

برآورد بیز فازی براساس داده‌های فازی

ملیحه عابدینی، محسن عارفی *

گروه آمار، دانشکده علوم ریاضی و آمار، دانشگاه بیرجند

چکیده

استنباط بیزی در محیط فازی توسط برخی نویسندگان بررسی شده است. در این جا، به طور مختصر، به تعدادی از این تحقیقات اشاره می‌کنیم. برآورد بیزی برای حالتی که داده‌های موجود فازی باشند، توسط گیل و همکاران [۷] تعمیم یافته است. شناخت [۹] به بررسی استنباط بیزی در حالت‌های مختلفی که داده‌ها دقیق یا فازی و پارامتر مورد نظر نیز دقیق یا فازی باشند، پرداخته است. یک دیدگاه متفاوت در بحث استنباط بیز امکانی توسط لاپوینت و بوبی [۸] تحت تابع پسین امکانی مورد بررسی قرار گرفته است. تعمیمی از روش لاپوینت و بوبی زمانی که داده‌ها فازی باشند توسط عارفی و طاهری [۴] مورد مطالعه قرار گرفته است. یک دیدگاه بیزی براساس تابع چگالی احتمالی و توزیع پیشین امکانی تحت داده‌های فازی توسط عارفی و طاهری [۳] مورد بررسی و مطالعه قرار گرفته است. همچنین طاهری و بهبودیان [۱۰] آزمون فرضیه‌های فازی تحت نگرش بیزی را در دو حالتی که داده‌ها دقیق یا فازی باشند، تعمیم داده‌اند. برخی رویکردهای دیگر در زمینه بیز فازی توسط بارداخچیان [۵] و یو و همکاران [۱۲] ارائه شده است.

Mathematics Subject Classification (2010): 03E72, 62F10 , Email: Arefi@Birjand.ac.ir.

عبارات و کلمات کلیدی: تابع درستنمایی فازی، توزیع پسین فازی، برآورد نقطه‌ای فازی

۱۳۹۹ (انجمن سیستم‌های فازی ایران)

۱ مفاهیم اولیه

در این بخش، برخی مفاهیم ضروری در مورد اعداد نادقیق و قضیه بیز مورد بررسی قرار گرفته است (برای بررسی بیشتر به طاهری [۱]، طاهری و ماشین‌چی [۲] و برگر [۶] مراجعه شود).

تعریف ۱.۱. فرض کنید X یک مجموعه مرجع باشد. یک مجموعه فازی N ، یک تابع به صورت $[0, 1] : X \rightarrow N$ است، که برای هر $0 < \alpha \leq 1$ ، α -برش آن به صورت $N_\alpha = \{x : N(x) \geq \alpha\}$ تعریف می‌شود.

تعریف ۲.۱. مجموعه فازی N را یک عدد فازی گوئیم، اگر

۱. N نرمال و تک‌نمایی باشد، یعنی $x_0 \in R$ وجود داشته باشد که $N(x_0) = 1$ ،

۲. α -برش‌های N ، به ازای هر $\alpha \in (0, 1]$ ، به صورت بازه‌های بسته و کراندار باشند.

تعریف ۳.۱. مجموعه فازی A را یک عدد فازی مثلثی گویند، اگر تابع عضویت آن به صورت زیر باشد:

$$A(x) = \begin{cases} 1 - \frac{m-x}{a} & m-a \leq x < m, \\ 1 + \frac{m-x}{b} & m \leq x < m+b, \end{cases}$$

که در آن m مقدار میانه، a و b به ترتیب پهنای چپ و پهنای راست A می‌باشند. یک عدد مثلثی را به صورت $A = (m, a, b)_T$ نشان می‌دهند.

تعریف ۴.۱. بردار فازی n بعدی، یک زیرمجموعه فازی از فضای اقلیدسی n -بعدی R^n می‌باشد که تابع عضویت آن یعنی $\mu(\cdot, \dots, \cdot)$ در شرایط زیر صدق می‌کند (فیتل [۱۱]):

۱. به ازای هر $\alpha \in (0, 1]$ ، α -برش

$$C(x^*)_\alpha = \{x \in R^n \mid \mu_{x^*}(x) \geq \alpha\},$$

یک اجتماع متناهی از زیرمجموعه‌های فشرده R^n باشد.

۲. $C(x^*)_1 \neq \emptyset$.

