سیستم‌های فازی و کاربردها

سال سوم، شماره اول (بهار و تابستان ۱۳۹۹) صص. ۲۴۵ تا ۲۶۰

DOR: 20.1001.1.27174409.1397. 3.1.12.7

مسئله کوله پشتی با ارزش های فازی مردد بازه ای مقدار

مدینه فرنام، مجید دره میرکی*

گروه مهندسی برق، دانشگاه صنعتی شهدای هویزه، دشت آزادگان، خوزستان، ایران

گروه ریاضی، دانشگاه صنعتی خاتم الانبیاء بهبهان، خوزستان

چکیده

در این مطالعه قصد داریم مسئله کوله پشتی صفر و یک که در آن ارزش هریک از آیتم‌ها به صورت مجموعه فازی مردد بازه ای مقدار بیان می‌شود را بررسی نماییم. به این معنا که بیش از یک تصمیم گیرنده در ارزیابی ارزش هر یک از اشیایی که در کوله پشتی قرار گرفته‌اند مشارکت داشته‌اند و علاوه بر این، تصمیم گیرندگان نظرهای خود را به صورت بازه ای بین صفر و یک ثبت نموده‌اند. البته وزن هریک از آیتم‌ها و همین طور وزن کل، برای کوله پشتی به صورت قطعی در نظر گرفته شده است. برای این منظور چارچوب مناسبی را جهت رسیدن به پاسخ مناسب مسئله طراحی کردیم. با تحلیل مناسب ساختار مسئله و شناسائی عوامل موثر در حل آن، روش رتبه بندی و عملگر تجمعی مناسبی برای یافتن پاسخ مسئله انتخاب شد. در نهایت مثالی عددی برای بررسی مدل و روش حل ارائه شده مطرح گردید. نتایج از دیدگاه تصمیم گیرنده خوشبین، بدبین و متعادل به دست آمده است. لذا تنوع مناسبی در انتخاب پاسخ برای تصمیم گیرنده فراهم آمده است.

Mathematics Subject Classification (2010): 62A86 , **Email:** darehmiraki@bkatu.ac.ir.

عبارات و کلمات کلیدی:مسئله کوله پشتی صفر و یک، مجموعه‌های فازی مردد، مجموعه های فازی مردد بازه ای مقدار، رتبه بندی مجموعه های فازی مردد، عملگرهای تجمعی فازی مردد

۱ مقدمه

مسئله کوله پشتی صفر و یک به عنوان نوعی از مسائل بهینه سازی گسسته و ترکیبیاتی مطرح شناخته شده است، که کاربردهای مهمی در مسائل روزمره ی دنیای حقیقی همچون مسئله بارگیری[۱، ۲، ۳]، تخصیص منابع با ظرفیت تعیین شده[۴، ۵، ۶]، انتخاب پروژه[۷] و بسیاری دیگر از مسائل برنامه ریزی مالی و بودجه بندی سرمایه [۸، ۹] دارد. در این نوع مسئله با توجه به در اختیار داشتن مجموعه ای از اشیا که هر کدام وزن و ارزش تعیین شده‌ای دارند به دنبال آن هستیم که زیر مجموعه‌ای از اشیا را برای گنجاندن در کوله پشتی به گونه ای انتخاب کنیم که موجودی کوله پشتی بیشترین ارزش ممکن را داشته باشد و در عین حال محدودیت مربوط به اینکه وزن مجموع اشیا انتخابی باید کمتر یا مساوی مقدار ظرفیت کوله پشتی باشد، نقض نگردد. اگر چه فرمول بندی مسئله ساده به نظر می آید اما حل مسئله همراه با پیچیدگی هایی است که ناشی از رشد نمایی آن می باشد و از این رو به عنوان یک مسئله NP طبقه بندی شده است. روش های قطعی و اکتشافی گوناگونی توسط محققین برای یافتن پاسخ بهینه مورد پژوهش قرار گرفته است. روش های قطعی اغلب براساس روش شاخه و کران و برنامه ریزی پویا می‌باشند[۱۰، ۱۱، ۱۲]. در طی دهه گذشته روش‌های ابتکاری، فرا ابتکاری، ابر ابتکاری و یا روش‌هایی منتج از ترکیب این موارد با سایر تکنیکها، توسط پژوهشگران مختلف برای یافتن پاسخ بهینه مسئله کوله پشتی صفر و یک مورد بررسی قرار گرفته است. به عنوان نمونه عبدالباسط و همکاران [۱۳] یک الگوریتم گرده افشانی گل را به صورت باینری برای حل این نوع مسئله معرفی کردند که در مقایسه با الگوریتم ژنتیک و ازدحام ذرات نتایج بهتری به دست داد. اخیراً الیوس [1] و همکاران [۱۴] از طریق ترکیب تکنیکی هایپر اکتشافی با منطق فازی روشی مطمئن برای یافتن پاسخی مناسب برای مسئله کوله پشتی ارائه دادند. آنها الگوریتم ژنتیک را تا زمانی که به یک متخصص تبدیل شود به کمک قوانین حاکم برسیستم استنتاج فازی تکامل بخشیدند و سپس دانش کسب شده را به عنوان مجموعه قوانینی فازی برای ادامه کار ذخیره کردند.

