سیستم‌های فازی و کاربردها

سال سوم، شماره اول (بهار و تابستان ۱۳۹۹) صص. ۱۷ تا ۳۲
DOR: 20.1001.1.27174409.1399.3.1.2.7

کدنگاری روی BE -جبرها

اکبر رضایی، آرشام برومند سعید، محمد حمیدی

گروه ریاضی، دانشگاه پیام‌نور، تهران، ایران

دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر، دانشگاه شهید باهنر کرمان، کرمان، ایران

گروه ریاضی، دانشگاه پیام‌نور، تهران، ایران

چکیده

در این مقاله به‌عنوان طرح کدگذار تابع BE-مقدار را روی یک مجموعه دلخواه داده شده، معرفی نموده و قصد بر این است که با آن کدهای دودوئی بدست آوریم. سپس نشان داده خواهد شد که هر BE-جبر متناهی یک کد دودوئی تولید می‌کند.

۱ سرآغاز

اچ. اس. کیم و وای. اچ. کیم در سال ۲۰۰۷ مفهوم BE-جبر را به‌عنوان تعمیمی از ساختار جبری BCK-جبر ارائه نمودند [۱۰] . اس. اس. اون و دیگران مفهوم فیلتر و مجموعه‌های بالایی را در این ساختار معرفی و نتایجی را بدست آوردند ا. والندزیاک BE-جبرهای جابه‌جایی را تعریف و نشان داد که BE-جبرهای جابه‌جای با BCK-جبرها معادل می‌باشند [۱۶] . سپس ا. رضایی و دیگران ارتباط بین این ساختار جبری با سایر ساختارهای جبری را بررسی و مطالعه نمودند [۱۴، ۱۵] . نظریه‌ی کدگذاری به بررسی مساله انتقال و دریافت سالم اطلاعات از مجموعه‌ای بنام پیام‌ها، که از یک کانال یا مخزن میانی دریافت و به کانال یا مخزن دیگری انتقال می‌یابند، می‌پردازد، مثلا می‌توان به سیستم‌های مخابراتی مانند رادیو، تلویزیون، تلگراف، تلگرام، تلفن و یا

Mathematics Subject Classification (2010): 68Q70, 06D72, **Email:** rezaei@pnu.ac.ir.

عبارات و کلمات کلیدی:BE-جبر، فیلتر، Q -برش، کد دودوئی

سیستم‌های ذخیره اطلاعات اشاره کرد. این نظریه نخستین بار در سال ۱۹۴۸توسط شانون [۲] مطرح و بعد از آن بر حسب اهمیت و ضرورت این مساله نظریه کدگذاری و کدگشائی ادامه پیدا کرد. نظریه کدگذاری کاربردهای زیادی در علوم مختلف به‌خصوص کدنگاری، ترکیب اطلاعات، شبکه‌های اطلاعاتی و ارتباطی، مهندسی مخابرات، الکترونیک، کامپیوتر و سایر علوم دارد. در حال حاضر ترکیب این نظریه با ساختارهای جبری کاربردهای زیادی در مهندسی اطلاعات، نظریه زبان ماشین و نظریه اطلاعات و ارتباطات دارند و محققین زیادی در این زمینه پژوهش می‌کنند که برای اطلاعات بیشتر منابع [۴، ۶، ۷، ۸، ۱۱، ۱۳] دیده شود. هدف و انگیزه این پژوهش مطالعه کدنگاری روی BE-جبرها است. در این مقاله سعی خواهد شد که کدهای اطلاعات را با استفاده از توابع BE-مقدار بر اساس کدهای دودوئی ساخته شوند.

۲ تعاریف مقدماتی

تعریف ۱.۲. [۹] جبر $(X, \to, \top)$ از نوع $(2, 0)$ با عمل دوتایی "$\to$" و ثابت $\top$ یک BCI-جبر نامیده می‌شود، هرگاه برای هر $x, y, z \in X$ اصول موضوعه زیر برقرار باشند:

(I۱) $x \to x = \top$،

(I۲) $x \to x = \top$،

(I۳) $x \to (y \to z) = y \to (x \to z)$،

(I۴) اگر $x \to y = \top$ و $y \to x = \top$، آنگاه $x = y$.

BCI-جبر X یک BCK-جبر نامیده می‌شود، هرگاه برای هر $x \in X$ اصل موضوعه زیر برقرار باشد:

(I۵) $x \to \top = \top$.