تابع $\mu(\cdot, \dots, \cdot)$ که در شرایط ۱ و ۲ صدق می‌کند تابع بردار مشخصه نامیده می‌شود.

۲ تابع پسین فازی براساس تابع پیشین فازی و تحت داده‌های فازی

در دیدگاه بیز معمولی فرض می‌شود که متغیر X یک کمیت تصادفی با تابع چگالی (جرم) احتمال $f(x|\theta)$ ، $\theta \in \Theta$ و پارامتر θ نیز کمیتی تصادفی با تابع چگالی (جرم) احتمال پیشین $\pi(\theta)$ می‌باشد. به شرط مشاهده نمونه $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ ، تابع چگالی احتمال پسین با استفاده از قضیه بیز به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\pi(\theta|x_1, \dots, x_n) = \frac{\pi(\theta)L(\theta|\mathbf{x})}{m(\mathbf{x})}, \quad \forall \theta \in \Theta,$$

که در آن $L(\theta|\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^n f(x_i|\theta)$ تابع درست‌نمایی تحت داده‌های دقیق و $m(\mathbf{x})$ تابع چگالی (جرم) حاشیه‌ای به صورت زیر است:

$$m(\mathbf{x}) = \begin{cases} \int_{\Theta} \pi(\theta)L(\theta|\mathbf{x})d\theta \\ \sum_{\theta \in \Theta} \pi(\theta)L(\theta|\mathbf{x}) \end{cases}$$

اکنون فرض کنید یک نمونه تصادفی از جامعه‌ای با تابع چگالی (یا تابع جرم احتمال) $f(x|\theta)$ انتخاب و مشاهدات بجای اعداد دقیق به صورت داده‌های فازی در دسترس باشند. باید تابع درست‌نمایی را تحت داده‌های فازی x_1^*, \dots, x_n^* تعمیم دهیم. اساس این کار، ترکیب نمونه فازی \mathbf{x}^* با تابع بردار مشخصه آن یعنی $\mu_{\mathbf{x}^*}(\mathbf{x})$ می‌باشد. تابع درست‌نمایی تعمیم یافته $L^*(\theta|\mathbf{x}^*)$ یک تابع فازی مقدار می‌باشد که به هر $\theta \in \Theta$ ، عدد فازی $L^*(\theta|\mathbf{x}^*)$ را نسبت می‌دهد که تابع مشخصه آن به وسیله اصل گسترش بدست می‌آید. تابع مشخصه $\psi_{L^*(\theta|\mathbf{x}^*)}(\cdot)$ از $L^*(\theta|\mathbf{x}^*)$ به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\psi_{L^*(\theta|\mathbf{x}^*)}(y) = \sup_{L(\theta|\mathbf{x})=y} \mu(\mathbf{x}), \quad \forall y \in R,$$

که α -برش‌های آن به صورت زیر هستند:

$$C[\psi_{L^*(\theta|\mathbf{x}^*)}(\cdot)]_\alpha = [\underline{L}_\alpha(\theta|\mathbf{x}^*); \bar{L}_\alpha(\theta|\mathbf{x}^*)].$$

اکنون فرض کنید تابع چگالی پیشین فازی $\pi^*(\theta)$ با α -برش‌های زیر در دسترس باشد:

$$\pi^*(\theta)_\alpha = [\underline{\pi}_\alpha(\theta), \bar{\pi}_\alpha(\theta)]$$

آن‌گاه، α -برش‌های تابع پسین فازی بر اساس تابع چگالی پیشین فازی و تحت داده‌های فازی به صورت زیر تعمیم داده می‌شود:

$$\pi(\theta|\mathbf{x}^*)_\alpha = [\underline{\pi}(\theta|\mathbf{x}^*)_\alpha, \bar{\pi}(\theta|\mathbf{x}^*)_\alpha],$$

که در آن داریم:

$$\underline{\pi}(\theta|\mathbf{x}^*)_\alpha = \frac{\underline{\pi}(\theta)_\alpha \underline{L}(\theta|\mathbf{x}^*)_\alpha}{m_\alpha(\mathbf{x}^*)}, \quad \forall \alpha \in (0, 1],$$

$$\bar{\pi}(\theta|\mathbf{x}^*)_\alpha = \frac{\bar{\pi}(\theta)_\alpha \bar{L}(\theta|\mathbf{x}^*)_\alpha}{m_\alpha(\mathbf{x}^*)}, \quad \forall \alpha \in (0, 1],$$

