سیستم‌های فازی و کاربردها
سال سوم، شماره اول (بهار و تابستان ۱۳۹۹) صص. ۲۳۷ تا ۲۴۴
DOR: 20.1001.1.27174409.1397. 3.1.11.6

احتمال پسین شاخص کارایی C'_p برای فرآیند دارای توزیع نمایی با حدود مشخصه‌ی فنی فازی

بنیتا دولت‌زاده*، وحید امیرزاده

بخش آمار، دانشکده ریاضی و کامپیوتر، دانشگاه شهید باهنر کرمان

چکیده

در این مطالعه به بررسی شاخص کارایی C'_p تحت توزیع نمایی و محاسبه‌ی احتمال پسین کارایی فرآیند با توجه به رویکرد بیز پرداخته می‌شود. از طرفی در بسیاری از فرآیندهای موجود در طبیعت اطلاعات بدست آمده فازی هستند، بنابراین در این مطالعه حدود مشخصه‌ی فنی را به‌صورت فازی در نظر گرفته‌می‌شود. هدف این مقاله محاسبه‌ی احتمال شاخص کارایی C'_p برای فرآیندی با توزیع نمایی است که دارای حدود مشخصه‌ی فنی فازی می‌باشد. درنهایت یک مثال برای محاسبه‌ی این احتمال بیان می‌شود.

۱ مقدمه:

برای بیان میزان کارایی یک فرآیند، استفاده از شاخص کارایی ابزاری مناسب می‌باشد. در بسیاری از مطالعات، روش محاسبه‌ی شاخص‌های کارایی فرآیند همان روش سنتی توزیع فراوانی است [۴]. محققان با پیشرفت علم بدین نتیجه رسیدند که شاخص‌های کارایی فرآیند به روش بیز جایگزین مناسب‌تری به جای استفاده از این شاخص‌ها به روش توزیع فراوانی هستند و دلیل آن فراهم کردن امکان تأثیر اطلاعات و آگاهی‌های پیشین بر نتیجه است [۳]. در تحلیل بیزی،

Mathematics Subject Classification (2010): 03E72 , **Email:** $mahramaneh\_90@yahoo.com$.

عبارات و کلمات کلیدی: شاخص کارایی فرآیند، احتمال پسین کارایی فرآیند، رویکرد بیز، شاخص کارایی فرآیند C'_p، حدود مشخصه‌ی فنی فازی

پارامترها متغیر تصادفی می‌باشند. در این حالت عدم قطعیت پارامتر، توسط توزیع احتمال بیان می‌شود [۹]. ازطرفی امروزه به دلیل اینکه داده‌ها و اطلاعات در فرآیندهای در حال تولید، فازی هستند، استفاده از این علم برای محاسبه‌ی شاخص کارایی فرآیندو احتمال پسین آن، اقدامی مهم و مفید بشمار می‌آید. با درنظر گرفتن حدود مشخصه‌ی فازی، می‌توان از خطاهای احتمالی جلوگیری کرد. برای مطالعه‌ی بیشتر در زمینه‌ی شاخص کارایی با حدود مشخصه‌ی فنی فازی به منبع [۱] مراجعه نمایید.

تعریف ۱.۱. اگر USL دارای دو شرط زیر باشد، آنگاه USL یک کران بالای فازی نامیده می‌شود و با نماد $\widetilde{USL}$ نمایش داده می‌شود

(۱) الف. USL یک تابع غیر صعودی باشد،

(۲) ب. وجود داشته باشد $u_1 \in \mathbb{R}$ بطوریکه به ازای هر $x \leq u_1$ داشته باشیم $USL(x) = 1$ [۱] و [۸].

تعریف ۲.۱. اگر LSL دارای دو شرط زیر باشد، آنگاه LSL یک کران بالای فازی نامیده می‌شود و با نماد $\widetilde{LSL}$ نمایش داده می‌شود

(۲) الف. LSL یک تابع غیر نزولی باشد،

(۲) ب. وجود داشته باشد $l_1 \in \mathbb{R}$ بطوریکه به ازای هر $x \geq l_1$ داشته باشیم $LSL(x) = 1$ [۱] و [۸].