یکی از دیدگاه‌های مهمی که در مدلسازی مسائل روزمره با آن مواجه هستیم بحث نادقیق بودن داده‌ها می‌باشد. در اغلب مسائل به کمک مجموعه های فازی انطباق پذیری بیشتری برای بیان

[1] Olivas

داده‌های مسئله فراهم می‌آید. در واقع منطق فازی ابزاری با دامنه کاربری گسترده می‌باشد که از زمان معرفی توسط زاده [۱۵] تاکنون رشد چشمگیری در نظریه و کاربرد برای حل مسائل مختلف علوم و مهندسی از خود نشان داده است. اوکادا [2] برای حالتی که ارزش و وزن هر یک از اشیای موجود در لیست، به صورت عددی فازی بیان شده باشد، برای مسئله کوله پشتی چند انتخابی [۱۶] و همین طور چند بعدی [۱۷] روشی را مطرح کردند. یکی از توسیع‌های مجموعه های فازی که در دهه اخیر توجه محقیق بسیاری را به خود جلب نموده است مجموعه های فازی مردد می باشد که توسط تورا [3] و ناراکاوا [۱۸، ۱۹] در آغاز مطرح گردید. این نوع مجموعه ها ابزار کارایی برای توصیف موقعیت‌هایی هستند که تصمیم گیرندگان در بین چند مقدار عضویت برای ارزیابی یک پارامتر یا معیار مردد می‌باشند به گونه‌ای که سایر توسیع‌های اعداد فازی نمی‌توانند برای این موقعیت‌ها مفید واقع شوند. در این مطالعه می‌خواهیم کاربردی از این نوع مجموعه‌ها را در حل مسئله کوله پشتی صفر و یک نشان دهیم. شکل (۱)، چارچوب پژوهش را نشان می‌دهد. این مقاله در بخش‌های زیر سازمان‌دهی شده است.

در بخش ۲: برخی تعاریف، مفاهیم و عملگرهای مورد نیاز مجموعه های فازی مردد آورده شده است.

در بخش ۳: مدل کلاسیک مسئله کوله پشتی صفر و یک را مطرح وسپس آن را به حالتی که ارزش هر یک از اشیای موجود عددی فازی مردد بازه ای مقدار باشد توسعه می دهیم.

در بخش ۴: ابتدا روش رتبه بندی مناسبی برای اولویت بندی بین عناصر فازی مردد بازه ای مقدار انتخاب می شود. سپس با سه رویکرد خوش بینانه، بدبینانه و متعادل (متوسط) پاسخ های بهینه ای برای مسئله ارائه شده در بخش ۳ را می یابیم.

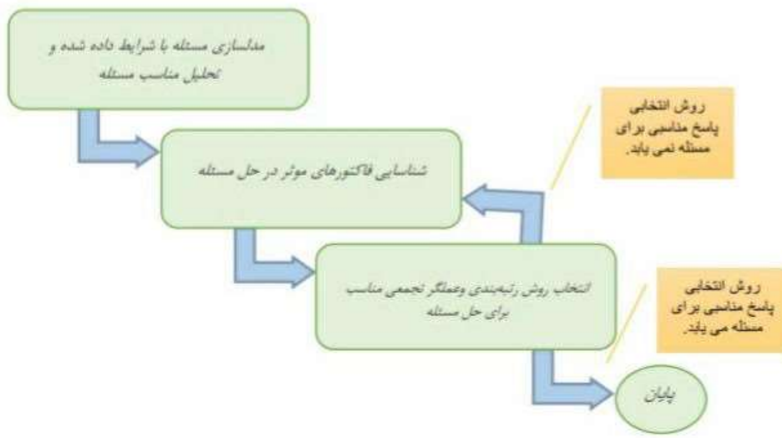
در بخش ۵: با توجه به مطالب ارائه شده در بخش های پیشین مثالی کاربردی مطرح و حل می شود.

در بخش ۶: نتیجه گیری مباحث ذکره شده و برخی از رویکردها برای پژوهش های مفید آتی ارائه می شوند.

---

[2] Okada

[3] Torra



شکل ۱: چارچوب حل مسئله کوله پشتی صفر و یک در محیط فازی مردد

۲ مفاهیم مقدماتی

در این بخش برخی مفاهیم مقدماتی که در ادامه مقاله استفاده می شوند توضیح داده شده اند.

