

مروری بر مجموعه‌های فازی فیثاغورسی و معیارهای فاصله و شباهت برای آنها

کامران رضایی، حسن رضایی*

دانشگاه سیستان و بلوچستان، دانشکده ریاضی، آمار و علوم کامپیوتر، گروه علوم کامپیوتر

چکیده

مجموعه‌های فازی فیثاغورسی که توسعه‌ای از مجموعه‌های فازی هستند، ابزاری جدید برای برخورد با ابهام بوده و در زمینه‌های متعددی کاربرد دارند. در این مقاله، به مرور مفاهیم مرتبط با این مجموعه‌ها پرداخته و به دلیل اهمیت فراوان معیارهای فاصله و شباهت در بسیاری از زمینه‌ها همچون تشخیص پزشکی، تشخیص الگو و غیره، معیارهای فاصله و شباهت معرفی شده برای این مجموعه‌ها مورد بررسی قرار می‌گیرند.

۱ سرآغاز:

پس از معرفی مجموعه‌های فازی توسط زاده [۱۴]، این مجموعه‌ها مورد توجه بسیاری از محققین قرار گرفته و توسعه‌های متعددی از آنها معرفی شده‌اند. از جمله این توسعه‌ها می‌توان به مجموعه‌های فازی شهودی [۱] اشاره کرد. یاگر^۱ در [۱۲] دسته‌ی جدیدی از مجموعه‌های فازی را معرفی کرده است که در حقیقت می‌توان آنها را توسعه‌ای از مجموعه‌های فازی شهودی دانست. مجموعه‌های فازی معرفی شده توسط یاگر، مجموعه‌های فازی فیثاغورسی نامگذاری شده‌اند.

^۱Yager

در مجموعه‌های فازی شهودی، متناظر با هر عضو مجموعه مانند x یک درجه عضویت $(\mu(x))$ و یک درجه عدم عضویت $(\nu(x))$ همراه با شرط ۴ در تعریف ۳.۲ در نظر گرفته می‌شود. با اینکه مجموعه‌های فازی شهودی در بسیاری از زمینه‌ها کاربرد دارند، ممکن است شرایطی از ابهام وجود داشته باشد که با استفاده از این مجموعه‌ها نتوان آنها را نمایش داد. به عنوان مثال ممکن است مجموع درجه عضویت و درجه عدم عضویت برای یک عضو بزرگتر از ۱ بوده اما مجموع توان دوم آنها کوچکتر یا مساوی ۱ باشد. چنین محدودیتی انگیزه معرفی مجموعه‌های فازی فیثاغورسی توسط یاگر شد.

پس از معرفی مجموعه‌های فازی فیثاغورسی توسط یاگر، این مجموعه‌های مورد توجه محققان متعددی قرار گرفته و در زمینه‌های مختلفی به کار برده شده‌اند. به عنوان مثال، پنگ^۲ و یانگ^۳ [۶] مفهوم مجموعه‌های فازی فیثاغورسی بازه مقدار را معرفی کرده‌اند. رحمان^۴ و همکاران [۸]، روی برخی اپراتورهای تجمیع هندسی برای مجموعه‌های فازی فیثاغورسی بازه مقدار کار کرده‌اند. پرز-دومینگز^۵ و همکاران [۵] یک بهینه‌سازی چندهدفه براساس تجزیه و تحلیل نسبت^۶ تحت مجموعه‌های فازی فیثاغورسی ارائه کرده‌اند. خان^۷ و همکاران [۴] توسعه‌ای از یک روش تصمیم‌گیری را برای مسائل تصمیم‌گیری چندشاخصه با اطلاعات فازی مورد فیثاغورسی ارائه کرده‌اند. با توجه به اهمیت و کاربرد معیارهای فاصله و شباهت در زمینه‌های مختلف، تحقیقات متعددی به بررسی و معرفی این معیارها برای مجموعه‌های فازی و توسعه‌های آنها پرداخته‌اند [۳، ۱۱، ۱۰، ۲]. در این مقاله به مرور این مجموعه‌ها و مفاهیم مرتبط با آنها پرداخته و همچنین معیارهای فاصله و شباهت برای این مجموعه‌ها مورد بررسی قرار می‌گیرد.

سازماندهی این مقاله به شرح زیر است:

در بخش ۲، مجموعه‌های فازی و فازی شهودی مورد بررسی قرار گرفته‌اند. در بخش ۳، به بررسی مجموعه‌های فازی فیثاغورسی پرداخته شده است. در بخش ۴ به مرور معیارهای فاصله و

²Peng

³Yang

⁴Rahman

⁵Perez-Dominguez

⁶multiobjective optimization on the basis of ratio analysis

⁷Khan

شباهت برای مجموعه‌های فازی، فازی شهودی و فازی فیثاغورسی پرداخته شده است. در بخش ۵ کاربرد معیار شباهت برای مجموعه‌های فازی فیثاغورسی در یک مساله تشخیص پزشکی بررسی شده است. سرانجام بخش ۶ به نتیجه‌گیری اختصاص یافته است.

۲ تعاریف

در این بخش برخی تعاریف مورد نیاز برای بررسی مجموعه‌های فازی فیثاغورسی بررسی می‌شوند.

۱.۲ مجموعه‌های فازی

با فرض اینکه X یک مجموعه شامل عناصر (اشیاء) تحت عنوان مجموعه مرجع باشد، یک مجموعه فازی همچون A در X به صورت زیر تعریف می‌شود:

تعریف ۱.۲. [۱۴] مجموعه فازی A در X به شکل زیر نمایش داده می‌شود:

$$A = \{ \langle x, \mu_A(x) \rangle \mid x \in X \} \quad (۱)$$

که $\mu_A : X \rightarrow [0, 1]$ تابع عضویت مجموعه فازی A نامیده شده و به هر عضو $x \in X$ درجه عضویت $\mu(x)$ را در مجموعه A نسبت می‌دهد.

مثال ۲.۲. با در نظر گرفتن مجموعه‌ی اعداد طبیعی به عنوان مجموعه مرجع، می‌توان مجموعه اعداد طبیعی نزدیک به 10 را به صورت مجموعه فازی A به شکل زیر نمایش داد:

$$A = \{ (7, 0.1), (8, 0.5), (9, 0.8), (10, 1), (11, 0.8), (12, 0.5), (13, 0.1) \} \quad (۲)$$

۲.۲ مجموعه‌های فازی شهودی

در اواسط دهه ۱۹۸۰، آتاناسوف مفهوم مجموعه فازی شهودی را معرفی کرد. برخلاف مجموعه‌های فازی نوع ۱، که در آنها عدم قطعیت تنها با در نظر گرفتن درجه عضویت، مدل‌سازی

می‌شود، در یک مجموعه فازی شهودی، برای هر عضو، درجه عضویت و درجه عدم عضویت که هر دو اعدادی از بازه $[0, 1]$ بوده و مجموع آنها لزوماً برابر با ۱ نمی‌باشد، در نظر گرفته می‌شوند.