تعریف ۲.۲. [۱۰] جبر $(X, \to, \top)$ از نوع $(2, 0)$ با عمل دوتایی "$\to$" و ثابت $\top$ یک BE-جبر نامیده می‌شود، هرگاه برای هر $x, y, z \in X$ اصول موضوعه ،(I۱)، (I۲)، (I۳) و (I۵) برقرار باشند.

در این گفتار، X نشان دهنده یک BE-جبر می‌باشد در غیر این‌صورت توضیح داده خواهد شد. رابطه دوتایی "$\leq$" روی X، به‌صورت زیر تعریف خواهد شد.

$$x \leq y \iff x \to y = \top.$$

بنا به (I۱) این رابطه دارای خاصیت بازتابی است. بدیهی است که BE-جبر X دارای خواص زیر است.

(p۱) $x \to (y \to x) = \top$،

(P۲) $x \to ((x \to y) \to y) = \top$.

زیرمجموعه غیرتهی S از X یک زیرجبر نامیده می‌شود، هرگاه برای هر $x, y \in S$ داشته باشیم $x \to y \in S$.

زیرمجموعه غیر تهی F از X فیلتر نامیده می‌شود هرگاه

(F۱) $\top \in F$،

(F۲) اگر $x \to y \in F$ و $x \in F$، آن‌گاه $y \in F$.

تعریف ۳.۲. [۱۲] فرض کنید X یک BE-جبر و A یک زیرمجموعه غیر تهی از X باشد. کوچک‌ترین فیلتر تولید شده توسط A را با $[A)$ نمایش داده می‌شود. اگر A یک مجموعه متناهی باشد، آن‌گاه به $[A)$ فیلتر متناهیا تولید شده گفته می‌شود.

تعریف ۴.۲. [۱۰] BE-جبر X خود پخش‌پذیر نامیده می‌شود، هرگاه برای هر $x, y, z \in X$ داشته باشیم:

$$x \to (y \to z) = (x \to y) \to (x \to z).$$

BE-جبر X تعدی نامیده می‌شود، هرگاه برای هر $x, y, z \in X$ داشته باشیم:

$$y \to z \leq (x \to y) \to (x \to z).$$

در گزاره ۱۰.۳، [۱۰] نشان داده شده است که هر BE-جبر خودپخش‌پذیر، تعدی است ولی عکس آن برقرار نیست.

گزاره ۵.۲. [۱] فرض کنید X خودپخش‌پذیر باشد. دراین‌صورت داریم:

۱) اگر $y \leq z$، آن‌گاه $x \to y \leq x \to z$ و $z \to x \leq y \to x$،

۲) اگر $\top \leq x$، آن‌گاه $x = \top$.

BE-جبر X جابه‌جایی نامیده می‌شود هرگاه برای هر $x, y \in X$ داشته باشیم:

$$(x \to y) \to y = (y \to x) \to x.$$

اگر X خودپخش‌پذیر و جابه‌جایی باشد، آن‌گاه $(X, \leq)$ یک مجموعه با ترتیب جزئی است [۵]. برعکس از هر مجموعه با ترتیب جزئی $(X, \leq)$ می‌توان یک BE-جبر به‌صورت زیر ساخت.

$$x \to y = \begin{cases} \top & if \;\; x \leq y; \\ y & if \;\; x \nleq y. \end{cases}$$

تعریف ۶.۲. [۵] BE-جبر X کران‌دار نامیده می‌شود هرگاه کوچک‌ترین عنصری مانند $\bot \in X$ طوری موجود باشد که برای هر $x \in X$ داشته باشیم $\bot \to x = \top$.

مثال ۷.۲. [۵] بازه اعداد حقیقی [۰،۱] همراه با عمل دوتایی $\to$ تعریف شده به‌صورت:

$$(\forall x, y \in [0, 1])(x \to y = \min\{1 - x + y, 1\}).$$

یک BE-جبر کران‌دار است (توجه شود در این مثال $\bot := 0$ و $\top := 1$).

