یعنی $\mu_{\tilde{A}}(x) = ۱$.

۲. مجموعه فازی $\tilde{A}$ محدب باشد؛ یعنی به ازای هر $\lambda \in [۰, ۱]$ ، داشته باشیم

$$\mu_{\tilde{A}}(\lambda x_۱ + (۱ - \lambda) x_۲) \geqslant min(\mu_{\tilde{A}}(x_۱), \mu_{\tilde{A}}(x_۲)).$$

۳. $\mu_{\tilde{A}}(x)$، یک تابع پیوسته باشد.

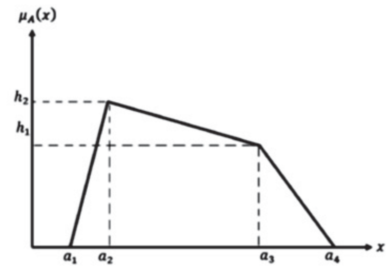
تعریف ۴.۲. عدد فازی $\tilde{A} \subseteq R$ مثبت است اگر به ازای هر $x < ۰$، داشته باشیم $\mu_{\tilde{A}}(x) = ۰$.

تعریف ۵.۲. مجموعه فازی ذوزنقه‌ای نوع-۱، $\tilde{A}$، روی بازه $[a_۱, a_۴]$ تعریف می‌شود و تابع عضویت آن به ترتیب مقادیری معادل $h_۱, h_۲ \in [۰, ۱]$ در نقاط $a_۲$ و $a_۳$ می‌گیرد. بنابراین مجموعه فازی ذوزنقه‌ای نوع-۱ به صورت $\tilde{A} = (a_۱, a_۲, a_۳, a_۴, h_۱, h_۲)$ بیان می‌شودکه در

آن $a_۱ \leq a_۲ \leq a_۳ \leq a_۴$، $h_۱ \leq h_۲$ یا $h_۲ \leq h_۱$ می‌باشد. تابع عضویت آن عبارت است از:

$$\mu_{\widetilde{A}}(x) = \begin{cases} h_۱(\frac{x-a_۱}{a_۲-a_۱}), & a_۱ \leq x \leq a_۲ \\ (h_۲ - h_۱)(\frac{x-a_۲}{a_۳-a_۲}) + h_۱, & a_۲ \leq x \leq a_۳ \\ h_۲(\frac{a_۴-x}{a_۴-a_۳}), & a_۳ \leq x \leq a_۴ \\ ۰, & x \leq a_۱, \quad x \geq a_۴ \end{cases} \qquad (۱)$$

شکل ۱، تابع عضویت عدد فازی ذوزنقه‌ای نوع-۱، یعنی رابطه (۱) را نمایش می‌دهد.



شکل ۱: تابع عضویت عدد فازی ذوزنقه‌ای نوع-۱

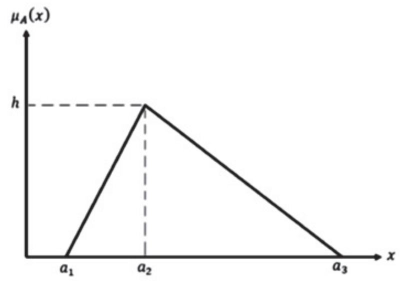
در تعریف فوق، اگر $h_۱ = h_۲ = ۱$ باشد، مجموعه فازی ذوزنقه‌ای نوع-۱ را یک عدد فازی ذوزنقه‌ای می‌نامند.

تعریف ۶.۲. در حالت خاص، در تعریف فوق اگر $a_۲ = a_۳$ باشد، عدد فازی ذوزنقه‌ای نوع-۱ به یک عدد فازی مثلثی نوع-۱ روی بازه $[a_۱, a_۳]$ تبدیل می‌شود و تابع عضویت آن مقداری معادل با $h \in [۰, ۱]$ در نقطه $a_۲$ که $a_۱ \leq a_۲ \leq a_۳$ است، می‌گیرد. بنابراین عدد فازی مثلثی نوع-۱

را به صورت $\tilde{A} = (a_1, a_2, a_3, h)$ نمایش داده و تابع عضویت آن در رابطه (۲) بیان می‌شود:

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} h(\frac{x-a_1}{a_2-a_1}), & a_1 \leq x \leq a_2 \\ h(\frac{x-a_3}{a_2-a_3}), & a_2 \leq x \leq a_3 \\ 0, & x \leq a_1, \ \ x \geq a_3 \end{cases} \quad (۲)$$

شکل ۲، نشان دهنده تابع عضویت عدد فازی مثلثی نوع-۱ می‌باشد. همچنین، اگر $h = 1$



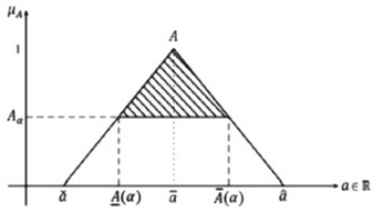
شکل ۲: تابع عضویت عدد فازی مثلثی نوع-۱

مجموعه فازی مثلثی نوع-۱ را عدد فازی مثلثی نوع-۱ می‌نامند.

تعریف ۷.۲. α -برش عدد فازی $\tilde{A}$ یک مجموعه است که به صورت

$$\tilde{A}_\alpha = \{x \in R | \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha\} = [\underline{A}(\alpha), \overline{A}(\alpha)]$$

تعریف می‌شود که $\underline{A}(\alpha) = inf\{x \in R | \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha\}$،
$\overline{A}(\alpha) = sup\{x \in R | \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha\}$. مینیمم و سوپریمم، به ترتیب کوچکترین کران پایین و بزرگترین کران بالا می‌باشند. به عنوان مثال، α -برش عدد فازی مثلثی نوع-۱ در شکل ۳ نشان داده شده است.



شکل ۳: α -برش عدد فازی مثلثی نوع-۱

۳ مجموعه فازی نوع

مفهوم مجموعه‌های فازی نوع-۲، تعمیمی بر مجموعه‌های فازی نوع -۱ می‌باشد که توسط زاده [۱۲] معرفی شد. در واقع مجموعه‌های فازی که درجه عضویت هر عنصر متعلق به مجموعه مرجع معرف آن، یک مجموعه فازی نوع -۱ باشد را مجموعه‌ی فازی نوع-۲ گویند [۵، ۶] و [۱۲]. در ادامه به معرفی مفاهیم مورد نیاز پرداخته می‌شود.

تعریف ۱.۳. مجموعه‌های فازی نوع-۲ را با نماد $\tilde{A}$ نمایش داده و با کمک تابع عضویت زیر، روی مجموعه مرجع X، تعریف می‌شود.

$$\tilde{A} : X \to F(U)$$

$$\mu_{\tilde{A}} : X \times U \longrightarrow V$$

که در آن $U = [0, 1]$ دامنه عضویت، X دامنه اولیه و $V = [0, 1]$ عضویت ثانویه x می‌باشد.

تعریف ۲.۳. مجموعه فازی نوع-۲، $\tilde{A}$، به کمک تابع عضویت نوع-۲، $\mu_{\tilde{A}}(x, u)$، مشخص می‌شود و می‌توان آن را به صورت رابطه زیر نمایش داد:

$$\tilde{A} = \{((x, u), \mu_{\tilde{A}}(x, u)) \mid \forall x \in X, \forall u \in J_x \subseteq [0, 1]\}$$

که در آن، $0 \leq \mu_{\tilde{A}}(x, u) \leq 1$ و X دامنه A می‌باشد و هر مقدار u ، عضوی از $U = [0, 1]$ است که به آن درجه اولیه گویند. هر درجه اولیه، درجه عضویت $\mu_{\tilde{A}}(x, u)$ را تعیین می‌کند که به آن درجه ثانویه گویند و در بازه $V = [0, 1]$ قرار دارد. همچنین J_x مجموعه عضویت‌های اولیه متناظر با x می‌باشد. مجموعه فازی نوع-۲، $\tilde{A}$ با مجموعه مرجع پیوسته به صورت زیر نمایش

داده می‌شود:

$$\tilde{A} = \int_{x\in X}\int_{u\in J_x} \mu_{\tilde{A}}(x,u)/(x,u) J_x \subseteq [0,1]$$

برای مجموعه مرجع گسسته، به جای نماد $\int$ از نماد Σ استفاده می‌شود.

