سیستم‌های فازی و کاربردها

سال سوم، شماره اول (بهار و تابستان ۱۳۹۹) صص. ۷۵ تا ۹۳

DOR: 20.1001.1.27174409.1399.3.1.5.0

ارائه راه حلی جدید برای مسائل تصمیم گیری چند معیاره در محیط فضای فازی مردد

مجید دره میرکی

گروه ریاضی و آمار، دانشگاه صنعتی خاتم الانبیاء بهبهان، خوزستان

چکیده

مجموعه های فازی مردد (HFS) ، توسیعی از مجموعه های فازی ، در حل مسائل تصمیم گیری که تصمیم گیرندگان هنگام بیان نظرات خود قادر به انتخاب بین چندین مقدار نیستند مفید واقع می شوند. تصمیم گیری چند معیاره (MCDM) روشی برای رتبه بندی راه حل ها و یافتن بهترین در هنگام تصمیم گیری دو معیار یا بیشتر است. AHP ، ELECTRE و TOPSIS محبوب ترین و قابل قبول ترین روش های MCDM هستند. در این مقاله ما ابتدا یک فاصله جدید را برای مجموعه های فازی مردد ارائه نمودیم و سپس با استفاده از آن به حل مسئله MCDM با داده های فازی مردد به کمک روش معروف TOPSIS پرداختیم. در نهایت به کمک دو مثال عملکرد روش پیشنهادی مان را بررسی نمودیم

۱ سرآغاز

در علم تصمیم گیری که در آن انتخاب یک راهکار از بین راهکارهای موجود و یا اولویت بندی راهکارها مطرح است، چند سالی است که روشهای تصمیم گیری چند معیاره جای خود را باز نموده اند این روشها بیشتر در علم مدیریت مورد استفاده قرار می گیرند و از آنجا که سازگاری

Mathematics Subject Classification (2010): 03E72, **Email:** darehmiraki@bkatu.ac.ir.

عبارات و کلمات کلیدی: تصمیم گیری چند معیاره، فازی مردد، فاصله، TOPSIS

زیادی با نحوه تفکر و فرآیندهای ذهنی انسان دارد و نیز الگوریتم آن عموماً براساس منطق ریاضی بنا شده است، از کارائی فوق العاده بالا برخوردار بوده و استفاده از آن بسیاری از مشکلات تصمیم گیری را حل نموده است. برای مثال، در زندگی شخصی یک فرد، در انتخاب شغل: وجهه شغل، محل انجام کار، حقوق و دستمزد، فرصت های پیشرفت، شرایط کاری و غیره به عنوان معیار در نظر گرفته می شوند و می توانند برای این فرد خیلی مهم باشند. اتومبیلی که یک فرد در نظر دارد خریداری کند، به معیارهائی مانند قیمت، مدل ایمنی، راحتی، میزان مصرف سوخت، قابلیت اطمینان و غیره بستگی دارد، اینها مسائل شخصی بودند. در زمینه مسائل سازمانی، در انتخاب استراتژی یک سازمان معیارهائی از قبیل میزان درآمد سازمان طی یک دوره؛ قیمت سهام سازمان، سهم بازاری، تصویر سازمان در جامعه و... می توانند مهم باشند. این مدل ها ابزاری مؤثر برای حل مسائل انتخاب پیچیده است که در آن ها معیارهای کیفی و کمی گوناگونی برای انتخاب گزینه مناسب وجود دارد. شناسایی دقیق معیارها اغلب مشکل و با ابهامات فروانی روبرو است، روش MCDM ابتدا این معیارها را کمی می کند، وسپس کل امتیازات هر واحد تصمیم گیری را محاسبه و به تصمیم گیرندگان کمک می کند تا یک گزینه مطلوب را پیدا کنند. ارزیابی یک تهیه کننده نیز بر اساس چنین معیارهای کیفی انجام می شود. بنابراین ، مدل MCDM می تواند ابزاری مؤثر برای ارزیابی تأمین کنندگان در نظر گرفته شود. برخی از روشهای متداول تصمیم گیری چند معیاره عبارتند از:TOPSIS ، AHP ، ANP ، FANP ، FAHP ، تحلیل پوششی داده ها (DEA) و DEA فازی.

استفاده از هر روش تصمیم گیری شامل تجزیه و تحلیل عددی گزینه ها به سه مرحله نیاز دارد:

مرحله ۱) مشخص کردن گزینه ها و معیارهای مربوطه.

مرحله ۲) مقداردهی عددی به هر معیار با توجه به میزان تاثیر آن.

مرحله ۳) انتخاب یک روش مناسب برای ارزیابی گزینه ها بر اساس معیارهای مختلف و انتخاب گزینه مناسب.

با توجه به ابهامی که در بیان مقدار معیارها برای هر گزینه وجود دارد از قبیل: خوب، ضعیف، مهم، خیلی مهم و غیره. این چنین مفاهیمی مبهم هستند و برای تعیین آنها بهتر است از نظریه مجموعه های فازی استفاده شود که به خوبی آنها را مدل می کند [۲۳].

نظریه مجموعه های فازی ارائه شده توسط زاده [۲۳] برای مقابله با نوعی از عدم اطمینان به موفقیت بزرگی در زمینه های مختلف دست یافته است. با استفاده از اطلاعات نادرست و مبهم بیشتر و بیشتر در زندگی واقعی، توسیع های مختلف مجموعه فازی توسط برخی محققان ایجاد شده است، از جمله مجموعه فازی شهودی با پیشگامی آتاناسوف، مجموعه فازی نوع ۲ با پیشگامی دوبیوس و پراد و چند توسیع فازی دیگر توسط یاگر معرفی شده است. درکاربردهای عملی، معمولاً تعیین درجه عضویت در مجموعه فازی به دلیل فشار زمان ، کمبود دانش یا داده و بعضی از دلایل دیگر دشوار است.