۱.۲ مجموعه های فازی مردد

تعریف ۱.۲. [۱۹] مجموعه ثابت X را در نظر بگیرید، در این صورت یک مجموعه فازی مردد روی X با نماد زیر معرفی می شود.

$$E = \{(x, h_E(x)) | x \in X\} \tag{۱}$$

که درآن $h_E(x)$ یک مجموعه از مقادیر در $[0, 1]$ است و در واقع درجه عضویت های ممکن برای عنصر $x \in X$ را در خصوص تعلق به مجموعه E نشان می دهد. $h(x) = h_E(x)$ عنصر فازی مردد نامیده می شود.

تعریف ۲.۲. [۱۹] دو عنصر فازی مردد $h_1(x)$ و $h_2(x)$ و عدد اسکالر $\lambda \geq 0$ را در نظر

بگیرید، در این صورت:

1) $h_1(x) \oplus h_2(x) = \bigcup_{\gamma_1 \in h_1(x), \gamma_2 \in h_2(x)} \{\gamma_1 + \gamma_2 - \gamma_1\gamma_2\}$,

2) $\lambda \cdot h_1(x) = \bigcup_{\gamma_1 \in h_1(x)} \{1 - (1 - \gamma_1)^{\lambda}\}$.

به ترتیب جمع دو عنصر فازی مردد و ضرب اسکالر دو عنصر فازی مردد را نشان می دهند.

تعریف ۳.۲. [۲۰] تابع رتبه برای عنصر فازی مردد $h(x)$ به صورت زیر تعریف می شود:

$$s(h(x)) = \frac{۱}{l(h(x))} \sum_{\gamma \in h(x)} \gamma \qquad (۲)$$

که در آن $l(h(x))$ تعداد عنصرهای $h(x)$ است.
برای دو عنصر فازی مردد $h_۱(x)$ و $h_۲(x)$، اگر $s\big(h_۱(x)\big) > s\big(h_۲(x)\big)$ باشد آنگاه $h_۱(x) > h_۲(x)$ است و اگر باشد$s\big(h_۱(x)\big) = s\big(h_۲(x)\big)$ آنگاه $h_۱(x) = h_۲(x)$ می باشد.

۲.۲ مجموعه های فازی مردد بازه ای مقدار

در ادامه این بخش به تعریف عملیات جمع، تفریق و ضرب اسکالر برای مجموعه های فازی مردد بازه ای می‌پردازیم.

تعریف ۴.۲. [۲۱] برای دو عدد بازه ای مقدار دلخواه $\bar{a} = [a^l, a^u]$ و $\bar{b} = [b^l, b^u]$ و عدد اسکالر $\lambda \geq ۰$ روابط زیر برقرار می باشند:

1) $\bar{a} = \bar{b} \Leftrightarrow \big(a^l = b^l, a^u = b^u\big)$,

2) $\bar{a} + \bar{b} = \big[a^l + b^l, a^u + b^u\big]$,

3) $\bar{a} - \bar{b} = \big[a^l - b^l, a^u - b^u\big]$,

4) $\lambda \cdot \bar{a} = [\lambda a^l, \lambda a^u]$.

تعریف ۵.۲. [۲۲] مجموعه ثابت X را در نظر بگیرید، در این صورت یک مجموعه فازی مردد بازه ای مقدار روی X با نماد زیر معرفی می شود.

$$E = \{(x, \bar{h}_E(x)) | x \in X\} \tag{۳}$$

که درآن $\bar{h}_E(x)$ یک زیر مجموعه از مقادیر بازه ای در $[۰,۱]$ را نشان می دهد و در واقع درجه عضویت های ممکن برای عنصر $x \in X$ در خصوص تعلق به مجموعه E را نشان می دهد. $\bar{h}(x) = \bar{h}_E(x) = \{[\gamma^l, \gamma^u] | \gamma^l, \gamma^u \in [۰,۱]\}$ عنصر فازی مردد بازه ای مقدار نامیده می شود. علاوه بر این، مجموعه همه عناصر فازی مردد بازه ای مقدار با $\bar{H}$ نشان داده می شود.

تعریف ۶.۲. [۲۲] دو عنصر فازی مردد بازه ای مقدار $\bar{h}_۱ = [\gamma_۱^l, \gamma_۱^u]$ و $\bar{h}_۲ = [\gamma_۲^l, \gamma_۲^u]$ وعدد اسکالر $\lambda \geq ۰$ را در نظر بگیرید، در این صورت

1) $\bar{h}_1(x) \oplus \bar{h}_2(x) = \bigcup_{\gamma_1 \in \bar{h_1}(x), \gamma_2 \in \bar{h_2}(x)} \{[\gamma_1^l + \gamma_2^l - \gamma_1^l \gamma_2^l, \gamma_1^u + \gamma_2^u - \gamma_1^u \gamma_2^u]\}$,

2) $\lambda \cdot \bar{h_1}(x) = \bigcup_{\gamma_1 \in \bar{h_1}(x)} \{[1 - (1 - \gamma_1^l)^\lambda, 1 - (1 - \gamma_1^u)^\lambda]\}$.

