سیستم‌های فازی و کاربردها
سال سوم، شماره اول (بهار و تابستان ۱۳۹۹) صص. ۱۳۵ تا ۱۶۲
DOR: 20.1001.1.27174409.1399.3.1.8.3

مقدمه ای بر روش های عددی حل معادلات دیفرانسیل فازی

نازنین احمدی،الهام احمدی، سعید عباس بندی *، توفیق الهویرنلو

گروه ریاضی، واحد ورامین-پیشوا، دانشگاه آزاد اسلامی، ورامین، ایران
گروه ریاضی، واحد شهر قدس، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ایران
گروه ریاضی کاربردی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه بین المللی امام خمینی (ره)، قزوین، ایران
گروه ریاضی، واحد علوم و تحقیقات، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ایران

چکیده

با توجه به پیشرفت علوم فنی و مهندسی و کاربرد معادلات دیفرانسیل در مسائل مهندسی، حل معادلات دیفرانسیل از اهمیت زیادی برخوردار است. آنچه در این مقاله به آن می پردازیم حل عددی این دسته از معادلات در شرایط فازی است. مهمترین نکته در معادلات دیفرانسیل فازی، نوع مشتق فازی به کار رفته در این نوع معادلات است. مشتق سیکالا یکی از کاربردی ترین مشتقاتی بود که در ابتدا در معادلات دیفرانسیل فازی استفاده و بر مبنای آن روش های حل عددی مهمی از جمله روش اویلر ، روش تیلور و روش های چندگامی توسط محققان پیشنهاد گردید. در این مقاله به طور مختصر مروری بر این روش ها خواهیم داشت.

Mathematics Subject Classification (2010): 34A07; 65L05., **Email:** abbasbandy@ikiu.ac.ir .

عبارات و کلمات کلیدی: معادلات دیفرانسیل فازی؛ روش های حل عددی؛ مشتق سیکالا

۱ سرآغاز

در سال های اخیر به دلیل کاربرد فراوان معادلات دیفرانسیل فازی در بسیاری از مسایل علوم و مهندسی ، اینگونه معادلات بسیار مورد توجه محققان قرار گرفته است. با توجه به نقش نوع مشتق در جواب معادلات دیفرانسیل فازی ابتدا به بررسی تاریخچه مشتقات فازی می پردازیم. مفهوم مشتق فازی اولین بار توسط چنگ و زاده [۶] معرفی گردید، سپس توسط دبیوس و پراید [۷]، پوری و رالسکیو [۱۱] و گوچسل و وکسمن [۹] انواع دیگری از مشتق تعریف گردید. مشتق سیکالا یکی از مهمترین تعاریف مشتق فازی بود که توسط سیکالا معرفی گردید[۱۲] . مقاله کالوا نقطه آغازین برای تحقیق در معادلات دیفرانسیل فازی است [۱۰] . برای حل معادلات دیفرانسیل فازی می توان از روش های تحلیلی و عددی استفاده نمود که چون روش های تحلیلی برای حل طیف وسیعی از معادلات دیفرانسیل فازی مقدور نمی باشد روش های عددی مورد استفاده قرار می گیرند که دارای کاربرد بسیاری در حل مسائل کاربردی هستند. از جمله روش های عددی، روش اویلر، روش تیلور، روش پیشگو-اصلاحگر و روش پیشگو-اصلاحگر بهبودیافته برای حل معادلات دیفرانسیل تحت مشتق سیکالا معرفی گردیده است [۸، ۲، ۴، ۳] .
این تحقیق به صورت زیر سازماندهی گردیده است: در بخش ۲ مقدمات، تعاریف اساسی مورد نیاز آورده شده است. در بخش ۳ یکی از اساسی ترین و مهم ترین روش های حل معادلات دیفرانسیل فازی، روش سیکالا بیان شده است و در بخش ۴ تعدادی از روش های عددی حل معادلات دیفرانسیل فازی تحت مشتق سیکالا گردآوری شده است.

۲ مقدمات

در این بخش تعاریف اولیه که در بخشهای بعدی مورد نیاز است معرفی می گردد.
در مجموعه فازی برای $0 < r \leq 1$ ، r- برش ها به صورت $[u]^r = \left\{t \in \mathbb{R} \middle| u(t) \geq r\right\}$ و $[u]^0 = \mathrm{cl}\left\{t \in \mathbb{R} \middle| u(t) > 0\right\}$ تعریف می شود.

تعریف ۱.۲. [۱] مجموعه فازی u یک عدد فازی است هرگاه در فرضیات زیر صدق کند:
۱) $[u]^0$ یک زیر مجموعه کراندار از $\mathbb{R}$ است .

۲) برای هر $r \in I$، $[u]^r$ یک زیر مجموعه فشرده از $\mathbb{R}$ است.
۳) u پیوسته است .
۴) u مجموعه محدب است.

فضای همه زیر مجموعه های فازی u از $\mathbb{R}$ را که در فرضیات فوق صدق می‌کنند را با $\mathbb{E}$یا نشان می‌دهیم.

تعریف ۲.۲. [۱] فرم دوتایی $(u_1(r), u_2(r))$ را به ازای $0 \leq r \leq 1$، فرم پارامتری عدد فازی u گوییم هر گاه در شرایط زیر صدق کند:
۱) $u_1(r)$ تابعی کراندار، از چپ پیوسته و نا نزولی روی $[0, 1]$ ،
۲) $u_2(r)$ تابعی کراندار، از چپ پیوسته و نا صعودی روی $[0, 1]$،
۳) برای هر $0 \leq r \leq 1$ ، $u_1(r) \leq u_2(r)$.

برای هر $u,\ v \in E$ و $k \in \mathbb{R}$، جمع و ضرب اسکالر به ترتیب به صورت

$$[u+v]^r = [u]^r + [v]^r\ ,\ [ku]^r = k[u]^r$$

تعریف می شود.

عدد فازی مثلثی در مجموعه اعداد فازی به فرم سه تایی $u = (u^l, u^c, u^r) \in \mathbb{R}^3$ تعریف می شود که $u^l \leq u^c \leq u^r$، همچنین r-برش های آن برای هر $r \in [0, 1]$ در فرم پارامتری به ضورت

$u_1(r) = u^l + (u^c - u^l)r$ و $u_2(r) = u^r - (u^r - u^c)r$ تعریف می شود.

تعریف ۳.۲. [۱] تفاضل هاکوهارای دو عدد فازی u و v به صورت $u \sim v$ نشان داده می شود و $u \sim v = w$ است اگر و تنها اگر $u = v + w$.