توسیع هاي مطرح شده در بالا هر یک به نوعی و با ویژگی هاي متفاوت در خصوص درجه عضویت یا عدم عضویت عناصر در مجموعه عمل می کنند. با وجود این توسیع ها از مجموعه فازي، در برخی از مسائل وجود مشکل و خللی احساس می شد، به عنوان مثال در یک مساله تصمیم گیري، سه کارشناس وجود دارند که می خواهند در خصوص میزان تعلق عنصري در مجموعه نظر دهند. یکی از آنها درجه عضویت عنصر در مجموعه را ۰/۲ دیگري درجه عضویت همان عنصر درمجموعه را ۰/۴ و دیگری ۰/۶ تعیین می کند. بعد از ثبت نظرات آن ها مشاهده می شود که اختلاف نظر بسیار زیاد است و به هیچ عنوان نمی شود آن ها را به یک نظر واحد رساند. یا در برخی از مسایل، تصمیم گیرنده در تعیین درجه عضویت یک عنصر در مجموعه دچار تردید است و چندین درجه عضویت را براي یک عنصر درآن مجموعه تعیین می کند. چون مجموعه فازي و توسیع هاي آن، که در بالا به آن ها اشاره شد نمی توانستند به اینگونه از مسایل پاسخ دهند، توسیع جدیدي از مجموعه فازي به نام مجموعه فازي مردد براي پاسخ دادن به این قبیل از مسایل مطرح گردید. تورا [۱۸] و تورا و ناروکاوا [۱۹] مفهوم مجموعه فازی مردد را ارائه دادند که به عضویت اجازه می دهد مجموعه ای از مقادیر ممکن را داشته باشد تا مجموعه فازی مردد بتواند مردد بودن انسان را به صورت عینی تری نسبت به سایر توسیع های کلاسیک مجموعه فازی منعکس نماید. مجموعه های فازی مردد (HFS) ، توسیعی از مجموعه های فازی سنتی (FS) ، به عنوان ابزاری مفید برای مدیریت موقعیت هایی در نظر گرفته می شوند که افراد در بیان تصمیمات خود در مورد اشیاء مربوطه در یک فرایند تصمیم گیری مردد هستند. بسیاری از محققان به استفاده این توسیع از مجموعه های فازی روی آورده اند. به عنوان مثال ، برخی از محققان

تلاش کردند تا اپراتورهای تجمع را بر اساس مجموعه های فازی مردد ارائه نمایند و مجموعه ای از این عملگرها پیشنهاد شده اند. لیائو و همکاران [۹] سازگاری و اجماع رابطه ارجحیت فازی مردد را بررسی کرده و آنها را در تصمیم گیری گروهی اعمال نمودند. علاوه بر این ، برخی از محققان سعی در گسترش مجموعه های فازی مردد داشتند. زو و همکاران [۷] مفهوم مجموعه های فازی مردد دوگانه را ارائه دادند، کیان و همکاران [۱۴] مجموعه های فازی مردد کلی را ارائه دادند، چن و همکاران [۱۷] رابطه ترجیحی مردد بازه ای مقدار را معرفی نمودند، رودریگز و همکاران [۱۶و۱۵] مجموعه اصطلاحات زبانی مبهم برای تصمیم گیری را بررسی کردند، منگ و همکاران [۱۲] تصمیم گیری چند معیاره در محیط فازی مردد را بررسی نمودند، لیائو و همکاران [۱۰] درباره اندازه گیری فاصله و شباهت برای مجموعه اصطلاحات زبانی فازی مردد تحقیق کردند، فرهادی نیا [۲۳] مجموعه فازی مردد را به مجموعه فازی مردد مرتبه بالا توسیع داد. اخیراً ، HFS ها موضوع تحقیقات زیادی بوده اند و به طور گسترده در مورد مسائل MCDM استفاده شده اند. به عنوان مثال ، برخی از کارها روی توسیع اپراتورهای تجمعی، ضریب همبستگی ، و فاصله برای HFS انجام شده است.

تصمیم گیری چند معیاره شامل انتخاب گزینه بهینه ای است که از بین مجموعه متناهی متناسب با چندین معیار ، بهترین رفتار را داشته باشد. در سالهای اخیر ، بسیاری از محققان مسائل MCDM را مورد بررسی قرار داده اند که در آنها مقادیر ارزیابی اعداد فازی، اعداد فازی بازه ای ، اعداد فازی شهودی ، اعداد فازی با فاصله بینشی، اعداد تصادفی، اعداد نوتروسفیک و غیره بوده اند. برای تصمیم گیرندگان، گاهی اوقات دشوار است که دقیقاً یک اولویت را هنگام تلاش برای حل مسائل MCDM با اطلاعات نادرست، نامشخص یا ناقص بیان کنند.