تعریف ۳.۱. فاصله‌ی میان دو کران فازی $\widetilde{LSL}$ و $\widetilde{USL}$ را با نماد $D(\widetilde{USL}, \widetilde{LSL})$ نشان داده و آن را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$D(\widetilde{USL}, \widetilde{LSL}) = \int_0^1 g(\alpha)(u_\alpha - l_\alpha)d\alpha$$

که در آن به ازای هر α در بازه‌ی $[0, 1)$ برش‌های α برای $\widetilde{LSL}$ و $\widetilde{USL}$ به صورت زیر

تعریف می‌شود

$$\widetilde{LSL}_\alpha = [l_\alpha, +\infty) \quad , \quad \widetilde{USL}_\alpha = (-\infty, u_\alpha]$$

و $u_{\circ}$ و $l_{\circ}$ اعداد حقیقی متناهی و $g(\alpha)$ تابعی غیرنزولی روی بازه‌ی $[\circ, ۱]$ می‌باشد بطوریکه $g(\circ) = \circ$ و $\int_{\circ}^{۱} g(\alpha)d\alpha = ۱$ [۱] و [۷].

حال با توجه به تعاریف ذکر شده درباره‌ی حدود مشخصه‌ی فنی فازی و بیان فاصله‌ی میان این دو کران فازی، می‌توان شاخص کارایی C_p را برای فرآیند نرمال با حدود مشخصه‌ی فنی فازی به صورت زیر نوشت

$$C_p = \frac{D(\widetilde{USL}, \widetilde{LSL})}{۶\sigma}$$

از طرفی چون قبلاً بیان کردیم که شاخص کارایی C_p' برای فرآیندهای غیرنرمال تعمیمی از شاخص کارایی C_p برای فرآیندهای نرمال است، بنابراین شاخص کارایی C_p' با حدود مشخصه‌ی فنی فازی به صورت زیر تعریف می‌شود

$$C_p' = \frac{D(\widetilde{USL}, \widetilde{LSL})}{\xi_{۱-\alpha} - \xi_\alpha}$$

که در آن ξ_α و $\xi_{۱-\alpha}$ همان مقادیر ذکر شده در شاخص کارایی غیر فازی C_p' هستند [۱].

۲ احتمال پسین شاخص کارایی C_p'

قضیه ۱.۲. اگر $X_۱, ..., X_n$ یک نمونه تصادفی از توزیع نمایی با پارامتر θ باشند، آنگاه توزیع پسین $\theta|X$ با استفاده از توزیع پیشین جفریز به صورت زیر به دست می‌آید [۲]

$$\theta|\mathbf{X} = \mathbf{x} \sim Gamma(n, \Sigma_{i=۱}^{n} x_i).$$

اثبات. برای محاسبه‌ی توزیع پسین پارامتر θ، باید از اطلاع فیشر استفاده کرد. چون

$$\pi(\theta) \propto |I_{\mathbf{X}}(\theta)|^{\frac{1}{2}} = |\frac{n}{\theta^2}|^{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{n}}{\theta}$$

بنابراین

$$\pi(\theta) \propto \frac{1}{\theta}$$

همچنین می‌دانیم

$$\pi_{\theta|\mathbf{X}}(\theta|\mathbf{x}) \propto f_{\mathbf{X}|\theta}(\mathbf{x}|\theta) * \pi(\theta) = \theta^{n-1} e^{-\theta \Sigma_{i=1}^{n} x_i} \; ; \; \forall \theta > 0$$

درنتیجه می‌توان بیان کرد که قضیه اثبات می‌شود. □

تعریف ۲.۲. فرآیند غیرنرمال X دارای حداقل سطح کارایی $w > 0$ است اگر $C'_p > w$

قضیه ۳.۲. اگر $X_1, ..., X_n$ یک نمونه تصادفی n تایی از فرآیندی با توزیع نمایی با حداقل سطح کارایی $w > 0$ باشند، همچنین با فرض اینکه $a = \dfrac{wln(\frac{1-\alpha}{\alpha})}{D(\widetilde{USL}, \widetilde{LSL})}$، آنگاه

$$p = P(C'_p > w|\mathbf{X} = \mathbf{x}) = e^{-a\Sigma_{i=1}^{n} x_i} \Sigma_{j=1}^{n} \frac{(\Sigma_{i=1}^{n} x_i)^{n-j} a^{n-j}}{(n-j)!}.$$