۱.۳ جای پای عدم قطعیت

تعریف ۳.۳. فرض کنید $J_x \subset [0,1]$ عضویت اولیه ی عنصر x را نشان دهد. جای پای عدم قطعیت (FOU) [1] از یک مجموعه فازی نوع-۲، $\tilde{A} \subset X$ ناحیه‌ی کرانداری است که شامل همه‌ی عضویت‌های اولیه از عناصر x می‌باشد و به صورت زیر نمایش داده می‌شود:

$$FOU(\tilde{A}) = \bigcup_{x\in X} J_x$$

جای پای عدم قطعیت یک مجموعه فازی، بازه‌ای مقدار است و کران های بالا و پایین آن را به ترتیب توابع عضویت بالایی (UMF) [2] و تابع عضویت پایینی (LMF) [3] می‌نامند و به صورت زیر تعریف می‌شوند.

تعریف ۴.۳. فرض کنید $J_x = [\underline{J}_x, \overline{J}_x] \subset [0,1]$، درجه عضویت اولیه عنصر $x \in X$ باشد، آن گاه به ازای هر $x \in X$،

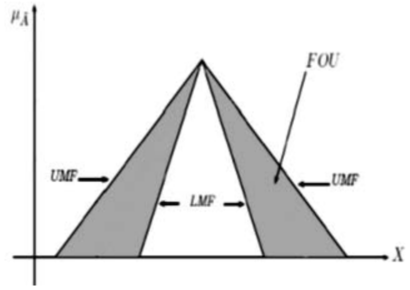
$$\overline{\mu}_{\tilde{A}}(x) = UMF(\tilde{A}) = \cup \overline{J}_x$$

را تابع عضویت بالایی مجموعه فازی نوع-۲، و به ازای هر $x \in X$،

$$\underline{\mu}_{\tilde{A}}(x) = UMF(\tilde{A}) = \cup \underline{J}_x$$

[1] Footprint Of Uncertainty
[2] Upper Membership Function
[3] Lower Membership Function

را تابع عضویت پایینی مجموعه فازی نوع-۲ می‌نامند. شکل ۴، توابع عضویت بالایی و پایینی عدد فازی مثلثی نوع-۲ را نمایش می‌دهد.



شکل ۴: تابع عضویت بالایی و پایینی تشکیل دهنده جای پای عدم قطعیت

۴ مجموعه‌های فازی نوع-۲ بازه های

امروزه با توجه به پیچیدگی‌های محاسباتی که در مجموعه‌های فازی نوع-۲ وجود دارد، از تعمیمی خاص بر مجموعه‌های فازی نوع-۱ استفاده می‌شود که به آن مجموعه‌های فازی نوع-۲ بازه‌ای می‌گویند [۲، ۳]، [۶، ۷] و [۹] . در این مجموعه‌ها به هر عنصر از مجموعه‌ی مرجع، یک بازه نسبت داده می‌شود. لذا هر مجموعه‌ی فازی نوع-۲ بازه‌ای تحت عنوان مجموعه‌ی فازی بازه‌ای مقدار نیز بیان می‌شود.

تعریف ۱.۴. فرض کنید $\tilde{A} = \int_{x\in X} \frac{\mu_{\tilde{A}}(x)}{x} = \int_{x\in X}\int_{u\in J_x} \frac{\mu_{\tilde{A}}(x,u)}{u} \diagup x$ که $J_x \subset [۰, ۱]$ ، یک مجموعه فازی نوع-۲ است که در آن برای همه‌ی درجات ثانویه رابطه ی $\mu_{\tilde{A}}(x,u) = ۱$ برقرار می‌باشد، در این صورت آن را یک مجموعه‌ی فازی نوع-۲ بازه‌ای می‌نامند و به صورت رابطه زیر تعریف می‌شود:

$$\widehat{A} = \int_{x\in X} \frac{\mu_{\tilde{A}}(x)}{x} = \int_{x\in X} [\int_{u\in J_x} \frac{۱}{u}] \diagup x$$

به عبارت دیگر، مجموعه‌ی فازی نوع-۲ بازه‌ای $\widehat{A}$ به کمک تابع زیر نیز بیان می‌شود:

$$\widehat{A}: X \to I(U)$$

با توجه به تعاریف فوق، به سادگی می‌توان مجموعه فازی نوع-۲ بازه‌ای را به صورت زیر معرفی کرد:

$$\widehat{A} = \{(x, \widehat{A}(x)) | x \in X, \widehat{A}(x) \subset U\} = \{(x, [\underline{u}_x, \overline{u}_x]) | x \in X, [\underline{u}_x, \overline{u}_x] \subset U\}$$

به طور معادل با کمک گرفتن از اجتماع در تمام عناصر x با بازه‌ی نظیرشان، نمایش زیر بدست می آید:

$$\widehat{A} = \bigcup (x, \widehat{A}(x)) = \bigcup (x, [\underline{u}_x, \overline{u}_x])$$

برخی از عملگرهای منطقی بر روی مجموعه‌های فازی نوع-۲ بازه‌ای توسط زاده در سال ۱۹۷۵ میلادی معرفی شد که در ادامه تعریف می‌شود [۱۲، ۱۳، ۱۴].

تعریف ۲.۴. فرض کنید $\widehat{A}$ و $\widehat{B}$ دو مجموعه فازی نوع-۲ بازه‌ای تعریف شده روی مجموعه مرجع X باشند. اجتماع، اشتراک و متمم به صورت زیر بیان می‌شوند ($\vee$ و$\wedge$ به ترتیب نمادهای ماکزیمم و مینیمم می‌باشند).

-اجتماع

$$(\widehat{A} \cup \widehat{B})(x) = [\underline{u}_x^A \vee \underline{u}_x^B, \overline{u}_x^A \vee \overline{u}_x^B]$$

-اشتراک

$$(\widehat{A} \cap \widehat{B})(x) = [\underline{u}_x^A \wedge \underline{u}_x^B, \overline{u}_x^A \wedge \overline{u}_x^B]$$

-متمم

$$\widehat{A}(x) = [۱ - \overline{u}_x^A, ۱ - \underline{u}_x^A]$$

تمام عناصر یک مجموعه‌ی فازی نوع-۲ بازه‌ای دارای درجه عضویت‌های بازه‌ای هستند. بنابراین هر مجموعه‌ی فازی نوع-۲ بازه‌ای به کمک دو مجموعه‌ی فازی نوع-۱ نمایش داده می‌شوند. مندل و همکاران [۹] نشان دادند که مفهوم مجموعه‌های فازی نوع-۲ بازه‌ای معادل با جای پای عدم قطعیت می‌باشد و لذا هر مجموعه‌ی فازی نوع-۲ بازه‌ای به کمک توابع عضویت بالایی و پایینی معرفی شده برای جای پای عدم قطعیت به صورت زیر قابل بیان می‌باشند.

تعریف ۳.۴. فرض کنید $\widehat{A}$ یک مجموعه‌ی فازی نوع-۲ بازه‌ای باشد و مجموعه‌های فازی نوع-۱، $\widehat{A}^U$ و $\widehat{A}^L$ (یا $\overline{\widehat{A}}$ و $\underline{\widehat{A}}$) به ترتیب تابع عضویت بالایی و تابع عضویت پایینی آن باشند. در این صورت به ازای $x \in X$ داریم

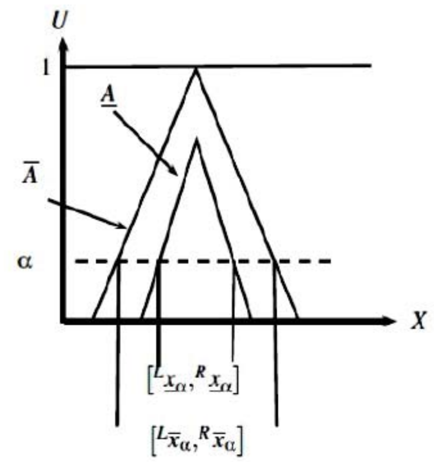
$$\widehat{A}(x) = [\widehat{A}^L(x), \widehat{A}^U(x)]$$

.