در ادامه چندین کار جدید که در حوزه حل مسائل تصمیم گیری چند معیاره در فازی مردد انجام شده است را مرور می کنیم. گراگ و کایور با تعریف یک فاصله جدید در فضای مجموعه های فازی مردد و با استفاده از عملگرهای تجمعی حل جدیدی برای مسئله تصمیم گیری چند معیاره فازی ارائه نمودند [۷]. ژانگ به کمک دو برنامه ریزی خطی توانست راه حل جدیدی را برای این مسئله در حالتی که وزن معیار ها نیز مجهول باشد ارائه نماید [۲۴]. گیتی نورد و همکاران یک راه حل بر اساس محاسبات نرم برای این مسئله ارائه نمودند که در آنجا، مقادیر اولویت گزینه ها در مقابل

معیارها و وزن های انتخاب شده هر معیار توسط متغیرهای زبانی بیان شده و سپس به عناصر فازی مردد بازه ای مقدار تبدیل می شوند [۶]. ژو و همکاران در [۲۵] یک رویکرد تصمیم گیری چند معیاره که متمرکز است بر ترکیب مجموعه های فازی مردد زبانی با روش استدلال مشهود، را ارائه نمودند. نویسندگان در [۱۱]، ترکیب جدید محدب اعداد فازی چند مردد را معرفی نمودند. سپس برخی از اپراتورهای تجمع مبتنی بر عملکرد محدب، مانند اپراتور میانگین چند منظوره فازی مرتب شده برای میانگین، اپراتور متوسط چند منظوره فازی توزین متوسط، اپراتور متوسط چند منظوره فازی متعادل را مورد بحث قرار داده و در نهایت، براساس اپراتورهای جمع آوری پیشنهادی ، رویکرد جدیدی برای رتبه بندی گزینه ها در مسئله تصمیم گیری چند معیاره فازی مردد ارائه کردند. دینگ و وو به کمک میانگین بن فرونی یک را حل جدید برای مسئله تصمیم گیری چند معیاره در فضای اعداد فازی مردد بازه ای مقدار ارائه نمودند [۲]. همچنین چندین پژوهشگر در [۱،۸،۲۰] به استفاده از روش تاپسیس در حل مسئله تصمیم گیری چندمعیاره در فضای فازی مردد پرداختند.

اندازه هاي آنتروپی، شباهت و فاصله سه مفهوم مهم در نظریه مجموعه فازي هستند که ارتباط تنگاتنگی با یکدیگر دارند. این اندازه ها کاربردهای فراوانی در زمینه هایی همچون تشخیص الگو، تشخیصهاي پزشکی، پردازش تصویر، مسایل تصمیم گیري و غیره دارند. در این مقاله ما ابتدا یک فاصله جدید بر اساس روش درونیابی برای محاسبه فاصله بین دو مجموعه فازی مردد ارائه می نماییم و سپس به کمک آن شروع به حل مسئله تصمیم گیری چندمعیاره فازی می کنیم. در بخش ۲ این مقاله ما برخی از مفاهیم اولیه را مطرح می کنیم. در بخش ۳ فاصله پیشنهادی مبتنی بر روش درونیابی را معرفی می کنیم. بخش ۴ شامل مثال های نظری وکاربردی برای مساله مورد بحث می باشند و نهایتا در بخش ۵ با نتیجه گیری مقاله را به پایان می رسد.

۲ مفاهیم اولیه

در ادامه ، ما به طور خلاصه برخی مفاهیم اساسی و قوانین عملیاتی اساسی مربوط به مجموعه های فازی مردد را شرح می دهیم.

تعریف ۱.۲. مجموعه مرجع را در نظر بگیرید. یک HFS، مجموعه مقادیری از تابعی میباشد که وقتی روی X به کار میرود، یک زیرمجموعه از $[۰,۱]$ را به ما بازمیگرداند. خیا و خو در [۲۱] برای درک بهتر، HFS را با استفاده نمادگذاری زیر بیان کردند:

$$H = \{\langle x, h_H(x)\rangle | x \in X\} \quad (۱)$$

که در آن $h_H(x)$ مجموعهای از چندین مقدار در $[۰,۱]$ است و در واقع نشاندهنده درجه عضویتهای ممکن برای عنصر $x \in X$ نسبت به مجموعه H است. سادهتر است که $h)H(x)$ را عنصر فازی مردد (HFE) بنامیم.

برخی از عملگرهای روی عناصر فازی مردد در زیر آورده شده است:

- $h_۱(x) \cup h_۲(x) = \cup_{\gamma_۱ \in h_۱(x), \gamma_۲ \in h_۲(x)} max\{\gamma_۱, \gamma_۲\}$
- $h_۱(x) \cap h_۲(x) = \cap_{\gamma_۱ \in h_۱(x), \gamma_۲ \in h_۲(x)} min\{\gamma_۱, \gamma_۲\}$
- $(h_۱(x))^\lambda = \cup_{\gamma_۱ \in h_۱(x)} \{\gamma_۱^\lambda\}$
- $\lambda(h_۱(x)) = \cup_{\gamma_۱ \in h_۱(x)} \{۱ - (۱ - \gamma_۱)^\lambda\}$

توابع فاصله در زمینه های مختلف از قبیل تصمیم‌گیری، پیش بینی بازار، و تشخیص الگو مهم هستند. با توجه به نقش مهم توابع اندازه‌گیری فاصله در تصمیم‌گیری نتیجه‌گیری می‌کنیم که آنها باید از جنبه های مختلف، همراه با ویژگی های قابل اجرا، به طور کامل بررسی شوند. تاکنون فاصله های مختلفی برای محاسبه فاصله بین دو مجموعه فازی مردد ارائه شده است که در ادامه به برخی از آنها اشاره می‌کنیم. در آنها $h_M^{\sigma(j)}(x_i)$ و $h_N^{\sigma(j)}(x_i)$ به ترتیب نشان دهنده بزرگترین j امین مقدار در $h_M(x_i)$ و $h_N(x_i)$ هستند و همچنین $l_{x_i} = max\{h_۱(x_i), h_۲(x_i)\}$.

