سیستم‌های فازی و کاربردها

سال دوم، شماره دوم (پاییز و زمستان ۱۳۹۸) صص. ۱۶۷ تا ۱۷۸

برنامه‌ریزی کسری خطی دوترازه با پارامترهای بازه‌ای و فازی

فرهاد حمیدی، ندا امیری

دانشکده ریاضی، دانشگاه سیستان و بلوچستان

چکیده

برنامه‌ریزی دوترازه یکی از مسائل پرکاربرد در برنامه‌ریزی چند ترازه می‌باشد که در آن دو تصمیم گیرنده در یک ساختار سلسله مراتبی بترتیب تصمیم می گیرند. در تراز بالایی، پیشرو و در تراز پایینی، دنباله‌رو قرار دارند. در این مقاله، برنامه‌ریزی کسری خطی دوترازه با پارامترهای نادقیق، مورد بررسی قرار می گیرد. الگوریتم بهترین k - ام برای برنامه‌ریزی کسری خطی دوترازه‌ی بازه‌ای تعمیم داده شده است. از طرفی برنامه‌ریزی کسری خطی دوترازه‌ی فازی با استفاده از α - برش به یک برنامه‌ریزی بازه‌ای تبدیل شده و با استفاده از الگوریتم مطرح شده، حل می‌گردد. جواب های بدست آمده به تصمیم گیرنده کمک می کند که جواب مورد نظرش را انتخاب کند.

۱ مقدمه

مسئله برنامه‌ریزی خطی دوترازه (BLP)، یک مسئله بهینه‌سازی نامتمرکز با ساختار سلسله مراتبی است که شامل دوتراز می‌باشد و هر تراز مستقلاً مجموعه‌ای از متغیرهای تصمیم را کنترل می‌کنند. به‌دلیل نامحدب بودن ناحیه‌ی شدنی و خاصیت NP–hard بودن، حل این مدل مسائل پیچیده و دشوار است. حالت خاصی از یک مسئله برنامه‌ریزی خطی دوترازه زمانی است که، توابع هدف آن

Mathematics Subject Classification (2010): 91A10 ; 90C70 , **Email:** f_hamidi@math.usb.ac.ir.

عبارات و کلمات کلیدی: برنامه‌ریزی بازه‌ای؛برنامه‌ریزی کسری خطی دوترازه ؛پارامترهای فازی

به صورت کسری باشند. در این صورت یک مسئله برنامه‌ریزی کسری خطی دوترازه (BLFP) خواهیم داشت که اولین بار توسط کالویت و گیل [1] مطرح شد[۵]. از جمله روش‌های حل مسئله برنامه‌ریزی کسری خطی دوترازه، روش وزن دهی است که توسط میشرا[2] ارائه شده است [۷]. در این روش، با یافتن وزن‌هایی مناسب برای توابع هدف کسری، می‌توان مسئله برنامه‌ریزی خطی دوترازه را به یک مسئله بهینه‌سازی تک ترازه تبدیل کرد. در [۱] برای حل مسئله کسری خطی دوترازه از سری تیلور استفاده گردید. ،کالویت و گیل بااستفاده از الگوریتم بهترین k - ام به حل مسئله برنامه‌ریزی کسری خطی دوترازه پرداختند و نشان دادند که جواب بهین مسئله BLFP، در نقاط راسی مرزی از ناحیه شدنی اتفاق می‌افتد [۶]. از جمله مسائلی که اخیراً مورد توجه محققان قرار گرفته است، مسئله برنامه‌ریزی کسری خطی دوترازه‌ی فازی می‌باشد که متاسفانه اطلاعات کمی در این زمینه وجوددارد. ساکاوا و همکاران[3] روی مسئله برنامه‌ریزی کسری خطی دوترازه وقتی ضرایب توابع هدف فازی هستند روشی ارائه داده‌اند که درآن به کمک برنامه‌ریزی فازی تعاملی، می‌توان برنامه‌ریزی کسری خطی دوترازه‌ی فازی را به حالت قطعی تبدیل کرد [۲]. در همان سال، ساکاوا و همکاران به حل مسئله کسری دوترازه‌ی وقتی تمام پارامترها فازی هستند، به کمک برنامه‌ریزی فازی تعاملی پرداختند [۴-۲]. در ادامه، مسئله برنامه‌ریزی کسری خطی دوترازه را معرفی می‌کنیم و تعاریف و قضایای مرتبط به آن را بیان خواهیم کرد. سپس در بخش سوم، پس از معرفی مسئله برنامه‌ریزی کسری خطی دوترازه با پارامترهای فازی در توابع هدف و قیود، با در نظر گرفتن مجموعه‌ی α - برش ضرایب فازی، مسئله کسری دوترازه‌ی فازی را به مسئله کسری دوترازه‌ی بازه‌ای تبدیل خواهیم کرد. سرانجام با در نظر گرفتن الگوریتم بهترین k - ام، به حل آن می‌پردازیم و در پایان نتیجه گیری آورده می‌شود.