با توجه به تعریف فوق، مفهوم α -برش برای یک مجموعه‌ی فازی نوع-۲ بازه‌ای چنین بیان می‌شود:

تعریف ۴.۴. فرض کنید $\widehat{A}$ یک مجموعه‌ی فازی نوع-۲ بازه‌ای باشد. آنگاه به ازای هر $x \in X$ و $\alpha \in [0, 1]$ مجموعه α-برش $\tilde{A}$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\widehat{A}_\alpha(x) = [\widehat{A}^L_\alpha(x), \widehat{A}^U_\alpha(x)]$$



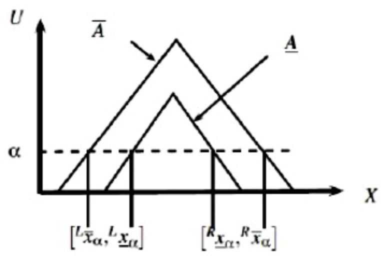
شکل ۵: α-برش یک مجموعه فازی نوع-۲ بازه‌ای

در ادامه تعریف دیگری که برای مجموعه α -برش که توسط کافمن و گوپتا [۸] بیان شده است، ارائه می‌شود.

تعریف ۵.۴. فرض کنید $\widehat{A}$ یک مجموعه‌ی فازی نوع-۲ بازه‌ای بوده و مجموعه‌های α -برش تابع عضویت بالایی و تابع عضویت پایینی آن $\widehat{A}^U_\alpha$ و $\widehat{A}^L_\alpha$ به ترتیب برابر با $[L_{\overline{x}_\alpha}, R_{\overline{x}_\alpha}]$ و $[L_{\underline{x}_\alpha}, R_{\underline{x}_\alpha}]$ باشد. همچنین فرض کنید $h(\widehat{A}^U)$ و $h(\widehat{A}^L)$ به ترتیب ارتفاع توابع عضویت بالایی و پایینی $\widehat{A}$ باشند. در این صورت مجموعه α-برش کافمن گوپتا [۸] برای $\widehat{A}$ عبارت است از:

$$\widehat{A}^{KG}_\alpha = \begin{cases} [L_{\overline{x}_\alpha}, R_{\overline{x}_\alpha}], [L_{\underline{x}_\alpha}, R_{\underline{x}_\alpha}] & \alpha < h(\widehat{A}^L) \\ [L_{\overline{x}_\alpha}, R_{\overline{x}_\alpha}] & \alpha \geq h(\widehat{A}^U) \end{cases}$$

شکل زیر مجموعه‌ی آلفا برش کافمن گوپتا [۸] برای یک مجموعه‌ی فازی نوع-۲ بازه‌ای را نشان می‌دهد. همانطور که اشاره شد یکی از حالت‌های خاص اعداد فازی نوع-۲ بازه‌ای، اعداد



شکل ۶: نمایش α-برش کافمن گوپتا برای یک مجموعه‌ی فازی نوع-۲ بازه‌ای

فازی (ذوزنقه‌ای یا مثلثی) نوع-۲ بازه‌ای می‌باشد که در بخش بعد به معرفی آن پرداخته می‌شود.

۵ اعداد فازی ذوزنقه‌ای و مثلثی نوع-۲ بازه‌ای

با توجه به کاربرد گسترده مجموعه‌های فازی نوع-۲ بازه‌ای با توابع عضویت بالایی و پایینی به صورت ذوزنقه‌ای یا مثلثی، نوع خاصی از این نوع مجموعه‌ها تحت عنوان اعداد فازی ذوزنقه‌ای و مثلثی نوع-۲ بازه‌ای مورد توجه محققان قرار گرفته است [۳]، [۶] . در ادامه تعاریف مربوطه ارائه می‌شود. $\widehat{A}$

تعریف ۱.۵. مجموعه‌ی فازی نوع-۲ بازه‌ای $\widehat{A}$ که بر بازه حقیقی بسته‌ی $[a^u_{۱}, a^u_{۴}]$ تعریف شده باشد را مجموعه‌ی فازی ذوزنقه‌ای نوع-۲ بازه‌ای می‌نامند و به صورت

$$\widehat{A} = (\widehat{A}^l, \widehat{A}^u) = ((a^l_{۱}, a^l_{۲}, a^l_{۳}, a^l_{۴}; h^l_{۱}, h^l_{۲}), (a^u_{۱}, a^u_{۲}, a^u_{۳}, a^u_{۴}; h^u_{۱}, h^u_{۲}))$$

نمایش داده می‌شود. توابع عضویت آن نیز به صورت روابط زیر می‌باشند:

$$\mu^l_{\widehat{A}}(x) = \begin{cases} h^l_{۱}(\frac{x-a^l_{۱}}{a^l_{۲}-a^l_{۱}}), & a^l_{۱} \leq x \leq a^l_{۲} \\ (h^l_{۲} - h^l_{۱})(\frac{x-a^l_{۲}}{a^l_{۳}-a^l_{۲}}) + h^l_{۱}, & a^l_{۲} \leq x \leq a^l_{۳} \\ h^l_{۲}(\frac{a^l_{۴}-x}{a^l_{۴}-a^l_{۳}}), & a^l_{۳} \leq x \leq a^l_{۴} \\ ۰, & x \leq a^l_{۱},\ \ x \geq a^l_{۴} \end{cases}$$

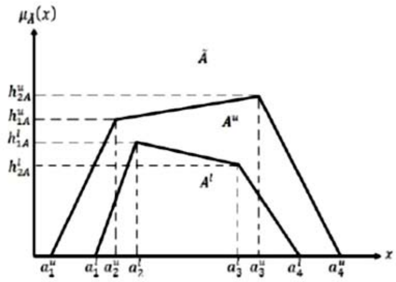
و

$$\mu^u_{\widehat{A}}(x) = \begin{cases} h^u_{۱}(\frac{x-a^l_{۱}}{a^l_{۲}-a^l_{۱}}), & a^u_{۱} \leq x \leq a^u_{۲} \\ (h^u_{۲} - h^u_{۱})(\frac{x-a^l_{۲}}{a^l_{۳}-a^l_{۲}}) + h^u_{۱}, & a^u_{۲} \leq x \leq a^u_{۳} \\ h^u_{۲}(\frac{a^u_{۴}-x}{a^l_{۴}-a^l_{۳}}), & a^u_{۳} \leq x \leq a^u_{۴} \\ ۰, & x \leq a^u_{۱},\ \ x \geq a^u_{۴} \end{cases}$$

اگر $h^u_{۱} = h^u_{۲} = h^u$ و $h^l_{۱} = h^l_{۲} = h^l$، آنگاه آن را عدد فازی ذوزنقه‌ای نوع-۲ بازه‌ای نامند و هرگاه $h^l_{۱} = h^l_{۲} = h^u_{۱} = h^u_{۲} = ۱$ باشد، به آن عدد فازی ذوزنقه‌ای نوع-۲ بازه‌ای کامل گویند. شکل ۷ عدد فازی ذوزنقه‌ای نوع-۲ بازه‌ای را نشان می‌دهد.

تعریف ۲.۵. مجموعه‌ی فازی نوع-۲ بازه‌ای $\widehat{A}$ که بر بازه حقیقی بسته ی $[a^u_{۱}, a^u_{۳}]$ تعریف شده باشد را مجموعه‌ی فازی مثلثی نوع-۲ بازه‌ای می‌نامند و به صورت

$$\widehat{A} = (A^l, A^u) = ((a^l_{۱}, a^l_{۲}, a^l_{۳}; h^l), (a^u_{۱}, a^u_{۲}, a^u_{۳}, ; h^u))$$



شکل ۷: عدد فازی ذوزنقه‌ای نوع-۲ بازه‌ای

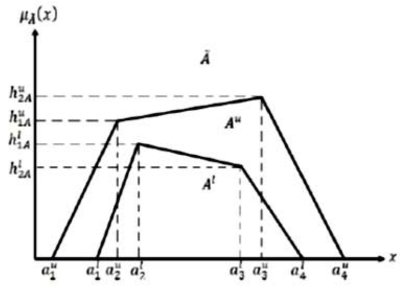
نمایش داده می‌شود توابع عضویت آن‌ها نیز به صورت دو رابطه زیر می‌باشند:

$$\mu^l_{\widehat{A}}(x) = \begin{cases} h^l(\frac{x-a^l_۱}{a^l_۲-a^l_۱}), & a^l_۱ \leq x \leq a^l_۲ \\ h^l(\frac{a^l_۳-x}{a^l_۳-a^l_۲}), & a^l_۲ \leq x \leq a^l_۳ \\ ۰, & x \leq a^l_۱, \ \ x \geq a^l_۳ \end{cases}$$