تعریف ۳.۲. [۱] یک مجموعه فازی شهودی همچون A در مجموعه مرجع X به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$A = \{ \langle x, \mu_A(x), \nu_A(x) \rangle \mid x \in X \} \quad (۳)$$

که μ_A و ν_A به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\mu_A : X \rightarrow [0, 1]$$

$$\nu_A : X \rightarrow [0, 1]$$

$$0 \leq \mu_A(x) + \nu_A(x) \leq 1 \quad \forall x \in X \quad (۴)$$

اعداد $\mu_A(x)$ و $\nu_A(x)$ به ترتیب درجه عضویت و درجه عدم عضویت عضو $x \in X$ در مجموعه A را نشان می‌دهند.

برای یک مجموعه فازی شهودی مانند A ، اندیس شهودی (حاشیه تردید) x در مجموعه A به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\pi_A(x) = 1 - \mu_A(x) - \nu_A(x) \quad (۵)$$

در واقع، $\pi_A(x)$ فقدان دانش در مورد اینکه x به مجموعه A تعلق دارد یا خیر را نشان می‌دهد. واضح است که برای هر $x \in X$ ، $0 \leq \pi_A(x) \leq 1$ بوده و همچنین، برای یک مجموعه

فازی مانند A' ، معادله زیر برقرار است:

$$\pi_{A'}(x) = 1 - \mu_{A'}(x) - [1 - \mu_{A'}(x)] = 0 \quad (۶)$$

۳ مجموعه‌های فازی فیثاغورسی

یاگر در [۱۲] مفهوم مجموعه‌های فازی فیثاغورسی را به صورت زیر ارائه کرده است:

تعریف ۱.۳. [۱۲] با در نظر گرفتن X به عنوان مجموعه مرجع، یک مجموعه فازی فیثاغورسی همچون P در X به صورت تعریف می‌شود:

$$P = \{ \langle x, (\mu_P(x), \nu_P(x)) \rangle \mid x \in X \} \quad (۷)$$

که $\mu_P : X \rightarrow [0, 1]$ تابع عضویت و $\nu_P : X \rightarrow [0, 1]$ تابع عدم عضویت در مجموعه P را نشان داده به طوری که برای هر $x \in X$ معادله زیر برقرار است:

$$(\mu_P(x))^2 + (\nu_P(x))^2 \leq 1 \quad (۸)$$

برای هر $x \in X$ ، $\pi_P(x)$ درجه تردید $x \in X$ در P نامیده شده و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\pi_P(x) = \sqrt{1 - [(\mu_P(x))^2 + (\nu_P(x))^2]} \quad (۹)$$

در [۱۵]، $P(\mu_P(x), \nu_P(x))$ یک عدد فازی فیثاغورسی نامیده شده و با در نظر گرفتن $\mu_\beta = \mu_P(x)$ و $\nu_\beta = \nu_P(x)$ به صورت $\beta = P(\mu_\beta, \nu_\beta)$ نمایش داده شده است به طوری که $(\mu_\beta)^2 + (\nu_\beta)^2 \leq 1$ و $\pi_\beta = \sqrt{1 - (\mu_\beta)^2 - (\nu_\beta)^2}$ ، $\mu_\beta, \nu_\beta \in [0, 1]$.

تعریف ۲.۳. [۱۵] با در نظر گرفتن سه عدد فازی فیثاغورسی $\beta_\gamma = P(\mu_{\beta_\gamma}, \nu_{\beta_\gamma})$

می‌توان عملگرهای پایه‌ای زیر را تعریف کرد: $\beta = P(\mu_\beta, \nu_\beta)$ و $\beta_\gamma = P(\mu_{\beta_\gamma}, \nu_{\beta_\gamma})$

$$\beta_1 \cup \beta_2 = P(\max\{\mu_{\beta_1}, \mu_{\beta_2}\}, \min\{\nu_{\beta_1}, \nu_{\beta_2}\}) \quad (10)$$

$$\beta_1 \cap \beta_2 = P(\min\{\mu_{\beta_1}, \mu_{\beta_2}\}, \max\{\nu_{\beta_1}, \nu_{\beta_2}\}) \quad (11)$$

$$\beta^c = P(\nu_\beta, \mu_\beta) \quad (12)$$

همچنین در [۱۵] عملگرهای جدید برای اعداد فازی فیثاغورسی به صورت زیر تعریف شده‌اند:

$$\beta_1 \oplus \beta_2 = P(\sqrt{\mu_{\beta_1}^2 + \mu_{\beta_2}^2 - \mu_{\beta_1}^2 \mu_{\beta_2}^2}, \nu_{\beta_1} \nu_{\beta_2}). \quad (13)$$

$$\beta_1 \otimes \beta_2 = P(\mu_{\beta_1} \mu_{\beta_2}, \sqrt{\nu_{\beta_1}^2 + \nu_{\beta_2}^2 - \nu_{\beta_1}^2 \nu_{\beta_2}^2}). \quad (14)$$

$$\lambda \beta = P(\sqrt{1 - (1 - \mu_\beta^2)^\lambda}, (\nu_\beta)^\lambda), \quad \lambda > 0. \quad (15)$$

$$\beta^\lambda = P((\mu_\beta)^\lambda, \sqrt{1 - (1 - \nu_\beta^2)^\lambda}), \quad \lambda > 0. \quad (16)$$

قضیه ۳.۳. [۱۵] برای سه عدد فازی فیثاغورسی $\beta_1 = P(\mu_{\beta_1}, \nu_{\beta_1})$ ، $\beta_2 = P(\mu_{\beta_2}, \nu_{\beta_2})$ و $\beta = P(\mu_\beta, \nu_\beta)$ روابط زیر برقرار هستند:

$$\beta_1 \oplus \beta_2 = \beta_2 \oplus \beta_1. \quad (17)$$

$$\beta_1 \otimes \beta_2 = \beta_2 \otimes \beta_1. \quad (18)$$

$$\lambda(\beta_1 + \beta_2) = \lambda\beta_1 \oplus \lambda\beta_2 \quad \lambda > 0. \quad (19)$$

$$\lambda_1\beta \oplus \lambda_2\beta = (\lambda_1 + \lambda_2)\beta \quad \lambda_1, \lambda_2 > 0. \quad (20)$$

$$(\beta_1 \otimes \beta_2)^\lambda = \beta_1^\lambda \otimes \beta_2^\lambda \quad \lambda > 0. \quad (21)$$

$$\beta_1^\lambda \otimes \beta_2^\lambda = \beta^{(\lambda_1 + \lambda_2)} \quad \lambda_1, \lambda_2 > 0. \quad (22)$$