۱. فاصله همینگ نرمال شده [۳]

$$d_{nh}(A,B) = \frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n} |A(x_i) - B(x_i)|$$

۲. فاصله اقلیدسی نرمال شده [۴]

$$d_{ne}(A,B) = (\frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n}|A(x_i) - B(x_i)|^{۲})^{\frac{۱}{۲}}$$

۳. فاصله هاسدروف [۳]

$$d_h(A,B) = max_{۱\leq i\leq n}\{|A(x_i) - B(x_i)|\}$$

۴. فاصله هاسدروف نرمال شده [۳]

$$d_{ghnh}(M,N) = [\frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n} max_j|h_N^{\sigma(j)}(x_i) - h_M^{\sigma(j)}(x_i)|^{\lambda}]^{\frac{۱}{\lambda}}$$

۵. فاصله هاسدروف-اقلیدسی نرمال شده [۳]

$$d_{ghnh}(M,N) = [\frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n} max_j|h_N^{\sigma(j)}(x_i) - h_M^{\sigma(j)}(x_i)|^{۲}]^{\frac{۱}{۲}}$$

۶. فاصله هاسدروف وزن دار شده [۴]

$$d_{ghnh}(M,N) = [\int_a^b w(x) max_j|h_N^{\sigma(j)}(x_i) - h_M^{\sigma(j)}(x_i)|^{\lambda}dx]^{\frac{۱}{\lambda}}$$

روش تاپسیس فازی مردد : روش تاپسیس یک روش تصمیم گیری چند معیاره است که توسط هوانگ و یون پیشنهاد شده است. این روش که یک روش تجمعی جبرانی نیز محسوب می شود مجموعه ای از گزینه ها را با مشخص کردن وزن معیارها، نرمال کردن مقدار هر معیار و محاسبه فاصله بین هر گزینه تا گزینه ایده آل که بالاترین نمره در هر معیار را دارد رتبه بندی می کند. در این

روش جواب های ایده آل قطعی برای حل مسایل تصمیم گیری چند معیاره فازی مردد با اطلاعات وزنی کاملاً مشخص اسفاده می شوند. روند تاپسیس فازی مردد با جواب های ایده آل قطعی به شرح ذیل است:

گام اول : تشکیل ماتریس تصمیم فازی مردد.

گام دوم : تعیین جوابهای ایده آل مثبت و منفی فازی مردد.

گام سوم : محاسبه فاصله هر گزینه از جواب های ایده آل مثبت و منفی فازی مردد.

گام چهارم : محاسبه ضریب نزدیکی هر گزینه.

گام پنجم : رتبه بندی گزینه ها.

۳ فاصله پیشنهادی

در این بخش تابع فاصله جدیدی را به منظور محاسبه فاصله بین دو مجموعه فازی ارائه می نماییم. قبل از معرفی فاصله جدید تعریف زیر که در آن شرایط لازم برای اینکه یک تابع، تابع فاصله باشد را در بردارد بیان می کنیم.

تعریف ۱.۳. فرض کنیم $h_۱$ و $h_۲$ دو مجموعه فازی مردد در $X = \{x_۱, x_۲, \cdots, x_n\}$ باشند.و $d(h_۱, h_۲)$ یک تابع فاصله بین $h_۱$ و $h_۲$ باشد در این صورت باید داشته باشیم:

۱. $\circ \leq d(h_۱, h_۲) \leq ۱$.

۲. $d(h_۱, h_۲) = \circ \Leftrightarrow h_۱ = h_۲$

۳. $d(h_۱, h_۲) = d(h_۲, h_۱)$

تعداد مقادیر در مجموعه های فازی مردد برای هر عضو ممکن است متفاوت با دیگری باشد به این منظور ما ابتدا مقادیر موجود در $h_A(x)$ را به ترتیب کاهشی برای هر عضو مرتب کرده و سپس $m = max\{l(h_A(x)) : x \in A\}$ را در

نظر گرفته و بزرگترین مقدار موجود در $h_A(x)$ را برای هر عضو تا جایی که تعداد اعضای $h_A(x)$ برابر با m شود ادامه می دهیم. البته روند مذکور یک روند خوشبینانه هست و در حالت بدبینانه ما کوچکترین مقدار موجود را تکرار می کنیم.

تعریف ۲.۳. فرض کنیم M و N دو مجموعه فازی مردد در $X = \{x_۱, x_۲, \cdots, x_n\}$ باشند. فاصله بین این دو را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$d(M,N) = \frac{\sum_{i=۱}^{n} \int_{۱}^{l_{x_i}} |f_M^i(u) - f_N^i(u)| du}{\sum_{i=۱}^{n} \int_{۱}^{l_{x_i}} u|f_M^i(u) - f_N^i(u)| du} \qquad (۲)$$

که توابع درونیابی $f_N^i(u)$ و $f_M^i(u)$ درجات عضویت اعضای X هستند.

قضیه ۳.۳. تابع فاصله معرفی شده در رابطه (۱) در تمام شرایط تعریف (۲) صدق می کند.

اثبات. ۱) با توجه به اینکه عبارات داخل انتگرال همگی مثبت هستند لذا واضح است که (M,N)۰. از طرفی با توجه به

$$\circ \leq |f_M^i(u) - f_N^i(u)| \leq u|f_M^i(u) - f_N^i(u)|,$$

لذا بدیهی است که $d(M,N) \leq ۱$.

۲) اگر M و N برابر باشند واضح است که $d(M,N) = \circ$. از طرفی اگر $d(M,N) = \circ$ آنگاه با توجه به اینکه کسری صفر است که صورت آن صفر باشد داریم

$$\sum_{i=۱}^{n} \int_{۱}^{l_{x_i}} |f_M^i(u) - f_N^i(u)| du = \circ \Rightarrow$$
$$|f_M^i(u) - f_N^i(u)| \Rightarrow f_M^i(u) = f_N^i(u),\ i = ۱, \cdots, n,$$

که برابری M و N را نتیجه می دهد.