---
[1] Calvete and Gale
[2] Mishra
[3] Sakawa et al

۲ مسئله برنامه‌ریزی کسری‌خطی‌دوترازه

مسئله برنامه‌ریزی کسری خطی دوترازه، یک مسئله برنامه‌ریزی خطی دوترازه است که توابع هدف تراز بالایی و پائینی در آن به صورت کسری هستند و مدل ریاضی آن به صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}_1} \quad & z_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \\ & s.t. \ \min_{\mathbf{x}_2} \quad z_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \\ & s.t. \quad (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \in S, \end{aligned} \tag{1}$$

که درآن : $z_i(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \frac{\mathbf{c}_{i1}\mathbf{x}_1+\mathbf{c}_{i2}\mathbf{x}_2+\alpha_i}{\mathbf{d}_{i1}\mathbf{x}_1+\mathbf{d}_{i2}\mathbf{x}_2+\beta_i}$ به ازای $i = 1, 2$،

$$\mathbf{d}_{i1}\mathbf{x}_1 + \mathbf{d}_{i2}\mathbf{x}_2 + \beta_i > 0.$$

در مسئله‌ی فوق $\mathbf{c}_{i1}$ و $\mathbf{d}_{i1}$ به ازای $i = 1, 2$ بردارهایی n_1 - بعدی و $\mathbf{c}_{i2}$ و $\mathbf{d}_{i2}$ به ازای $i = 1, 2$ بردارهایی n_2 - بعدی هستند. S ناحیه‌ی قیدی مسئله می‌باشد که ناتهی و کراندار است،

$$S = \{(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) : \ \mathbf{A}_1\mathbf{x}_1 + \mathbf{A}_2\mathbf{x}_2 \le b, \ \mathbf{x}_1 \ge 0, \mathbf{x}_2 \ge 0\}.$$

تعریف ۱.۲. نقطه‌ی راسی $(\mathbf{x}_1{}^*, \mathbf{x}_2{}^*)$، جواب بهینه‌ی مسئله برنامه‌ریزی کسری خطی دوترازه است هرگاه :

۱- $(\mathbf{x}_1{}^*, \mathbf{x}_2{}^*)$ شدنی باشد یعنی $(\mathbf{x}_1{}^*, \mathbf{x}_2{}^*) \in IR$

۲- برای هرنقطه راسی شدنی $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \in S$ داشته باشیم: $z_1(\mathbf{x}_1{}^*, \mathbf{x}_2{}^*) \le z_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ که در آن IR، نشان دهنده ناحیه القایی می‌باشد [۱۱].

همان‌طور که مشاهده می‌شود، حل مسئله‌ی BLFP به‌راحتی امکان‌پذیر نیست. بیشتر روش‌هایی که تاکنون برای حل مسئله کسری دوترازه ارائه شده است، از تغییر متغیر چارنز - کوپر استفاده کرده‌اند. با استفاده از تغییر متغیر چارنز - کوپر مسئله کسری دوترازه‌ی به یک مسئله دوترازه‌ی خطی تبدیل می‌شود. بنابراین برای حل این مدل مسائل پیشنهاد می‌شود از تغییر متغیر

چارنز کوپر استفاده شود. کیخا و همکاران، تغییر متغیر چارنز – کوپر را توسعه دادند که به صورت زیر تعریف می‌شود [۱۰]:

$$t = \max\{\frac{1}{\mathbf{d}_{11}\mathbf{x}_1 + \mathbf{d}_{12}\mathbf{x}_2 + \beta_1}, \frac{1}{\mathbf{d}_{21}\mathbf{x}_1 + \mathbf{d}_{22}\mathbf{x}_2 + \beta_2}\}$$

بنابراین داریم :

$$t \geq \frac{1}{\mathbf{d}_{11}\mathbf{x}_1 + \mathbf{d}_{12}\mathbf{x}_2 + \beta_1}$$

و

$$t \geq \frac{1}{\mathbf{d}_{21}\mathbf{x}_1 + \mathbf{d}_{22}\mathbf{x}_2 + \beta_2}$$