اثبات. [۱۵] برای سه عدد فازی فیثاغورسی $\beta_1 = P(\mu_{\beta_1}, \nu_{\beta_1})$ ، $\beta_2 = P(\mu_{\beta_2}, \nu_{\beta_2})$ و $\beta = P(\mu_\beta, \nu_\beta)$ می‌توان روابط فوق را به صورت زیر اثبات نمود:

$$\begin{aligned} \beta_1 \oplus \beta_2 &= P(\sqrt{\mu_{\beta_1}^2 + \mu_{\beta_2}^2 - \mu_{\beta_1}\mu_{\beta_2}}, \nu_{\beta_1}\nu_{\beta_2}) \\ &= P(\sqrt{\mu_{\beta_2}^2 + \mu_{\beta_1}^2 - \mu_{\beta_2}\mu_{\beta_1}}, \nu_{\beta_2}\nu_{\beta_1}) = \beta_2 \oplus \beta_1 \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \beta_1 \otimes \beta_2 &= P(\mu_{\beta_1}\mu_{\beta_2}, \sqrt{\nu_{\beta_1}^2 + \nu_{\beta_2}^2 - \nu_{\beta_1}\nu_{\beta_2}}) \\ &= P(\mu_{\beta_2}\mu_{\beta_1}, \sqrt{\nu_{\beta_2}^2 + \nu_{\beta_1}^2 - \nu_{\beta_2}\nu_{\beta_1}}) = \beta_2 \otimes \beta_1 \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned}
 \lambda(\beta_\gamma + \beta_\tau) &= \lambda P(\sqrt{\mu_{\beta_\gamma}^\gamma + \mu_{\beta_\tau}^\tau - \mu_{\beta_\gamma}^\gamma \mu_{\beta_\tau}^\tau}, \nu_{\beta_\gamma} \nu_{\beta_\tau}) \\
 &= P(\sqrt{1 - (1 - \mu_{\beta_\gamma}^\gamma)^\lambda (1 - \mu_{\beta_\tau}^\tau)^\lambda}, (\nu_{\beta_\gamma} \nu_{\beta_\tau})^\lambda) \\
 &= P(\sqrt{1 - (1 - (\mu_{\beta_\gamma}^\gamma + \mu_{\beta_\tau}^\tau - \mu_{\beta_\gamma}^\gamma \mu_{\beta_\tau}^\tau))^\lambda}, (\nu_{\beta_\gamma} \nu_{\beta_\tau})^\lambda) \\
 \lambda\beta_\gamma \oplus \lambda\beta_\tau &= P(\sqrt{1 - (1 - \mu_{\beta_\gamma}^\gamma)^\lambda}, (\nu_{\beta_\gamma})^\lambda) \oplus P(\sqrt{1 - (1 - \mu_{\beta_\tau}^\tau)^\lambda}, (\nu_{\beta_\tau})^\lambda) \\
 &= P(\sqrt{1 - (1 - \mu_{\beta_\gamma}^\gamma)^\lambda + 1 - (1 - \mu_{\beta_\tau}^\tau)^\lambda - (1 - (1 - \mu_{\beta_\gamma}^\gamma)^\lambda)(1 - (1 - \mu_{\beta_\tau}^\tau)^\lambda)}, \\
 &\quad (\nu_{\beta_\gamma} \nu_{\beta_\tau})^\lambda) \\
 &= P(\sqrt{1 - (1 - \mu_{\beta_\gamma}^\gamma)^\lambda (1 - \mu_{\beta_\tau}^\tau)^\lambda}, (\nu_{\beta_\gamma} \nu_{\beta_\tau})^\lambda) \\
 &= P(\sqrt{1 - (1 - (\mu_{\beta_\gamma}^\gamma + \mu_{\beta_\tau}^\tau - \mu_{\beta_\gamma}^\gamma \mu_{\beta_\tau}^\tau))^\lambda}, (\nu_{\beta_\gamma} \nu_{\beta_\tau})^\lambda) = \lambda(\beta_\gamma + \beta_\tau)
 \end{aligned}$$

(۲۵)

$$\begin{aligned}
 \lambda_1\beta \oplus \lambda_2\beta &= P(\sqrt{1 - (1 - \mu_\beta^\gamma)^{\lambda_1}}, (\nu_\beta)^{\lambda_1}) \oplus P(\sqrt{1 - (1 - \mu_\beta^\tau)^{\lambda_2}}, (\nu_\beta)^{\lambda_2}) \\
 &= P(\sqrt{1 - (1 - \mu_\beta^\gamma)^{\lambda_1} + 1 - (1 - \mu_\beta^\tau)^{\lambda_2} - (1 - (1 - \mu_\beta^\gamma)^{\lambda_1})(1 - (1 - \mu_\beta^\tau)^{\lambda_2})}, \\
 &\quad (\nu_\beta)^{\lambda_1} (\nu_\beta)^{\lambda_2}) \\
 &= P(\sqrt{1 - (1 - \mu_\beta^\gamma)^{\lambda_1 + \lambda_2}}, (\nu_\beta)^{\lambda_1 + \lambda_2}) = (\lambda_1 + \lambda_2)\beta
 \end{aligned}$$

(۲۶)

$$\begin{aligned}
 (\beta_1 \otimes \beta_2)^\lambda &= (P(\mu_{\beta_1}, \mu_{\beta_2}, \sqrt{\nu_{\beta_1}^\lambda + \nu_{\beta_2}^\lambda - \nu_{\beta_1}^\lambda \nu_{\beta_2}^\lambda}))^\lambda \\
 &= P((\mu_{\beta_1}, \mu_{\beta_2})^\lambda, \sqrt{1 - (1 - (\nu_{\beta_1}^\lambda + \nu_{\beta_2}^\lambda - \nu_{\beta_1}^\lambda \nu_{\beta_2}^\lambda))^\lambda}) \\
 &= P((\mu_{\beta_1}, \mu_{\beta_2})^\lambda, \sqrt{1 - (1 - \nu_{\beta_1}^\lambda)^\lambda (1 - \nu_{\beta_2}^\lambda)^\lambda}) \\
 \beta_1^\lambda \otimes \beta_2^\lambda &= P((\mu_{\beta_1})^\lambda, \sqrt{1 - (1 - \nu_{\beta_1}^\lambda)^\lambda}) \otimes P((\mu_{\beta_2})^\lambda, \sqrt{1 - (1 - \nu_{\beta_2}^\lambda)^\lambda}) \\
 &= P((\mu_{\beta_1}, \mu_{\beta_2})^\lambda, \\
 &\quad \sqrt{1 - (1 - \nu_{\beta_1}^\lambda)^\lambda + 1 - (1 - \nu_{\beta_2}^\lambda)^\lambda - (((1 - \nu_{\beta_1}^\lambda)^\lambda)(1 - (1 - \nu_{\beta_2}^\lambda)^\lambda))}) \\
 &= P((\mu_{\beta_1}, \mu_{\beta_2})^\lambda, \sqrt{1 - (1 - \nu_{\beta_1}^\lambda)^\lambda (1 - \nu_{\beta_2}^\lambda)^\lambda}) = (\beta_1 \otimes \beta_2)^\lambda
 \end{aligned}$$

(۲۷)

$$\begin{aligned}
 \beta^{\lambda_1} \otimes \beta^{\lambda_2} &= P((\mu_\beta)^{\lambda_1}, \sqrt{1 - (1 - \nu_\beta^{\lambda_1})^\lambda}) \otimes P((\mu_\beta)^{\lambda_2}, \sqrt{1 - (1 - \nu_\beta^{\lambda_2})^\lambda}) \\
 &= P((\mu_\beta)^{\lambda_1 + \lambda_2}, \\
 &\quad \sqrt{1 - (1 - \nu_\beta^{\lambda_1})^\lambda + 1 - (1 - \nu_\beta^{\lambda_2})^\lambda - ((1 - (1 - \nu_\beta^{\lambda_1})^\lambda)(1 - (1 - \nu_\beta^{\lambda_2})^\lambda))}) \\
 &= P((\mu_\beta)^{\lambda_1 + \lambda_2}, \sqrt{1 - (1 - \nu_\beta^{\lambda_1 + \lambda_2})^\lambda}) = \beta^{(\lambda_1 + \lambda_2)}
 \end{aligned}$$

(۲۸)