تعریف ۴.۲. [۱] فاصله هاسدورف بین دو عدد فازی با فرم پارامتری $u = (u_1(r), u_2(r))$و

$v = (v_1(r), u_2(r))$ توسط $D : E \times \ E \longrightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ نشان داده و به صورت

$$D(u,\ v) = \sup_{r\in[0,\ 1]} \max \Big\{ |u_1(r) - v_1(r)|,\ |u_2(r) - v_2(r)| \Big\}. \qquad (1)$$

تعریف می‌شود.

تعریف ۲.۵. [۱] نگاشت با مقدار فازی $F : I \subset R \to E^n$ را در $t_0 \in I$ پیوسته گوییم اگر برای هر $\epsilon > 0$، یک $\delta = \delta(t_0, \epsilon) > 0$ موجود باشد به‌طوری‌که برای هر $t \in T$ که $|t - t_0| < \delta$ داشته باشیم :

$$D(F(t), F(t_0)) < \epsilon. \qquad (2)$$

تعریف ۲.۶. [۱] اگر به ازای هر $t \in I$، $[x_1(t,r), x_2(t,r)]$، $r-$ ترازهای یک عدد فازی باشند، مشتق سیکالا [1] را با $SD\ X(t)$ نمایش داده و به‌صورت

$$[SD\ X(t)]^r = [x_1'(t,r), x_2'(t,r)] \qquad (3)$$

تعریف می‌شود. برای هر $t \in I$ مشتق سیکالا یک عدد فازی می‌باشد .

۳ حل معادلات دیفرانسیل فازی به روش سیکالا

یکی از اساسی ترین روش هایی که در حل معادلات دیفرانسیل فازی مطرح شده و تا امروز نیز کاربرد فراوانی دارد، روش سیکالا برای حل معادله دیفرانسیل فازی می باشد [۱۲]. به سبب اهمیت این روش در این بخش توضیح مختصری از این روش را بیان می کنیم.

[1] Sikkala derivative

مساله مقدار اولیه فازی با تابع قطعی f و مقدار اولیه فازی به فرم زیرمفروض است:

$$x'(t) = f(t, x(t)), \quad x(\circ) = x_\circ, \qquad (۴)$$

با استفاده از روش سیکالا، جواب مساله مقدار اولیه فازی (۴) با استفاده از دو روش، اصل گسترش و حل مسائل مقدار اولیه قطعی به‌دست می آید.

۱.۳ روش اول سیکالا

مساله مقدار اولیه فازی (۴) که در آن f نگاشتی قطعی و پیوسته از $R^+ \times R$ به توی R و مقدار اولیه فازی $x_\circ \in E$ با $r-$ برشهایی که به فرم

$$[x_\circ]^r = [x_{\circ,۱}(r), x_{\circ,۲}(r)], \quad \circ < r \leq ۱.$$

می باشند، مفروض است.
با به کار گیری اصل گسترش برای تابع $f(t,x)$ که در آن x عددی فازی است خواهیم داشت

$$f(t,x)(s) = \sup\{x(\tau) : \ s = f(t,\tau)\}, \quad s \in R \qquad (۵)$$

لذا

$$f(t, x(t), r) = [\min\{f(t,u) : \ u \in [x_۱(t,r), x_۲(t,r)]\}, \\ \max\{f(t,u) : \ u \in [x_۱(t,r), x_۲(t,r)\}]$$

که در رابطه فوق $[x_۱(t,r), x_۲(t,r)]$، $r-$ برشهای عدد فازی $x(t)$ هستند.
$x'(t)$ مشتق مورد استفاده در این روش، مشتق سیکالا می باشد. به طوری که اگر

$$x(t) : R^+ \to E$$

را در نظر بگیریم، در این صورت مشتق به فرم

$$x'(t,r) = [x'_۱(t,r), x'_۲(t,r)], \quad ۰ < r \leq ۱$$

می باشد، بنابراین $x(t) : R^+ \to E$ جواب فازی مساله (۴) روی بازه $[۰, T)$ برای هر $۰ < r \leq ۱$ می‌باشد، هرگاه داشته باشیم:

$$x'_۱(t,r) = \min\{f(t,u) : u \in [x_۱(t,r), x_۲(t,r)]\}, \quad x_۱(۰,r) = x_{۰,۱}(r) \tag{۶}$$

$$x'_۲(t,r) = \max\{f(t,u) : u \in [x_۱(t,r), x_۲(t,r)]\}, \quad x_۲(۰,r) = x_{۰,۲}(r). \tag{۷}$$

در نهایت در روش اول سیکالا، برای هر مقدار ثابت r، با دو مساله مقدار اولیه قطعی در فضای $R^۲$ مواجه خواهیم شد که در صورت وجود جواب، پس از حل دو مساله مقدار اولیه جوابهای $x_۱(t,r)$ و $x_۲(t,r)$ از حل دو مساله حاصل می گردد. فقط باید ثابت شود که بازه $[x_۱(t,r), x_۲(t,r)]$ به ازای $۰ < r \leq ۱$، $r-$ برشهای عدد فازی $x(t)$ می‌باشند. در قضایایی که در ادامه به آن ها اشاره می شود، وجود و یکتایی جواب فازی مورد بررسی قرار می گیرد.

قضیه ۱.۳. [۱۲] فرض کنید f در رابطه

$$|f(t,x) - f(t,\overline{x})| \leq g(t, |x - \overline{x}|), \quad t \geq ۰, \quad x, \overline{x} \in R, \tag{۸}$$

که در آن $g : R^+ \times R^+ \to R^+$ نگاشتی پیوسته و نسبت به متغیر r نانزولی است، صدق کند همچنین مساله مقدار اولیه

$$u'(t) = g(t, u(t)), \quad u(\circ) = u_\circ \qquad (۹)$$

برای $u_\circ > \circ$روی R^+ دارای جواب و برای $u_\circ = \circ$ فقط دارای جواب $u(t) = \circ$ باشد درایان‌صورت مساله مقدار اولیه فازی (۴) دارای جواب فازی یکتا است.

قضیه ۲.۳. [۱۲] فرض کنید f در رابطه

$$|f(t,x)| \leq g(t, |x|), \quad t \geq \circ,\ x \in R \qquad (۱۰)$$

صدق کند که در رابطه فوق $g : R^+ \times R^+ \to R^+$ نگاشتی پیوسته، به‌طوری‌که نسبت به متغیر r نانزولی و برای هر $u_\circ > \circ$ جواب (۹) موجود باشد و روی R^+ کراندار باشد . آن‌گاه بزرگترین بازه وجود جواب $x(t)$ از (۴)، R^+ است و

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \xi \in E$$

موجود است .