که با در نظر گرفتن تغییر متغیر $t\mathbf{x}_1 = \mathbf{y}_1$ و $t\mathbf{x}_2 = \mathbf{y}_2$ ، قیود زیر به مسئله BLFP اضافه می شوند و آن را به مسئله برنامه‌ریزی دوترازه‌ی خطی تبدیل می‌کند:

$$\mathbf{d}_{11}\mathbf{y}_1 + \mathbf{d}_{12}\mathbf{y}_2 + t\beta_1 \geq 1$$

و

$$\mathbf{d}_{21}\mathbf{y}_1 + \mathbf{d}_{22}\mathbf{y}_2 + t\beta_2 \geq 1.$$

به کمک تغییر متغیر فوق، می‌توان ثابت کرد مسئله کسری دوترازه دارای جواب بهین است. قضیه‌ی زیر این مطلب را ثابت می کند.

قضیه ۲.۲. نقطه‌ی راسی $(\mathbf{x}_1{}^*, \mathbf{x}_2{}^*)$ جواب بهین مسئله برنامه‌ریزی کسری خطی دوترازه است، اگر و تنها اگر t^* ای وجود داشته باشد که $(\mathbf{y}_1{}^*, \mathbf{y}_2{}^*)$ جواب بهین مسئله برنامه‌ریزی خطی دوترازه باشد.

اثبات. فرض کنید $(\mathbf{x}_1{}^*, \mathbf{x}_2{}^*)$ جواب بهینه‌ی مسئله‌ی BLFP باشد، پس بنا به تعریف بهینگی به ازای $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \in S$ خواهیم داشت:

$$\frac{\mathbf{c}_{11}\mathbf{x}_1{}^* + \mathbf{c}_{12}\mathbf{x}_2{}^* + \alpha_1}{\mathbf{d}_{11}\mathbf{x}_1{}^* + \mathbf{d}_{12}\mathbf{x}_2{}^* + \beta_1} \leq \frac{\mathbf{c}_{11}\mathbf{x}_1 + \mathbf{c}_{12}\mathbf{x}_2 + \alpha_1}{\mathbf{d}_{11}\mathbf{x}_1 + \mathbf{d}_{12}\mathbf{x}_2 + \beta_1}$$

و

$$\frac{\mathbf{c}_{21}\mathbf{x}_1{}^* + \mathbf{c}_{22}\mathbf{x}_2{}^* + \alpha_2}{\mathbf{d}_{21}\mathbf{x}_1{}^* + \mathbf{d}_{22}\mathbf{x}_2{}^* + \beta_2} \leq \frac{\mathbf{c}_{21}\mathbf{x}_1 + \mathbf{c}_{22}\mathbf{x}_2 + \alpha_2}{\mathbf{d}_{21}\mathbf{x}_1 + \mathbf{d}_{22}\mathbf{x}_2 + \beta_2}$$

می‌خواهیم ثابت کنیم $(\mathbf{y}_1{}^*, \mathbf{y}_2{}^*)$ جواب بهینه مسئله خطی دوترازه است. فرض می‌کنیم چنین نباشد یعنی:

$$\mathbf{c}_{11}\mathbf{y}_1{}^* + \mathbf{c}_{12}\mathbf{y}_2{}^* + \alpha_1 t^* \geq \mathbf{c}_{11}\mathbf{y}_1 + \mathbf{c}_{12}\mathbf{y}_2 + \alpha_1 t$$

$$\mathbf{c}_{21}\mathbf{y}_1{}^* + \mathbf{c}_{22}\mathbf{y}_2{}^* + \alpha_2 t^* \geq \mathbf{c}_{21}\mathbf{y}_1 + \mathbf{c}_{22}\mathbf{y}_2 + \alpha_2 t$$

با جایگذاری $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_1{}^*$ و $\mathbf{y}_2, \mathbf{y}_2{}^*$ در رابطه‌ی فوق می‌توان نتیجه گرفت:

$$\mathbf{c}_{11}\mathbf{x}_1{}^* t^* + \mathbf{c}_{12}\mathbf{x}_2{}^* t^* + \alpha_1 t^* \geq \mathbf{c}_{11}\mathbf{x}_1 t + \mathbf{c}_{12}\mathbf{x}_2 t + \alpha_1 t$$

و

$$\mathbf{c}_{21}\mathbf{x}_1{}^* t^* + \mathbf{c}_{22}\mathbf{x}_2{}^* t^* + \alpha_2 t^* \geq \mathbf{c}_{21}\mathbf{x}_1 t + \mathbf{c}_{22}\mathbf{x}_2 t + \alpha_2 t$$