۳) این مورد با توجه به تعریف رابطه (۱) کاملا واضح است. □

۴ مثال های عددی

در این بخش با ارائه دو مثال عددی کوشش شده است تا کارایی فاصله پیشنهادی جدید در بخش قبل مورد ارزیابی قرار گیرد.

مثال ۱.۴. مسأله تصمیم گیری چند معیاره ای که در آن پنج سیستم آموزشی گروهی $A_i, (i = ۱, ۲, \cdots, ۵)$ مورد ارزیابی قرار می گیرند. در این مسأله تیمی از کارشناسان باید بر طبق چهار معیار، سیستم های آموزشی گروهی را مورد ارزیابی قرار دهند و در نهایت بهترین گزینه را تعیین نمایند. معیارها به صورت زیر داده شده اند. $c_۱$: مطابقت با نظام آموزشی، $c_۲$: بازدهی بالا، $c_۳$: سهولت بیشتر در نحوه کاربرد و $c_۴$: قدرت آموزشی بالا هر معیار دارای اهمیتی متفاوت از بقیه است که البته بر این اساس بردار وزنی آنها به صورت $w = (۰/۲, ۰/۳, ۰/۴, ۰/۱)$ در نظر گرفته شده است.
گام اول: تشکیل ماتریس تصمیم فازی مردد
نتایج ارزیابی هر گزینه نسبت به معیارها به صورت عناصر مردد در جدول زیر ارایه شده اند: قبل

جدول ۱: داده های مساله

	$c_۱$	$c_۲$	$c_۳$	$c_۴$
$A_۱$	$\{۰/۵, ۰/۴, ۰/۳\}$	$\{۰/۶, ۰/۳\}$	$\{۰/۸, ۰/۶, ۰/۴, ۰/۲\}$	$\{۰/۸, ۰/۵\}$
$A_۲$	$\{۰/۷, ۰/۳\}$	$\{۰/۶, ۰/۳, ۰/۲, ۰/۱\}$	$\{۰/۸, ۰/۶\}$	$\{۰/۷, ۰/۴, ۰/۲\}$
$A_۳$	$\{۰/۹, ۰/۷, ۰/۳, ۰/۲\}$	$\{۰/۶, ۰/۵, ۰/۴\}$	$\{۰/۶, ۰/۲\}$	$\{۰/۷, ۰/۶\}$
$A_۴$	$\{۰/۷, ۰/۶, ۰/۵\}$	$\{۰/۴, ۰/۲\}$	$\{۰/۹, ۰/۸\}$	$\{۰/۸, ۰/۵, ۰/۴, ۰/۳\}$
$A_۵$	$\{۰/۳, ۰/۲\}$	$\{۰/۶, ۰/۵, ۰/۲\}$	$\{۰/۸, ۰/۷\}$	$\{۰/۴, ۰/۳, ۰/۱\}$

از گام دوم باید تمام عناصر فازی مردد هم طول گردند. برای همسان سازی طول های عناصر از قاعده های حالت خوش بینانه و بدبینانه استفاده می کنیم. به عنوان مثال برای در حالت خوش

بینانه و بدبینانه به ترتیب داریم

$$\{۰/۵, ۰/۴, ۰/۲\} \longrightarrow \{۰/۲, ۰/۴, ۰/۵, ۰/۵\},$$
$$\{۰/۵, ۰/۴, ۰/۲\} \longrightarrow \{۰/۲, ۰/۲, ۰/۴, ۰/۵\},$$

یشترین طول در میان عناصر فازی مردد مختلف ۴ است.از آنجایی که تمام عناصر فازی مردد باید هم طول گردد، در هر عنصر فازی مردد، کوچکترین عضو را تا جایی اضافه می کنیم تا همه آنها هم طول گردند.

گام دوم: تعیین جواب های ایده آل مثبت و منفی فازی مردد

$$A^+ = \{۱, ۱, ۱, ۱\} = h_{A^+},$$
$$A^- = \{۰, ۰, ۰, ۰\} = h_{A^-},$$

گام سوم: محاسبه فاصله هر گزینه از جواب های ایده آل مثبت و منفی

با استفاده از فرمول های زیر فواصل گزینه ها از جواب های ایده آل مثبت و منفی محاسبه و در جدول پایین نشان داده شده است.

$$d_i^+ = \sum_{j=۱}^{n} = w_j d(A_i, A^+),\ i = ۱, \cdots, m,$$
$$d_i^- = \sum_{j=۱}^{n} = w_j d(A_i, A^-),\ i = ۱, \cdots, m,$$

گام چهارم: محاسبه ضریب نزدیکی نسبی هر گزینه و رتبه بندی گزینه ها

با استفاده از فرمول زیر ضریب نزدیکی نسبی گزینه ها محاسبه می شود.

$$CC_i = \frac{d_i^-}{d_i^- + d_i^+}, \quad i = ۱, ۲, \cdots, m$$

ضریب نزدیکی نسبی هر گزینه و رتبه بندی گزینه ها در جدول ۱ آورده شده است.