که در آن

$$m_\alpha(\mathbf{x}^*) = \begin{cases} \int_{\Theta} \frac{1}{\alpha} [\bar{\pi}_\alpha(\theta) \bar{L}(\theta|\mathbf{x}^*)_\alpha + \underline{\pi}(\theta)_\alpha \underline{L}(\theta|\mathbf{x}^*)_\alpha] d\theta \\ \sum_{\theta \in \Theta} \frac{1}{\alpha} [\bar{\pi}_\alpha(\theta) \bar{L}(\theta|\mathbf{x}^*)_\alpha + \underline{\pi}(\theta)_\alpha \underline{L}(\theta|\mathbf{x}^*)_\alpha] \end{cases}$$

۳ برآورد بیز فازی

در این بخش، می‌خواهیم براساس تابع پسین فازی معرفی شده در بخش قبل، برخی برآوردهای بیز فازی برای پارامتر مورد نظر محاسبه نماییم. این نگرش براساس α -برش‌های تابع پسین،

α -برش‌های برآورد بیزی را ارائه می‌نماید.

تعریف ۱.۳. فرض کنید تابع چگالی پسین فازی $\pi(\theta|\mathbf{x}^*)$ موجود باشد، آنگاه α -برش مد فازی توزیع پسین به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$M_\alpha(\mathbf{x}^*) = [\underline{M}_\alpha, \overline{M}_\alpha],$$

که در آن داریم:

$$\underline{M}_\alpha = \text{mode}(\underline{\pi}(\theta|\mathbf{x}^*)_\alpha), \quad \forall \alpha \in (0, 1],$$

$$\overline{M}_\alpha = \text{mode}(\overline{\pi}(\theta|\mathbf{x}^*)_\alpha), \quad \forall \alpha \in (0, 1].$$

تعریف ۲.۳. فرض کنید تابع چگالی پسین فازی $\pi(\theta|\mathbf{x}^*)$ موجود باشد، آنگاه α -برش میانه فازی توزیع پسین به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$\text{med}_\alpha(\mathbf{x}^*) = [\underline{\text{med}}_\alpha, \overline{\text{med}}_\alpha],$$

که در آن داریم:

$$\underline{\text{med}}_\alpha = \text{median}(\underline{\pi}(\theta|\mathbf{x}^*)_\alpha), \quad \forall \alpha \in (0, 1],$$

$$\overline{\text{med}}_\alpha = \text{median}(\overline{\pi}(\theta|\mathbf{x}^*)_\alpha), \quad \forall \alpha \in (0, 1].$$

تعریف ۳.۳. فرض کنید تابع چگالی پسین فازی $\pi(\theta|\mathbf{x}^*)$ موجود باشد، آنگاه α -برش میانگین فازی توزیع پسین به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$\delta_\alpha(\mathbf{x}^*) = [\underline{\delta}_\alpha, \overline{\delta}_\alpha],$$

که در آن به ازای هر $\alpha \in (0, 1]$ داریم:

$$\underline{\delta}(\mathbf{x}^*)_{\alpha} = \begin{cases} \int_{\Theta} \frac{\theta \pi(\theta)_{\alpha} L(\theta|\mathbf{x}^*)_{\alpha}}{m_{\alpha}(\mathbf{x}^*)} d\theta \\ \sum_{\theta \in \Theta} \frac{\theta \pi(\theta)_{\alpha} L(\theta|\mathbf{x}^*)_{\alpha}}{m_{\alpha}(\mathbf{x}^*)} \end{cases}$$

$$\overline{\delta}(\mathbf{x}^*)_{\alpha} = \begin{cases} \int_{\Theta} \frac{\theta \bar{\pi}(\theta)_{\alpha} \bar{L}(\theta|\mathbf{x}^*)_{\alpha}}{m_{\alpha}(\mathbf{x}^*)} d\theta \\ \sum_{\theta \in \Theta} \frac{\theta \bar{\pi}(\theta)_{\alpha} \bar{L}(\theta|\mathbf{x}^*)_{\alpha}}{m_{\alpha}(\mathbf{x}^*)} \end{cases}$$