۲.۳ روش دوم سیکالا

تمامی شرایط موجود در قضیه (۱.۳) تضمین می کند که جواب مساله مقدار اولیه به‌طور پیوسته به مقدار اولیه وابسته است و بنابراین جواب فازی $x(t, x_\circ)$ از (۴) به‌طور پیوسته به مقدار اولیه $x_\circ$ وابسته است، یعنی هنگامی که $x_\circ \to \overline{x_\circ}$، آنگاه $x(t, x_\circ) \to x(t, \overline{x_\circ})$. منظور از $x_\circ \to \overline{x_\circ}$ این است که برای هر $r \in (\circ, ۱]$ داریم:

$$x_i(\circ, r) \to \overline{x}_i(\circ, r), \quad i = ۱, ۲$$

با توجه به مطالب گفته شده روش دوم سیکالا برای حل مساله مقدار اولیه فازی ، حل دو مساله مقدار اولیه قطعی

$$x'(t) = f(t, x(t)), \quad x(0) = x_1(0, r), \tag{11}$$

و

$$x'(t) = f(t, x(t)), \quad x(0) = x_2(0, r), \tag{12}$$

خواهد بود. جهت بررسی فازی بودن جواب مساله (۴) قضیه زیر را خواهیم داشت.

قضیه ۳.۳. [۱۲] t_γ ای به ازای $\gamma \in (0, 1]$، موجود است به‌طوری که روابط

$$[x(t)]^r = [x_1(t, r), x_2(t, r)], \quad \gamma \leq r \leq 1, \tag{13}$$

$$[x(t)]^r = [x_1(t, r), x_2(t, r)], \quad 0 < r \leq \gamma, \tag{14}$$

که $x_1(t, r)$ و $x_2(t, r)$ به ترتیب جوابهای (۱۱) و (۱۲) هستند ، عدد فازی $x(t) : [0, t_\gamma] \to E$ را تشکیل می دهند.

۴ معرفی روش های عددی

از آنجا که همیشه حل تحلیلی معادلات دیفرانسیل فازی امکان پذیر نمی باشد لذا در این بخش برخی از روش های عددی حل معادلات دیفرانسیل فازی را بررسی و به معرفی چند روش از جمله، روش اویلر [۸]، روش های چندگامی [۴] روش های چندگامی اصلاح شده [۳]، و روش تیلور [۲] می پردازیم.

۱.۴ روش اویلر

مسأله مقدار اولیه فازی به فرم

$$x'(t) = f(t, x(t)), \quad x(t_\circ) = x_\circ \tag{۱۵}$$

مفروض است که در معادله فوق $x(t)$ تابع فازی بر حسب t و $f(t, x(t))$ تابعی فازی بر حسب متغیر قطعی t و متغیر فازی $x(t)$ است. $x'(t)$ مشتق فازی $x(t)$ است که از نوع مشتق سیکالا می باشد.
با فرض وجود جواب فازی، فرم پارامتری مساله مقدار اولیه فازی (۱۵) برای هر $r \in [\circ, ۱]$ به صورت

$$x'_۱(t, r) = F[t, x_۱(t, r), x_۲(t, r)],$$

$$x'_۲(t, r) = G[t, x_۱(t, r), x_۲(t, r)],$$

است. برای حل معادله (۱۵) ابتدا بازه $[t_\circ, T]$ را به نقاط متساوی الفاصله
$t_\circ < t_۱ < t_۲ < \cdots < t_N$
تقسیم می شود، بطوری‌که جواب دقیق $(Y_۱(t, r), Y_۲(t, r))$ در نقاط

$$t_n = t_\circ + nh, \quad h = (T - t_\circ)/N, \quad ۱ \le n \le N \tag{۱۶}$$

توسط جواب تقریبی $(y_۱(t, r), y_۲(t, r))$ تقریب زده می شود. منطق روش اویلر بر مبنای تقریب مشتق می‌باشد به‌طور مثال تقریب مشتق $Z'(t, r)$ به‌صورت

$$Z'(t, r) \simeq \frac{Z(t + h, r) - Z(t, r)}{h} \tag{۱۷}$$

است ، لذا در روش اویلر جواب تقریبی توسط روابط

$$y_{1,n+1}(r) = y_{1,n}(r) + hF[t_n, y_{1,n}(r), y_{2,n}(r)], \tag{18}$$

$$y_{2,n+1}(r) = y_{2,n}(r) + hG[t_n, y_{1,n}(r), y_{2,n}(r)], \tag{19}$$

به دست می آید.

قضیه ۱.۴. فرض کنید $F(t,u,v)$ و $G(t,u,v)$ متعلق به $C^1(K)$ باشند و فرض کنید مشتقات جزئی F و G روی K کراندار باشند. در این صورت برای $r:\ 0 \le r \le 1$ دلخواه و ثابت ، تقریب اویلر به جواب واقعی $(Y_1(t,r), Y_2(t,r))$ بطور یکنواخت همگراست

مثال ۲.۴. مساله مقدار اولیه فازی

$$y'(t) = y(t), \quad y(0) = (0.75 + 0.25r, 1.125 - 0.125r)$$

مفروض است.

جواب واقعی مساله فوق در نقطه $t = 1$

$$Y(1,r) = ((0.75 + 0.25r)e, (1.125 - 0.125r)e)$$

می باشد. با استفاده از تقریب اویلر برای $N = 10$، جواب تقریبی به صورت

$$y(1,r) = ((0.75 + 0.25r)(1 + \frac{1}{10})^{10}), (1.125 - 0.125r)(1 + \frac{1}{10})^{10})$$

می‌باشد.

۲.۴ روش تیلور

در این قسمت یکی دیگر از روش های عددی به نام روش تیلور برای حل مساله مقدار اولیه فازی معرفی می گردد. مساله مقدار اولیه فازی (۱۵) مفروض است. بسط تیلور مرتبه p برای r-برش تابعی فازی $x(t,r)$ به‌صورت

$$x(t+h,r) = \sum_{i=0}^{p} \frac{h^i}{i!} x^{(i)}(t,r), \tag{۲۰}$$

است. ابتدا توابع F و G را به صورت زیر تعریف می کنیم :

$$F[t,x,r] = \sum_{i=0}^{p-1} \frac{h^i}{(i+1)!} f_1^{(i)}(t,x,r), \tag{۲۱}$$

$$G[t,x,r] = \sum_{i=0}^{p-1} \frac{h^i}{(i+1)!} f_2^{(i)}(t,x,r). \tag{۲۲}$$

با به کارگیری بسط تیلور مرتبه p توابع y_1 و y_2 و با توجه به رابطه‌های (۲۱) و (۲۲) در نقاط

$$a = t_0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_N = b, h = \frac{(b-a)}{N} = t_{i+1} - t_i,$$