جدول ۲: ضریب نزدیکی نسبی گزینه ها و رتبه آنها

	d_i^+		d_i^-		CC_i		رتبه	
	بدبینانه	خوش بینانه	بدبینانه	خوش بینانه	بدبینانه	خوش بینانه	بدبینانه	خوش بینانه
$A_{۱}$	۰/۴۷۷۸	۰/۴۴۰۵	۰/۴۱۲۸	۰/۳۷۹۶	۰/۴۶۳۵	۰/۴۶۲۹	۴	۵
$A_{۲}$	۰/۴۶۵۰	۰/۴۳۵۳	۰/۴۱۶۶	۰/۳۷۵۶	۰/۴۷۲۵	۰/۴۶۳۲	۲	۴
$A_{۳}$	۰/۴۷۹۲	۰/۴۴۰۵	۰/۴۱۲۶	۰/۳۸۲۴	۰/۴۶۲۷	۰/۴۶۴۵	۵	۳
$A_{۴}$	۰/۴۶۳۳	۰/۴۲۴۵	۰/۴۳۱۹	۰/۳۸۹۱	۰/۴۸۲۵	۰/۴۷۸۲	۱	۲
$A_{۵}$	۰/۴۶۵۹	۰/۴۱۶۲	۰/۴۱۷۴	۰/۳۸۶۲	۰/۴۷۲۵	۰/۴۸۱۳	۳	۱

گام پنجم: رتبه بندی گزینه ها

با توجه به نتایج بدست آمده، رتبه بندی گزینه ها در حالت خوشبینانه به صورت زیر است:

$$A_{۵} > A_{۴} > A_{۳} > A_{۲} > A_{۱}$$

لذا بهترین گزینه در این حالت $A_{۵}$ است. و این رتبه بندی در حالت بدبینانه به صورت زیر است:

$$A_{۴} > A_{۲} > A_{۵} > A_{۱} > A_{۳}$$

بهترین گزینه در این حالت $A_{۴}$ است.

هنگام حل این مساله با روش تاپسیس به کمک فاصله همینگ در حالت بد بینانه نتایج زیر به دست آمد:

$$A_{۴} > A_{۲} > A_{۵} > A_{۱} > A_{۳}$$

که در این حالت نیز بهترین گزینه $A_{۴}$ است که مشابه فاصله پیشنهاد شده در این مقاله می باشد. در این ادامه یک مثال کاربردی را با کمک مجموعه های فازی مردد و فاصله تعریف شده حل می نماییم.

مثال ۲.۴. تعیین سیاست مناسب در حوزه انرژی به عنوان عاملی موثر در رشد اقتصادی جوامع شناخته میشود. از این رو انتخاب سیاست صحیح در این حوزه اهمیت بسیاری به ویژه در توسعه اقتصادی و محیطی دارد. فرض کنید بر اساس چهار معیار فناوری($C_۱$)، محیطی($C_۲$)، اجتماعی-سیاسی($C_۳$) و اقتصادی($C_۴$)، که بردار وزن $w = (۰/۱۵, ۰/۳, ۰/۲, ۰/۳۵)$ دارند، پنج پروژه $A_i, (i = ۱, ۲, \cdots, ۵)$ باید مورد بررسی و ارزیابی قرار گیرند. از چند تصمیم گیرنده دعوت شده است تا عملکرد پنج پروژه (گزینه) را ارزیابی کنند. تصمیم گیرندگان باید از میان پنج پروژه بهترین را انتخاب کنند. اگر چه تصمیم گیرندگان مقدار ارزیابی شده از دیدگاه خود را بیان میکنند این امکان وجود دارد که برخی مقادیر تکرار شوند، که البته این مطلب نشانه اهمیت این مقدار بر سایر مقادیر نمیباشد. برای به دست آوردن نتایج منطقی تر بهتر است تصمیم گیرندگان نتیجه ارزیابی خود را به صورت ناشناس ثبت کنند. هر مقدار ثبت شده فقط بدان معناست که یک مقدار ممکن است. ما تنها تمام مقادیر ممکن برای معیارهای گوناگون را ثبت می کنیم. نتایج ارزیابی آنها در جدول تصمیم فازی مردد آورده شده است. قبل از گام دوم باید تمام عناصر فازی

جدول ۳: داده های مساله

	$c_۱$	$c_۲$	$c_۳$	$c_۴$
$A_۱$	$\{۰/۵, ۰/۴, ۰/۳\}$	$\{۰/۹, ۰/۸, ۰/۷, ۰/۱\}$	$\{۰/۵, ۰/۴, ۰/۲\}$	$\{۰/۹, ۰/۶, ۰/۵, ۰/۳\}$
$A_۲$	$\{۰/۵, ۰/۳\}$	$\{۰/۹, ۰/۷, ۰/۶, ۰/۵, ۰/۲\}$	$\{۰/۸, ۰/۶, ۰/۵, ۰/۱\}$	$\{۰/۷, ۰/۳, ۰/۴\}$
$A_۳$	$\{۰/۷, ۰/۶\}$	$\{۰/۹, ۰/۶\}$	$\{۰/۷, ۰/۵, ۰/۳\}$	$\{۰/۶, ۰/۴\}$
$A_۴$	$\{۰/۸, ۰/۷, ۰/۴, ۰/۳\}$	$\{۰/۷, ۰/۴, ۰/۲\}$	$\{۰/۸, ۰/۱\}$	$\{۰/۹, ۰/۸, ۰/۶\}$
$A_۵$	$\{۰/۹, ۰/۷, ۰/۶, ۰/۳, ۰/۱\}$	$\{۰/۸, ۰/۷, ۰/۶, ۰/۴\}$	$\{۰/۹, ۰/۸, ۰/۷\}$	$\{۰/۹, ۰/۷, ۰/۶, ۰/۳\}$

مردد هم طول گردند. برای همسان سازی طول های عناصر از قاعده های حالت خوش بینانه و بدبینانه استفاده می کنیم. به عنوان مثال برای در حالت خوش بینانه و بدبینانه به ترتیب داریم

$$\{۰/۵, ۰/۴, ۰/۳\} \longrightarrow \{۰/۳, ۰/۴, ۰/۵, ۰/۵, ۰/۵\},$$
$$\{۰/۵, ۰/۴, ۰/۳\} \longrightarrow \{۰/۳, ۰/۳, ۰/۳, ۰/۴, ۰/۵\},$$

یشترین طول در میان عناصر فازی مردد مختلف ۵ است.از آنجایی که تمام عناصر فازی مردد باید هم طول گردد، در هر عنصر فازی مردد، کوچکترین عضو را تا جایی اضافه می کنیم تا همه آنها هم طول گردند.