با جایگزینی t, t^* در رابطه فوق و باتوجه به رابطه‌ی تعدی، به ازای $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \in S$، رابطه‌ی زیر نتیجه می‌شود:

$$\frac{\mathbf{c}_{11}\mathbf{x}_1{}^* + \mathbf{c}_{12}\mathbf{x}_2{}^* + \alpha_1}{\mathbf{d}_{11}\mathbf{x}_1{}^* + \mathbf{d}_{12}\mathbf{x}_2{}^* + \beta_1} \geq \frac{\mathbf{c}_{11}\mathbf{x}_1 + \mathbf{c}_{12}\mathbf{x}_2 + \alpha_1}{\mathbf{d}_{11}\mathbf{x}_1 + \mathbf{d}_{12}\mathbf{x}_2 + \beta_1}$$

و

$$\frac{\mathbf{c}_{21}\mathbf{x}_1{}^* + \mathbf{c}_{22}\mathbf{x}_2{}^* + \alpha_2}{\mathbf{d}_{21}\mathbf{x}_1{}^* + \mathbf{d}_{22}\mathbf{x}_2{}^* + \beta_2} \geq \frac{\mathbf{c}_{21}\mathbf{x}_1 + \mathbf{c}_{22}\mathbf{x}_2 + \alpha_2}{\mathbf{d}_{21}\mathbf{x}_1 + \mathbf{d}_{22}\mathbf{x}_2 + \beta_2}$$

واین رابطه با تعریف بهینگی در تناقض است. در نتیجه، $(\mathbf{y}_1{}^*, \mathbf{y}_2{}^*)$

جواب بهینه مسئله دوترازه خطی است و قضیه ثابت می‌شود. اثبات قسمت دوم قضیه، مشابه فوق به‌راحتی انجام می‌شود. □

۳ مسئله‌برنامه‌ریزی کسری خطی دوترازه‌ی بازه‌ای

در این قسمت، به معرفی مسئله برنامه‌ریزی خطی دوترازه‌ی کسری با ضرایب بازه‌ای (IBLFP) در توابع هدف و قیود می‌پردازیم. سپس روشی برای حل این مسائل پیشنهاد می‌دهیم.

مسئله IBLFP زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}_1} \quad & \frac{[\underline{c}_1,\overline{c}_1]\mathbf{x}_1+[\underline{c}_2,\overline{c}_2]\mathbf{x}_2+[\underline{\alpha}_1,\overline{\alpha}_1]}{[\underline{d}_1,\overline{d}_1]\mathbf{x}_1+[\underline{d}_2,\overline{d}_2]\mathbf{x}_2+[\underline{\beta}_1,\overline{\beta}_1]} \\ & s.t.\ \min_{\mathbf{x}_2} \quad \frac{[\underline{c}_3,\overline{c}_3]\mathbf{x}_1+[\underline{c}_4,\overline{c}_4]\mathbf{x}_2+[\underline{\alpha}_2,\overline{\alpha}_2]}{[\underline{d}_3,\overline{d}_3]\mathbf{x}_1+[\underline{d}_4,\overline{d}_4]\mathbf{x}_2+[\underline{\beta}_2,\overline{\beta}_2]} \\ & s.t. \quad [\underline{A}_1,\overline{A}_1]\mathbf{x}_1+[\underline{A}_2,\overline{A}_2]\mathbf{x}_2\leq[\underline{b},\overline{b}] \\ & \quad \mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2\geq 0. \end{aligned} \tag{2}$$

برزا، رامبلی و سراج[4]، به حل مسئله برنامه‌ریزی کسری خطی دوترازه با ضرایب بازه‌ای در توابع هدف پرداختند [۸]. آن‌ها به کمک الگوریتم بهترین k – ام توانستندجواب بهینه‌ی مقدار تابع هدف تراز بالایی را تعیین کنند. چون در مسئله فوق ضرایب به صورت بازه‌ای است. پس هدف تعیین بهترین و بدترین جواب‌های بهینه‌ی مقدار تابع هدف تراز بالایی می‌باشد. بنابراین مسئله فوق را به دو زیر مسئله خطی دوترازه، با در نظر گرفتن مطلوب‌ترین و نامطلوب‌ترین مقدار توابع هدف، و همچنین با تعیین ناحیه وسیع‌تر و محدودتر به شکل زیر تبدیل می‌کنیم:

$$\overline{S}=\{(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2):\ \ \underline{A}_1\mathbf{x}_1+\underline{A}_2\mathbf{x}_2\leq\overline{b}\}$$