داریم :

$$y_1(t_{n+1},r) \approx y_1(t_n,r) + hF[t_n, y(t_n,r)] \tag{۲۳}$$

$$y_2(t_{n+1},r) \approx y_2(t_n,r) + hG[t_n, y(t_n,r)], \tag{۲۴}$$

به طوری‌که مقادیر اولیه به صورت زیر می باشند:

$$y_{۱}(\circ, r) = x_{۱}(\circ, r), y_{۲}(\circ, r) = x_{۲}(\circ, r).$$

فرض کنید $F^*(t,u,v)$ و $G^*(t,u,v)$ توابع F وG در (۲۱) و (۲۲) باشند به طوری‌که u و v اعداد ثابت و $u \leq v$ باشد. به عبارت دیگر

$$F^*(t,u,v) = \sum_{i=\circ}^{p-۱} \frac{h^i}{(i+۱)!} \min\{f_{۱}^{(i)}(t,\tau) | \tau \in [u,v]\},$$

$$G^*(t,u,v) = \sum_{i=\circ}^{p-۱} \frac{h^i}{(i+۱)!} \max\{f_{۲}^{(i)}(t,\tau) | \tau \in [u,v]\},$$

و دامنه F^* و G^* به صورت زیر می باشد:

$$K = \{(t,u,v) | \circ \leq t \leq T, -\infty < v < \infty, -\infty < u \leq v\}$$

در این صورت شرط همگرایی جواب در این روش در قضیه زیر بیان می گردد.

قضیه ۳.۴. فرض کنید $F^*(t,u,v)$ و $G^*(t,u,v)$ متعلق به $C^{p-۱}(K)$ و مشتقات جزیی F^* و G^* روی K کراندار باشند. آنگاه برای ثابت دلخواه $\circ \leq r \leq ۱$ جوابهای عددی (۲۳) و (۲۴) به طور یکنواخت روی t به جوابهای واقعی $Y_{۱}(t,r)$ و $Y_{۲}(t,r)$ همگرا می شوند.

مثال ۴.۴. مساله مقدار اولیه فازی زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{cases} y'(t) = y(t), t \in I = [\circ, T], \\ y(\circ) = (\circ/۷۵ + \circ/۲۵r, ۱/۱۲۵ - \circ/۱۲۵r), \circ < r \leq ۱. \end{cases}$$

با به کارگیری بسط تیلور مرتبه p داریم :

$$y_۱(t_{n+۱},r)=y_۱(t_n,r)\sum_{i=۰}^{p}\frac{h^i}{i!},\quad y_۲(t_{n+۱},r)=y_۲(t_n,r)\sum_{i=۰}^{p}\frac{h^i}{i!}.$$

همچنین جواب واقعی به صورت $Y_۱(t,r)=y_۱(۰,r)e^t$ و $Y_۲(t,r)=y_۲(۰,r)e^t$ و در $t=۱$ به صورت زیر می باشد:

$$Y(۱,r)=[(۰/۷۵+۰/۲۵r)e,(۱/۱۲۵-۰/۱۲۵r)e],۰<r\leq ۱.$$

در این مثال جوابهای دقیق و تقریبی به ازای $p=۲$ و $p=۴$ با هم مقایسه شده اند. فاصله هاسدورف جواب واقعی از جواب اویلر ۰/۲۵۸۷ و فاصله هاسدورف جواب واقعی از جوابهای تیلور مرتبه ۲ و ۴ به ترتیب ۰/۰۱۷۵ و ۰/۰۰۰۳۴۵۲۸ می باشد.

۳.۴ روش های چندگامی

روش های چند گامی دسته ای دیگر از روش های عددی حل معادلات دیفرانسیل فازی می باشند که دارای دقت قابل قبولی می باشند. در این قسمت سه روش عددی، آدامز بشفورث ، آدامز ملتون و روش پیشگو اصلاحگر که بر پایه درونیاب لاگرانژ می باشند، برای حل معادلات دیفرانسیل فازی بیان می‌گردد. این روشها، روشهایی پایدار و همگرا هستند که بطور مختصر در این بخش به آنها پرداخته می شود.
معادله دیفرانسیل فازی مرتبه اول $y'=f(t,y)$ که در آن y تابع فازی از متغیر قطعی t به ازای $t_۰\leq t\leq T$ می‌باشد را در نظر می‌گیریم به‌طوری‌که مشتق مورد نظر مشتق سیکالا و مقدار اولیه $y(t_۰)=\alpha_۰$ در نظر گرفته شده است.

فرض کنید، سه مقدار اولیه فازی در نقاط $t_{i-۱},t_i,t_{i+۱}$ به صورت $y(t_{i-۱}),\ y(t_i),\ y(t_{i+۱})$ داده شده به طوری‌که مقدار تابع f در این نقاط اعداد فازی مثلثی به

فرم سه تایی

$$\{f^l(t_{i-1}, y(t_{i-1})), f^c(t_{i-1}, y(t_{i-1})), f^r(t_{i-1}, y(t_{i-1}))\},$$

$$\{f^l(t_i, y(t_i)), f^c(t_i, y(t_i)), f^r(t_i, y(t_i))\},$$

$$\{f^l(t_{i+1}, y(t_{i+1})), f^c(t_{i+1}, y(t_{i+1})), f^r(t_{i+1}, y(t_{i+1}))\},$$

می‌باشد. با استفاده از قضیه اساسی انتگرال داریم:

$$y(t_{i+2}) = y(t_{i+1}) + \int_{t_{i+1}}^{t_{i+2}} f(t, y(t))dt, \quad (۲۵)$$

از آنجا که $f(t, y(t))$ تابعی نامعلوم است لذا از درونیاب لاگرانژ فازی تابع $f(t, y(t))$ در نقاط t_{i-1}، t_i و t_{i+1} استفاده می شود. در درون یابی لاگرانژ فازی داریم:

$$f^l(t, y(t)) = \sum_{j=i-1_{\ell_j(t)\geq 0}}^{i+1} \ell_j(t) f^l(t_j, y(t_j)) + \sum_{j=i-1_{\ell_j(t)< 0}}^{i+1} \ell_j(t) f^r(t_j, y(t_j)), \quad (۲۶)$$

$$f^l(t, y(t)) = \sum_{j=i-1_{\ell_j(t)}}^{i+1} f^c(t_j, y(t_j)), \quad (۲۷)$$

$$f^l(t, y(t)) = \sum_{j=i-1_{\ell_j(t)\geq 0}}^{i+1} \ell_j(t) f^l(t_j, y(t_j)) + \sum_{j=i-1_{\ell_j(t)< 0}}^{i+1} \ell_j(t) f^r(t_j, y(t_j)), \quad (۲۸)$$