گام دوم: تعیین جواب های ایده آل مثبت و منفی فازی مردد

$$A^+ = \{1, 1, 1, 1, 1\} = h_{A^+},$$
$$A^- = \{0, 0, 0, 0, 0\} = h_{A^-},$$

گام سوم: محاسبه فاصله هر گزینه از جواب های ایده آل مثبت و منفی
با استفاده از فرمول های زیر فواصل گزینه ها از جواب های ایده آل مثبت و منفی محاسبه و در جدول پایین نشان داده شده است.

$$d_i^+ = \sum_{j=1}^{n} = w_j d(A_i, A^+),\ i = 1, \cdots, m,$$
$$d_i^- = \sum_{j=1}^{n} = w_j d(A_i, A^-),\ i = 1, \cdots, m,$$

گام چهارم: محاسبه ضریب نزدیکی نسبی هر گزینه و رتبه بندی گزینه ها
با استفاده از فرمول زیر ضریب نزدیکی نسبی گزینه ها محاسبه می شود.

$$CC_i = \frac{d_i^-}{d_i^- + d_i^+}, \quad i = 1, 2, \cdots, m$$

ضریب نزدیکی نسبی هر گزینه و رتبه بندی گزینه ها در جدول ۳ آورده شده است. گام پنجم:

جدول ۴: ضریب نزدیکی نسبی گزینه ها و رتبه آنها

	d_i^+		d_i^-		CC_i		رتبه	
	بدبینانه	خوش بینانه	بدبینانه	خوش بینانه	بدبینانه	خوش بینانه	بدبینانه	خوش بینانه
A_1	۰/۴۳۲۰	۰/۴۳۹۷	۰/۳۳۵۴	۰/۳۵۸۰	۰/۴۳۷۱	۰/۴۴۸۷	۵	۲
A_2	۰/۴۲۷۷	۰/۴۳۶۹	۰/۳۴۰۰	۰/۳۵۳۷	۰/۴۴۲۹	۰/۴۴۷۴	۳	۳
A_3	۰/۳۹۹۲	۰/۴۱۶۰	۰/۳۶۴۶	۰/۳۶۹۸	۰/۴۷۷۳	۰/۴۷۰۶	۱	۱
A_4	۰/۴۱۶۷	۰/۴۵۲۶	۰/۳۲۸۳	۰/۳۵۴۸	۰/۴۴۰۷	۰/۴۳۹۴	۴	۴
A_5	۰/۴۴۱۳	۰/۴۵۶۴	۰/۳۵۲۲	۰/۳۵۷۰	۰/۴۴۳۹	۰/۴۳۸۹	۲	۵

رتبه بندی گزینه ها
با توجه به نتایج بدست آمده، رتبه بندی گزینه ها در حالت خوشبینانه به صورت زیر است:

$$A_۳ > A_۱ > A_۲ > A_۴ > A_۵$$

لذا بهترین گزینه در این حالت $A_۳$ است. و این رتبه بندی در حالت بدبینانه به صورت زیر است:

$$A_۳ > A_۵ > A_۲ > A_۴ > A_۱$$

بهترین گزینه در این حالت $A_۳$ است.

۵ نتیجه گیری

مجموعه های فازی مردد ابزاری قدرتمند برای مقابله با اطلاعات نادقیق است. با توجه به اینکه اندازه شباهت HFS ها شاخص مهمی در سیستم های هوشمند است و برخی شباهت های موجود مبتنی بر فاصله دارای نقایصی در شناخت الگو و تصمیم گیری است ، بنابراین لازم است اندازه های شباهت و توابع فاصله بیشتر و بیشتری از HFS ها ارائه شود و در کاربردهای واقعی استفاده گردند. در این مقاله با استفاده از تکنیک درونیابی یک تابع فاصله جدید برای این مجموعه ها معرفی گردید. . لازم به ذکر است که اگرچه ممکن است برخی اندازه های مشابهت که بر اساس توابع فاصله بیان می شوند برای استفاده در کاربرهای عملی نیاز به بهبود داشته باشند ، اما ما نمی توانیم آنها را کنار بگذاریم و یا حتی توابع فاصله دیگر را جایگزین آنها کنیم. از آنجا که هر معیار تشابه و تابع فاصله ضرورت وجود و ویژگی های خاص خود را دارد و از طرف محققان برای برآورده سازی معیارها و الزامات مختلف پیشنهاد شده است، بنابراین ، ما در نحوه انتخاب مناسب ترین معیار تشابه با توجه به ویژگی مسئله واقعی در کارهای بعدی بحث خواهیم کرد. هنگامی که افراد باید تصمیم بگیرند و بخواهند گزینه مطلوب را برای یک مسئله خاص MCDM انتخاب کنند، معمولاً هنگام انتخاب بین چندین مقدار عددی دقیق، برای تعیین عواملی مانند یک

شاخص، گزینه و متغیر، با تردید هایی روبرو می شوند. برای رفع این مشکل در این مقاله از مجموعه های فازی مردد استفاده شده است. مجموعه های فازی مردد، توسیعی از مجموعه های فازی، در حل مسائل تصمیم گیری چندمعیاره در مواردی که تصمیم گیرندگان هنگام بیان ترجیحات خود قادر به انتخاب بین چند مقدار نیستند، مفید واقع می شوند. با توجه به اهمیت و کاربردهای گسترده تصمیم گیری چند معیاره در این مقاله سعی شد که با ارائه یک فاصله جدید برای مجموعه های فازی مردد به حل این مسائل پرداخته شود. در پایان نیز با ارائه یک مثال عددی و یک مثال کاربردی کارایی فاصله پیشنهادی مورد ارزیابی قرار گرفت.