و

$$\mu^u_{\widehat{A}}(x) = \begin{cases} h^u(\frac{x-a^u_۱}{a^u_۲-a^u_۱}), & a^u_۱ \leq x \leq a^u_۲ \\ h^u(\frac{a^u_۳-x}{a^u_۳-a^u_۲}), & a^u_۲ \leq x \leq a^u_۳ \\ ۰, & x \leq a^u_۱, \ \ x \geq a^u_۳ \end{cases}$$

اگر $h^l = h^u = ۱$ و $a^l_۲ = a^u_۲$ ، عدد فازی مثلثی نوع-۲ بازه‌ای را عدد فازی مثلثی نوع-۲ بازه‌ای کامل نامند و اگر $h^l < ۱$ و $h^u = ۱$ باشد آن را عدد فازی مثلثی نوع-۲ بازه‌ای می‌گویند. شکل ۸ عدد فازی مثلثی نوع-۲ بازه‌ای را نشان می‌دهد. در ادامه اعمال ریاضی که روی اعداد فازی ذوزنقه‌ای و مثلثی نوع-۲ بازه‌ای صورت می‌گیرد، بیان می‌شود.



شکل ۸: عدد فازی ذوزنقه‌ای نوع-۲ بازه‌ای

۱.۵ اعمال حسابی روی اعداد فازی ذوزنقه‌ای نوع-۲ بازه‌ای

تعریف ۳.۵. فرض کنید $\widehat{A}$، $\widehat{B}$ دو عدد فازی ذوزنقه‌ای نوع-۲ بازه‌ای و k عدد حقیقی ثابت باشند. اعمال حسابی مانند جمع، تفریق، ضرب و ضرب اسکالر به صورت زیر تعریف می‌شود [۵]:

جمع:

$$\widehat{A}\oplus\widehat{B}=(\widehat{A}^l\oplus\widehat{B}^l,\widehat{A}^u\oplus\widehat{B}^u)=((a^l_1+b^l_1,a^l_2+b^l_2,a^l_3+b^l_{32},a^l_4+b^l_4;min\{h^l_{1\widehat{A}},h^l_{1\widehat{B}}\},$$
$$\min\{h^l_{2\widehat{A}},h^l_{2\widehat{B}}\}),(a^u_1+b^u_1,a^u_2+b^u_2,a^u_3+b^u_3,a^u_4+b^u_4;$$
$$\min\{h^u_{1\widehat{A}},h^u_{1\widehat{B}}\},\min\{h^u_{2\widehat{A}},h^u_{2\widehat{B}}\}))$$

تفریق:

$$\widehat{A}\ominus\widehat{B}=(\widehat{A}^l\ominus\widehat{B}^l,\widehat{A}^u\ominus\widehat{B}^u)=((a^l_1-b^l_4,a^l_2-b^l_3,a^l_3-b^l_2,a^l_4-b^l_1;\min\{h^l_{1\widehat{A}},h^l_{2\widehat{B}}\},$$
$$\min\{h^l_{2\widehat{A}},h^l_{1\widehat{B}}\}),(a^u_1-b^u_4,a^u_2-b^u_3,a^u_3-b^u_2,a^u_4-b^u_1;\min\{h^u_{1\widehat{A}},h^u_{2\widehat{B}}\},$$
$$\min\{h^u_{2\widehat{A}},h^u_{1\widehat{B}}\}))$$

ضرب:

$$\widehat{A} \otimes \widehat{B} = ((c_1^l, c_2^l, c_3^l, c_4^l; h_{1c}^l, h_{2c}^l), (c_1^u, c_2^u, c_3^u, c_4^u; h_{1c}^u, h_{2c}^u))$$
$$c_1^l = \min\{a_1^l \times b_1^l, a_1^l \times b_4^l, a_4^l \times b_1^l, a_4^l \times b_4^l\}$$
$$c_2^l = \min\{a_2^l \times b_2^l, a_2^l \times b_3^l, a_3^l \times b_2^l, a_3^l \times b_3^l\}$$
$$c_3^l = \max\{a_2^l \times b_2^l, a_2^l \times b_3^l, a_3^l \times b_2^l, a_3^l \times b_3^l\}$$
$$c_4^l = \min\{a_1^l \times b_1^l, a_1^l \times b_4^l, a_4^l \times b_1^l, a_4^l \times b_4^l\}$$
$$h_{1C}^l = \min\{h_{1\widehat{A}}^l, h_{1\widehat{B}}^l\}$$
$$h_{2C}^l = \min\{h_{2\widehat{A}}^l, h_{2B}^l\}$$
$$c_1^u = \min\{a_1^u \times b_1^u, a_1^u \times b_4^u, a_4^u \times b_1^u, a_4^u \times b_4^u\}$$
$$c_2^u = \min\{a_2^u \times b_2^u, a_2^u \times b_3^u, a_3^u \times b_2^u, a_3^u \times b_3^u\}$$
$$c_3^u = \max\{a_2^u \times b_2^u, a_2^u \times b_3^u, a_3^u \times b_2^u, a_3^u \times b_3^u\}$$
$$c_4^u = \min\{a_1^u \times b_1^u, a_1^u \times b_4^u, a_4^u \times b_1^u, a_4^u \times b_4^u\}$$
$$h_{1C}^u = \min\{h_{1\widehat{A}}^u, h_{1\widehat{B}}^u\}$$
$$h_{2C}^u = \min\{h_{2\widehat{A}}^u, h_{2\widehat{B}}^u\}.$$

ضرب اسکالر: اگر $k \geq 0$،

$$k\widehat{A} = (k\widehat{A}^l, k\widehat{A}^u) = ((ka_1^l, ka_2^l, ka_3^l, ka_4^l; h_{1\widehat{A}}^l, h_{2\widehat{A}}^l), (ka_1^u, ka_2^u, ka_3^u, ka_4^u; h_{1\widehat{A}}^u, h_{2\widehat{A}}^u))$$

اگر $k \leq 0$،

$$k\widehat{A} = (k\widehat{A}^l, k\widehat{A}^u) = ((ka_4^l, ka_3^l, ka_2^l, ka_1^l; h_{1\widehat{A}}^l, h_{2A}^l), (ka_4^u, ka_3^u, ka_2^u, ka_1^u; h_{1\widehat{A}}^u, h_{2\widehat{A}}^u))$$

۲.۵ اعمال حسابی روی اعداد فازی مثلثی نوع-۲ بازه‌ای

تعریف ۴.۵. فرض کنید

$$\widehat{A}=(\widehat{A}^l,\widehat{A}^u)=((a_۱^l,a_۲^l,a_۳^l;h_A^l),(a_۱^u,a_۲^u,a_۳^u,;h_A^u))$$

و

$$\widehat{B}=(\widehat{B}^l,\widehat{B}^u)=((b_۱^l,b_۲^l,b_۳^l;h_{\widehat{B}}^l),(b_۱^u,b_۲^u,b_۳^u,;h_{\widehat{B}}^u))$$

دو عدد فازی مثلثی نوع-۲ بازه‌ای و k عدد حقیقی ثابت باشند. اعمال حسابی روی این اعداد به صورت زیر تعریف می‌شوند [۵] :

جمع:

$$\widehat{A}\oplus\widehat{B}=(\widehat{A}^l\oplus\widehat{B}^l,\widehat{A}^u\oplus\widehat{B}^u)=((a_۱^l+b_۱^l,a_۲^l+b_۲^l,a_۳^l+b_۳^l;min\{h_{\widehat{A}}^l,h_{\widehat{B}}^l\}),$$

$$(a_۱^u+b_۱^u,a_۲^u+b_۲^u,a_۳^u+b_۳^u;min\{h_{\widehat{A}}^u,h_{\widehat{B}}^u\}))$$