با توجه به لزوم تعیین علامت l_j ها به ازای $t_{i+۱} \leq t \leq t_{i+۲}$ داریم :

$$\ell_{i-۱}(t) = \frac{(t-t_i)(t-t_{i+۱})}{(t_{i-۱}-t_i)(t_{i-۱}-t_{i+۱})}, \geq ۰$$

$$\ell_i(t) = \frac{(t-t_{i-۱})(t-t_{i+۱})}{(t_i-t_{i-۱})(t_i-t_{i+۱})}, \leq ۰$$

$$\ell_{i+۱}(t) = \frac{(t-t_{i-۱})(t-t_i)}{(t_{i+۱}-t_{i-۱})(t_{i+۱}-t_i)}. \geq ۰$$

با توجه به علامت ℓ_j ها و جایگذاری آنها در روابط (۲۶)،(۲۷) و (۲۸) و در نهایت محاسبه انتگرال ها و ساده سازی روش آدامز بشفورث سه گامی به دست می آید:

$$\begin{aligned} y_۱(t_{i+۲},r) =& y_۱(t_{i+۱},r) + \frac{h}{۱۲}[f_۱(t_{i-۱},y(t_{i-۱})) - ۱۶f_۲(t_i,y(t_i)) \\ &+ ۲۳f_۱(t_{i+۱},y(t_{i+۱}))], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_۲(t_{i+۲},r) =& y_۲(t_{i+۱},r) + \frac{h}{۱۲}[f_۲(t_{i-۱},y(t_{i-۱})) - ۱۶f_۱(t_i,y(t_i)) \\ &+ ۲۳f_۲(t_{i+۱},y(t_{i+۱}))], \end{aligned}$$

که در روابط فوق مقادیر اولیه به صورت زیر

$$y_۱(t_{i-۱},r) = \alpha_۰,\ y_۱(t_i,r) = \alpha_۱,\ y_۱(t_{i+۱},r) = \alpha_۲,$$

$$y_۲(t_{i-۱},r) = \alpha_۳,\ y_۲(t_i,r) = \alpha_۴,\ y_۲(t_{i+۱},r) = \alpha_۵,$$

است.همچنین با روشی مشابه آدامز بشفورث دو گامی به‌صورت

$$y_۱(t_{i+۱},r)=y_۱(t_i,r)-\frac{h}{۲}f_۲(t_{i-۱},y(t_{i-۱}))+\frac{۳h}{۲}f_۱(t_i,y(t_i)),$$
$$y_۲(t_{i+۱},r)=y_۲(t_i,r)-\frac{h}{۲}f_۱(t_{i-۱},y(t_{i-۱}))+\frac{۳h}{۲}f_۲(t_i,y(t_i)),$$

با مقادیر اولیه

$$y_۱(t_{i-۱},r)=\alpha_۱,\ y_۱(t_i,r)=\alpha_۲,\ y_۲(t_{i-۱},r)=\alpha_۳,\ y_۲(t_i,r)=\alpha_۴.$$

به دست می آید.

۴.۴ روش آدامز مولتون

برای به‌دست آوردن روش آدامز مولتون سه گامی ، سه مقدار اولیه فازی $y(t_{i-۱}),\ y(t_i)$ و $y(t_{i+۱})$ را در نظر می گیریم. به طوری که مقدار تابع f در این نقاط به صورت

$$\{f(t_{i-۱},y(t_{i-۱})),f(t_i,y(t_i)),f(t_{i+۱},y(t_{i+۱}))\}$$

است. با استفاده از قضیه اساسی انتگرال

$$y(t_{i+۲})=y(t_{i+۱})+\int_{t_{i+۱}}^{t_{i+۲}} f(t,y(t))dt, \qquad (۲۹)$$

و درونیاب لاگرانژ فازی تابع $f(t,y(t))$ در $t_{i-۱}$، t_i و $t_{i+۱}$ روش آدامز مولتون سه گامی را به به فرم زیر خواهیم داشت :

$$y_۱(t_{i+۲},r)=y_۱(t_{i+۱},r)$$
$$+\frac{h}{۱۲}[f_۱(t_{i-۱},y(t_{i-۱}))-۱۶f_۲(t_i,y(t_i))+۲۳f_۱(t_{i+۱},y(t_{i+۱}))],$$

$$y_2(t_{i+2},r) = y_2(t_{i+1},r) + \frac{h}{12}[f_2(t_{i-1},y(t_{i-1})) - 16f_1(t_i,y(t_i)) + 23f_2(t_{i+1},y(t_{i+1}))],$$

که در آن مقادیر اولیه به صورت

$$y_1(t_{i-1},r) = \alpha_0,\ y_1(t_i,r) = \alpha_1,\ y_1(t_{i+1},r) = \alpha_2,$$

$$y_2(t_{i-1},r) = \alpha_3,\ y_2(t_i,r) = \alpha_4,\ y_2(t_{i+1},r) = \alpha_5,$$

است. همچنین با روشی مشابه روش آدامز مولتون دوگامی به‌صورت

$$y_1(t_{i+1},r) = y_1(t_i,r) - \frac{h}{12}f_2(t_{i-1},y(t_{i-1})) + \frac{2h}{3}f_1(t_i,y(t_i)) + \frac{5h}{12}f_1(t_{i+1},y(t_{i+1})),$$

$$y_2(t_{i+1},r) = y_2(t_i,r) - \frac{h}{12}f_1(t_{i-1},y(t_{i-1})) + \frac{2h}{3}f_2(t_i,y(t_i)) + \frac{5h}{12}f_2(t_{i+1},y(t_{i+1})),$$

با مقادیر اولیه

$$y_1(t_{i-1},r) = \alpha_0,\ y_1(t_i) = \alpha_1,\ y_2(t_{i-1},r) = \alpha_2,\ y_2(t_i,r) = \alpha_3,$$

حاصل می گردد.

۵.۴ روش پیشگو اصلاحگر سه گامی

روش پیشگو اصلاحگر روشی است که از ادغام دو روش آدامز بشفورث و آدامز ملتون به دست می آید، در این روش از روش آدامز بشفورث به عنوان روش پیشگو و از روش آدامز ملتون به عنوان اصلاحگر استفاده می‌گردد.
برای بیان الگوریتم روش پیشگو اصلاحگر، مساله مقدار اولیه

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), & t_0 \leq t \leq T, \\ y_1(t_0, r) = \alpha_0, y_1(t_1, r) = \alpha_1, & y_1(t_2, r) = \alpha_2, \\ y_2(t_0, r) = \alpha_3, y_2(t_1, r) = \alpha_4, & y_2(t_2, r) = \alpha_5, \end{cases}$$

مفروض است.