۴ مثال عددی

مثال ۱۰۴. فرض کنید یک نمونه تصادفی 4° تایی از توزیع نمایی با تابع چگالی احتمال $f(x|\theta) = \theta e^{-\theta x}$ استخراج و مشاهدات به صورت داده‌های فازی مثلثی جدول ۱ در دسترس باشند. تابع درست‌نمایی به صورت زیر است:

$$L(\theta|\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^n \theta e^{-\theta x_i} = \theta^n e^{-\theta \sum_{i=1}^n x_i} = \theta^n e^{-\theta t}$$

که $t = \sum_{i=1}^n x_i$ براساس داده‌های فازی موجود در جدول ۱، داریم:

$$\sum_{i=1}^n X_i^* = \left(\sum_{i=1}^n m_i, \sum_{i=1}^n a_i, \sum_{i=1}^n b_i \right)_T = (2977, 356, 77.4)_T,$$

که تابع عضویت آن به صورت زیر است:

$$\mu(t) = \begin{cases} \frac{t-2941.4}{356} & 2941.4 < t \leq 2977, \\ \frac{3054.4-t}{77.4} & 2977 < t \leq 3054.4. \end{cases}$$

بنابراین، تابع عضویت تابع درستمایی برای مشاهدات فازی به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\begin{aligned} \psi_{L^*(\theta|\mathbf{x}^*)}(y) &= \sup_{y=\theta^n e^{-\theta t}} \mu(t) \\ &= \sup_{t=-\frac{1}{\theta} \ln \frac{y}{\theta^n}} \mu(t) \\ &= \mu\left(-\frac{1}{\theta} \ln \frac{y}{\theta^n}\right) \\ &= \begin{cases} -\frac{1}{\theta} \ln \frac{y}{\theta^n} - 2941.4 & 2941.4 < -\frac{1}{\theta} \ln \frac{y}{\theta^n} \leq 2977, \\ \frac{2954.4 + \frac{1}{\theta} \ln \frac{y}{\theta^n}}{77.4} & 2977 < -\frac{1}{\theta} \ln \frac{y}{\theta^n} \leq 3054.4. \end{cases} \end{aligned}$$

لذا α -برش‌های تابع درستمایی به صورت زیر بدست می‌آیند:

$$\psi_{\alpha} = [\theta^{40} e^{-\theta(2977+77.4(1-\alpha))}, \theta^{40} e^{-\theta(2977-356(1-\alpha))}].$$

اکنون فرض کنید θ دارای تابع پیشین نمایی با تابع چگالی احتمال $f(\theta|\lambda) = \lambda e^{-\lambda\theta}$ با پارامتر نادقیق باشد. ابهام موجود در پارامتر را به وسیله یک عدد فازی مثلثی به صورت $\lambda^* = (2, 13, 18)_T$ نشان می‌دهیم. براساس α -برش‌های λ^* ، α -برش‌های توزیع پیشین به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$\pi(\theta)_{\alpha} = [\underline{\pi}(\theta)_{\alpha}, \overline{\pi}(\theta)_{\alpha}],$$

که در آن داریم:

$$\begin{aligned} \underline{\pi}(\theta)_{\alpha} &= \lambda_{\min} e^{-\lambda_{\max} \theta} \\ &= \begin{cases} (0.7 + 13\alpha) e^{-(28-18\alpha)\theta} & \theta \leq d_1, \\ (0.7 + 13\alpha) e^{-1} & d_1 < \theta \leq d_2, \\ (38 - 18\alpha) e^{-1} & d_2 < \theta \leq d_3, \\ (38 - 18\alpha) e^{-(0.7+13\alpha)\theta} & d_3 < \theta, \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{\pi}(\theta)_\alpha &= \lambda_{\max} e^{-\lambda_{\min} \theta} \\ &= \begin{cases} (\lambda_1 - \lambda_2 \alpha) e^{-(\lambda_1 + \lambda_2 \alpha) \theta} & \theta \leq d_1, \\ \frac{1}{\theta} e^{-(\lambda_1 + \lambda_2 \alpha) \theta} & d_1 < \theta \leq d_2, \\ \frac{1}{\theta} e^{-(\lambda_1 - \lambda_2 \alpha) \theta} & d_2 < \theta \leq d_3, \\ (\lambda_1 + \lambda_2 \alpha) e^{-(\lambda_1 - \lambda_2 \alpha) \theta} & d_3 < \theta. \end{cases} \end{aligned}$$