□

تعریف ۴.۳. [۱۵] با فرض اینکه $\beta = P(\mu_\beta, \nu_\beta)$ یک عدد فازی فیثاغورسی باشد، تابع امتیاز β به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$s(\beta) = (\mu_\beta)^\lambda - (\nu_\beta)^\lambda \quad (۲۹)$$

تعریف ۵.۳. [۱۵] با فرض اینکه $\beta_1 = P(\mu_{\beta_1}, \nu_{\beta_1})$ و $\beta_2 = P(\mu_{\beta_2}, \nu_{\beta_2})$ دو عدد فازی

فیثاغورسی و $s(\beta_1)$ و $s(\beta_2)$ به ترتیب امتیازهای این دو عدد باشند، آنگاه روابط زیر برقرار هستند:

$$\text{If } s(\beta_1) < s(\beta_2), \text{ then } \beta_1 < \beta_2 \quad (30)$$

$$\text{If } s(\beta_1) > s(\beta_2), \text{ then } \beta_1 > \beta_2 \quad (31)$$

$$\text{If } s(\beta_1) = s(\beta_2), \text{ then } \beta_1 \sim \beta_2 \quad (32)$$

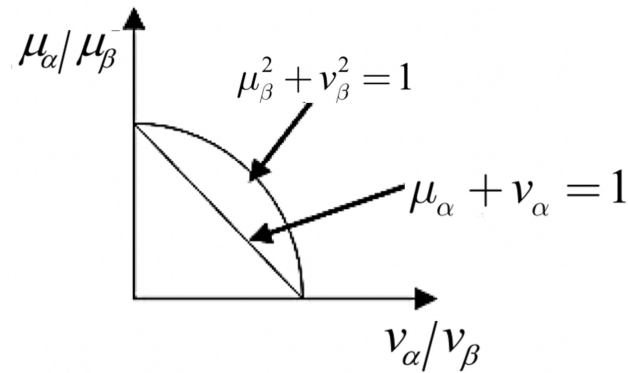
مثال ۶.۳. با در نظر گرفتن دو عدد فازی فیثاغورسی $\beta_1 = P(\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{1}{4})$ و $\beta_2 = P(\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4})$ ، امتیاز این دو عدد به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$s(\beta_1) = (\frac{\sqrt{3}}{4})^2 - (\frac{1}{4})^2 = \frac{1}{4}, \quad s(\beta_2) = (\frac{\sqrt{2}}{4})^2 - (\frac{\sqrt{2}}{4})^2 = 0. \quad (33)$$

در نتیجه $\beta_1 > \beta_2$ می‌باشد.

۱.۳ مقایسه اعداد فازی شهودی و اعداد فازی فیثاغورسی

همان‌طور که بیان شد، شرط محدودیت یک عدد فازی شهودی به صورت $0 \leq \mu_\alpha + \nu_\alpha \leq 1$ بوده و شرط محدودیت یک عدد فازی فیثاغورسی به شکل $(\mu_\alpha)^2 + (\nu_\alpha)^2 \leq 1$ می‌باشد. با توجه به این واقعیت که برای هر نقطه (a, b) ، $a, b \in [0, 1]$ ، اگر شرط $a + b \leq 1$ برقرار باشد آنگاه $a^2 + b^2 \leq 1$ نیز برقرار است، یا اگر در [۱۳] نشان داده است که فضای درجه عضویت فیثاغورسی بزرگتر از فضای درجه عضویت شهودی است. به عبارت دیگر، هر عدد فازی شهودی یک عدد فازی فیثاغورسی است. شکل ۲ به وضوح این نتیجه را نشان می‌دهد.



شکل ۱: مقایسه فضای اعداد فازی شهودی و اعداد فازی فیثاغورسی [۱۵]

۴ معیار فاصله و شباهت

در این بخش برخی معیارهای فاصله برای مجموعه‌های فازی، فازی شهودی و فازی فیثاغورسی مورد بررسی قرار خواهند گرفت.

تعریف ۱.۴. [۹] فاصله بر مجموعه‌ای همچون X ، تابعی است مانند d که به هر زوج از عناصر X عددی حقیقی و نامنفی را تحت خواص زیر نسبت می‌دهد $(x_1, x_2, x_3 \in X)$:

$$d(x_1, x_1) = 0 \quad (\text{بازتابی});$$

$$d(x_1, x_2) = 0 \quad (\text{تفکیک‌پذیری}) \quad \text{اگر و تنها اگر } x_1 = x_2$$

$$d(x_1, x_2) = d(x_2, x_1) \quad (\text{تقارن});$$

$$d(x_1, x_3) \leq d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3) \quad (\text{نامساوی مثلث});$$

۱.۴ معیارهای فاصله بین مجموعه‌های فازی

با در نظر گرفتن دو مجموعه فازی A و B بر مجموعه مرجع $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ معیارهای فاصله متداول بین این دو مجموعه را می‌توان به صورت زیر تعریف کرد [۹]:

• معیار فاصله همینگ:

$$d_H(A, B) = \sum_{i=1}^n |\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)| \quad (۳۴)$$

• معیار فاصله همینگ نرمال:

$$d_{nH}(A, B) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)| \quad (۳۵)$$

• معیار فاصله اقلیدسی:

$$d_E(A, B) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i))^2} \quad (۳۶)$$

• معیار فاصله اقلیدسی نرمال:

$$d_{nE}(A, B) = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i))^2} \quad (۳۷)$$

۲.۴ معیارهای فاصله بین مجموعه‌های فازی شهودی

از آنجایی که می‌توان هر مجموعه فازی مانند A' در X را به صورت یک مجموعه فازی شهودی همچون $A = \{ \langle x, \mu_{A'}(x), 1 - \mu_{A'}(x) \rangle \mid x \in X \}$ نمایش داد، با در نظر گرفتن چنین نمایشی، می‌توان معیارهای فاصله متداول برای مجموعه‌های فازی را به صورت زیر بازنویسی کرد:

به عنوان مثال، معیار فاصله همینگ به شکل زیر تبدیل خواهد شد:

$$\begin{aligned}
 d'_H(A, B) &= \sum_{i=1}^n (|\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)| + |\nu_A(x_i) - \nu_B(x_i)|) \\
 &= \sum_{i=1}^n (|\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)| + |\nu - \mu_A(x_i) - \nu + \mu_B(x_i)|) \\
 &= 2 \sum_{i=1}^n |\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)| \quad (38)
 \end{aligned}$$

به طور مشابه، فاصله‌های همینگ نرمال شده، اقلیدسی و اقلیدسی نرمال شده نیز به صورت زیر بازنویسی می‌شوند:

$$d'_{nH}(A, B) = \frac{1}{n} d'(A, B) = \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n |\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)| \quad (39)$$

$$d'_E(A, B) = \sqrt{2 \sum_{i=1}^n (\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i))^2} \quad (40)$$

$$d'_{nE}(A, B) = \sqrt{\frac{1}{n} d'_E(A, B)} = \sqrt{\frac{2}{n} \sum_{i=1}^n (\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i))^2} \quad (41)$$

به وضوح، روابط زیر برای معیارهای فوق برقرار هستند:

$$\circ \leq d'_H(A, B) \leq 2n \quad (42)$$

$$\circ \leq d'_{nH}(A, B) \leq 2 \quad (43)$$

$$\circ \leq d'_E(A, B) \leq \sqrt{2n} \quad (44)$$

$$\circ \leq d'_{nE}(A, B) \leq \sqrt{2} \quad (45)$$

همان‌طور که نشان داده شد، استفاده از نمایش مجموعه فازی شهودی متناظر با یک مجموعه فازی نوع ۱، به منظور بازنویسی معیارهای فاصله، تنها منجر به ضرب یک مقدار ثابت در معیار فاصله خواهد شد. اما، در ادامه نشان داده می‌شود که در نظر نگرفتن یکی از سه پارامتر ممکن است منجر به نتیجه اشتباه شود.