که به ترتیب جمع دو عنصر فازی مردد و ضرب اسکالر دو عدد فازی مردد بازه ای را نشان میدهند.

تعریف ۷.۲. [۲۲] تابع رتبه برای عنصر فازی مردد بازه ای $\bar{h}(x)$ به صورت زیر تعریف می شود:

$$s(\bar{h}(x)) = \frac{۱}{l(\bar{h}(x))} \sum_{\gamma \in \bar{h}(x)} \gamma \tag{۴}$$

که در آن $l\bar{h}(x))$ تعداد مقادیر فازی بازهای در است.

برای دو عنصر فازی مردد بازه ای $\bar{h_۱}(x)$ و $\bar{h_۲}(x)$، اگر $s(\bar{h_۱}(x)) \geq s(\bar{h_۲}(x))$ باشد آنگاه $\bar{h_۱}(x) > \bar{h_۲}(x)$ است.

۳ مسئله کوله پشتی با ارزش های فازی مردد بازه ای مقدار

فرض کنید N شی داشته باشیم و بخواهیم از بین آنها تعدادی را برای گذاشتن در کوله پشتی با حداکثر ظرفیت C انتخاب کنیم. علاوه براین فرض کنید jامین $(j = ۱, ۲, \cdots, n)$ شی وزن W_j و ارزش p_j داشته باشد، در این صورت هدف از حل مسئله یافتن ماکسیمم ارزش ممکن برای گذاشتن اشیا درون کوله پشتی است بطوریکه محدودیت ظرفیت نیز رعایت شود. فرم ریاضی مسئله کوله پشتی به صورت زیر تعریف می شود:

$$f = \max \sum_{j=۱}^{n} p_j x_j \quad s.t. \ \sum_{j=۱}^{n} w_j x_j \leq C \ x_j = ۰ \text{ یا } ۱ (j = ۱, ۲, \cdots, n) \quad (۵)$$

که در آن n نشان دهنده تعداد اشیای انتخابی با ارزشهای متناظر $p_j(j = ۱, ۲, \cdots, n)$ در تابع هدف است. واضح است که اگر وسیله ای برای گذاشتن در کوله پشتی انتخاب شود x_j متناظر با آن مقدار یک و در غیر این صورت مقدار صفر را می گیرد.
همانگونه که می دانیم مواجه با عدم قطعیت ها و تردیدها برای دریافت و ثبت اطلاعات در مدلسازی مسائل الهام گرفته از طبیعت امری غیرقابل اجتناب و انکارناپذیر است. مجموعه های فازی مردد برای حالتی که بیش از یک تصمیم گیرنده در بیان ارزش های معیارها، پارامترها و به طور کلی داده های به کار رفته در مدل نقش دارند به عنوان ابزاری کار آمد می تواند عدم قطعیت و تردیدهای مسئله را به خوبی پوشش دهد. از این رو به عنوان کاربردی از این نوع مجموعه ها در مسائل تصمیم گیری و بهینه سازی، مسئله کوله پشتی صفر و یک را با ارزش های فازی مردد بازه ای مقدار به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\tilde{f}^{opt} = \max \sum_{j=۱}^{n} \tilde{p}_j x_j \quad s.t. \ \sum_{j=۱}^{n} w_j x_j \leq C \ x_j = ۰ \text{ یا } ۱ (j = ۱, ۲, \cdots, n) \quad (۶)$$

که در آن $\tilde{p}_j$، مجموعه فازی مردد بازه ای مقدار نظیر jامین عنصر انتخابی است که به صورت زیر نشان داده می شود:

$$\tilde{p}_j = \{\bar{p}_j^{۱}, \bar{p}_j^{۲}, \cdots, \bar{p}_j^{k}\} (j = ۱, ۲, \cdots, n)$$

به این معنا که k_j تصمیم گیرنده نظر خود را به صورت بازه ای فازی برای ارزش گذاری عنصر jام ثبت کرده اند. با توجه به نوع داده های به کار رفته به عنوان ارزش اشیا، مقایسه مناسبی برای انتخاب گزینه ارجح جهت قرار گرفتن در کوله پشتی باید به کار رود.

۴ فرآیند حل مسئله

برای حل مسئله ارائه شده در سه نوع خوش بینانه، بدبینانه و متعادل (متوسط) می توان پاسخ بهینه را یافت. از آنجا که مقایسه مستقیم دو عدد فازی مردد بازه ای مقدار امکان پذیر نیست، انتخاب روش رتبه بندی مناسب برای تعیین اولویت بندی بین این نوع از داده ها اهمیت بسیاری دارد. بنابراین برای نشان دادن عملکردهای مربوط به ارائه پاسخ در هریک از رویکردها، ابتدا روش رتبه بندی بیان شده برای عناصر فازی مردد بازه ای مقدار در [۲۳] را شرح می دهیم.