[4] Borza , Rambely and saraj

و

$$\underline{S} = \{(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) : \ \overline{A}_2\mathbf{x}_1 + \overline{A}_2\mathbf{x}_2 \leq \underline{b}\},$$

بنابراین بهترین مسئله برنامه‌ریزی کسری خطی دوترازه (BEST) به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}_1} \quad & \frac{\underline{c}_1\mathbf{x}_1 + \underline{c}_2\mathbf{x}_2 + \underline{\alpha}_1}{\overline{d}_1\mathbf{x}_1 + \overline{d}_2\mathbf{x}_2 + \overline{\beta}_1} \\ & s.t. \ \min_{\mathbf{x}_2} \quad \frac{\underline{c}_3\mathbf{x}_1 + \underline{c}_4\mathbf{x}_2 + \underline{\alpha}_2}{\overline{d}_3\mathbf{x}_1 + \overline{d}_4\mathbf{x}_2 + \overline{\beta}_2} \\ & s.t. \quad (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \in \overline{S}. \end{aligned} \tag{3}$$

همچنین بدترین مسئله برنامه‌ریزی کسری خطی دوترازه (WORST) به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}_1} \quad & \frac{\overline{c}_1\mathbf{x}_1 + \overline{c}_2\mathbf{x}_2 + \overline{\alpha}_1}{\underline{d}_1\mathbf{x}_1 + \underline{d}_2\mathbf{x}_2 + \underline{\beta}_1} \\ & s.t. \ \min_{\mathbf{x}_2} \quad \frac{\overline{c}_3\mathbf{x}_1 + \overline{c}_4\mathbf{x}_2 + \overline{\alpha}_2}{\underline{d}_3\mathbf{x}_1 + \underline{d}_4\mathbf{x}_2 + \underline{\beta}_2} \\ & s.t. \quad (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \in \underline{S}. \end{aligned} \tag{4}$$

چون هنوز توابع هدف مسائل BEST و WORST کسری هستند، پس مستقیماً قابل حل نیستند. بنابراین می‌توان باتوجه به تغییر متغیر معرفی شده در قسمت قبل، مسائل BEST و WORST به دو مسئله برنامه‌ریزی خطی دوترازه تبدیل کرد که به ترتیب باحل هرکدام ازآن‌ها بهترین و بدترین جواب‌های بهینه‌ی مقدار تابع هدف تراز بالایی برای مسئله IBLFP به‌دست می‌آید. روشی که برای حل پیشنهاد می‌کنیم، الگوریتم بهترین - k امی است که توسط بیالاس و کاروان[5] ارائه شده است. روند الگوریتم به شرح زیر می‌باشد.

الگوریتم بهترین - kام:

۱- قرار دهید $i = 1$ و مسئله BEST را بدون در نظر گرفتن تابع هدف تراز پایئنی برای تعیین

[5] Bialas and Karwan

جواب بهینه‌ی $(\mathbf{y}_1{}^{[i]}, \mathbf{y}_2{}^{[i]})$ به روش سیمپلکس حل کنید. برو به گام ۲.

۲- در این گام، بررسی می‌شود نقطه‌ی راسی به‌دست آمده متعلق به ناحیه‌ی القاپذیر می‌باشد یاخیر. پس $\mathbf{y}_1 = \mathbf{y}_1{}^{[i]}$ قرار دهید و مسئله تراز پائینی مربوط به مسئله BEST را به روش سیمپلکس کراندار حل کنید. اگر $\mathbf{y}_1{}^* = \mathbf{y}_1{}^{[i]}$ باشد، آنگاه نقطه‌ی راسی $(\mathbf{y}_1{}^{[i]}, \mathbf{y}_2{}^{[i]})$ بهترین جواب بهینه خواهد بود و الگوریتم متوقف می‌شود. در غیر این صورت برو به گام ۳.

۳- فرض کنید $W^{[i]}$ مجموعه نقاط راسی مجاور به $(\mathbf{y}_1{}^{[i]}, \mathbf{y}_2{}^{[i]})$ باشد. قرار دهید $T = T \cup \{(\mathbf{y}_1{}^{[i]}, \mathbf{y}_2{}^{[i]})\}$ و $W = (W \cup W^{[i]}) - T$.

۴- قرار دهید $i = i + 1$ و یک نقطه راسی از W که بهترین مقدار برای تابع هدف تراز بالایی داشته باشد انتخاب کنید. برو به گام ۲ .

توجه داشته باشید که، بدترین جواب بهینه نیز با توجه به الگوریتم فوق به دست می‌آید با این تفاوت که از مسئله WORST برای تعیین بدترین جواب بهین استفاده می‌کنیم.