در واقع، برای دو مجموعه فازی شهودی همچون A و B در مجموعه مرجع $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ ، معیار فاصله همینگ به صورت معادله زیر تعریف می‌شود:

$$d'_{IFS}(A, B) = \sum_{i=1}^n (|\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)| + |\nu_A(x_i) - \nu_B(x_i)| + |\pi_A(x_i) - \pi_B(x_i)|) \quad (46)$$

با در نظر گرفتن رابطه‌های زیر:

$$\pi_A(x_i) = 1 - \mu_A(x_i) - \nu_A(x_i) \quad \text{و} \quad \pi_B(x_i) = 1 - \mu_B(x_i) - \nu_B(x_i) \quad (47)$$

خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} |\pi_A(x_i) - \pi_B(x_i)| &= |1 - \mu_A(x_i) - \nu_A(x_i) - 1 + \mu_B(x_i) + \nu_B(x_i)| \\ &\leq |\mu_B(x_i) - \mu_A(x_i)| + |\nu_B(x_i) - \nu_A(x_i)| \end{aligned} \quad (48)$$

نامساوی ۴۸ نشان می‌دهد که سومین پارامتر در معادله ۴۶ نمی‌تواند نادیده گرفته شود. همچنین فاصله اقلیدسی بین دو مجموعه فازی شهودی A و B در مجموعه مرجع $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ نیز به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$d_{IFS}^{\chi}(A, B) = \left(\sum_{i=1}^n (\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i))^2 + (\nu_A(x_i) - \nu_B(x_i))^2 + (\pi_A(x_i) - \pi_B(x_i))^2 \right)^{\frac{1}{\chi}} \quad (49)$$

با در نظر گرفتن رابطه ۴۷ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} (\pi_A(x_i) - \pi_B(x_i))^2 &= (1 - \mu_A(x_i) - \nu_A(x_i) - 1 + \mu_B(x_i) + \nu_B(x_i))^2 \\ &= (\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i))^2 + (\nu_A(x_i) - \nu_B(x_i))^2 \\ &\quad + 2(\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i))(\nu_A(x_i) - \nu_B(x_i)) \end{aligned} \quad (50)$$

که نشان دهنده‌ی تاثیر پارامتر π بر نتیجه نهایی حاصل از محاسبه فاصله اقلیدسی می‌باشد. با در نظر داشتن معادله‌های ۴۲ تا ۴۵ و به منظور انطباق بیشتر با مفهوم نرمال‌سازی ریاضی، معیارهای فاصله زیر برای دو مجموعه فازی شهودی A و B در مجموعه مرجع $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ تعریف شده‌اند:

$$d_{IFS}^{\chi}(A, B) = \frac{1}{\chi} \sum_{i=1}^n (|\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)| + |\nu_A(x_i) - \nu_B(x_i)| + |\pi_A(x_i) - \pi_B(x_i)|) \quad (51)$$

$$d_{IFS}^{\checkmark}(A, B) = \left(\frac{1}{\checkmark} \sum_{i=1}^n (\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i))^{\checkmark} + (\nu_A(x_i) - \nu_B(x_i))^{\checkmark} + (\pi_A(x_i) - \pi_B(x_i))^{\checkmark} \right)^{\frac{1}{\checkmark}} \quad (52)$$

$$d_{IFS}^{\diamond}(A, B) = \frac{1}{\checkmark n} \sum_{i=1}^n (|\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)| + |\nu_A(x_i) - \nu_B(x_i)| + |\pi_A(x_i) - \pi_B(x_i)|) \quad (53)$$

$$d_{IFS}^{\checkmark}(A, B) = \left(\frac{1}{\checkmark n} \sum_{i=1}^n (\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i))^{\checkmark} + (\nu_A(x_i) - \nu_B(x_i))^{\checkmark} + (\pi_A(x_i) - \pi_B(x_i))^{\checkmark} \right)^{\frac{1}{\checkmark}} \quad (54)$$

۳.۴ معیارهای فاصله بین مجموعه‌های فازی فیثاغورسی

تعریف ۲.۴. [۷] با فرض اینکه M ، N و O سه مجموعه فازی فیثاغورسی بر مجموعه مرجع X باشند، یک معیار فاصله همچون $d(M, N)$ نگاشتی به صورت $d : PFS(X) \times PFS(X) \rightarrow [0, 1]$ است که خواص زیر را دارا باشد:

$$0 \leq d(M, N) \leq 1;$$

$$d(M, N) = d(N, M);$$

$$d(M, N) = 0 \text{ اگر و تنها اگر } M = N;$$

$$d(M, M^c) = 1 \text{ اگر و تنها اگر } M \text{ یک مجموعه قطعی باشد};$$

$$\text{اگر } M \subseteq N \subseteq O, \text{ آنگاه } d(M, N) \leq d(M, O) \text{ و } d(N, O) \leq d(M, O).$$

قضیه ۳.۴. [۷] با در نظر گرفتن دو مجموعه فازی فیثاغورسی M و N ، می‌توان معیارهای فاصله زیر را برای این دو مجموعه تعریف کرد:

$$d_{PFS}^1(M, N) = \frac{1}{2|X|} \sum_{x \in X} (|\mu_M^{\check{}}(x) - \mu_N^{\check{}}(x)| + |\nu_M^{\check{}}(x) - \nu_N^{\check{}}(x)| + |\pi_M^{\check{}}(x) - \pi_N^{\check{}}(x)|); \quad (55)$$

$$d_{PFS}^2(M, N) = \frac{1}{2|X|} \sum_{x \in X} |\mu_M^{\check{}}(x) - \mu_N^{\check{}}(x) - (\nu_M^{\check{}}(x) - \nu_N^{\check{}}(x))|; \quad (56)$$

$$d_{PFS}^3(M, N) = \frac{1}{4|X|} \left(\sum_{x \in X} (|\mu_M^{\check{}}(x) - \mu_N^{\check{}}(x)| + |\nu_M^{\check{}}(x) - \nu_N^{\check{}}(x)| + |\pi_M^{\check{}}(x) - \pi_N^{\check{}}(x)|) + \sum_{x \in X} |(\mu_M^{\check{}}(x) - \nu_M^{\check{}}(x)) - (\mu_N^{\check{}}(x) - \nu_N^{\check{}}(x))| \right); \quad (57)$$

$$d_{PFS}^4(M, N) = \frac{1}{|X|} \sum_{x \in X} (|\mu_M^{\check{}}(x) - \mu_N^{\check{}}(x)| \vee |\nu_M^{\check{}}(x) - \nu_N^{\check{}}(x)|) \quad (58)$$