تعریف ۸.۲. [۲] فرض کنید $F_q=\{a_1,a_2,\cdots,a_q\}$ یک میدان متناهی از مرتبه عدد اول q باشد. عناصر این میدان را الفبای کد نامیده و برای هر زیر مجموعه‌ی $A\subseteq F_q$ و عناصر دلخواه داده شده $u_1,\cdots,u_n\in A$، بردار $u=(u_1,\cdots,u_n)$ را یک کدواژه به طول n و مجموعه تمام کدوازه‌های روی A یک کد C نامیده می‌شود. در حالتی که $C\subseteq F_q^n$ یک زیرفضای برداری از F_q^n باشد به‌طوری‌که $[F_q^n,F_q]=k$، آنگاه C یک کد خطی به طول n و بعد k نامیده می‌شود که به‌صورت $[n,k]_q$- کد نشان داده می‌شود. اگر $q=2$، آن‌گاه کدها خطی و در غیر این‌صورت غیر خطی نامیده می‌شوند.

تعریف ۹.۲. [۱۲] فرض کنید $(X_1,\leq_1)$ و $(X_2,\leq_2)$ دو مجموعه با ترتیب جزئی باشند. دراین‌صورت حاصل‌ضرب دکارتی $X_1\times X_2$ با رابطه $\leq$ تعریف شده به‌صورت زیر رابطه قاموسی گفته می‌شود.

$$(x_1,y_1)\leq(x_2,y_2) \iff x_1\leq_1 x_2 \; or \; x_1=x_2 \; and \; y_1\leq_2 y_2.$$

تعریف ۱۰.۲. [۱۰] فرض کنید مجموعه $A=\{1,2,\cdots,n\}$ داده شده و X یک BCK-جبر باشد. به هر تابع BCK-مقدار $\overline{A}:A\longrightarrow X$ یک کد با طول n نسبت داده می‌شود. یک کدواژه در مجموعه کد V یک عنصر به‌شکل $v_x=x_1x_2\cdots x_n$ است که در آن $x_i=j$ اگر و فقط اگر $\overline{A}_x(i)=j$ برای هر $i\in A$ و $j\in\{0,1\}$.

تعریف ۱۱.۲. [۳] فرض کنید V مجموعه کد $v_x=x_1x_2\cdots x_n$ و $v_y=y_1y_2\cdots y_n$ دو کدواژه متعلق به آن باشند. یک رابطه $\leq_c$ روی V به‌صورت زیر تعریف می‌شود.
$v_x\leq_c v_y$ اگر و فقط اگر $x_i\leq y_i$ برای هر $i\in\{1,2,\cdots,n\}$.

تعریف ۱۲.۲. [۳] فرض کنید $A=\{1,2,\cdots,n\}$ و $(X,\leq)$ یک مجموعه با ترتیب جزئی باشد. برای هر $q\in X$ نگاشت $X_q:X\longrightarrow\{0,1\}$ به‌صورت $X_q(x)=1$ اگر و فقط اگر $q\leq x$ تعریف می‌کنیم. با استفاده از این نگاشت کدواژه $v_x=x_1x_2\cdots x_n$ متعلق به مجموعه کد V به‌صورت $x_i=j$ اگر و فقط اگر $X_q(i)=j$ برای هر $i\in A$ و $j\in\{0,1\}$ تعریف می‌کنیم.

۳ کد نگاری با استفاده از توابع کدگذار BE -مقدار

تعریف ۱.۳. فرض کنید A یک مجموعه غیرتهی و X یک BE-جبر باشد. نگاشت $\overline{A} : A \to X$ یک تابع BE-مقدار روی مجموعه A نامیده می‌شود.

تعریف ۲.۳. برای هر $q \in X$ تابع برشی $\overline{A}_q : A \longrightarrow \{0, 1\}$ از $\overline{A}$ برای هر $x \in A$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\overline{A}_q(x) = ۱ \iff \overline{A}(x) \to q = \top.$$

بدیهی است که $\overline{A}_q$ تابع مشخصه زیرمجموعه‌ی A_q از A می‌باشد که به آن زیرمجموعه برش یا q-برش از A نامیده شده و به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

$$A_q = \{x \in A : \overline{A}(x) \to q = \top\}.$$

چون برای هر $x \in A$، رابطه $\overline{A}(x) \to \top = \top$ برقرار است پس $\overline{A} = A$. درنتیجه $\bigcup_{q \in A} A_q = A$. علاوه‌براین برای هر $q \in X$، داریم $A_{q \to \overline{A}(x)} = A_{(\overline{A}(x) \to q) \to q} = A$.

مثال ۳.۳. فرض کنید $A = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ و $X = \{\top, a, b, c, d, e\}$ یک BE-جبر با جدول کیلی ۱ باشد.