اثبات. برای محاسبه‌ی احتمال پسین کارایی فرآیند ابتدا باید به محاسبه‌ی ξ_α و $\xi_{1-\alpha}$ پرداخت. با توجه به اینکه $P(X_i \leq \xi_\alpha) = \alpha$ و $P(X_i \leq \xi_{1-\alpha}) = 1 - \alpha$، بنابراین می‌توان نوشت

$$\xi_\alpha = -\frac{1}{\theta} ln(1-\alpha) \qquad (1)$$

و

$$\xi_{۱-\alpha} = -\frac{۱}{\theta} ln(\alpha) \qquad (۲)$$

حال احتمال پسین کارایی فرآیند با حداقل سطح کارایی $w > ۰$ برابر است با

$$\begin{aligned} p = P(C_p^{'} > w|\mathbf{X}=\mathbf{x}) &= P(\frac{D(\widetilde{USL}-\widetilde{LSL})}{\xi_{۱-\alpha}-\xi_\alpha} > w|\mathbf{X}=\mathbf{x}) \\ &= P(\frac{D(\widetilde{USL}-\widetilde{LSL})}{w} > \xi_{۱-\alpha}-\xi_\alpha|\mathbf{X}=\mathbf{x}). \end{aligned}$$

با استفاده از دو رابطه‌ی (۱) و (۲) و باتوجه به a ذکر شده در صورت قضیه، می‌توان گفت

$$P(\theta > a|\mathbf{X}=\mathbf{x}) = ۱ - \frac{(\Sigma_{i=۱}^n x_i)^n}{(n-۱)!}\int_۰^a \theta^{n-۱} e^{-\theta\Sigma_{i=۱}^n x_i} d\theta$$

همچنین با استفاده از رابطه‌ی (۳۱) داریم

$$\begin{aligned} P(\theta > a|\mathbf{X}=\mathbf{x}) &= e^{-\theta\Sigma_{i=۱}^n x_i}(\frac{(\Sigma_{i=۱}^n x_i)^{n-۱}a^{n-۱}}{(n-۱)!} + \frac{(\Sigma_{i=۱}^n x_i)^{n-۱}a^{n-۱}}{(n-۱)!} \\ &+ \frac{(\Sigma_{i=۱}^n x_i)^{n-۱}a^{n-۱}}{(n-۱)!} + ... + ۱) \\ &= e^{-a\Sigma_{i=۱}^n x_i}\Sigma_{j=۱}^n \frac{(\Sigma_{i=۱}^n x_i)^{n-j}a^{n-j}}{(n-j)!} \end{aligned}$$

همانطورکه مشاهده می‌شود، قضیه اثبات شد. □

۳ مثال عددی

مثال ۱.۳. در یک فرآیند تولیدی از توزیع نمایی با پارامتر ۱۰، نمونه‌ای تصادفی به حجم ۱۰ انتخاب می‌کنیم. فرض کنید حدود مشخصه‌ی فنی فازی $\widetilde{LSL}$ و $\widetilde{USL}$ به ترتیب به صورت زیر باشند

$$\widetilde{LSL} = \begin{cases} 1 & ; \quad x \geq 4 \\ 4x & ; \quad 3 < x \leq 4 \\ 0 & ; \quad o.w \end{cases}$$

$$\widetilde{USL} = \begin{cases} 1 & ; \quad x \leq 15 \\ 16 - x & ; \quad 15 < x \leq 16 \\ 0 & ; \quad o.w \end{cases}$$

همچنین باتوجه به تعریف فاصله‌ی میان دو کران فازی

$$\widetilde{LSL}_\alpha = [4\alpha, \infty) \qquad \widetilde{USL}_\alpha = (-\infty, 16 - \alpha]$$

با فرض اینکه $g(\alpha) = 2\alpha$ و باتوجه به تعریف فاصله‌ی میان دو کران فازی

$$D(\widetilde{USL}, \widetilde{LSL}) = \int_0^1 2\alpha(16 - 5\alpha)d\alpha \simeq 12/66$$

بنابراین با توجه به ۱۰ داده‌ی بدست آمده در نرم افزار R از توزیع نمایی با پارامتر ۱۰ که در جدول ۱ مشاهده می‌شود، برای wهای مختلف احتمال پسین را بدست آوردیم که مقادیر آنها را در جدول ۲ بیان کردیم.