$$d_{PFS}^5(M, N) = \frac{2}{|X|} \sum_{x \in X} \frac{|\mu_M^{\check{}}(x) - \mu_N^{\check{}}(x)| \vee |\nu_M^{\check{}}(x) - \nu_N^{\check{}}(x)|}{1 + |\mu_M^{\check{}}(x) - \mu_N^{\check{}}(x)| \vee |\nu_M^{\check{}}(x) - \nu_N^{\check{}}(x)|} \quad (59)$$

$$d_{PFS}^6(M, N) = \frac{2 \sum_{x \in X} (|\mu_M^{\check{}}(x) - \mu_N^{\check{}}(x)| \vee |\nu_M^{\check{}}(x) - \nu_N^{\check{}}(x)|)}{\sum_{x \in X} (1 + |\mu_M^{\check{}}(x) - \mu_N^{\check{}}(x)| \vee |\nu_M^{\check{}}(x) - \nu_N^{\check{}}(x)|)} \quad (60)$$

$$d_{PFS}^{\vee}(M, N) = \alpha \frac{\sum_{x \in X} (\mu_M^{\vee}(x) \wedge \mu_N^{\vee}(x))}{\sum_{x \in X} (\mu_M^{\vee}(x) \vee \mu_N^{\vee}(x))} - \beta \frac{\sum_{x \in X} (\nu_M^{\vee}(x) \wedge \nu_N^{\vee}(x))}{\sum_{x \in X} (\nu_M^{\vee}(x) \vee \nu_N^{\vee}(x))},$$

$$\alpha + \beta = 1, \quad \alpha, \beta \in [0, 1]; \quad (61)$$

$$d_{PFS}^{\wedge}(M, N) = 1 - \frac{\alpha}{|X|} \sum_{x \in X} \frac{(\mu_M^{\vee}(x) \wedge \mu_N^{\vee}(x))}{(\mu_M^{\vee}(x) \vee \mu_N^{\vee}(x))} - \frac{\beta}{|X|} \sum_{x \in X} \frac{(\nu_M^{\vee}(x) \wedge \nu_N^{\vee}(x))}{(\nu_M^{\vee}(x) \vee \nu_N^{\vee}(x))},$$

$$\alpha + \beta = 1, \quad \alpha, \beta \in [0, 1]; \quad (62)$$

$$d_{PFS}^{\Delta}(M, N) = 1 - \frac{1}{|X|} \sum_{x \in X} \frac{(\mu_M^{\vee}(x) \wedge \mu_N^{\vee}(x)) + (\nu_M^{\vee}(x) \wedge \nu_N^{\vee}(x))}{(\mu_M^{\vee}(x) \vee \mu_N^{\vee}(x)) + (\nu_M^{\vee}(x) \vee \nu_N^{\vee}(x))}$$

$$(63)$$

$$d_{PFS}^{\circ}(M, N) = 1 - \frac{\sum_{x \in X} ((\mu_M^{\vee}(x) \wedge \mu_N^{\vee}(x)) + (\nu_M^{\vee}(x) \wedge \nu_N^{\vee}(x)))}{\sum_{x \in X} ((\mu_M^{\vee}(x) \vee \mu_N^{\vee}(x)) + (\nu_M^{\vee}(x) \vee \nu_N^{\vee}(x)))} \quad (64)$$

$$d_{PFS}^{\setminus}(M, N) = 1 - \frac{1}{|X|} \sum_{x \in X} \frac{(\mu_M^{\vee}(x) \wedge \mu_N^{\vee}(x)) + (1 - \nu_M^{\vee}(x)) \wedge (1 - \nu_N^{\vee}(x))}{(\mu_M^{\vee}(x) \vee \mu_N^{\vee}(x)) + (1 - \nu_M^{\vee}(x)) \vee (1 - \nu_N^{\vee}(x))}$$

$$(65)$$

$$d_{PFS}^{\bar{\vee}}(M, N) = 1 - \frac{\sum_{x \in X} ((\mu_M^{\vee}(x) \wedge \mu_N^{\vee}(x)) + (1 - \nu_M^{\vee}(x)) \wedge (1 - \nu_N^{\vee}(x)))}{\sum_{x \in X} ((\mu_M^{\vee}(x) \vee \mu_N^{\vee}(x)) + (1 - \nu_M^{\vee}(x)) \vee (1 - \nu_N^{\vee}(x)))}$$

$$(66)$$

اثبات. [۷] برای اثبات اینکه معیارهای معرفی شده در قضیه فوق، معیارهای فاصله هستند باید نشان داد که این معیارها در خواص بیان شده در تعریف ۲.۴ صدق می‌کنند. در اینجا اثبات

فاصله بودن معیار d_{PFS}^1 نشان داده شده و اثبات سایر معیارها نیز در مرجع بیان شده ارائه شده است. اثبات چهار خاصیت اول به آسانی قابل انجام است و اثبات خاصیت پنجم به شکل زیر می باشد:

اگر $M \subseteq N \subseteq O$ آنگاه روابط $\mu_M(x) \leq \mu_N(x) \leq \mu_O(x)$ و $\nu_M(x) \geq \nu_N(x) \geq \nu_O(x)$ برقرار هستند. حال با تعریف $\Delta d = d_{PFS}^1(M, O) - d_{PFS}^1(M, N)$ داریم:

$$\begin{aligned} \Delta d &= \frac{1}{\nu|X|} \sum_{x \in X} (\mu_O^{\checkmark}(x) - \mu_N^{\checkmark}(x) + \nu_N^{\checkmark}(x) - \nu_O^{\checkmark}(x) + |\mu_M^{\checkmark}(x) + \nu_M^{\checkmark}(x) \\ &\quad - (\mu_O^{\checkmark}(x) + \nu_O^{\checkmark}(x))| - |\mu_M^{\checkmark}(x) + \nu_M^{\checkmark}(x) - (\mu_N^{\checkmark}(x) + \nu_N^{\checkmark}(x))|) \geq 0 \end{aligned} \quad (67)$$

در نتیجه $d_{PFS}^1(M, O) \geq d_{PFS}^1(M, N)$.
 به صورت مشابه اثبات می شود که $d_{PFS}^1(M, O) \geq d_{PFS}^1(N, O)$.
 □

۴.۴ معیارهای شباهت بین مجموعه های فازی فیثاغورسی

تعریف ۴.۴ [۷] با فرض اینکه M, N و O سه مجموعه فازی فیثاغورسی بر مجموعه مرجع X باشند، یک معیار شباهت همچون $s(M, N)$ نگاشتی به صورت $s : PFS(X) \times PFS(X) \rightarrow [0, 1]$ است که خواص زیر را دارا باشد:

$$0 \leq s(M, N) \leq 1;$$

$$s(M, N) = s(N, M);$$

$$s(M, N) = 1 \text{ اگر و تنها اگر } M = N;$$

$$s(M, M^c) = 0 \text{ اگر و تنها اگر } M;$$

$$s(M, O) \leq s(M, N) \text{ و } s(M, O) \leq s(N, O) \text{ آنگاه } M \subseteq N \subseteq O \text{ اگر}$$