جدول ۱: جدول کیلی برای رابطه دوتایی $\to_۱$

$\to_۱$	$\top$	a	b	c	d	e
$\top$	$\top$	a	b	c	d	e
a	$\top$	$\top$	a	c	c	d
b	$\top$	$\top$	$\top$	c	c	c
c	$\top$	a	b	$\top$	a	b
d	$\top$	$\top$	a	$\top$	$\top$	a
e	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$

۱) تابع $X \longrightarrow A : \overline{A}$ تعریف شده به‌صورت $\overline{A} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ e & \top & b & c \end{pmatrix}$ یک تابع BE-مقدار

می‌باشد که $A_\top = A, A_a = A_b = \{x_1, x_3\}, A_c = \{x_1, x_4\}, A_d = A_e = \{x_1\}$ زیرمجموعه‌های برش آن می‌باشند.

۲) تابع $\overline{A} : A \longrightarrow X$ تعریف شده به‌صورت $\overline{A} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ a & b & c & b \end{pmatrix}$ یک تابع BE-مقدار می‌باشد که $A_\top = A, A_a = \{x_1, x_2, x_4\}, A_b = \{x_2, x_4\}, A_c = \{x_3\}$ و $A_d = A_e = \emptyset$ زیرمجموعه‌های برش آن می‌باشند.

گزاره ۴.۳. فرض کنید X یک BE-جبر خودپخش‌پذیر، $p, q \in X$ و $\overline{A} : A \longrightarrow X$ یک تابع BE-مقدار روی A باشد. اگر $p \leq q$، آن‌گاه $A_p \subseteq A_q$. **اثبات.** فرض کنید $p, q \in X$ طوری باشند که $p \to q = \top$ و $x \in A_p$. بنابراین $\overline{A}(x) \to p = \top$. بنابه ،(I۱) (I۵) و خودپخش‌پذیری X داریم:

$$\begin{aligned} \top &= \overline{A}(x) \to (p \to q) \\ &= (\overline{A}(x) \to p) \to (\overline{A}(x) \to q) \\ &= \top \to (\overline{A}(x) \to q) \\ &= \overline{A}(x) \to q. \end{aligned}$$

درنتیجه $x \in A$. بنابراین $A_p \subseteq A_q$. □

نتیجه ۵.۳. فرض کنید X یک BE-جبر خودپخش‌پذیر و $\overline{A} : A \longrightarrow X$ یک تابع BE-مقدار روی A باشد. دراین‌صورت برای هر $p \in X$ و $x \in A$ داریم:

۱) $\overline{A}(x) \to q = \top$ اگر و فقط اگر $A_{\overline{A}(x)} \subseteq A_q$،

۲) اگر $p \to q = q \to p = \top$، آن‌گاه $A_p = A_q$.

گزاره ۶.۳. فرض کنید X یک BE-جبر و $\overline{A} : A \longrightarrow X$ یک تابع BE-مقدار روی A باشد.

دراین‌صورت برای هر $x \in A$ داریم:

$$\overline{A}(x) = \inf\{q \in X : \overline{A}_q(x) = \top\}.$$

اثبات. فرض کنید برای هر $x \in A$ داشته باشیم $\overline{A}(x) = p$. درنتیجه بنابه (I1) داریم $\overline{A}(x) \to p = \top$. بنابراین $\overline{A}_p(x) = \top$. حال فرض کنید برای $q \in X$ داشته باشیم $\overline{A}_q(x) = \top$. دراین‌صورت $\overline{A}(x) \to q = p \to q = \top$. به‌عبارت دیگر $p \leq q$. از طرفی چون $p \in \{q \in X : \overline{A}_q(x) = \top\} = \{q \in X : \overline{A}(x) \to q = \top\}$، بنابراین $\overline{A}(x) = p = \inf\{q \in X : \overline{A}_q(x) = \top\}$. □

در این قسمت با تعریف مجموعه‌ی زیر یک نمایش دیگر برای زیرمجموعه‌های برش A_q برای هر $q \in X$ از $\overline{A}$ بررسی خواهد شد. برای هر $p, q \in X$،

$$A_(p, q) := \{x \in A : \overline{A}(x) \to (p \to q) = \top\}.$$

بنابه (I۲) داریم:

$$\begin{aligned} A_{(\top,q)} &= \{x \in A : \overline{A}(x) \to (\top \to q) = \top\} \\ &= \{x \in A : \overline{A}(x) \to q = \top\} \\ &= A_q. \end{aligned}$$

علاوه‌براین $A_{(p,\top)} = A$. همچنین اگر X کران‌دار باشد، آن‌گاه $\overline{A}_{(\perp,q)} = A$.