تفریق:

$$\widehat{A}\ominus\widehat{B}=(\widehat{A}^l\ominus B^l,\widehat{A}^u\ominus\widehat{B}^u)=((a_۱^l-b_۳^l,a_۲^l-b_۲^l,a_۳^l-b_۱^l;min\{h_{\widehat{A}}^l,h_{\widehat{B}}^l\}),$$

$$(a_۱^u-b_۳^u,a_۲^u-b_۲^u,a_۳^u-b_۱^u;min\{h_{\widehat{A}}^u,h_{\widehat{B}}^u\}))$$

ضرب:

$$\widehat{A}\otimes\widehat{B}=((c_۱^l,c_۲^l,c_۳^l;h_C^l),(c_۱^u,c_۲^u,c_۳^u;h_C^u))$$

$$c_۱^l=\min\{a_۱^l\times b_۱^l,a_۱^l\times b_۳^l,a_۳^l\times b_۱^l,a_۳^l\times b_۳^l\}$$

$$c_۲^l=\{a_۲^l\times b_۲^l\}$$

$$c_۳^l=\min\{a_۱^l\times b_۱^l,a_۱^l\times b_۳^l,a_۳^l\times b_۱^l,a_۳^l\times b_۳^l\}$$

$$h_C^l=\min\{h_{\widehat{A}}^l,h_{\widehat{B}}^l\}$$

$$c_1^u = \min\{a_1^u \times b_1^u, a_1^u \times b_3^u, a_3^u \times b_1^u, a_3^u \times b_3^u\}$$

$$c_2^u = \{a_2^u \times b_2^u\}$$

$$c_3^u = \max\{a_1^u \times b_1^u, a_1^u \times b_3^u, a_3^u \times b_1^u, a_3^u \times b_3^u\}$$

$$h_C^u = \min\{h_{\widehat{A}}^u, h_{\widehat{B}}^u\}, \}$$

ضرب اسکالر: اگر $k \geq 0$،

$$k\widehat{A} = (k\widehat{A}^l, k\widehat{A}^u) = ((ka_1^l, ka_2^l, ka_3^l; h_{\widehat{A}}^l), (ka_1^u, ka_2^u, ka_3^u; h_{\widehat{A}}^u))$$

اگر $k \leq 0$،

$$k\widehat{A} = (k\widehat{A}^l, k\widehat{A}^u) = ((ka_3^l, ka_2^l, ka_1^l; h_{\widehat{A}}^l), (ka_3^u, ka_2^u, ka_1^u; h_{\widehat{A}}^u))$$

۶ رتبه بندی اعداد فازی نوع-۲ بازه‌ای

اغلب مسائل در دنیای واقعی دارای پیچیدگی و ابهام‌های زیادی هستند. امروزه روش‌های رتبه‌بندی اهمیت به سزایی در ارزیابی اعداد فازی دارند. روش‌های ارائه شده برای رتبه‌بندی اعداد فازی نوع-۲ بازه‌ای در مقایسه با اعداد فازی نوع-۱ بازه‌ای بسیار مورد توجه محققان قرار گرفته اند [۶] . فرض کنید، $F(\mathbf{R})$ مجموعه‌ی تمام اعداد فازی نوع-۲ بازه‌ای باشد، یک روش مرتب سازی عناصر $F(\mathbf{R})$، استفاده از توابع رتبه‌بندی مانند $R : F(\mathbf{R}) \to \mathbb{R}$ می‌باشد که به هر عدد فازی نوع-۲ بازه‌ای، یک عدد حقیقی نسبت می‌دهد. در واقع هر تابع مرتب ساز مانند R برای هر دو عدد فازی نوع-۲ بازه‌ای $\widehat{A}$ و $\widehat{B}$ به صورت زیر عمل می‌کند:

$$\widehat{A} \geq_R \widehat{B} \text{ اگر و فقط اگر } R(\widehat{A}) \geq R(\widehat{B})$$

$$\widehat{A} \leq_R \widehat{B} \text{ اگر و فقط اگر } R(\widehat{A}) \leq R(\widehat{B})$$

$$\widehat{A} =_R \widehat{B} \text{ اگر و فقط اگر } R(\widehat{A}) = R(\widehat{B})$$

توابع رتبه‌بندی فازی معمولاً یک مشخصه‌ی واحد را از هر عدد فازی استخراج نموده و سپس بر اساس آن اقدام به مرتب نمودن اعداد فازی می‌نمایند و این باعث پیچیده شدن موضوع رتبه‌بندی اعداد فازی شده است و ممکن است با توجه به روش مورد استفاده نتایج مختلفی بدست آید. در ادامه، به معرفی چند نمونه از توابع رتبه‌بندی برای اعداد فازی نوع-۲ پرداخته می‌شود [۶] .

۱.۶ برخی از روش‌های رتبه بندی اعداد فازی نوع-۲ بازه‌ای

روش اول: این روش تعمیمی از روش یاگر [۱۰] می‌باشد.

تعریف ۱.۶. فرض کنید

$$\widehat{A}=(\widehat{A}^l,\widehat{A}^u)=((a_1^l,a_2^l,a_3^l,a_4^l;h_1^l,h_2^l),(a_1^u,a_2^u,a_3^u,a_4^u;h_1^u,h_2^u))$$

یک عدد فازی ذوزنقه‌ای نوع-۲ بازه‌ای باشد. تابع رتبه‌بندی مربوط به آن به صورت (۳) بیان می‌شود : [۶].

$$R_1(\widehat{A})=\frac{1}{2}[R_1(\widehat{A}^l+R_1(\widehat{A}^u)] \tag{۳}$$

که در آن،

$$R_1(\widehat{A}^l)=\frac{1}{2}[\int_0^{h_1^l}\mu^{-1}_{\widehat{A}_1^l}(y)dy+\int_{h_1^l}^{h_2^l}\mu^{-1}_{\widehat{A}_2^l}(y)dy+\int_0^{h_2^l}\mu^{-1}_{\widehat{A}_2^l}(y)dy],$$

و

$$R_1(\widehat{A}^u)=\frac{1}{2}[\int_0^{h_1^u}\mu^{-1}_{\widehat{A}_1^u}(y)dy+\int_{h_1^u}^{h_2^u}\mu^{-1}_{\widehat{A}_2^u}(y)dy+\int_0^{h_2^u}\mu^{-1}_{\widehat{A}_2^u}(y)dy],$$

در حالت کلی برای یک عدد فازی ذوزنقه‌ای نوع-۲ بازه‌ای خواهیم داشت.

$$R_1(\widehat{A}^l)=\frac{a_1^lh_1^l+a_2^lh_2^l+a_3^l(2h_2^l-h_1^l)+a_4^lh_2^l}{4},$$

و

$$R_۱(\widehat{A}^u) = \frac{a_۱^u h_۱^u + a_۲^u h_۲^u + a_۳^u(۲h_۲^u - h_۱^u) + a_۴^u h_۲^u}{۴},$$

بنابرین از رابطه (۳) داریم

$$R_۱(\widehat{A}) = \frac{a_۱^l h_۱^l + a_۲^l h_۲^l + a_۳^l(۲h_۲^l - h_۱^l) + a_۴^l h_۲^l + a_۱^u h_۱^u + a_۲^u h_۲^u + a_۳^u(۲h_۲^u - h_۱^u) + a_۴^u h_۲^u}{۸}$$

در حالتی که $h^l = h_۱^l = h_۲^l$ و $h^u = h_۱^u = h_۲^u$ ، داریم

$$\widehat{A} = (\widehat{A}^l, \widehat{A}^u) = ((a_۱^l, a_۲^l, a_۳^l, a_۴^l; h^l), (a_۱^u, a_۲^u, a_۳^u, a_۴^u; h^u))$$

یعنی اگر $\widehat{A}$ یک عدد فازی ذوزنقه‌ای تخت نوع-۲ بازه‌ای باشد، آنگاه

$$R_۱(\widehat{A}) = \frac{(a_۱^l + a_۲^l + a_۳^l + a_۴^l)h^l + (a_۱^u + a_۲^u + a_۳^u + a_۴^u)h^u}{۸}.$$

همچنین، اگر $h^l = h^u$، در این صورت $\widehat{A}$ یک عدد فازی ذوزنقه‌ای نوع-۲ بازه‌ای کامل می‌باشد و رتبه‌بندی آن به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$R_۱(\widehat{A}) = \frac{a_۱^l + a_۲^l + a_۳^l + a_۴^l + a_۱^u + a_۲^u + a_۳^u + a_۴^u}{۸}.$$