قضیه ۵.۴ [۷] با در نظر گرفتن دو مجموعه فازی فیثاغورسی M و N ، می‌توان معیارهای شباهت زیر را برای این دو مجموعه تعریف کرد:

$$s_{PFS}^1(M, N) = 1 - \frac{1}{2|X|} \sum_{x \in X} (|\mu_M^{\checkmark}(x) - \mu_N^{\checkmark}(x)| + |\nu_M^{\checkmark}(x) - \nu_N^{\checkmark}(x)| + |\pi_M^{\checkmark}(x) - \pi_N^{\checkmark}(x)|); \quad (68)$$

$$s_{PFS}^{\checkmark}(M, N) = 1 - \frac{1}{2|X|} \sum_{x \in X} |\mu_M^{\checkmark}(x) - \mu_N^{\checkmark}(x) - (\nu_M^{\checkmark}(x) - \nu_N^{\checkmark}(x))|; \quad (69)$$

$$s_{PFS}^{\checkmark\checkmark}(M, N) = 1 - \frac{1}{4|X|} \left(\sum_{x \in X} (|\mu_M^{\checkmark}(x) - \mu_N^{\checkmark}(x)| + |\nu_M^{\checkmark}(x) - \nu_N^{\checkmark}(x)| + |\pi_M^{\checkmark}(x) - \pi_N^{\checkmark}(x)|) + \sum_{x \in X} |(\mu_M^{\checkmark}(x) - \nu_M^{\checkmark}(x)) - (\mu_N^{\checkmark}(x) - \nu_N^{\checkmark}(x))| \right); \quad (70)$$

$$s_{PFS}^{\checkmark\checkmark\checkmark}(M, N) = 1 - \frac{1}{|X|} \sum_{x \in X} (|\mu_M^{\checkmark}(x) - \mu_N^{\checkmark}(x)| \vee |\nu_M^{\checkmark}(x) - \nu_N^{\checkmark}(x)|); \quad (71)$$

$$s_{PFS}^{\Delta}(M, N) = \frac{1}{|X|} \sum_{x \in X} \frac{1 - |\mu_M^{\checkmark}(x) - \mu_N^{\checkmark}(x)| \vee |\nu_M^{\checkmark}(x) - \nu_N^{\checkmark}(x)|}{1 + |\mu_M^{\checkmark}(x) - \mu_N^{\checkmark}(x)| \vee |\nu_M^{\checkmark}(x) - \nu_N^{\checkmark}(x)|} \quad (72)$$

$$s_{PFS}^{\check{}}(M, N) = \frac{\sum_{x \in X} (\lrcorner - |\mu_M^{\check{}}(x) - \mu_N^{\check{}}(x)| \vee |\nu_M^{\check{}}(x) - \nu_N^{\check{}}(x)|)}{\sum_{x \in X} (\lrcorner + |\mu_M^{\check{}}(x) - \mu_N^{\check{}}(x)| \vee |\nu_M^{\check{}}(x) - \nu_N^{\check{}}(x)|)} \quad (۷۳)$$

$$s_{PFS}^{\vee}(M, N) = \alpha \frac{\sum_{x \in X} (\mu_M^{\check{}}(x) \wedge \mu_N^{\check{}}(x))}{\sum_{x \in X} (\mu_M^{\check{}}(x) \vee \mu_N^{\check{}}(x))} + \beta \frac{\sum_{x \in X} (\nu_M^{\check{}}(x) \wedge \nu_N^{\check{}}(x))}{\sum_{x \in X} (\nu_M^{\check{}}(x) \vee \nu_N^{\check{}}(x))},$$

$$\alpha + \beta = \lrcorner, \quad \alpha, \beta \in [0, \lrcorner]; \quad (۷۴)$$

$$s_{PFS}^{\wedge}(M, N) = \frac{\alpha}{|X|} \sum_{x \in X} \frac{(\mu_M^{\check{}}(x) \wedge \mu_N^{\check{}}(x))}{(\mu_M^{\check{}}(x) \vee \mu_N^{\check{}}(x))} + \frac{\beta}{|X|} \sum_{x \in X} \frac{(\nu_M^{\check{}}(x) \wedge \nu_N^{\check{}}(x))}{(\nu_M^{\check{}}(x) \vee \nu_N^{\check{}}(x))},$$

$$\alpha + \beta = \lrcorner, \quad \alpha, \beta \in [0, \lrcorner]; \quad (۷۵)$$

$$s_{PFS}^{\dot{\lrcorner}}(M, N) = \frac{\lrcorner}{|X|} \sum_{x \in X} \frac{(\mu_M^{\check{}}(x) \wedge \mu_N^{\check{}}(x)) + (\nu_M^{\check{}}(x) \wedge \nu_N^{\check{}}(x))}{(\mu_M^{\check{}}(x) \vee \mu_N^{\check{}}(x)) + (\nu_M^{\check{}}(x) \vee \nu_N^{\check{}}(x))} \quad (۷۶)$$

$$s_{PFS}^{\dot{\vee}}(M, N) = \frac{\sum_{x \in X} ((\mu_M^{\check{}}(x) \wedge \mu_N^{\check{}}(x)) + (\nu_M^{\check{}}(x) \wedge \nu_N^{\check{}}(x)))}{\sum_{x \in X} ((\mu_M^{\check{}}(x) \vee \mu_N^{\check{}}(x)) + (\nu_M^{\check{}}(x) \vee \nu_N^{\check{}}(x)))} \quad (۷۷)$$

$$s_{PFS}^{\dot{\lrcorner}\dot{\lrcorner}}(M, N) = \frac{\lrcorner}{|X|} \sum_{x \in X} \frac{(\mu_M^{\check{}}(x) \wedge \mu_N^{\check{}}(x)) + (\lrcorner - \nu_M^{\check{}}(x)) \wedge (\lrcorner - \nu_N^{\check{}}(x))}{(\mu_M^{\check{}}(x) \vee \mu_N^{\check{}}(x)) + (\lrcorner - \nu_M^{\check{}}(x)) \vee (\lrcorner - \nu_N^{\check{}}(x))}$$

$$(۷۸)$$

$$s_{PFS}^{\dot{\vee}\dot{\vee}}(M, N) = \frac{\sum_{x \in X} ((\mu_M^{\check{}}(x) \wedge \mu_N^{\check{}}(x)) + (\lrcorner - \nu_M^{\check{}}(x)) \wedge (\lrcorner - \nu_N^{\check{}}(x)))}{\sum_{x \in X} ((\mu_M^{\check{}}(x) \vee \mu_N^{\check{}}(x)) + (\lrcorner - \nu_M^{\check{}}(x)) \vee (\lrcorner - \nu_N^{\check{}}(x)))}$$

$$(۷۹)$$

۵ کاربرد معیار شباهت بین مجموعه‌های فازی فیثاغورسی در تشخیص پزشکی

در این بخش با استفاده از یک مثال تشخیص پزشکی، کاربرد معیار شباهت بین مجموعه‌های فازی فیثاغورسی نشان داده خواهد شد.