بنابراین α -برش‌های تابع چگالی پسین به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\pi(\theta | \mathbf{x}^*) = \begin{cases} \frac{(\lambda_1 + \lambda_2 \alpha) \theta^{\lambda_1} e^{-\theta(3.0582 - 79.2\alpha)}}{A} & \theta \leq d_1, \\ \frac{(\lambda_1 + \lambda_2 \alpha) e^{-1} \theta^{\lambda_1} e^{-\theta(29.77 + 77.4(1-\alpha))}}{A} & d_1 < \theta \leq d_2, \\ \frac{(\lambda_1 - \lambda_2 \alpha) e^{-1} \theta^{\lambda_1} e^{-\theta(29.77 + 77.4(1-\alpha))}}{A} & d_2 < \theta \leq d_3, \\ \frac{(\lambda_1 - \lambda_2 \alpha) \theta^{\lambda_1} e^{-\theta(3.0582 - 79.2\alpha)}}{A} & \theta > d_3, \end{cases}$$

$$\bar{\pi}(\theta | \mathbf{x}^*) = \begin{cases} \frac{(\lambda_1 - \lambda_2 \alpha) \theta^{\lambda_1} e^{-\theta(29.221 + 36.9\alpha)}}{A} & \theta \leq d_1, \\ \frac{\frac{1}{\theta} \theta^{\lambda_1} e^{-\theta(29.221 + 36.9\alpha)}}{A} & d_1 < \theta \leq d_2, \\ \frac{\frac{1}{\theta} \theta^{\lambda_1} e^{-\theta(29.221 + 36.9\alpha)}}{A} & d_2 < \theta \leq d_3, \\ \frac{(\lambda_1 + \lambda_2 \alpha) \theta^{\lambda_1} e^{-\theta(29.221 + 36.9\alpha)}}{A} & \theta > d_3, \end{cases}$$

که در آن‌ها داریم:

$$d_1 = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2 \alpha}, \quad d_2 = \frac{\ln\left(\frac{\lambda_1 - \lambda_2 \alpha}{\lambda_1 + \lambda_2 \alpha}\right)}{\lambda_1 - \lambda_2 \alpha}, \quad d_3 = \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2 \alpha},$$

$$\begin{aligned}
A = & \frac{1}{\gamma} \left[\int_0^{d_1} (\gamma + \lambda\alpha) \theta^{\gamma} e^{-\theta(30582 - 792\alpha)} d\theta \right. \\
& + \int_0^{d_1} (38 - \lambda\alpha) \theta^{\gamma} e^{-\theta(29421 + 368\alpha)} d\theta \\
& + \int_{d_1}^{d_2} (\gamma + \lambda\alpha) e^{-\lambda\theta} e^{-\theta(2977 + 774(1-\alpha))} d\theta \\
& + \int_{d_1}^{d_2} \frac{1}{\theta} e^{-\theta(29421 + 368\alpha)} d\theta \\
& + \int_{d_2}^{d_3} (38 - \lambda\alpha) e^{-\lambda\theta} e^{-\theta(2977 + 774(1-\alpha))} d\theta \\
& + \int_{d_2}^{d_3} \frac{1}{\theta} e^{-\theta(29452 + 338\alpha)} d\theta \\
& + \int_{d_3}^{\infty} (38 - \lambda\alpha) \theta^{\gamma} e^{-\theta(30551 - 761\alpha)} d\theta \\
& \left. + \int_{d_3}^{\infty} (\gamma + \lambda\alpha) \theta^{\gamma} e^{-\theta(29452 + 338\alpha)} d\theta \right].
\end{aligned}$$

براساس تابع چگالی پسین فازی محاسبه شده و تعریف‌های ۱.۳، ۲.۳ و ۳.۳، برخی مقادیر α -برش‌های مد فازی در جدول ۲، برخی مقادیر α -برش‌های میانه فازی در جدول ۳ و برخی مقادیر α -برش‌های میانگین فازی در جدول ۴ محاسبه شده‌اند. با توجه به این برآوردها معلوم می‌شود که برآورد بیزی تحت مد فازی یک عدد فازی حدوداً ۱۳۴۳٪ (شکل ۱)، تحت میانه فازی یک عدد فازی حدوداً ۱۳۶۴٪ (شکل ۲) و تحت میانگین فازی یک عدد فازی حدوداً ۱۳۷۶٪ (شکل ۳) را برای پارامتر θ نتیجه می‌دهد.