به طور مشابه، روش فوق برای عدد فازی مثلثی نوع-۲ بازه‌ای،

$$\widehat{A} = (\widehat{A}^l, \widehat{A}^u) = ((a_۱^l, a_۲^l, a_۳^l; h^l, (a_۱^u, a_۲^u, a_۳^u; h^u))$$

برابر می‌شود با

$$R_۱(\widehat{A}) = \frac{(a_۱^l + ۲a_۲^l + a_۳^l)h^l + (a_۱^u + ۲a_۲^u + a_۳^u)h^u}{۸}.$$

همچنین اگر، $h^l = h^u$ ، $a_۲^l = a_۲^u = a_۲$، در این صورت $\tilde{A}$ ، یک عدد فازی مثلثی نوع-۲ بازه‌ای کامل خواهد بود و رتبه‌بندی آن عبارت است از:

$$R_۱(\widehat{A}) = \frac{a_۱^l + a_۳^l + ۴a_۲ + a_۱^u + a_۳^u}{۸}.$$

در واقع با توجه به اینکه توابع عضویت بالایی و پایینی مربوط به عدد فازی نوع-۲ بازه‌ای مورد نظر، دارای چه شکلی باشند، روش رتبه‌بندی معرفی شده متفاوت خواهد بود. همچنین این روش برای حالت‌های خاصی که عدد مورد نظر، عدد فازی (ذوزنقه‌ای یا مثلثی) نوع-۱ باشد، قابل استفاده است. به خصوص در حالتی که عدد مورد نظر یک عدد فازی مثلثی نوع-۱ باشد این روش همان روش معرفی شده توسط یاگر خواهد بود.

روش دوم: این روش تعمیمی از روش چن و هسیه [۱] می‌باشد.

تعریف ۲.۶. فرض کنید

$$\widehat{A} = (\widehat{A}^l, \widehat{A}^u) = ((a_1^l, a_2^l, a_3^l, a_4^l; h_1^l, h_2^l), (a_1^u, a_2^u, a_3^u, a_4^u; h_1^u, h_2^u))$$

یک عدد فازی ذوزنقه‌ای نوع-۲ بازه‌ای باشد. تابع رتبه‌بندی مربوط به آن به صورت رابطه (۴) بیان می‌شود [۶] :

$$R_2(\widehat{A}) = \frac{1}{2}[R_2(A^l + R_2(\widehat{A}^u))] \qquad (4)$$

که در آن،

$$R_2(\widehat{A}^l) = \frac{2}{h_1^l + h_2^l}[\int_0^{h_1^l} y\mu^{-1}_{\widehat{A}_1^l}(y)dy + \int_{h_1^l}^{h_2^l} y\mu^{-1}_{\widehat{A}_2^l}(y)dy + \int_0^{h_2^l} y\mu^{-1}_{\widehat{A}_3^l}(y)dy],$$

و

$$R_2(\widehat{A}^u) = \frac{1}{2}[\int_0^{h_1^u} y\mu^{-1}_{\widehat{A}_1^u}(y)dy + \int_{h_1^u}^{h_2^u} y\mu^{-1}_{\widehat{A}_2^u}(y)dy + \int_0^{h_2^u} y\mu^{-1}_{\widehat{A}_3^u}(y)dy].$$

در حالت کلی برای یک عدد فازی ذوزنقه‌ای نوع-۲ بازه‌ای خواهیم داشت:

$$R_2(\widehat{A}^l) = \frac{a_1^l + +a_2^l[(h_2^l)^2 + h_1^l h_2^l] + a_3^l[(4(h_2^l)^2 - h_1^l h_2^l - (h_1^l)^2] + a_4^l}{3(h_1^l + h_2^l)},$$

و

$$R_2(\widehat{A}^u) = \frac{a_1^u + a_2^u[(h_2^u)^2 + h_1^u h_2^u] + a_3^u[4(h_2^u)^2 - h_1^u h_2^u - (h_1^u)^2] + a_4^u}{3(h_1^u + h_2^u)},$$

بنابرین از رابطه (۴) داریم:

$$R_2(\widehat{A}) = \frac{a_1^l + a_2^l[(h_2^l)^2 + h_1^l h_2^l] + a_3^l[(4(h_2^l)^2 - h_1^l h_2^l - (h_1^l)^2)]}{6(h_1^u + h_2^u)} +$$

$$\frac{a_4^l + a_1^u + a_2^u[(h_2^u)^2 + h_1^u h_2^u] + a_3^u[(4(h_2^u)^2 - h_1^u h_2^u - (h_1^u)^2] + a_4^u}{6(h_1^u + h_2^u)},$$

اگر $h^l = h_1^l = h_2^l$ و $h^u = h_1^u = h_2^u$ ، آنگاه

$$\widehat{A} = (\widehat{A}^l, \widehat{A}^u) = ((a_1^l, a_2^l, a_3^l, a_4^l; h^l), (a_1^u, a_2^u, a_3^u, a_4^u; h^u))$$

یعنی اگر $\widehat{A}$ یک عدد فازی ذوزنقه‌ای تخت نوع-۲ بازه‌ای باشد، آنگاه

$$R_2(\widehat{A}) = \frac{(a_1^l + 2a_2^l(h^l)^2 + 2a_3^l(h^l)^2 + a_4^l 12h^l}{12h^l} + \frac{a_1^u + 2a_2^u(h^u)^2 + 2a_3^u(h^u)^2 + a_4^u}{12h^u}.$$

همچنین، اگر $h^l = h^u$، در این صورت $\widehat{A}$ یک عدد فازی ذوزنقه‌ای نوع-۲ بازه‌ای کامل می‌باشد و رتبه‌بندی آن به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$R_2(\widehat{A}) = \frac{a_1^l + 2a_2^l + 2a_3^l + a_4^l + a_1^u + 2a_2^u + 2a_3^u + a_4^u}{12}.$$

به طور مشابه، روش فوق برای عدد فازی مثلثی نوع-۲ بازه‌ای زیر

$$\widehat{A} = (\widehat{A}^l, \widehat{A}^u) = ((a_1^l, a_2^l, a_3^l; h^l, (a_1^u, a_2^u, a_3^u; h^u))$$

برابر می‌شود با

$$R_2(\widehat{A}) = \frac{(a_1^l + 4a_2^l(h^l)^2 + a_3^l)}{12h^l} + \frac{a_1^u + 2a_2^u + a_3^u}{12h^u}.$$

همچنین اگر، $h^l = h^u$ ، $a_2^l = a_2^u = a_2$، در این صورت $\widehat{A}$ ، یک عدد فازی مثلثی نوع-۲ بازه‌ای کامل خواهد بود و رتبه‌بندی آن عبارت است از:

$$R_2(\widehat{A}) = \frac{a_1^l + a_3^l + 8a_2 + a_1^u + a_3^u}{12}.$$

در واقع با توجه به اینکه توابع عضویت بالایی و پایینی مربوط به عدد فازی نوع-۲ بازه‌ای مورد

نظر، دارای چه شکلی باشند، روش رتبه‌بندی معرفی شده متفاوت خواهد بود. همچنین این روش برای حالت‌های خاصی که عدد مورد نظر عدد فازی (ذوزنقه‌ای یا مثلثی) نوع-۱ باشد، قابل استفاده است. به خصوص در حالتی که عدد مورد نظر یک عدد فازی مثلثی نوع-۱ باشد، روش دوم تعمیمی بر روش چن و هسیه [۱] خواهد بود.

روش سوم: سومین روش رتبه‌بندی به صورت زیر بیان می‌شود.