مثال ۱.۳. مسئله برنامه‌ریزی خطی دوترازه‌ی کسری با ضرایب بازه‌ای در توابع هدف زیر را در نظر بگیرید :

$$\begin{aligned}
&\min_{\mathbf{x}\in X} \quad \frac{[-4,-2]\mathbf{x}+[3,10]\mathbf{y}+[-3,-1]}{[2,5]\mathbf{x}+[3,6]\mathbf{y}+[1,6]} \\
&\quad \min_{\mathbf{y}\in Y} \quad f(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \frac{[8,10]\mathbf{x}+[-3,-2]\mathbf{y}+[-2,-1]}{[1,5]\mathbf{x}+[1,3]\mathbf{y}+[1,7]} \\
&\quad s.t. \quad -1\mathbf{x}+2\mathbf{y} \le 13 \\
&\qquad 2\mathbf{x}+3\mathbf{y} \le 37 \\
&\qquad 2\mathbf{x}-\mathbf{y} \le 17 \\
&\qquad 2\mathbf{x}-3\mathbf{y} \le 11 \\
&\qquad \mathbf{x}+4\mathbf{y} \ge 11 \\
&\qquad 5\mathbf{x}+2\mathbf{y} \ge 19 \\
&\qquad \mathbf{x},\mathbf{y} \ge 0
\end{aligned} \tag{5}$$

همان‌طورکه مشاهده می‌شود ضرایب توابع هدف، بازه‌ای هستند. باانجام روند فوق، و با شروع از نقطه‌ی راسی (۷, ۱)، به بهترین جواب بهینه‌ی (۵, ۹) می‌رسیم. به صورت مشابه، می‌توان بدترین جواب بهینه را نیز به‌دست آورد.

۴ مسئله‌برنامه‌ریزی کسری خطی دوترازه‌ی فازی

حالت خاصی از مسئله برنامه‌ریزی کسری خطی دوترازه با ضرایب نادقیق، مسئله برنامه‌ریزی خطی کسری دوترازه‌ی فازی (FBLFP) می‌باشد . این مسائل کاربرد بیشتری در دنیای واقعی دارند و می‌توانند در مدل‌سازی مسائل واقعی به ما کمک کنند. در این قسمت به بررسی مسئله برنامه‌ریزی کسری دوترازه که تمام ضرایب توابع هدف و قیود مسئله فازی است می‌پردازیم. یک مسئله برنامه‌ریزی کسری خطی دوترازه‌ی فازی به شکل زیر قابل تعریف است،

$$\begin{aligned}
\min_{\mathbf{x}_۱} \quad & z_۱(\mathbf{x}_۱,\mathbf{x}_۲) = \frac{\widetilde{c}_۱\mathbf{x}_۱ + \widetilde{c}_۲\mathbf{x}_۲ + \widetilde{\alpha}_۱}{\widetilde{d}_۱\mathbf{x}_۱ + \widetilde{d}_۲\mathbf{x}_۲ + \widetilde{\beta}_۱} \\
& s.t. \ \min_{\mathbf{x}_۲} \quad z_۲(\mathbf{x}_۱,\mathbf{x}_۲) = \frac{\widetilde{c}_۳\mathbf{x}_۱ + \widetilde{c}_۴\mathbf{x}_۲ + \widetilde{\alpha}_۱}{\widetilde{d}_۳\mathbf{x} + \widetilde{d}_۴\mathbf{y} + \widetilde{\beta}_۱} \\
& s.t. \quad \widetilde{A}_۱\mathbf{x}_۱ + \widetilde{A}_۲\mathbf{x}_۲ \leq \widetilde{b} \\
& \qquad \mathbf{x}_۱, \mathbf{x}_۲ \geq ۰
\end{aligned} \tag{۶}$$

کاملاً واضح است، چون ضرایب صورت و مخرج کسرها در توابع هدف، فازی هستند، حل مسئله کار دشواری است. هدف در این قسمت، استفاده از تعریف مجموعه α − برش ضرایب فازی و تبدیل مسئله‌ی FBLFP به یک مسئله دوترازه‌ی بازه‌ای است. در ادامه، چون ضرایب بازه‌ای هستند، بنابراین هنوز مسئله قابل حل نخواهد بود. درنتیجه، مسئله دوترازه‌ی بازه‌ای را به دو مسئله دوترازه‌ی خطی به نام‌های بهترین و بدترین تبدیل می‌کنیم که در این صورت دو مسئله دوترازه‌ی خطی خواهیم داشت و می‌توان به‌راحتی این دو مسئله را به هر روشی حل کرد. روشی که در این مقاله به‌کار می‌گیریم، اگوریتم بهترین − k ام می‌باشد. نهایتاً روش پیشنهادی را روی یک مثال تشریح می‌کنیم.