الگوریتم:

عدد صحیح و مثبت N انتخاب شود:

گام ۱) قرار دهید $h = \frac{T-t_0}{N}$ و

$$w_1(t_0, r) = \alpha_0,\ w_1(t_1, r) = \alpha_1,\ w_1(t_2, r) = \alpha_2,$$

$$w_2(t_0, r) = \alpha_3,\ w_2(t_1, r) = \alpha_4,\ w_2(t_2, r) = \alpha_5.$$

گام ۲) قرار دهید $i = 1$.

گام ۳) قرار دهید :

$$\begin{cases} w_1^{(0)}(t_{i+2}, r) = w_1(t_{i+1}, r) + \\ \frac{h}{15}[5f_1(t_{i-1}, w(t_{i-1}, r)) - 16f_2(t_i, w(t_i, r)) + 23f_1(t_{i+1}, w(t_{i+1}, r))], \\ w_2^{(0)}(t_{i+2}, r) = w_2(t_{i+1}, r) + \\ \frac{h}{15}[5f_2(t_{i-1}, w(t_{i-1}, r)) - 16f_1(t_i, w(t_i, r)) + 23f_2(t_{i+1}, w(t_{i+1}, r))]. \end{cases}$$

گام ۴) قرار دهید: $t_{i+2} = t_0 + (i+2)h$

گام ۵) قرار دهید:

$$\begin{cases} w_1(t_{i+2}, r) = w_1(t_{i+1}, r) - \\ \frac{h}{12} f_2(t_i, w(t_i, r)) + \frac{2h}{3} f_1(t_{i+1}, w(t_{i+1}, r)) + \frac{5h}{12} f_1(t_{i+2}, w^{(0)}(t_{i+2}, r)), \\ w_2(t_{i+2}, r) = w_2(t_{i+1}, r) - \\ \frac{h}{12} f_1(t_i, w(t_i, r)) + \frac{2h}{3} f_2(t_{i+1}, w(t_{i+1}, r)) + \frac{5h}{12} f_2(t_{i+2}, w^{(0)}(t_{i+2}, r)). \end{cases}$$

گام ۶) $i = i + 1$.

گام ۷) اگر $i \leq N - 2$ به گام ۳ بروید .

گام ۸) الگوریتم کامل است و جواب تقریبی $(w_1(T, r), w_2(T, r))$ به جواب واقعی $(Y_1(T, r), Y_2(T, r))$ همگراست.

قضیه ۵.۴. برای مقدار دلخواه و ثابت $r : 0 \leq r \leq 1$ روش آدامز مولتون دو گامی به جواب واقعی $Y_1(t, r)$ و $Y_2(t, r)$ برای $Y_1, Y_2 \in C^4[t_0, T]$ همگراست.

ملاحظه ۶.۴. مرتبه همگرایی در قضیه (۵.۴) از مرتبه $O(h^3)$ است.

قضیه ۷.۴. برای مقدار دلخواه و ثابت r به ازای $1 \leq r \leq$ روش آدامز بشفورث دو گامی به جواب واقعی $(Y_1(t, r)$ و $Y_2(t, r))$ برای $Y_1, Y_2 \in C^3[t_0, T]$ همگراست .

قضیه ۸.۴. روشهای آدامز بشفورث دوگامی و آدامز بشفورث سه گامی روشهایی پایدار هستند.

۶.۴ روش پیشگو اصلاحگر بهبود یافته شده

در این قسمت روش پیشگو اصلاحگر بهبود یافته برای حل معادلات دیفرانسیل فازی مورد بحث و بررسی قرار می گیرد، تفاوت این روش با روش پیشگو اصلاحگر بیان شده در قسمت قبل تغییر درونیاب فازی در به دست آوردن روش عددی است، مزیت روش جدید دقت بالاتر آن می‌باشد. در این قسمت ابتدا دو روش صریح و ضمنی معرفی و پس از ادغام این دو روش روش پیشگو اصلاحگر بهبود یافته معرفی می گردد.

۱.۶.۴ روش صریح سه گامی

مساله مقدار اولیه فازی با سه مقدار اولیه فازی $y(t_{i-1}),\ y(t_i)$ و $y(t_{i+1})$ مفروض است. با استفاده از قضیه اساسی انتگرال

$$y(t_{i+2}) = y(t_{i-1}) + \int_{t_{i-1}}^{t_{i+2}} f(t, y(t))dt, \tag{۳۰}$$

و با در نظر گرفتن تابع درونیابی خطی اسپلاین $f_1(t, y(t))$ در بازه $[t_{i-1}, t_i]$ و تابع درونیاب $f_2(t, y(t))$ در بازه $[t_i, t_{i+1}]$ خواهیم داشت:

$$f_1(t, y(t)) = \frac{t_i - t}{t_i - t_{i-1}} f(t_{i-1}, y(t_{i-1})) + \frac{t - t_{i-1}}{t_i - t_{i-1}} f(t_i, y(t_i)), t \in [t_{i-1}, t_i],$$

$$f_2(t, y(t)) = \frac{t_{i+1} - t}{t_{i+1} - t_i} f(t_i, y(t_i)) + \frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i} f(t_{i+1}, y(t_{i+1})), t \in [t_i, t_{i+1}].$$

به صورت گسترده تر به ازای $t \in [t_{i-1}, t_i]$ داریم:

$$f_1^l(t, y(t)) = \frac{t_i - t}{t_i - t_{i-1}} f_1^l(t_{i-1}, y(t_{i-1})) + \frac{t - t_{i-1}}{t_i - t_{i-1}} f_1^l(t_i, y(t_i)), \tag{۳۱}$$

$$f_1^c(t, y(t)) = \frac{t_i - t}{t_i - t_{i-1}} f_1^c(t_{i-1}, y(t_{i-1})) + \frac{t - t_{i-1}}{t_i - t_{i-1}} f_1^c(t_i, y(t_i)), \tag{۳۲}$$

$$f_1^r(t, y(t)) = \frac{t_i - t}{t_i - t_{i-1}} f_1^r(t_{i-1}, y(t_{i-1})) + \frac{t - t_{i-1}}{t_i - t_{i-1}} f_1^r(t_i, y(t_i)), \tag{۳۳}$$