تعریف ۳.۶. فرض کنید

$$\widehat{A}=(\widehat{A}^l,\widehat{A}^u)=((a_1^l,a_2^l,a_3^l,a_4^l;h_1^l,h_2^l),(a_1^u,a_2^u,a_3^u,a_4^u;h_1^u,h_2^u))$$

یک عدد فازی ذوزنقه‌ای نوع-۲ بازه‌ای باشد. تابع رتبه‌بندی مربوط به آن به صورت (۵) بیان می‌شود [۶] :

$$R_3(\widehat{A})=\frac{1}{2}\left[R_3(\widehat{A}^l)+R_3(\widehat{A}^u)\right] \tag{5}$$

که در آن،

$$R_3(\widehat{A}^l)=\frac{1}{3}[\int_0^{h_1^l}2\mu_{\widehat{A}_1^l}^{-1}(y)dy+\int_{h_1^l}^{h_2^l}\mu_{\widehat{A}_2^l}^{-1}(y)dy+\int_0^{h_2^l}2\mu_{\widehat{A}_3^l}^{-1}(y)dy],$$

و

$$R_3(\widehat{A}^u)=\frac{1}{3}[\int_0^{h_1^u}2\mu_{\widehat{A}_1^u}^{-1}(y)dy+\int_{h_1^u}^{h_2^u}\mu_{\widehat{A}_2^u}^{-1}(y)dy+\int_0^{h_2^u}2\mu_{\widehat{A}_3^u}^{-1}(y)dy],$$

در حالت کلی برای یک عدد فازی ذوزنقه‌ای نوع-۲ بازه‌ای خواهیم داشت.

$$R_3(\widehat{A}^l)=\frac{2a_1^lh_1^l+a_2^l(\frac{h_2^l+h_1^l}{2})+a_3^l(\frac{3h_2^l-h_1^l}{2}+2a_4^lh_2^l}{6},$$

و

$$R_3(\widehat{A}^u)=\frac{2a_1^uh_1^u+a_2^u(\frac{h_2^u+h_1^u}{2})+a_3^u(\frac{3h_2^u-h_1^u}{2}+2a_4^uh_2^u}{6},$$

بنابرین از رابطه (۵) داریم:

$$R_{\text{۳}}(\widehat{A})=\frac{\text{۲}a_{\text{۱}}^lh_{\text{۱}}^l+a_{\text{۲}}^l(\frac{h_{\text{۲}}^l+h_{\text{۱}}^l}{\text{۲}})+a_{\text{۳}}^l(\frac{\text{۳}h_{\text{۲}}^l-h_{\text{۱}}^l}{\text{۲}})+\text{۲}a_{\text{۴}}^lh_{\text{۲}}^l}{\text{۱۲}}+$$

$$\frac{\text{۲}a_{\text{۱}}^uh_{\text{۱}}^u+a_{\text{۲}}^u(\frac{h_{\text{۲}}^u+h_{\text{۱}}^u}{\text{۲}})+a_{\text{۳}}^u(\frac{\text{۳}h_{\text{۲}}^u-h_{\text{۱}}^u}{\text{۲}})+\text{۲}a_{\text{۴}}^uh_{\text{۲}}^u}{\text{۱۲}}$$

در حالتی که $h^l=h_{\text{۱}}^l=h_{\text{۲}}^l$ و $h^u=h_{\text{۱}}^u=h_{\text{۲}}^u$ ، در نتیجه

$$\widehat{A}=(\widehat{A}^l,\widehat{A}^u)=((a_{\text{۱}}^l,a_{\text{۲}}^l,a_{\text{۳}}^l,a_{\text{۴}}^l;h^l),(a_{\text{۱}}^u,a_{\text{۲}}^u,a_{\text{۳}}^u,a_{\text{۴}}^u;h^u)).$$

یعنی اگر $\widehat{A}$ یک عدد فازی ذوزنقه‌ای تخت نوع-۲ بازه‌ای باشد، آنگاه

$$R_{\text{۳}}(\widehat{A})=\frac{\text{۲}(a_{\text{۱}}^l+a_{\text{۲}}^l+a_{\text{۳}}^l+\text{۲}a_{\text{۴}}^l)h^l+(\text{۲}a_{\text{۱}}^u+a_{\text{۲}}^u+a_{\text{۳}}^u+\text{۲}a_{\text{۴}}^u)h^u}{\text{۱۲}}.$$

همچنین، اگر $h^l=h^u$، در این صورت $\widehat{A}$ یک عدد فازی ذوزنقه‌ای نوع-۲ بازه‌ای کامل می‌باشد و رتبه‌بندی آن به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$R_{\text{۳}}(\widehat{A})=\frac{\text{۲}a_{\text{۱}}^l+a_{\text{۲}}^l+a_{\text{۳}}^l+\text{۲}a_{\text{۴}}^l+\text{۲}a_{\text{۱}}^u+a_{\text{۲}}^u+a_{\text{۳}}^u+\text{۲}a_{\text{۴}}^u}{\text{۱۲}}.$$

به طور مشابه، روش فوق برای عدد فازی مثلثی نوع-۲ بازه‌ای زیر

$$\widehat{A}=(\widehat{A}^l,\widehat{A}^u)=((a_{\text{۱}}^l,a_{\text{۲}}^l,a_{\text{۳}}^l;h^l,(a_{\text{۱}}^u,a_{\text{۲}}^u,a_{\text{۳}}^u;h^u))$$

برابر می‌شود با

$$R_{\text{۳}}(\widehat{A})=\frac{(a_{\text{۱}}^l+a_{\text{۲}}^l+a_{\text{۳}}^l)h^l+(a_{\text{۱}}^u+a_{\text{۲}}^u+a_{\text{۳}}^u)h^u}{\text{۶}}.$$

همچنین اگر، $h^l=h^u$ ، $a_{\text{۲}}^l=a_{\text{۲}}^u=a_{\text{۲}}$، در این صورت $\widehat{A}$ ، یک عدد فازی مثلثی نوع-۲ بازه‌ای کامل خواهد بود و رتبه‌بندی آن عبارت است از:

$$R_{\text{۳}}(\widehat{A})=\frac{a_{\text{۱}}^l+a_{\text{۳}}^l+\text{۲}a_{\text{۲}}+a_{\text{۱}}^u+a_{\text{۳}}^u}{\text{۶}}.$$

ملاحظه ۴.۶. یک روش رتبه‌بندی زمانی دارای ارزش و اعتبار خواهد بود که خواص خوش

تعریفی برای آن برقرار باشد.

لم ۵.۶. فرض کنید $\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C} \in F(R)$. رابطه ی $\geq_{R_i}$ که $i = 1, 2, 3$ ، یک رابطه ترتیب جزئی بر مجموعه $F(IR)$ می‌باشد. در واقع می بایست تابع رتبه‌بندی دارای خواص انعکاسی، پادمتقارن و تعدی باشد

انعکاسی. فرض کنید $\widehat{A} \in F(IR)$ آنگاه اگر $\widehat{A} \geq_{R_i} \widehat{A}$ باشد، رابطه انعکاسی برقرار است؛

پادمتقارن. اگر $\widehat{A}, \widehat{B} \in F(IR)$ دلخواه باشند. فرض کنید $\widehat{B} \geq_{R_i} \widehat{A}$ و $\widehat{A} \geq_{R_i} \widehat{B}$ در این صورت اگر $\widehat{B} =_{R_i} \widehat{A}$ نتیجه دهد آنگاه خاصیت پادمتقارنی برقرار است.

تعدی. فرض کنید $\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C} \in F(IR)$. اگر $\widehat{B} \geq_{R_i} \widehat{A}$ و $\widehat{C} \geq_{R_i} \widehat{B}$ باشد و رابطه $\widehat{C} \geq_{R_i} \widehat{A}$ نتیجه شود آنگاه رابطه تعدی برقرار خواهد بود.

روش‌های رتبه‌بندی فوق دارای همه خواص خوش تعریفی می‌باشند.

تعریف ۶.۶. فرض کنید $\widehat{A}$ و $\widehat{B}$ دو عدد فازی باشند و $k \in \{R - 0\}$ باشد، تابع رتبه‌بندی خطی عبارت است از:

$$R(\widehat{A} + k\widehat{B}) = R(\widehat{A}) + kR(\widehat{B})$$

ملاحظه ۷.۶. در لم ۸.۶ مشاهده می‌شود که هر سه تابع رتبه‌بندی فوق، برای اعداد فازی ذوزنقه‌ای و مثلثی نوع-۲ بازه‌ای کامل، یک تابع خطی می‌باشند [۶] .