بر اساس تعریف مجموعه α − برش یک عدد فازی، مسئله FBLFP به مسئله IBLFP تبدیل

جدول ۱: ضرایب توابع هدف و قیود در مثال

$\widetilde{c}_1$	−۵۷	−۴۸	−۳۹	$\widetilde{c}_2$	−۱۰	−۹	−۸	$\widetilde{c}_3$	−۴۲	−۳۵	−۲۸
$\widetilde{c}_4$	۸	۹	۱۰	$\widetilde{d}_1$	۳۱	۳۸	۴۵	$\widetilde{d}_2$	۱۷	۲۱	۲۵
$\widetilde{a}_1$	−۵۸	−۴۹	−۴۰	$\widetilde{a}_2$	−۶	−۵	−۴	$\widetilde{a}_3$	−۸	−۷	−۶
$\widetilde{a}_4$	۱۱	۱۳	۱۵	$\widetilde{a}_5$	−۶	−۵	−۴	$\widetilde{a}_6$	۶	۷	۸
$\widetilde{a}_7$	−۱۸	−۱۵	−۱۲	$\widetilde{a}_8$	−۶	−۵	−۴	$\widetilde{a}_9$	۲۶	۳۲	۳۸
$\widetilde{a}_{10}$	۱۲	۱۴	۱۶	$\widetilde{a}_{11}$	۳۹	۴۸	۵۷	$\widetilde{a}_{12}$	۳۴	۴۲	۵۰
$\widetilde{a}_{13}$	−۷	−۶	−۵	$\widetilde{a}_{14}$	۲۷	۳۳	۳۹	$\widetilde{a}_{15}$	۳۱	۳۸	۴۵
$\widetilde{a}_{16}$	−۲۰	−۱۷	−۱۴	$\widetilde{a}_{17}$	۲۲	۲۷	۳۲	$\widetilde{a}_{18}$	۴	۵	۶
$\widetilde{a}_{19}$	۳۶	۴۵	۵۴	$\widetilde{a}_{20}$	−۵۱	−۴۳	−۳۵	$\widetilde{a}_{21}$	۲۳	۲۸	۳۳
$\widetilde{a}_{22}$	۱۲	۱۴	۱۶	$\widetilde{a}_{23}$	−۱۰	−۹	−۸	$\widetilde{a}_{24}$	−۳۴	−۲۹	−۲۴
$\widetilde{a}_{25}$	۲۵	۳۱	۳۷	$\widetilde{a}_{26}$	۱۳	۱۶	۱۹	$\widetilde{a}_{27}$	−۳۸	−۳۲	۲۶
$\widetilde{b}_1$	۱۹	۲۳	۲۷								

می‌شود.

مثال ۱.۴. مسئله برنامه‌ریزی کسری دوترازه‌ی فازی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}_1} \quad & \widetilde{z}_1 = \frac{\widetilde{c}_1\mathbf{x}_1 + \widetilde{c}_2\mathbf{x}_2 + 1}{\widetilde{d}_1\mathbf{x}_1 + \widetilde{d}_2\mathbf{x}_2 + 1} \\ s.t \ \min_{\mathbf{x}_2} \quad & \widetilde{z}_2 = \frac{\widetilde{c}_3\mathbf{x}_1 + \widetilde{c}_4\mathbf{x}_2 + 1}{\widetilde{d}_3\mathbf{x}_1 + \widetilde{d}_4\mathbf{x}_2 + 1} \\ s.t. \quad & \widetilde{A}_1\mathbf{x}_1 + \widetilde{A}_2\mathbf{x}_2 \leq \widetilde{b} \\ & x_j \geq 0, \ \forall j = 1, ..., 10. \end{aligned} \tag{7}$$

ضرایب فازی در جدول ۱ مشخص شده است. به‌طوری‌که، $\mathbf{x}_1 = (x_1, ..., x_5)$ و $\mathbf{x}_2 = (x_6, ..., x_{10})$ ؛ $\widetilde{A}_1$ و $\widetilde{A}_2$ ضرایب ماتریسی ۵ × ۱۱ انتخاب شده از بازه‌ی $[-50, 50]$ می‌باشند. همان‌طور که در جدول ۱ مشخص است، توجه داشته باشید که در مثال فوق، فقط بعضی از ضرایب به صورت فازی هستند. با توجه به روش پیشنهادی، این مثال را با درجه رضایت $\alpha = 0/8$ بااستفاده از الگوریتم بهترین - k ام حل می‌کنیم. پس از پنج تکرار، جواب های بهین مطابق با جدول ۲ به‌دست می‌آید.