گزاره ۷.۳. فرض کنید $\overline{A} : A \longrightarrow X$ یک تابع BE-مقدار روی مجموعه A و $p, q \in X$. دراین‌صورت داریم:

۱) $A_q \subseteq A_{(p,q)}$،

۲) $A_q = \bigcap_{p\in X} A_{(p,q)}$.

اثبات. (۱) فرض کنید $p,q \in X$ و $x \in A_q$. بنابراین $\overline{A}(x) \to q = \top$. حال با استفاده از (I۳) و (I۵) داریم: $\overline{A}(x) \to (p \to q) = p \to (\bar{(}x) \to q) = p \to \top = \top$.
درنتیجه $x \in A_{(p,q)}$. به‌عبارت دیگر $A_q \subseteq A_{(p,q)}$.

(۲) بنابه (۱) برای هر $p \in X$ داریم $A_q \subseteq A_{(p,q)}$. پس $A_q \subseteq \bigcap_{p\in X} A_{(p,q)}$. از طرف دیگر فرض کنید $t \in \bigcap_{p\in X} \subseteq A_{(p,q)}$. اگر $p := \top$، آن‌گاه $t \in A_{(\top,q)} = A_q$.
بنابراین $\bigcap_{p\in X} \subseteq A_q$. درنتیجه $A_q = \bigcap_{p\in X} A_{(p,q)}$. □

گزاره ۸.۳. فرض کنید X یک *BE*-جبر جابه‌جایی و $\overline{A} : A \longrightarrow X$ یک تابع *BE*-مقدار روی A باشد و $x,y \in A$. دراین‌صورت $\overline{A}(x) \neq \overline{A}(y)$ اگر و فقط اگر $A_{\overline{A}(x)} \neq A_{\overline{A}(y)}$.

اثبات. کفایت شرط بدیهی است.

برای لزوم شرط فرض کنید برای هر $x,y \in A$ داشته باشیم $\overline{A}(x) \neq \overline{A}(y)$. چون X جابه‌جایی است پس $\overline{A}(x) \to \overline{A}(y) \neq \top$ یا $\overline{A}(x) \to \overline{A}(y) \neq \top$. در غیر این‌صورت اگر $\overline{A}(x) \to \overline{A}(y) = \top = \overline{A}(x) \to \overline{A}(y)$، آن‌گاه $\overline{A}(x) = \overline{A}(y)$ که متناقض با فرض است. بنابراین

$$\begin{aligned} A_{\overline{A}(x)} &= \{t \in A : \overline{A}(x) \to \overline{A}(t) = \top\} \\ &\neq \{t \in A : \overline{A}(y) \to \overline{A}(t) = \top\} \\ &= A_{\overline{A}(y)}. \end{aligned}$$

□

گزاره ۹.۳. فرض کنید X یک *BE*-جبر خودپخش‌پذیر و $\overline{A} : A \longrightarrow X$ یک تابع

BE-مقدار روی A و کوچکترین عضو مجموعه Y از X در X باشد. دراین‌صورت $A_{\inf\{q:q\in Y\}} = \bigcap_{q\in Y} A_q$.

اثبات. فرض کنید $Y \subseteq X$ و کوچک‌ترین عضو Y در X وجود داشته باشد. دراین‌صورت داریم:

$$\begin{aligned} x \in A_{\inf\{q:q\in Y\}} &\iff \overline{A}(x) \to \inf\{q : q \in Y\} = \top \\ &\iff (\forall p \in Y)(\overline{A}(x) \to p = \top) \\ &\iff (\forall p \in Y)(x \in A_p) \\ &\iff x \in \bigcap_{q\in Y} A_q. \end{aligned}$$

$\square$

نتیجه ۱۰.۳. فرض کنید X یک *BE*-جبر خودپخش‌پذیر کران‌دار و $\overline{A} : A \longrightarrow X$ یک تابع *BE*-مقدار روی A باشد. دراین‌صورت برای هر $Y \subseteq X$ داریم: $\bigcap_{q\in Y} A_q = A_{\inf\{q:q\in Y\}}$.

حال فرض کنید $\overline{A} : A \longrightarrow X$ یک تابع BE -مقدار روی A باشد. رابطه دوتایی "θ" روی X برای هر $p, q \in X$ به‌صورت $p\theta q \iff A_p = A_q$ تعریف می‌کنیم. دراین‌صورت θ یک رابطه هم‌ارزی روی X است.