لم ۸.۶. فرض کنید $\widehat{A} = (\widehat{A}^l, \widehat{A}^u)$ و $\widehat{B} = (\widehat{B}^l, \widehat{B}^u)$، اعداد فازی ذوزنقه‌ای نوع-۲ بازه‌ای کامل باشند،

۱. اگر $\inf supp(\widehat{A}^l) \geq \sup supp(\widehat{B}^l)$ و $\inf supp(\widehat{A}^u) \geq \sup supp(\widehat{B}^u)$، آنگاه $\widehat{A} \geq_{R_i} \tilde{\widehat{B}}$ ؛

۲. فرض کنید $k \in R$ دلخواه باشد، در این صورت داریم:

$$R_i(\widehat{A} + k\widehat{B}) = R_i(\widehat{A}) + kR_i(\widehat{B})$$

تعریف ۹.۶. فرض کنید $\widehat{A}$ و $\widehat{B}$ دو عدد فازی نوع-۲ بازه‌ای باشند. گام های رتبه‌بندی و مقایسه اعداد فازی نوع-۲ بازه‌ای به صورت زیر بیان می‌شوند:

گام۱. اعداد فازی نوع-۲ بازه‌ای $\widehat{A}$ و $\widehat{B}$ را با توجه به توابع عضویت بالایی و پایینی آن‌ها به صورت $\widehat{A} = (\widehat{A}^l, \widehat{A}^u)$ و $\widehat{B} = (\widehat{B}^l, \widehat{B}^u)$ بیان کنید؛

گام۲. نوع تابع شکلی معرف تابع عضویت پایینی هر دو عدد فازی نوع-۲ بازه‌ای $\widehat{A}$ و $\widehat{B}$ را مشخص کنید؛

گام۳. تابع رتبه‌بندی R مربوط به توابع شکلی معرف تابع عضویت پایینی هر دو عدد فازی نوع-۲ بازه‌ای $\widehat{A}$ و $\widehat{B}$، را مشخص کنید؛

گام۴. نوع تابع شکلی معرف تابع عضویت بالایی هر دو عدد فازی نوع-۲ بازه‌ای، $\widehat{A}$ و $\widehat{B}$ را مشخص کنید؛

گام۵. تابع رتبه‌بندی R مربوط به توابع شکلی معرف تابع عضویت بالایی هر دو عدد فازی نوع-۲ بازه‌ای، $\widehat{A}$ و $\widehat{B}$ را بیان کنید؛

گام۶. $R(\widehat{A}^l), R(\widehat{B}^l), R(\widehat{A}^u)$ و $R(\widehat{B}^u)$ را محاسبه کنید؛

گام۷. $R(\widehat{A}) = \frac{R(\widehat{A}^l)+R(\widehat{A}^u)}{۲}$ و $R(\widehat{B}) = \frac{R(\widehat{B}^l)+R(\widehat{B}^u)}{۲}$ را بدست آورید؛

گام۸. با توجه به نتایج حاصل از گام ۷، به صورت زیر رتبه‌بندی را انجام دهید.

$$\widehat{A} \geq_R \widehat{B} \text{ اگر و فقط اگر } R(\widehat{A}) \geq R(\widehat{B})$$

$$\widehat{A} \leq_R \widehat{B} \text{ اگر و فقط اگر } R(\widehat{A}) \leq R(\widehat{B})$$

$$\widehat{A} =_R \widehat{B} \text{ اگر و فقط اگر } R(\widehat{A}) = R(\widehat{B})$$

در این پژوهش، توابع شکلی معرف توابع عضویت بالایی و پایینی هر دو عدد فازی نوع-۲ بازه‌ای، از نوع ذوزنقه‌ای، مثلثی و حالات خاص آن‌ها در نظر گرفته شده است.

۷ نتیجه گیری

با توجه به اینکه اکثر مسائل موجود در جهان واقعی نادقیق هستند، وجود ابزارهای موثر برای مقابله با این عدم قطعیت از اهمیت زیادی برخوردار است. یکی از این ابزارهای مهم، استفاده از مجموعه‌های فازی با انواع مختلف (نوع-۱، نوع-۲ و نوع-۲ بازه‌ای) می‌باشد. مجموعه‌های فازی نوع-۲ بازه‌ای نسبت به مجموعه‌های فازی نوع-۱ عدم قطعیت و اطلاعات بیشتری را پوشش داده و نسبت به مجموعه‌های فازی نوع-۲ بازه‌ای از پیچیدگی محاسباتی و دشواری کمتری برخوردار هستند. بنابراین برای مدل سازی مسائل بهینه سازی در محیط‌های نادقیق، استفاده از مجموعه‌های فازی نوع-۲ بازه‌ای بسیار مناسب و کارآمد می‌باشد. برای حل مسائل فازی باید آن‌ها را فازی زدایی کرد. یکی از روش‌های فازی زدایی مسائل فازی استفاده از توابع رتبه‌بندی است. تاکنون، محققان روش‌های زیادی برای مقایسه مجموعه‌ها یا اعداد فازی ارائه داده اند. در واقع این توابع مرتب کننده به هر مجموعه یا عدد فازی یک عدد قطعی نسبت می‌دهند. بنابراین، می‌توان یک مسئله فازی را به یک مسئله خطی معمولی تبدیل نمود که به سادگی قابل حل باشد. در این پژوهش، مروری بر مفاهیم و تعاریف مربوط به مجموعه‌های فازی نوع-۱، نوع-۲ و نوع-۲ بازه‌ای و همچنین مروری بر اعداد فازی (ذوزنقه‌ای و مثلثی) نوع-۲ بازه‌ای و اعمال حسابی موجود بر آنها بیان شده است. در ادامه نیز، به چند روش رتبه‌بندی موجود و ویژگی‌های آن‌ها، برای مقایسه اعداد فازی (ذوزنقه‌ای و مثلثی) نوع-۲ بازه‌ای اشاره شده است.

مراجع

[1] Chen, S. H,. Hsieh, C. H (1999) Graded mean integration representation of generalized fuzzy number. J. Chin. Fuzzy Syst, 5(2), 1-7.

[2] Figueroa, J.C. (2009) Solving Fuzzy Linear Programming Problems with Interval Type-2 RHS. Proceedings of the 2009 IEEE International Conference on Systems, Man, and Cybernetics San Antonio, TX, USA, October.

[3] Figueroa, J.C. (2011) Interval type-2 fuzzy linear programming: Uncertain constraints. In: 2011 IEEE Symposium Series on Computational Intelligence.

[4] Hisdal, E. (1981) The IF THEN ELSE Statement and Interval-Valued Fuzzy sets of Higher Type. International Journal of Man-Machine Studies, 15, 385-455.

[5] Javanmard, M,. Mishmast Nehi, H. (2017) Interval type-2 triangular fuzzy numbers;New ranking method and evaluation of some reasonable properties on it. 5th Iranian Joint Congress on Fuzzy and Intelligent Systems, CFIS, 8003587, 4-6.

[6] Javanmard, M. Mishmast Nehi, H. (2018) Rankings and operations for interval type-2 fuzzy numbers: a review and some new methods, Journal of Applied Mathematics and Computing. DOI: https://doi.org/10.1007/s12190-018-1193-9, First Online: 31 May 2018.

[7] Javanmard, M,. Mishmast Nehi, H. (2019) A Solving Method for Fuzzy Linear Programming Problem with Interval Type-2 Fuzzy Numbers. Int. J. Fuzzy Syst, DOI: https://doi.org/10.1007/s40815-018-0591-3, Published Online: 17 January.

[8] Kaufmann, A,. Gupta, M (1985) Introduction to fuzzy arithmetic theory and applications. Van Nostran Reinhold Co. Inc., New York.

[9] Mendel, J.M,. John, R.I,. Liu, F.L (2006) Interval type-2 fuzzy logical systems made simple. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 14, 808-821.

[10] Yager, R. R. (1978) Ranking fuzzy subsets over the unit interval. in Proceedings of the 17th IEEE International Conference on Decision and Control, San Diago, California, pp, 1435-1437.

[11] Zadeh, L.A. (1965) Fuzzy sets. Information And Control, 8, 338-353.

[12] Zadeh, L.A. (1975a) The concept of linguistic variable and its application to approximate reasoning-1. Information Sciences, 8, 199-249.

[13] Zadeh, L.A. (1975b) The concept of linguistic variable and its application to approximate reasoning-1. Information Sciences, 8, 301-357.

[14] Zadeh, L.A. (1975c) The concept of linguistic variable and its application to approximate reasoning-1. Information Sciences, 9, 43-80.