مثال ۱۰۵. [۷] با در نظر گرفتن مجموعه $P = \{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ به عنوان چهار بیمار، فرض کنید یک پزشک باید بیماری هریک از این بیماران را از میان بیماری‌های بیان شده در مجموعه D تشخیص دهد.

$$D = \{\text{تب و ویروسی، مالاریا، حصبه، مشکل معده، مشکل قفسه سینه}\}$$

نشانه‌های بیماران به صورت مجموعه زیر می‌باشد:

$$V = \{\text{تب، سردرد، سرفه، دل درد، درد قفسه سینه}\}$$

جدول ۱ مشخصات هریک از نشانه‌ها را برای بیماری‌ها و جدول ۲ مشخصات نشانه‌ها را برای بیماران نشان می‌دهد. مقادیر هریک از این جدول‌ها به صورت اعداد فازی فیثاغورسی ارائه شده‌اند. با استفاده معیار شباهت s_{PFS}^1 مقدار شباهت بین هر بیماری و هر بیمار محاسبه شده و نتایج تشخیص به صورت برجسته در جدول ۳ نشان داده شده است. همان‌طور که از نتایج پیداست، بیمار p_1 به بیماری مالاریا، بیمار p_2 به مشکل معده، بیمار p_3 به بیماری حصبه و بیمار p_4 به تب و ویروسی مبتلا هستند.

۶ نتیجه‌گیری

مجموعه‌های فازی فیثاغورسی توسعه‌ای جدید از مجموعه‌های فازی هستند که در کاربردهای متعددی مورد استفاده قرار گرفته‌اند. در این مقاله، علاوه بر مرور مختصر تعاریف مجموعه‌های

جدول ۱: مشخصات نشانه‌ها برای بیماری‌ها

تب	سردرد	دل درد	سرفه	درد قفسه سینه	
(۰/۴, ۰/۰)	(۰/۳, ۰/۵)	(۰/۱, ۰/۷)	(۰/۴, ۰/۳)	(۰/۱, ۰/۷)	تب ویروسی
(۰/۷, ۰/۰)	(۰/۲, ۰/۶)	(۰/۰, ۰/۹)	(۰/۷, ۰/۰)	(۰/۱, ۰/۸)	مالاریا
(۰/۳, ۰/۳)	(۰/۶, ۰/۱)	(۰/۲, ۰/۷)	(۰/۲, ۰/۶)	(۰/۱, ۰/۹)	حصبه
(۰/۱, ۰/۷)	(۰/۲, ۰/۴)	(۰/۸, ۰/۰)	(۰/۲, ۰/۷)	(۰/۲, ۰/۷)	مشکل معده
(۰/۱, ۰/۸)	(۰/۰, ۰/۸)	(۰/۲, ۰/۸)	(۰/۲, ۰/۸)	(۰/۸, ۰/۱)	مشکل قفسه سینه

جدول ۲: مشخصات نشانه‌ها برای بیمارها

تب	سردرد	دل درد	سرفه	درد قفسه سینه	
(۰/۸, ۰/۱)	(۰/۶, ۰/۱)	(۰/۲, ۰/۸)	(۰/۶, ۰/۱)	(۰/۱, ۰/۶)	p _۱
(۰/۰, ۰/۸)	(۰/۴, ۰/۴)	(۰/۶, ۰/۱)	(۰/۱, ۰/۷)	(۰/۱, ۰/۸)	p _۲
(۰/۸, ۰/۱)	(۰/۸, ۰/۱)	(۰/۰, ۰/۶)	(۰/۲, ۰/۷)	(۰/۰, ۰/۵)	p _۳
(۰/۶, ۰/۱)	(۰/۵, ۰/۴)	(۰/۳, ۰/۴)	(۰/۷, ۰/۲)	(۰/۳, ۰/۴)	p _۴

جدول ۳: شباهت بین بیماری‌ها و بیمارها

تب ویروسی	مالاریا	حصبه	مشکل معده	مشکل قفسه سینه	
۰/۷۴۶۰	۰/۷۸۲۰	۰/۷۰۰۰	۰/۵۵۴۰	۰/۴۹۶۰	p _۱
۰/۶۴۸۰	۰/۵۷۴۰	۰/۶۹۴۰	۰/۸۵۴۰	۰/۶۱۴۰	p _۲
۰/۶۳۴۰	۰/۵۸۰۰	۰/۶۶۰۰	۰/۵۷۰۰	۰/۵۲۴۰	p _۳
۰/۷۲۸۰	۰/۶۹۸۰	۰/۶۳۰۰	۰/۵۹۶۰	۰/۴۵۲۰	p _۴

فازی و فازی شهودی، به بررسی تعاریف مرتبط با مجموعه‌های فازی فیثاغورسی پرداخته شد. همچنین، ارتباط میان میان مجموعه‌های فازی شهودی و مجموعه‌های فازی فیثاغورسی مورد بررسی قرار گرفت. از طرف دیگر به دلیل اهمیت معیارهای فاصله و شباهت در زمینه‌های مختلف، به بررسی این معیارها برای مجموعه‌های فازی فیثاغورسی پرداخته شد.

مراجع

- [1] Atanassov, K.T. (1986) Intuitionistic fuzzy sets. *Fuzzy Sets and Systems*, **20**, 87-96.
- [2] Chachi, J. and Taheri, S.M. (2013) A unified approach to similarity measures between intuitionistic fuzzy sets. *International Journal of Intelligent Systems*, **28**, 669-685.
- [3] Dubois, D. and Prade H. (1983) On distances between fuzzy points and their use for plausible reasoning. *Proc. Int. Conf. on Systems, Man and Cybernetics*, 300-303.
- [4] Khan, M.S.A., Abdullah, S., Ali, A. and Amin, F. (2019) An extension of VIKOR method for multi-attribute decision-making under Pythagorean hesitant fuzzy setting. *Granular Computing*, **4**, 421-434.
- [5] Pérez-Domínguez, L., Rodríguez-Picón, L.A., Alvarado-Iniesta, A., Luviano Cruz, D. and Xu, Z. (2018) MOORA under Pythagorean fuzzy set for multiple criteria decision making. *Complexity*, **2018**.
- [6] Peng, X. and Yang, Y. (2016) Fundamental properties of interval-valued Pythagorean fuzzy aggregation operators. *International Journal of Intelligent Systems*, **31**, 444-487.

- [7] Peng, X., Yuan, H. and Yang, Y. (2017) Pythagorean fuzzy information measures and their applications. *International Journal of Intelligent Systems*, **32**, 991-1029.
- [8] Rahman, K., Abdullah, S., Shakeel, M., Khan, M.S.A. and Ullah, M. (2017) Interval-valued Pythagorean fuzzy geometric aggregation operators and their application to group decision making problem. *Cogent Mathematics & Statistics*, **4**, 1338638.
- [9] Szmidt, E. (2014) *Distances and similarities in intuitionistic fuzzy sets*, Springer.
- [10] Szmidt, E. and Kacprzyk, J. (2000) Distances between intuitionistic fuzzy sets. *Fuzzy Sets and Systems*, **114**, 505-518.
- [11] Xuecheng, L. (1992) Entropy, distance measure and similarity measure of fuzzy sets and their relations. *Fuzzy Sets and Systems*, **52**, 305-318.
- [12] Yager, R.R. (2013) Pythagorean fuzzy subsets. *2013 joint IFSA world congress and NAFIPS annual meeting (IFSA/NAFIPS)*, Edmonton, Canada, 57-61.
- [13] Yager, R.R. (2013) Pythagorean membership grades in multicriteria decision making. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, **22**, 958-965.
- [14] Zadeh, L.A. (1965) Fuzzy sets. *Information and Control*, **8**, 338-353.
- [15] Zhang, X. and Xu, Z. (2014) Extension of TOPSIS to multiple criteria decision making with Pythagorean fuzzy sets. *International Journal of Intelligent Systems*, **29**, 1061-1078.