جدول ۲: جواب های بهینه ی بدست آمده برای مثال

$\underline{z}_{۱}^{\min}$	−۱٫۶۱۰۹۹۱				
$\mathbf{x}_{۱}$	۰٫۸۱۴۳۰۱	۰٫۰۰۰۰۰۰	۱٫۱۳۷۹۸۲	۰٫۱۲۷۵۵۵	۰٫۰۰۰۰۰۰
$\mathbf{x}_{۲}$	۰٫۰۰۰۰۰۰	۰٫۰۰۰۰۰۰	۲٫۲۰۲۲۱۰	۰٫۹۹۱۹۱۴	۰٫۰۰۰۰۰۰
$\overline{z}_{۱}^{\min}$	−۰٫۳۱۸۵۵۲				
$\mathbf{x}_{۱}$	۱٫۰۷۵۹۹۱	۰٫۵۲۷۶۹۲	۰٫۰۰۰۰۰۰	۰٫۲۷۶۲۶۸	۰٫۲۵۸۰۱۴
$\mathbf{x}_{۲}$	۰٫۰۰۰۰۰۰	۰٫۸۶۶۸۰۵	۰٫۰۰۰۰۰۰	۰٫۱۹۵۷۰۰	۰٫۵۵۱۶۳۰

۵ نتیجه‌گیری

در این مقاله، به حل مسئله برنامه‌ریزی کسری خطی دوترازه با داده های نادقیق پرداخته شد. برنامه‌ریزی کسری خطی دوترازه‌ی بازه ای با استفاده از دو مدل دوترازه کسری خطی قطعی به نام های بهترین و بدترین تحلیل شد که در آن با استفاده از تغییر متغیر چارنز–کوپر، مدل های بهترین و بدترین از نوع دوترازه کسری خطی به مسائل دوترازه خطی تبدیل شدند و با استفاده از الگوریتم بهترین – k ام حل گردیدند. سپس برنامه‌ریزی کسری خطی دوترازه‌ی فازی مورد بررسی قرار گرفت. با استفاده از α – برش، این مسئله به یک برنامه‌ریزی کسری خطی دو ترازه‌ی بازه‌ای تبدیل شد و حل گردید.

مراجع

[1] P . P . Dey , S . Pramanik , " Goal programming approach to linear fractional bilevel programming problem based on Taylor series approximation," Int . J . Pure Appl . Sci .Technol . 6(2)(2011),115-123.

[2] M . Sakawa , I . Nishizaki , Y . Uemura , " Interactive fuzzy programming for tow-level linear fractional programming problems with fuzzy parameters " ,Fuzzy sets and Systems 115(2000),93-103.

[3] M . Sakawa , I . Nishizaki , ” Interactive fuzzy programming for two-level linear fractional programming problems ” , Fuzzy sets and Systems 119(2001),31-40.

[4] M . Sakawa , I . Nishizaki , Y . Uemura , ” Interactive fuzzy programming for tow-level linear and fractional production and assignment problem : A case study,” European Journal of Operational Research 135(2001)142-157.

[5] H . I . Calvete , C . Gale , ” The bilevel linear/linear fractional programming problem ” , European Journal of Operational Researh 114(1999)188-197.

[6] H . I . Calvete , C . Gale , ” A note on bilevel fractional programming problem ” , European Journal of Operational Researh 152(2004)296-299.

[7] S . Mishra , ” Weighting method for bilevel linear fractional programming ” , European Journal of Operational Research 183(2007)296-302.

[8] M . Borza , A . S . Rambely , M . Saraj , ” A Stackelberg solution to a two-level linear fractional programming problem with interval coeffcients in the objective functions ” , Sains Malaysiana 41(21)(2012)1651-1656 .

[9] A . Ren , ” A novel method for solving the fully fuzzy bilevel linear programming problem ” , Mathematical Problems in Engineering, Volumes (2015) , Article ID 280380 , 11 pages.

[10] S. Keikha, A. Payan, B. Rahmani Parchikolaei, ”Solving bi-level linear fractional programming problem by Bi-level linear programming problem: an extension to variable transformation of charnes and cooper ”, International Conference on Nonlinear Modeling & optimization, (2012).

[11] J. Bard, ”Practical bilevel optimizaton: algorithms and applications” , Kluver Academic Publishers, The Netherlands, USA, (1988).