مراجع

[1] Akram, M., & Adeel, A. TOPSIS approach for MAGDM based on interval-valued hesitant fuzzy N-soft environment. International Journal of Fuzzy Systems. (2019) 21(3), 993-1009.

[2] Ding, Z., & Wu, Y. An improved interval-valued hesitant fuzzy multi-criteria group decision-making method and applications. Mathematical and Computational Applications (2016) 21(2), 22-34.

[3] Farhadinia, B., Information measures for hesitant fuzzy sets and interval-valued hesitant fuzzy sets. Inf. Sci. (2013) 240, 129–144.

[4] Farhadinia, B., Distance and similarity measures for higher order hesitant fuzzy sets. Knowl.-Based Syst. (2014) 55, 43–48.

[5] Farhadinia, B., Correlation for dual hesitant fuzzy sets and dual interval-valued hesitant fuzzy sets. Int. J. Intell. Syst. (2014) 29, 184–205.

[6] Gitinavard, Hossein, S. Meysam Mousavi, and Behnam Vahdani. Soft computing-based new interval-valued hesitant fuzzy multi-criteria group assessment method

with last aggregation to industrial decision problems. Soft Computing (2017) 21(12), 3247-3265.

[7] Garg, Harish, and Gagandeep Kaur. Algorithm for probabilistic dual hesitant fuzzy multi-criteria decision-making based on aggregation operators with new distance measures. Mathematics (2018) 6(12), 280-295.

[8] Joshi, D., & Kumar, S. Interval-valued intuitionistic hesitant fuzzy Choquet integral based TOPSIS method for multi-criteria group decision making. European Journal of Operational Research (2016) 248(1), 183-191.

[9] Liao, H.C., Xu, Z.C., Xia, M.M., Multiplicative consistency of hesitant fuzzy preference relation and its application in group decision making, Int. J. Inform. Technol. Decis. Mak. (2014) 13, 47–76.

[10] Liao, H.C., Xu, Z.C., Xia, M.M., Distance and similarity measures for hesitant fuzzy linguistic term sets and their application in multi-criteria decision making, Inform. Sci. (2014) 271, 125–142.

[11] Mei, Ye, Juanjuan Peng, and Junjie Yang. ”Convex aggregation operators and their applications to multi-hesitant fuzzy multi-criteria decision-making.” Information (2018) 9(9), 207-217.

[12] Meng, F.Y., Chen, X.H., Zhang, Q. Multi-attribute decision analysis under a linguistic hesitant fuzzy environment, Inform. Sci. (2014) 267, 287–305.

[13] Peng, d.h., Gao, C.Y., Gao, Z.F., Generalized hesitant fuzzy synergetic weighted distance measures and their application to multiple criteria decisionmaking, Appl. Math. Model. (2013) 37, 5837–5850.

[14] Qian, G., Wang, H., Feng, X., Generalized hesitant fuzzy sets and their application in decision support system, Knowl.-Based Syst. (2013) 37, 357–365.

[15] Rodrguez, R.M., Martinez, L., Herrera, F., Hesitant fuzzy linguistic term sets for decision making, IEEE Trans. Fuzzy Syst. (2012) 20, 109–119.

[16] Rodrguez, R.M., Martinez, L., Herrera, F., A group decision making model dealing with comparative linguistic expressions based on hesitant fuzzy linguistic term sets, Inform. Sci. (2013) 241, 28–42.

[17] Rodrıguez, R.M., MartInez, L., Torra, V., Xu, Z.S., Herrera, F.:Hesitant fuzzy sets: state of the art and future directions. Int. J. Intell. Syst. (2014) 29, 495–524.

[18] Torra, V., Hesitant fuzzy sets. Int. J. Intell. Syst. (2010), 25, 529–539.

[19] Torra, V., Narukawa, Y., On hesitant fuzzy sets and decision. In: The 18th IEEE International Conference on Fuzzy Systems, Jeju Island, Kerea (2009), 1378–1382.

[20] Wu, Z., Xu, J., Jiang, X., & Zhong, L. Two MAGDM models based on hesitant fuzzy linguistic term sets with possibility distributions: VIKOR and TOPSIS. Information Sciences. (2019) 473, 101-120.

[21] Xu, Z.S., Xia, M.M., On distance and correlation measures of hesitant fuzzy information. Int. J. Intell. Syst. (2011) 26, 410–425.

[22] Xu, Z.S., Xia, M.M., Distance and similarity measures for hesitant fuzzy sets. Inf. Sci. (2011) 181, 2128–2138.

[23] Zadeh, L.A. Fuzzy sets. Inf. Control (1965), 8, 338–353.

[24] Zhang, Zhiming. Hesitant fuzzy multi-criteria group decision making with unknown weight information. International Journal of Fuzzy Systems, (2017) 19(3), 615-636.

[25] Zhou, Huan, et al. Linguistic hesitant fuzzy multi-criteria decision-making method based on evidential reasoning. International Journal of Systems Science (2016) 47(2), 314-327.

[26] B. O'Neill, *Semi-Riemannian geometry*, Academic Press, 1986.

[27] J. Oprea, *Differential geometry and its applications*, Prentice Hall, second ed., 2004.