لم ۱۱.۳. فرض کنید $\overline{A} : A \longrightarrow X$ یک تابع *BE* -مقدار روی مجموعه دلخواه A، $|X| \leq |A|$ و V مجموعه کد متناظر با X باشد. دراین‌صورت $|X| \leq |V|$. **اثبات.** فرض کنید $\overline{A} : A \longrightarrow X$ یک تابع BE -مقدار روی مجموعه دلخواه A بوده و θ رابطه هم‌ارزی تعریف شده روی X باشد. دراین‌صورت چون $X = \bigcup_{q\in X} [q]$ و $|X| \leq |A|$ برای مجموعه کد $V = \{a_1 a_2 \cdots a_n : a_i \in A, 1 \leq i \leq n, n \in\}$ داریم: $|X| \leq |A| \leq |V|$. $\square$

قضیه ۱۲.۳. فرض کنید $n \in$، X یک BE -جبر، $|A| \leq |X| \leq ۲^n$ و مجموعه دلخواه A داده شده باشند. اگر V یک $[n,n]$-کد خطی باشد، آن‌گاه $|X| = ۲^n$.

اثبات. چون V یک $[n,n]$-کد خطی است پس $|V| = ۲^n$. بنا به لم ۱۱.۳، چون $|X| \leq |V|$ پس، $|X| = ۲^n$. $\square$

قضیه ۱۳.۳. فرض کنید X یک BE -جبر و $A = \{\top\} \subseteq X$ و $|X| \geq ۳$. دراین‌صورت $(V, \leq_c)$ یک جبر بول است.

اثبات. فرض کنید $x \in X$. تابع BE -مقدار X $\overline{A} : A \longrightarrow X$ روی A را با ضابطه $\overline{A}(\top) = x$ تعریف می‌کنیم. چون $\overline{A}_\top = ۱$ و با فرض $q \neq \top$، $\overline{A}_q = ۰$. بنابراین $V = \{۰, ۱\}$ یک جبر بول است. $\square$

گزاره ۱۴.۳. فرض کنید X یک BE-جبر و $\overline{A} : A \longrightarrow X$ یک تابع BE-مقدار روی A باشد. دراین‌صورت برای هر $p, q \in X$ داریم:

$$p\theta q \implies \overline{A}(A) \cap (p] = \overline{A}(A) \cap (q]$$

که در آن $\overline{A}(A) = \{q \in X : \exists x \in A, \overline{A}(x) = q\}$.

اثبات. فرض کنید X یک BE-جبر، $p, q \in X$ و $\overline{A} : A \longrightarrow X$ یک تابع BE-مقدار روی A باشد. دراین‌صورت داریم:

$$\begin{aligned}
p\theta q &\iff A_p = A_q \\
&\iff (\forall x \in A)(\overline{A}(x) \to p = \top \iff \overline{A}(x) \to q = \top) \\
&\iff \{x \in A : \overline{A}(x) \in (p]\} = \{x \in A : \overline{A}(x) \in (q]\} \\
&\iff \overline{A}(A) \cap (p] = \overline{A}(A) \cap (q].
\end{aligned}$$

□

کلاس هم‌ارزی $q \in X$ مجموعه $\{p \in X : q\theta p\}$ می‌باشد که با نماد θ_q نمایش داده می‌شود.

لم ۱۵.۳. فرض کنید X یک *BE*-جبر خودپخش‌پذیر کران‌دار و $\overline{A} : A \longrightarrow X$ یک تابع *BE*-مقدار روی A باشد. دراین‌صورت $\overline{A}(x) = \inf\limits_{x \in A}\{\theta_{\overline{A}(x)}\}$. به‌عبارت دیگر $\overline{A}(x)$ کوچک‌ترین عضو کلاس هم‌ارزی مربوط به خودش است.

اثبات. بنابه گزاره‌های قبل اثبات بدیهی است. □

قضیه ۱۶.۳. *BE*-جبر متناهی خودپخش‌پذیر، کران‌دار X توسط مجموعه کد V تعیین می‌شود به‌طوری‌که $(V, \leq_c)$ با $(X, \leq)$ یکریخت است.