۱.۴ روشی کارا برای رتبه بندی عناصر فازی بازه ای مقدار

ابتدا تعریف مهمی از درجه امکان آورده میشود که به کمک آن درستی قضیه ۱ نتیجه می شود.

تعریف ۱.۴. [۲۲] دو عدد بازهای مقدار دلخواه $\bar{a}_۱ = [a_۱^l, a_۱^u]$ و $\bar{a}_۲ = [a_۲^l, a_۲^u]$ را در نظر بگیرید. علاوه براین فرض کنید

$$len(\bar{a}_۱) = a_۱^u - a_۱^l, \qquad len(\bar{a}_۲) = a_۲^u - a_۲^l$$

درجه امکان برای اینکه $\bar{a}_۱ \geq \bar{a}_۲$ باشد، به کمک رابطه زیر تعریف می شود:

$$p(\bar{a}_۱ \geq \bar{a}_۲) = \max\left\{۱ - \max\left\{\frac{a_۲^u - a_۱^l}{len(\bar{a}_۱) + len(\bar{a}_۲)}, ۰\right\}, ۰\right\} \qquad (۷)$$

با استفاده از مفهوم درجه امکان، می توان نتیجه گرفت:

$$\bar{a}_۱ \geq \bar{a}_۲ \Leftrightarrow p(\bar{a}_۱ \geq \bar{a}_۲) \geq ۰/۵$$

با استفاده از رابطه (۷) در تعریف فوق قضیه زیر به درستی برقرار می شود.

قضیه ۲.۴. [۲۳] فرض کنید سه عدد فازی بازه ای مقدار $\bar{a}_۱ = [a_۱^l, a_۱^u]$ ، $\bar{a}_۲ = [a_۲^l, a_۲^u]$ و $\bar{a}_۳ = [a_۳^l, a_۳^u]$ داریم، آنگاه روابط زیر برقرار هستند:

1) $0 \leq p(\bar{a}_1 \geq \bar{a}_2) \leq 1,$

2) $p(\bar{a}_1 \geq \bar{a}_2) + p(\bar{a}_2 \geq \bar{a}_1) = 1, p(\bar{a}_1 \geq \bar{a}_1) = 0.5,$

3) $p(\bar{a}_1 \geq \bar{a}_2) = 1 \Leftrightarrow a_1^l \geq a_2^u,$

4) $p(\bar{a}_1 \geq \bar{a}_2) = 0 \Leftrightarrow a_1^u \leq a_2^l,$

5) $p(\bar{a}_1 \geq \bar{a}_2) \geq 0.5 \Leftrightarrow a_1^l + a_1^u \geq a_2^l + a_2^u,$

6) $(p(\bar{a}_1 \geq \bar{a}_2) \geq 0.5, p(\bar{a}_2 \geq \bar{a}_3) \geq 0.5) \Rightarrow p(\bar{a}_1 \geq \bar{a}_3) \geq 0.5.$

در ادامه، روشی بر پایه درجه امکان برای رتبه بندی یک مجموعه از اعداد بازهای ارائه می شود.

فرض کنید می‌خواهیم n بازه ی $\bar{a}_۱, \bar{a}_۲, \cdots, \bar{a}_n$ را رتبه بندی نماییم. هر $\bar{a}_i$ را با تمام $\bar{a}_j$ها $(j = ۱, ۲, \cdots, n)$ به کمک رابطه (۷) مقایسه می کنیم و قرار می دهیم $p_{ij} = p(\bar{a}_i \geq \bar{a}_j)$، آنگاه ماتریس مقایسه زوجها را به صورت $P = (p_{ij})_{n\times n}$ تشکیل می

دهیم. در ادامه نشان می دهیم که ماتریس بولین $Q = (q_{ij})_{n\times n}$ با استفاده از P به صورتی به دست می آید که در آن:

$$q_{ij} = \begin{cases} ۱, & p_{ij} \geq ۰/۵ \\ ۰, & p_{ij} \leq ۰/۵ \end{cases} \quad (۸)$$

ماتریس Q ماتریس رتبه n برای بازه ی $\bar{a}_۱, \bar{a}_۲, \cdots, \bar{a}_n$ می باشد.
برای هر $\bar{a}_i (i = ۱, ۲, \cdots, n)$، فرض کنید $\lambda_i = \sum_{j=۱}^{n} q_{ij}$ باشد، در این صورت بردار رتبه $\lambda = (\lambda_۱, \lambda_۲, \cdots, \lambda_n)$ را به دست می آوریم. آنگاه $\bar{a}_i$ ها، $(i = ۱, ۲, \cdots, n)$ را به ترتیب نزولی مطابق با مقادیر λ_iها مرتب می کنیم.