۵ نتیجه‌گیری

در این مقاله، یک نگرش برای برآورد فازی در استنباط بیزی بررسی گردید. در برخی موارد مشاهدات مربوط به متغیر تحت بررسی نادقیق هستند. برای مدل‌سازی چنین سیستم‌هایی، ابتدا تابع درست‌نمایی تحت داده‌های فازی مورد تعمیم قرار گرفت و براساس آن و بر پایه یک توزیع پیشین نادقیق، α -برش‌های توزیع پسین براساس داده‌های فازی تعریف شد. در ادامه، برآورد

جدول ۱: مجموعه داده در مثال ۱.۴

شماره	X_i^*	شماره	X_i^*	شماره	X_i^*	شماره	X_i^*
۱	$(۱۳۰, ۱۶, ۱۷)_T$	۱۱	$(۱۳۸, ۱۷, ۱۸)_T$	۲۱	$(۱۴۰, ۱۷, ۱۸)_T$	۳۱	$(۱۶۵, ۲۰, ۲۱)_T$
۲	$(۱۶۵, ۲۰, ۲۱)_T$	۱۲	$(۱۵۸, ۱۸, ۲۱)_T$	۲۲	$(۱۵۴, ۱۸, ۲۰)_T$	۳۲	$(۱۳۶, ۱۶, ۱۸)_T$
۳	$(۱۷۰, ۲۰, ۲۲)_T$	۱۳	$(۱۳۵, ۱۶, ۱۸)_T$	۲۳	$(۱۵۰, ۱۸, ۲۰)_T$	۳۳	$(۱۶۶, ۲۰, ۲۲)_T$
۴	$(۱۳۲, ۱۶, ۱۷)_T$	۱۴	$(۱۵۸, ۱۸, ۲۱)_T$	۲۴	$(۱۴۹, ۱۸, ۱۹)_T$	۳۴	$(۱۶۰, ۱۹, ۲۱)_T$
۵	$(۱۶۴, ۲۰, ۲۱)_T$	۱۵	$(۱۳۷, ۱۶, ۱۸)_T$	۲۵	$(۱۳۲, ۱۶, ۱۷)_T$	۳۵	$(۱۳۵, ۱۶, ۱۸)_T$
۶	$(۱۳۵, ۱۶, ۱۸)_T$	۱۶	$(۱۵۶, ۱۸, ۲۰)_T$	۲۶	$(۱۳۵, ۱۶, ۱۸)_T$	۳۶	$(۱۶۱, ۱۹, ۲۱)_T$
۷	$(۱۳۶, ۲۰, ۲۱)_T$	۱۷	$(۱۳۹, ۱۷, ۱۸)_T$	۲۷	$(۱۳۳, ۱۶, ۱۷)_T$	۳۷	$(۱۳۸, ۱۷, ۱۸)_T$
۸	$(۱۳۲, ۱۶, ۱۷)_T$	۱۸	$(۱۵۵, ۱۸, ۲۰)_T$	۲۸	$(۱۳۵, ۱۶, ۱۸)_T$	۳۸	$(۱۳۸, ۱۷, ۱۸)_T$
۹	$(۱۳۸, ۱۷, ۱۸)_T$	۱۹	$(۱۴۲, ۱۷, ۱۸)_T$	۲۹	$(۱۷۰, ۲۰, ۲۲)_T$	۳۹	$(۱۵۱, ۱۸, ۲۰)_T$
۱۰	$(۱۵۹, ۱۹, ۲۱)_T$	۲۰	$(۱۵۳, ۱۸, ۲۰)_T$	۳۰	$(۱۷۰, ۲۰, ۲۲)_T$	۴۰	$(۱۵۹, ۱۹, ۲۱)_T$