و همچنین برای $t \in [t_i, t_{i+1}]$ داریم:

$$f_2^l(t, y(t)) = \frac{t_{i+1} - t}{t_{i+1} - t_i} f_2^l(t_i, y(t_i)) + \frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i} f_2^l(t_{i+1}, y(t_{i+1})), \tag{۳۴}$$

$$f_2^c(t,y(t)) = \frac{t_{i+1}-t}{t_{i+1}-t_i} f_2^c(t_i,y(t_i)) + \frac{t-t_i}{t_{i+1}-t_i} f_2^c(t_{i+1},y(t_{i+1})), \qquad (35)$$

$$f_2^r(t,y(t)) = \frac{t_{i+1}-t}{t_{i+1}-t_i} f_2^r(t_i,y(t_i)) + \frac{t-t_i}{t_{i+1}-t_i} f_2^r(t_{i+1},y(t_{i+1})). \qquad (36)$$

با انتگرال گیری و ساده کردن روابط فوق روش صریح سه گامی را خواهیم داشت :

$$\begin{aligned} y_1(t_{i+2},r) &= y_1(t_{i-1},r) + \frac{h}{2}[f_1(t_{i-1},y(t_{i-1})) + f_1(t_i,y(t_i)) + \\ &\qquad 4f_1(t_{i+1},y(t_{i+1}))], \\ y_2(t_{i+2},r) &= y_2(t_{i-1},r) + \frac{h}{2}[f_2(t_{i-1},y(t_{i-1})) + f_2(t_i,y(t_i)) + \\ &\qquad 4f_2(t_{i+1},y(t_{i+1}))]. \end{aligned}$$

۲.۶.۴ روش ضمنی دو گامی

مساله مقدار اولیه فازی با دو مقدار اولیه $y(t_{i-1}), y(t_i)$, را در نظر بگیرید با توجه به انتگرال

$$y(t_{i+1}) = y(t_{i-1}) + \int_{t_{i-1}}^{t_{i+1}} f(t,y(t))\,dt, \qquad (37)$$

و با به کارگیری دورنیابی اسپلاین و انتگرال گیری های لازم رابطه زیر برای روش ضمنی دو گامی حاصل می گردد:

$$\begin{aligned} y_1(t_{i+1},r) &= y_1(t_{i-1},r) \\ &+ \frac{h}{2}[f_1(t_{i-1},y(t_{i-1})) + 2f_1(t_i,y(t_i)) + f_1(t_{i+1},y(t_{i+1}))], \\ y_2(t_{i+1},r) &= y_2(t_{i-1},r) \\ &+ \frac{h}{2}[f_2(t_{i-1},y(t_{i-1})) + 2f_2(t_i,y(t_i)) + f_2(t_{i+1},y(t_{i+1}))]. \end{aligned}$$

۷.۴ روش پیشگو اصلاحگر اصلاح شده سه گامی

الگوریتم پیشگو اصلاحگر اصلاح شده سه گامی بر مبنای روش صریح سه گامی و روش ضمنی دوگانه به فرم زیر می باشد.

الگوریتم

مساله مقدار اولیه زیر مفروض است

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), & t_{\circ} \leq t \leq T, \\ y_{۱}(t_{\circ}, r) = \alpha_{\circ}, y_{۱}(t_{۱}, r) = \alpha_{۱}, y_{۱}(t_{۲}, r) = \alpha_{۲}, & \\ y_{۲}(t_{\circ}, r) = \alpha_{۳}, y_{۲}(t_{۱}, r) = \alpha_{۴}, y_{۲}(t_{۲}, r) = \alpha_{۵}, & \end{cases}$$

مقدار صحیح و مثبت N انتخاب گردد.

گام ۱) قرار دهید $h = \frac{T-t_{\circ}}{N}$،

$$w_{۱}(t_{\circ}, r) = \alpha_{\circ}, w_{۱}(t_{۱}, r) = \alpha_{۱}, w_{۱}(t_{۲}, r) = \alpha_{۲},$$
$$w_{۲}(t_{\circ}, r) = \alpha_{۳}, w_{۲}(t_{۱}, r) = \alpha_{۴}, w_{۲}(t_{۲}, r) = \alpha_{۵}.$$

گام ۲) قرار دهید: $i = ۱$.

گام ۳) قرار دهید:

$$\begin{array}{rcl} w_{۱}^{(\circ)}(t_{i+۲}, r) & = & w_{۱}(t_{i-۱}, r) \\ & + & \frac{h}{۲}[f_{۱}(t_{i-۱}, w(t_{i-۱}, r)) + f_{۱}(t_i, w(t_i, r)) + \\ & & ۴f_{۱}(t_{i+۱}, w(t_{i+۱}, r))], \\ w_{۲}^{(\circ)}(t_{i+۲}, r) & = & w_{۲}(t_{i-۱}, r) \\ & + & \frac{h}{۲}[f_{۲}(t_{i-۱}, w(t_{i-۱}, r)) + f_{۲}(t_i, w(t_i, r)) + \\ & & ۴f_{۲}(t_{i+۱}, w(t_{i+۱}, r))]. \end{array}$$

گام ۴) قرار دهید: $t_{i+2} = t_0 + (i+2)h$.

گام ۵) قرار دهید:

$$\begin{aligned} w_1(t_{i+2}, r) &= w_1(t_i, r) \\ &+ (\frac{h}{2}) f_1(t_i, w(t_i, r)) \\ &+ h f_1(t_{i+1}, w(t_{i+1}, r)) + (\frac{h}{2}) f_1(t_{i+2}, w^{(0)}(t_{i+2}, r)), \\ w_2(t_{i+2}, r) &= w_2(t_i, r) \\ &+ (\frac{h}{2}) f_2(t_i, w(t_i, r)) \\ &+ h f_2(t_{i+1}, w(t_{i+1}, r)) + (\frac{h}{2}) f_2(t_{i+2}, w^{(0)}(t_{i+2}, r)). \end{aligned}$$

گام ۶) $i = i + 1$.

گام ۷) اگر $i \leq N - 2$، به گام ۳ بروید،

گام ۸) الگوریتم تمام است و $(w_1(T, r), w_2(T, r))$ تقریبی از مقدار واقعی $(Y_1(T, r), Y_2(T, r))$ است.

قضیه ۹.۴. برای مقدار ثابت و دلخواه $r : 0 \leq r \leq 1$، روش ضمنی دوگامی به جواب واقعی همگراست، به طوری که $\underline{Y}, \overline{Y} \in C^3[t_0, T]$.

قضیه ۱۰.۴. برای مقدار ثابت و دلخواه $r : 0 \leq r \leq 1$، روش صریح سه گامی به جواب واقعی $(Y_1(t, r), Y_2(t, r))$ همگراست، به طوری که $\underline{Y}, \overline{Y} \in C^3[t_0, T]$.