جدول ۱: مقادیر مشاهده‌شده برای متغیر تصادفی X

X=x	۸/۲	۱/۵۶	۴/۹۵	۱/۱۲	۱/۹	۱۰/۹	۱۸/۶	۰/۳۱	۵/۹	۷/۵

جدول ۲: مقادیر احتمال پسین برای wهای متفاوت

w	p	w	p	w	p
۱/۴	۰/۰۶	۰/۷	۰/۷۵	۰	۱
۱/۵	۰/۰۳	۰/۸	۰/۶۱	۰/۱	۰/۹۹
۱/۶	۰/۰۲	۰/۹	۰/۴۵	۰/۲	۰/۹۹
۱/۷	۰/۰۱	۱	۰/۳۴	۰/۳	۰/۹۹
۱/۸	۰/۰۰۵	۱/۱	۰/۲۳	۰/۴	۰/۹۸
۱/۹	۰/۰۰۳	۱/۲	۰/۱۵	۰/۵	۰/۹۵
۲	۰/۰۰۱	۱/۳	۰/۱	۰/۶	۰/۸۷

۴ نتیجه‌گیری

به‌دلیل رشد روزافزون رویکرد بیز و جایگاه ویژه‌ای که علم فازی در دنیای امروزه دارد، ما در این مطالعه استنباط بیزی را به‌عنوان روشی نوین و جایگزینی مناسب برای استنباط کلاسیک بیان کردیم. همچنین از حدود مشخصه‌ی فنی فازی به جای حدود مشخصه‌ی فنی معمولی استفاده کردیم و درنهایت با استفاده از روش بیز و حدود مشخصه‌ی فازی به محاسبه‌ی احتمال پسین کارایی فرآیند غیرنرمال پرداختیم. بدین معنی که با استفاده از این روش احتمال سطح کارایی فرآیند غیرنرمال را محاسبه نموده، سپس با استفاده از مقدار بدست آمده برای احتمال ذکر شده، به بیان این مطلب که فرآیند با چه احتمالی در سطح کارایی قرار دارد، رسیده‌ایم. بنابراین با این کار نه‌تنها هیچ خللی در زیربنای علمی کار ایجاد نشده، بلکه به دلیل استفاده از اطلاعات و آگاهی‌های پیشین و استفاده از حدود مشخصه‌ی فنی فازی، نتایج بهتر و قابل اعتمادتری نیز حاصل شده است.

مراجع

[۱] پرچمی، ع، ماشین‌چی، م، (۱۳۸۹) کنترل کیفیت آماری. دانشگاه شهید باهنر کرمان.

[۲] دولت‌زاده، ب، امیرزاده، و، ماشین‌چی، م، (۱۳۹۴) محاسبه‌ی شاخص کارایی C'_p برای فرایندی با توزیع نمایی. چهل و ششمین کنفرانس ریاضی ایران.

[3] Berger, J. O. (1985) Statistical Decision Theory and Bayesian Analysis. Springer, New York.

[4] Berger, J. O., Wolpert, R. L. (1988) The Likelihood Principle. Institute of Mathematical Statistics, Hayward California.

[5] Kots, S., Johnson, N. L. (1993) Process Capability Indices. Chapman and Hall, London.

[6] Kots, S., Lovelace, C. R. (1998) Process Capability Indices in Theory and Practice. Arnold, London.

[7] Parchami, A., Mashinchi, M. (2010) A new generation of process capability indices. Journal of Applied Statistics, 37(1), pp. 77-89.

[8] Parchami A., Mashinchi, M., Sharayei, A. (2010) An effective approach for measuring the capability of manufacturing processes. Production Planning and Control, 21(3), pp. 250-257.

[9] Raftery, A. E. (1995) Bayesian model selection in social research. Sociological Methodology, 25, pp. 111-163.