قضیه ۳.۴. [۲۳]فرض کنید n بازه ی $\bar{a}_۱, \bar{a}_۲, \cdots, \bar{a}_n$ داشته باشیم. علاوه بر این فرض کنیم $P = (p_{ij})_{n\times n}$ و $Q = (q_{ij})_{n\times n}$ به ترتیب متناظر با ماتریس های درجه امکان و رتبه بندی بازههای مفروض باشند. در این صورت اگر $\lambda_i = \sum_{j=۱}^{n} q_{ij}$ باشد آنگاه:

$$\lambda_i \geq \lambda_j \Leftrightarrow p_{ij} \geq ۰/۵$$

قضیه ۳.۴، نشان می دهد که شرایط گفته شده برای رتبه بندی یک مجموعه از بازه ها کافی است. به ویژه برای وقتی که این بازه ها عناصر فازی مردد بازه ای مقدار باشند.

با توجه به مطالب گفته شده در این بخش الگوریتم زیر را می توان برای رتبه بندی عنصر فازی مردد بازه ای مقدار $\bar{h}_۱, \bar{h}_۲, \cdots, \bar{h}_n$ به کار برد. [h] [۱] گام۱: درجه امکان برای هر دو عنصر را طبق رابطه (۷) بیابید و ماتریس درجه امکان $P = (p_{ij})_{n\times n}$ را بنویسید. گام ۲: ماتریس بولین $Q = (q_{ij})_{n\times n}$ را با توجه به رابطه (۸) تشکیل دهید. گام ۳: بردار رتبه $\lambda = (\lambda_۱, \lambda_۲, \cdots, \lambda_n)$ را بنویسید. گام ۴: n عنصر فازی مردد بازه ای مقدار $\bar{h}_۱, \bar{h}_۲, \cdots, \bar{h}_n$ را به صورت نزولی بر اساس مقادیر λ_i ها $(i = ۱, ۲, \cdots, n)$ مرتب کنید.

مثال ۴.۴. [۲۳] فرض کنید سه عنصر فازی مردد بازه ای مقدار $\bar{h}_۱ = [۰, ۰/۰۸]$، $\bar{h}_۲ = [۰/۰۴۸, ۰/۰۹]$ و $\bar{h}_۳ = [۰/۰۱, ۰/۱۳]$ را داشته باشیم و بخواهیم برای انتخاب گزینه مناسب از

بین آنها، اولویت بندی مناسب را به دست آوریم.

برای مرتب کردن این سه عنصر طبق الگوریتم۱ داریم:

گام ۱: ماتریس درجه امکان $P = (p_{ij})_{3\times 3}$ را با به کارگیری رابطه (۷) به صورت زیر می یابیم:

$$P = \begin{bmatrix} 0/5 & 0/2623 & 0/35 \\ 0/7377 & 0/5 & 0/4938 \\ 0/65 & 0/5062 & 0/5 \end{bmatrix}$$

گام ۲: ماتریس بولین $Q = (q_{ij})_{3\times 3}$ را با به کار گیری رابطه (۸) به صورت زیر تشکیل می دهیم.

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

گام ۳: بردار رتبه $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (1, 2, 3)$ را به دست می آوریم.

گام ۴: سه عنصر فازی مردد بازه ای مقدار $\bar{h}_1, \bar{h}_2, \bar{h}_3$ را به صورت $\bar{h}_1 \geq \bar{h}_2 \geq \bar{h}_3$ بر اساس مقادیر λ_iها $(i = 1, 2, 3)$ مرتب می کنیم.

۵ روش حل برای مسئله کوله پشتی با ارزش های فازی مردد بازه ای مقدار

با توجه به مطالب ذکر شده در ابتدای بخش، اکنون می توانیم الگوریتم زیر را برای حل مسئله ارائه شده در رابطه (۶) برای دو حالت بدبینانه و خوش بینانه به کار ببریم. [h] [۱] برای هر $(j = 1, 2, \cdots, n)$، ارزش متناظر آن را که به صورت یک مجموعه فازی مردد بازه ای مقدار مطابق $\tilde{p}_j = \{\bar{p}_j^1, \bar{p}_j^2, \cdots, \bar{p}_j^{k_j}\}$ است در نظر بگیرید. گزینه ارجح برای هر $\tilde{p}_j$ را طبق الگوریتم ۱.۴ بر اساس دیدگاه بدبینانه یا خوش بینانه (برای اطلاع بیشتر به مرجع [۲۰] رجوع شود) بیابید و آن را با $\tilde{p}_j^s$ نام گذاری کنید.

برای انتخاب گزینه ارجح جهت قرارگرفتن در کوله پشتی مراحل زیر را تا زمانی که وزن مجموع اشیای انتخابی کمتر از ظرفیت کوله پشتی است تکرار کنید.

الف) نسبت $\frac{\tilde{p}_j^s}{W_j}$ را برای هر$(j = ۱, ۲, \cdots, n)$ ، بیابید و آن را $\tilde{p}_j^{ss}$ نام گذاری کنید.