اثبات. فرض کنید $X = \{a_۱, a_۲, \cdots, a_n\}$ یک BE-جبر متناهی خودپخش‌پذیر، کران‌دار باشد. فرض کنید $a_۱ = \bot$ و $a_n = \top$. فرض کنید نگاشت $\overline{A} : A \longrightarrow X$ یک تابع BE-مقدار روی A باشد. با تجزیه $\overline{A}$ توسط خانواده $\{\overline{A}_q : q \in X\}$ بنا به تعریف ترتیب روی کد مطلوب را تعیین می‌کند. حال فرض کنید $f : X \longrightarrow \{\overline{A}_q : q \in X\}$ تعریف شده با ضابطه $f(q) = \overline{A}_q$ برای هر $q \in X$ باشد. بنا به لم ۱۱.۳ هر کلاس هم‌ارزی θ شامل دقیقا یک عنصر است. بنابراین نگاشت f یک به یک است. برای اثبات حافظ ترتیب بودن فرض کنید $p \to q = a_n = \top$. دراین‌صورت $A_p \subseteq A_q$. درنتیجه $\overline{A}_p \leq_c \overline{A}_q$. بنابراین f یک یکریختی است. □

مثال ۱۷.۳. فرض کنید $A = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ و $X = \{\bot, a, b, \top\}$ یک BE-جبر با جدول کیلی ۴ باشد.

جدول ۲: جدول کیلی برای رابطه دوتایی $\rightarrow_۲$

$\rightarrow_۲$	$\perp$	a	b	$\top$
$\perp$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
a	b	$\top$	b	$\top$
b	a	a	$\top$	$\top$
$\top$	b	a	b	$\top$

نگاشت $\overline{A} : A \longrightarrow X$ تعریف شده به‌صورت $\overline{A} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ \perp & a & b & \top \end{pmatrix}$ یک تابع BE-مقدار می‌باشد که $A_\perp = \{x_۱, x_۴\}$، $A_a = \{x_۱, x_۲, x_۴\}$، $A_b = \{x_۱, x_۳, x_۴\}$ و $A_\top = A$ زیرمجموعه‌های برش آن می‌باشند. بنابه جدول ۵ مجموعه کد متناظر به‌دست می‌آیند. پس $V = \{۱۰۰۱, ۱۱۰۱, ۱۰۱۱, ۱۱۱۱\}$. درنتیجه $(V, \leq_c)$ با $(X, \leq)$ یکریخت است.

جدول ۳: جدول کیلی برای برش‌های $\overline{A}_q$

$\overline{A}_x$	$\perp$	a	b	$\top$
$\overline{A}_\perp$	۱	۰	۰	۱
$\overline{A}_a$	۱	۱	۰	۱
$\overline{A}_b$	۱	۰	۱	۱
$\overline{A}_\top$	۱	۱	۱	۱

مثال ۱۸.۳. [۷] فرض کنید $A = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$ و $X = \{\perp, a, b, c, d, \top\}$ یک BE-جبر با جدول کیلی ۵ باشد.

جدول ۴: جدول کیلی برای رابطه دوتایی $\rightarrow_۳$

$\rightarrow_۳$	$\perp$	a	b	c	d	$\top$
$\perp$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
a	c	$\top$	b	c	b	$\top$
b	d	a	$\top$	b	a	$\top$
c	a	a	$\top$	$\top$	a	$\top$
d	b	$\top$	$\top$	b	$\top$	$\top$
$\top$	$\perp$	a	b	c	d	$\top$

نگاشت $\overline{A} : A \longrightarrow X$ تعریف شده به‌صورت $\overline{A} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\ \perp & a & b & c & d & \top \end{pmatrix}$ یک تابع BE-مقدار می‌باشد که $A_\perp = \{x_۱, x_۶\}$، $A_a = \{x_۱, x_۲, x_۵\}$، $A_b = \{x_۱, x_۳, x_۴, x_۵\}$، $A_c = \{x_۱, x_۴\}$، $A_d = \{x_۱, x_۵\}$ و $A_\top = A$ زیرمجموعه‌های برش آن می‌باشند. بنابه جدول ۵ مجموعه کد متناظر به‌دست می‌آیند. پس $V = \{۱۰۰۰۰۱, ۱۱۰۰۱۰, ۱۰۱۱۱۰, ۱۰۰۱۰۰, ۱۰۰۰۱۰, ۱۱۱۱۱۱\}$. درنتیجه $(V, \leq_c)$

جدول ۵: جدول کیلی برای برش‌های $\overline{A}_q$

$\overline{A}_x$	$\perp$	a	b	c	d	$\top$
$\overline{A}_\perp$	۱	۰	۰	۰	۰	۱
$\overline{A}_a$	۱	۱	۰	۰	۱	۰
$\overline{A}_b$	۱	۰	۱	۱	۱	۰
$\overline{A}_c$	۱	۰	۰	۱	۰	۰
$\overline{A}_d$	۱	۰	۰	۰	۱	۰
$\overline{A}_\top$	۱	۱	۱	۱	۱	۱

با $(X, \leq)$ یکریخت است.