قضیه ۱۱.۴. روش صریح سه گامی، روشی پایدار است.

قضیه ۱۲.۴. روش صریح دوگامی، روشی پایدار است.

مثال ۱۳.۴. مساله مقدار اولیه فازی زیر

$$y'(t) = -y(t) + t + 1,$$

با مقادیر اولیه

$$\begin{aligned} y(0.01) = (&0.01 + (0.985 + 0.015r)e^{-0.01} - (1-r)0.025e^{0.01}, \\ &0.01 + (0.985 + 0.015r)e^{-0.01} + (1-r)0.025e^{0.01}), \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned} y(0.02) = (&0.02 + (0.985 + 0.015r)e^{-0.02} - (1-r)0.025e^{0.02}, \\ &0.02 + (0.985 + 0.015r)e^{-0.02} + (1-r)0.025e^{0.02}). \end{aligned}$$

مفروض می باشد. جواب واقعی در $t = 0.1$ به‌صورت

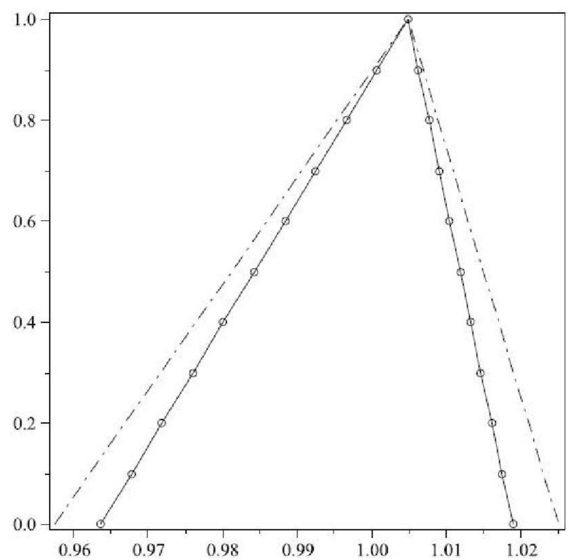
$$\begin{aligned} Y(0.1, r) = (&0.1 + (0.985 + 0.015r)e^{-0.1} - (1-r)0.025e^{0.1}, \\ &0.1 + (0.985 + 0.015r)e^{-0.1} + (1-r)0.025e^{0.1}) \end{aligned}$$

می باشد.در این مساله جوابهای دو روش آدامز بشفورث سه گامی و روش ضمنی سه‌گامی مقایسه و در شکل ۱ نشان داده شده است، همچنین مقایسه بین جوابهای به دست آمده از روش پیشگو اصلاحگر و پیشگو اصلاحگر بهبود یافته در شکل ۲ نشان داده شده است.

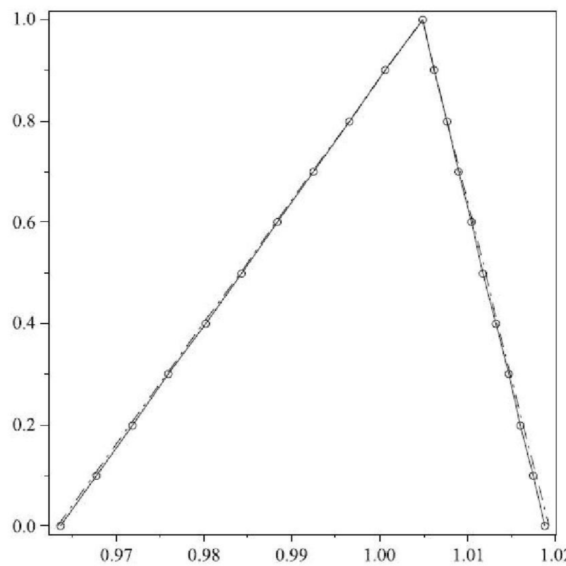
مراجع

[۱] احمدی، ن. احمدی، ا. (۱۳۹۷) معادلات دیفرانسیل فازی. انتشارات فرانما.

[2] Abbasbandy. S, Allahviranloo. T. (2002) Numerical solution of fuzzy differential equations by taylor method. Computational Method In Applied Mathematics. 2, 113-124.



شکل ۱: مقایسه جواب واقعی، روش آدامز بشفورث سه گامی و روش ضمنی سه گامی در مثال ۱۳.۴
خط ممتد: جواب واقعی، نقطه چین: روش آدامز بشفورث و نقاط کروی روش ضمنی سه گامی را نمایش می دهد.



شکل ۲: مقایسه جواب دقیق، روش پیشگو اصلاحگر و روش پیشگو اصلاحگر بهبود یافته در مثال ۱۳.۴
خط ممتد: جواب واقعی، نقطه چین: روش پیشگو اصلاحگر، نقاط کروی روش پیشگو اصلاحگر بهبود یافته را نمایش می دهند.

[3] Allahviranloo. T, Abbasbandy. S, Ahmady. N, Ahmady.E .(2009) Improved predictor-corrector method for solving fuzzy initial value problems, Information Sciences, 179/7, 945–955.

[4] Allahviranloo. T, Ahmady. N, Ahmady. E. (2007) Numerical solution of fuzzy differential equations by Predictor-Corrector method. Information Sciences. 177/7, 1633-1647.

[5] Allahviranloo. T, Ahmady. N, Ahmady. E. (2008) Erratum to ”Numerical solution of fuzzy differential equations by Predictor-Corrector method”, Information Sciences, 178, 1780-1782.

[6] Chang. S.L., Zadeh L.A. (1972) On fuzzy mapping and control,IEEE Trans, Systems Man Cybernet. 2, 30-34.

[7] Dubois. D, Prade. H. (1982) Towards fuzzy differential calculus: Part 3, differentiation. Fuzzy Sets and Systems. 8, 225-233.

[8] Friedman .M, Ma .M, Kandel. A (1999) Numerical solutions of fuzzy differential equations. Fuzzy Sets and Systems. 105, 133-138.

[9] Goetschel .R, Voxman .W. (1986) Elementary fuzzy calculus, Fuzzy Sets and Systems. 18, 31-43.

[10] Kaleva. O. (1987) Fuzzy differential equations, Fuzzy Sets and Systems. 24, 301-317.

[11] Puri. M. L, Ralescu. D.A.(1983) Differentials of fuzzy functions, J. Math. Anal. App. 91, 552-558.

[12] Seikkala. S. (1987) On the fuzzy initial value problem, Fuzzy Sets and Systems. 24, 319-330.