جدول ۲: α -برش‌های نما فازی توزیع پسین

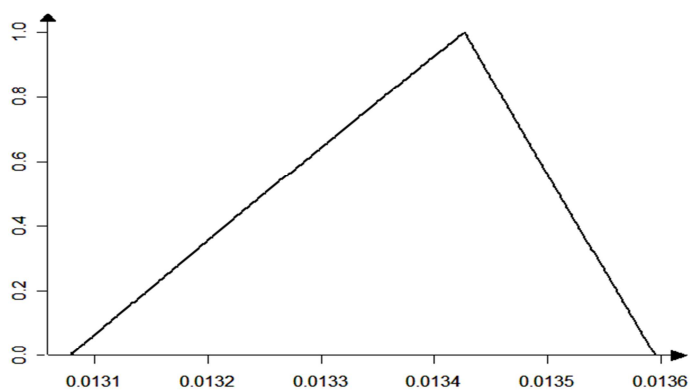
α	\underline{M}_α	\overline{M}_α
۰/۰	۰/۰ ۱۳۰۸	۰/۰ ۱۳۶۰
۰/۱	۰/۰ ۱۳۱۱	۰/۰ ۱۳۵۸
۰/۲	۰/۰ ۱۳۱۵	۰/۰ ۱۳۵۶
۰/۳	۰/۰ ۱۳۱۸	۰/۰ ۱۳۵۴
۰/۴	۰/۰ ۱۳۲۲	۰/۰ ۱۳۵۳
۰/۵	۰/۰ ۱۳۲۵	۰/۰ ۱۳۵۱
۰/۶	۰/۰ ۱۳۲۹	۰/۰ ۱۳۴۹
۰/۷	۰/۰ ۱۳۳۲	۰/۰ ۱۳۴۸
۰/۸	۰/۰ ۱۳۳۶	۰/۰ ۱۳۴۶
۰/۹	۰/۰ ۱۳۳۹	۰/۰ ۱۳۴۴
۱/۰	۰/۰ ۱۳۴۳	۰/۰ ۱۳۴۳

جدول ۳: α -برش‌های میانه فازی توزیع پسین

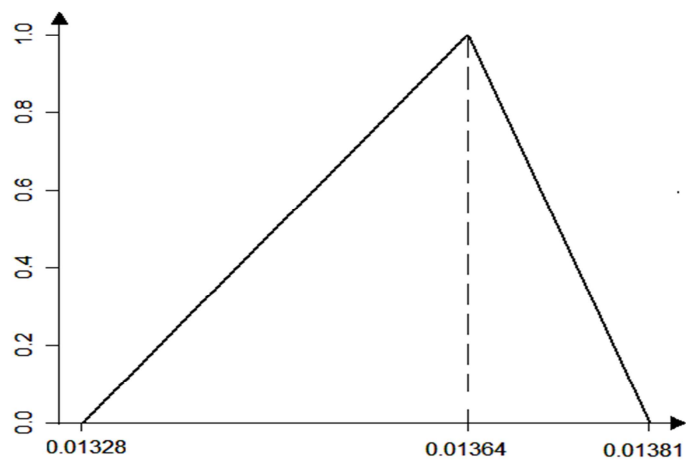
α	\underline{med}_α	\overline{med}_α
۰/۰	۰/۰ ۱۳۲۸	۰/۰ ۱۳۸۱
۰/۱	۰/۰ ۱۳۳۲	۰/۰ ۱۳۷۹
۰/۲	۰/۰ ۱۳۳۵	۰/۰ ۱۳۷۷
۰/۳	۰/۰ ۱۳۳۹	۰/۰ ۱۳۷۶
۰/۴	۰/۰ ۱۳۴۲	۰/۰ ۱۳۷۴
۰/۵	۰/۰ ۱۳۴۶	۰/۰ ۱۳۷۲
۰/۶	۰/۰ ۱۳۴۹	۰/۰ ۱۳۷۰
۰/۷	۰/۰ ۱۳۵۳	۰/۰ ۱۳۶۹
۰/۸	۰/۰ ۱۳۵۶	۰/۰ ۱۳۶۷
۰/۹	۰/۰ ۱۳۶۰	۰/۰ ۱۳۶۵
۱/۰	۰/۰ ۱۳۶۴	۰/۰ ۱۳۶۴