۴ نتیجه‌گیری

با توجه به‌این‌که معمولا انتقال اطلاعات با استفاده از دنباله‌ای از ارقام دودوئی ۰ و ۱ نمایش داده می‌شوند در این پژوهش سعی شده است که با استفاده از یک تابع طرح کدگذار بنام تابع BE-مقدار کدواژه‌ها ساخته شوند. نتیجه مهم و اصلی این پژوهش این است که می‌توان برای هر BE-جبر داده شده توابع BE-مقدار متفاوتی تعریف نمود که نشان دهنده انتقال اطلاعات به شیوه‌های متفاوت می‌باشد که نتیجه آن به‌دست آوردن کدهای دودوئی متفاوت می‌باشد. در پژوهش‌های بعدی می‌توان کدنگاری ساختاری را روی BE-جبرها بررسی و بیشتر به کدگشایی و تصحیح خطا و تعمیم این نتایج در سایر ساختارهای شناخته شده جبری پرداخت.

مراجع

[1] Ahn, S.S. and So, K.K. (2008) On ideals and upper sets in BE-algebras, Sci. Math. Jpn. 68(2), 279–285.

[2] Berlekamp, E.R. *Algebraic coding theory*, New York, McGraw-Hill, 1988.

[3] Borumand Saeid, A., Fatemidokht, H., Flaut, C., Kuchaki Rafsanjani, M. (2015) On codes based on BCK-algebras, J. Intell. Fuzzy Syst. 29, 2133–2137.

[4] Borumand Saeid,A., Flaut, C., Hoskova-Mayerova, S., Afshar, M., Kuchaki Rafsanjani, M. (2018) Some connections between BCK-algebras and n-ary block codes, Soft Comput. 22, 41–46.

[5] Borzooei, R.A., Borumand Saeid, A., Ameri, R., Rezaei, A. (2014) Involutory BE-algebras, J. Math. Applic. 37, 13–26.

[6] Encinas, L.H., Jun, Y.B., Song, S.Z. (2015) Codes generated by R_0-algebras valued functions, Appli. Math. Sci., 9(107), 5343–5352.

[7] Flaut, C., (2015) BCK-algebras arising from block codes, J. Intell. Fuzzy Syst. 28(4), 1829–1823.

[8] Fu, Y., Xin, X.L. (2017) Lattices and block codes, U.P.B. Sci. Bull., Series A., 79(3), 11–18.

[9] Iorgulescu, A. (2016) New generalizations of BCI, BCK and Hilbert algebras-Part I. J. Mult. Valued Logic Soft Comput. 27, 353–406.

[10] Kim, H.S., Kim, Y.H. (2007) On BE-algebras, Sci. Math. Jpn. 66(1), 113–116.

[11] Jun, Y.B., Song, S.Z. (2011) Codes based on BCK-algebras, Inform. Sci, 181, 5102–5109.

[12] Meng, B.L. (2010) On filters in BE-algebras, Sci. Math. Jpn. 71, 201–207.

[13] Mostafa, S.M., Youssef, B.A., Ali Jad, H. (2016) Efficient algorithm for constructing KU-algebras from block codes, Int. J. Eng. Sci. Inv. 5(5), 32–43.

[14] Rezaei, A., Borumand Saeid, A., Borzooei, R.A. (2013) Relation between Hilbert algebras and BE-algebras, Applic. Applic. Math. 8(2), 573–584.

[15] Rezaei, A., Borumand Saeid, A., Borzooei, R.A. (2014) KU-algebras are equivalent to commutative self distributive BE-algebras, Boll. di mat. Pura ed appl. 7(1), 1–9.

[16] Walendziak, A. (2009) On commutative BE-algebras, Sci. Math. Jpn. 69(2), 585–588.

[17] B. O'Neill, *Semi-Riemannian geometry*, Academic Press, 1986.

[18] J. Oprea, *Differential geometry and its applications*, Prentice Hall, second ed., 2004.