ب) با توجه به الگوریتم ۱.۴، اولویت بندی بین عناصر بازه ای $\tilde{p}_j^{ss}$ رابیابید و بر اساس نوع دیدگاه بدبینانه یا خوش بینانه، اشیا را برای ورود به کوله پشتی انتخاب کنید. اگر کمترین وزن موجود در مسئله عددی کمتر از یک باشد، محدودیت مسئله را در معکوس می نیمم وزنهای موجود ضرب می کنیم تا روش رتبه بندی ذکر شده عملکرد کارایی داشته باشد. هر پاسخ شدنی مسئله که ارزش تابع هدف به ازای آن مقداری بین پاسخ بدبینانه و خوشبینانه کسب کند را می توان به عنوان پاسخی توافقی برای مسئله در نظر گرفت. اگر به دنبال یافتن پاسخ با رویکرد متعادل(متوسط) هستیم تنها کافی است که گام ۱، را به صورت زیر تغییر می دهیم:

برای هر $j(j = ۱, ۲, \cdots, n)$، ارزش متناظر آن را که به صورت یک مجموعه فازی مردد بازه ای مقدار مطابق $\tilde{p}_j = \{\bar{p}_j^۱, \bar{p}_j^۲, \cdots, \bar{p}_j^{kj}$ است در نظر بگیرید و حاصل $s(\tilde{p}_j)$ را بر اساس تعریف ۷ و متناظر با هر j بیابید.

۶ مثال عددی

در این بخش برای نشان دادن قابلیت های مدل و رویکردهای حل ارائه شده مثالی عددی ارائه می شود.

مثال ۱.۶. لیستی از اشیا برای گذاشتن در کوله پشتی به ظرفیت حداکثر ۵ واحد داریم. ارزش هر یک از اشیا به صورت مجموعه ی فازی بازه ای مقدار و وزن هر شی به صورت عددی قطعی مطابق جدول (۱) داده شده است. می خواهیم بهترین ارزش ممکن برای کوله پشتی را به دست آوریم.

با استفاده از رویکرد های بدبینانه، خوش بینانه و متعادل گزینه های ارجح را برای قراردادن در کوله پشتی مطابق الگوریتم ۲ و سایر مطالب ارائه شده در بخش پیشین می یابیم. نتایج هر سه رویکرد به این شکل حاصل شده است که در صورت داشتن ظرفیت به ترتیب اشیاء شماره ۴، ۲، ۱

جدول ۱: ارزشها و وزن مربوط به لیست اشیا در مثال ۲

اشیا($j = ۱, ۲, ۳, ۴$)	$\tilde{p}_j$	w_j
۱	$\{[۰/۶, ۰/۷۵], [۰/۴, ۰/۶۵], [۰/۵۵, ۰/۹]\}$	۲
۲	$\{[۰/۳, ۰/۶], [۰/۴, ۰/۸]\}$	۱
۳	$\{[۰/۷۵, ۰/۸۵], [۰/۶, ۰/۸], [۰/۷۸, ۰/۹۳]\}$	۳
۴	$\{[۰/۵۵, ۰/۶۵], [۰/۵۸, ۰/۷۵], [۰/۶, ۰/۸۵]\}$	۱

و ۳ می توانند درکوله پشتی قرار بگیرند. با توجه به اینکه حداکثر ظرفیت مجاز ۵ می باشد اشیاء شماره ۴، ۲ و ۱ نهایتاً انتخاب می شوند.

۷ نتیجه گیری

در این مطالعه در آغاز مسئله کوله پشتی صفر و یک را در حالتی که داده های مربوط به ارزش هر یک از اشیای موجود به صورت یک عنصر فازی مردد بازه ای مقدار باشد در نظر گرفتیم. در ادامه با انتخاب یک روش رتبه بندی مناسب براساس ماتریس درجه امکان و ماتریس بولین اولویت بندی مناسبی برای انتخاب اشیا تعیین کردیم. سپس سه رویکرد برای یافتن پاسخ مناسب برای مسئله مطرح کردیم و در انتها با ذکر مثالی اعتبار سنجی مدل و روش ارائه شده را مورد ارزیابی قرار دادیم. تازگی موضوع پژوهش این امکان را فراهم می آورد تا در آینده به دنبال حل این نوع مسئله در انواع دیگر و با پیچیدگی های بیشتری در مدل از جمله موارد زیر باشیم:

۱- بررسی مسئله در حالتی که تمامی داده ها فازی مردد باشند.

۲- مسئله کوله پشتی صفر و یک چند بعدی با داده های فازی مردد در نظر گرفته شود.

۳- مدل با داده های بیشتر و ابعاد بزرگتر در نظر گرفته شود.

۴- از الگوریتم های ابتکاری، فرا ابتکاری و ابر ابتکاری و یا تکنیک های ترکیبی برای حل مدلهای چند انتخابی و چند بعدی در شرایط فازی مردد استفاده شود.

مراجع

[1] Wascher, G., Schumann, H., An improved typology of cutting and packing problems, Eur. J. Oper. Res. 183 (3) (2007) 1109–1130.