جدول ۴: α -برش‌های میانگین فازی توزیع پسین

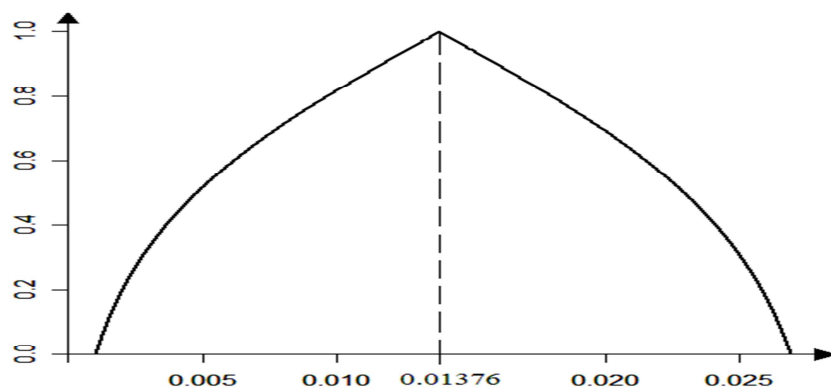
α	$\underline{\delta}_\alpha$	$\bar{\delta}_\alpha$
۰٫۰	۰٫۰۲۶۸۶	۰٫۰۰۰۹۷
۰٫۱	۰٫۰۲۶۳۹	۰٫۰۰۱۴۰
۰٫۲	۰٫۰۲۵۷۸	۰٫۰۰۱۹۶
۰٫۳	۰٫۰۲۵۰۲	۰٫۰۰۲۶۷
۰٫۴	۰٫۰۲۴۰۶	۰٫۰۰۳۵۸
۰٫۵	۰٫۰۲۲۸۹	۰٫۰۰۴۷۱
۰٫۶	۰٫۰۲۱۴۸	۰٫۰۰۶۰۸
۰٫۷	۰٫۰۱۹۸۴	۰٫۰۰۷۷۰
۰٫۸	۰٫۰۱۷۹۷	۰٫۰۰۹۵۵
۰٫۹	۰٫۰۱۵۹۲	۰٫۰۱۱۶۰
۱٫۰	۰٫۰۱۳۷۶	۰٫۰۱۳۷۶



شکل ۱: برآورد نقطه‌ای نمای فازی



شکل ۲: برآورد نقطه‌ای میانه فازی



شکل ۳: برآورد نقطه‌ای میانگین فازی

بیزی تحت روش‌های مد فازی، میانه فازی و میانگین فازی مورد بررسی قرار گرفت.

مراجع

- [۱] س. م. طاهری، آشنایی با نظریه مجموعه های فازی، انتشارات جهاد دانشگاهی دانشگاه فردوسی مشهد، ۱۳۷۵.
- [۲] س. م. طاهری، م. ماشین‌چی، مقدمه‌ای بر احتمال و آمار فازی، انتشارات دانشگاه شهید باهنر کرمان، ۱۳۸۷.
- [۳] م. عارفی، س. م. طاهری، برآورد بیزی براساس توزیع پسین امکانی با داده‌های فازی، مجله اندیشه آماری (ویژه دومین کارگاه آمار و احتمال فازی)، سال دوازدهم، شماره اول، ۷۷-۸۵، ۱۳۸۶.
- [4] M. Arefi, S. M. Taheri, "Possibilistic Bayesian inference based on fuzzy data", *International Journal of Machine Learning and Cybernetics*, vol. 7, pp. 753-763, 2016.
- [5] V.G. Bardakhchyan, "Fuzzy Bayesian inferences", *Physical and Mathematical Sciences*, vol. 51, pp. 8-12, 2017.
- [6] J. O. Breger, "Statistical Decision Theory and Bayesian Analysis", Springer, New York, 1985.
- [7] M. Gil, N. Corral, and P. Gil, "The fuzzy decision problem: An approach to the pointe estimation problem with fuzzy information", *European Journal of operational Research*, vol. 22, pp. 26-34, 1985.
- [8] S. Lapointe, B. Bobee, "Revision of possibility distributions:A Bayesian inference pattern", *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 116, pp. 119-140, 2000.

- [9] S. Schnatter, "On fuzzy Bayesian inference", *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 60, pp. 41-58, 1993.
- [10] S. M. Taheri, and J. Behboodan, "On Bayesian approach to fuzzy testing hypothesis with fuzzy data", *Italian Journal of Pure and Applied Mathematics*, vol. 19, pp. 139-154, 2006.
- [11] R. Viertl, "Foundations of fuzzy Bayesian inference", *Journal of Uncertain Systems*, vol. 2, pp. 187-191, 2008.
- [12] Y. You, J. Li, and L. Shen, "An effective Bayesian network parameters learning algorithm for autonomous mission decision-making under scarce data", *International Journal of Machine Learning and Cybernetics*, vol. 10, pp.549-561, 2019.