[2] Nawrocki, J., Complak, W., Błazewicz, J., Kopczyn-’ ska, S., Mac’ kowiaki, M.,The knapsack-lightening problem and its application to scheduling HRT tasks,Bull. Polish Acad. Sci.: Tech. Sci. 57 (1) (2009) 71–77.

[3] Kong, M., Tian, P., Kao, Y., A new ant colony optimization algorithm for the multidimensional knapsack problem, Comput. Oper. Res. 35 (8) (2008) 2672–2683.

[4] Granmo, O., Oommen, B,. Myrer, S., Olsen, M., Learning automata-based solutions to the nonlinear fractional knapsack problem with applications tooptimal resource allocation, IEEE Trans Syst. Man Cybern. Part B Cybern. 37 (1) (2007) 166–175.

[5] Vanderster, D., Dimopoulos, N., Parra-Hernandez, R., Sobie, R., Resource allocation on computational grids using a utility model and the knapsackproblem, Future Gener. Comput. Syst. 25 (1) (2009) 35–50.

[6] Deng, Y., Chen, Y., Zhang, Y., Mahadevan, S., Fuzzy Dijkstra algorithm for shortest path problem under uncertain environment, Appl. Soft Comput. 12 (2011) 1231–1237.

[7] Mavrotas, G., Diakoulaki, D., Kourentzis, A., Selection among ranked projects under segmentation, policy and logical constraints, Eur. J. Oper. Res. 187 (1) (2008) 177–192.

[8] Bas, E., A capital budgeting problem for preventing workplace mobbing by using analytic hierarchy process and fuzzy 0-1 bidimensional knapsack model, Expert Syst. Appl. 38 (10) (2011) 12415–12422.

[9] Wilbaut, C., Hanafi, S., Salhi, S., A survey of effective heuristics and their application to a variety of knapsack problems, IMA J. Manage. Math. 19 (3)(2008) 227.

[10] Dudzinski, K., ”A Dynamic Programming Approach to Solving the Multiple Choice Knapsack Problem”, Bull. Polish Acad. Sci., Tech. Sci., No. 32, 1984, PP. 325-332.

[11] Dyer, M.E., Kayal, N., Walker, J., ”A Branch and Bound Algorithm for Solving the Multiple Choice Knapsack Problem”, Journal of Computational and Applied Mathematics, No. 11, 1984, PP. 231-249.

[12] Dyer, M.E., Riha, W.O., Walker, J., ”A Hybrid Dynamic Programming/Branch and Bound Algorithm For The Multiple-Choice Knapsack Problem”, Journal of Computational and Applied Mathematics, No. 58, 1995, PP. 43-54.

[13] Abdel-Basset, M., El-Shahat, D., and El-Henawy, I., ”Solving 0–1 knapsack problem by binary flower pollination algorithm,” Neural Computingand Applications, vol. 31, no. 9, pp. 5477–5495, 2019.

[14] Olivas, F., Amaya, I., Ortiz-Bayliss, J.C., Conant-Pablos, S.E., and Terashima-Marin, H., ”A Fuzzy Hyper-Heuristic Approach for the 0-1 Knapsack Problem,” 2020 IEEE Congress on Evolutionary Computation (CEC), Glasgow, United Kingdom, 2020, pp. 1-8, doi: 10.1109/CEC48606.2020.9185710.

[15] L. A. Zadeh et al., ”Fuzzy sets,” Information and control, vol. 8, no. 3,pp. 338–353, 1965.

[16] Okada, S., Gen, M., ”Fuzzy Multiple Choice Knapsack Problem”, Fuzzy Sets and Systems, No. 67, 1994, PP. 71-80.

[17] Okada, S., Gen, M., ”A Method for Solving Fuzzy Multi-Dimensional 0-1 Knapsack Problems”, Japanese Journal Fuzzy Theory Systems, No. 6, 1995, PP. 687-702.

[18] Torra, V., Narukawa, Y., On hesitant fuzzy sets and decision. The 18-thIEEE International Conference on Fuzzy Systems, Jeju Island, Korea(2009) 1378–1382.

[19] Torra, V., Hesitant Fuzzy Sets, Int. J. Intell. Syst. 25 (2010) 529–539.

[20] Xia MM, Xu ZS, Chen N (2013) Some hesitant fuzzy aggregation operators with their application in group decision making. Group DecisNegot 22:259–279.

[21] Sengupta A, Pal TK (2000) On comparing interval numbers. Eur J Oper Res 127:28–43.

[22] Wei GW, Zhao XF, Li R (2013) Some hesitant interval-valued fuzzy aggregation operators and their applications to multiple attribute decision making. Knowl Based Syst 46:43–53.

[23] Zeng, W., Li, D. Gu, Y. Note on the aggregation operators and ranking of hesitant interval-valued fuzzy elements. Soft Comput23, 8075–8083 (2019). https://doi.org/10.1007/s00500-018-3445-x.